ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS SOBRE LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON FORZAMIENTO

CHRISTIAN CAMILO ANGULO RODRIGUEZ

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2014

ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS SOBRE LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON FORZAMIENTO

CHRISTIAN CAMILO ANGULO RODRIGUEZ

Monografía

Trabajo dirigido por:
Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar
Profesor de planta Universidad Distrital

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C.
2014

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, por el apoyo incondicional recibido en el transcurso de mi carrera; al profesor Arturo Sanjuán por su dedicación, acompañamiento y dirección en el desarrollo de este trabajo; a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por mi formación académica y a cada uno de los profesores que hicieron parte de ella.

Resumen

La presente monografía está basada en el artículo *Existence of solutions for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity* de Alfonso Castro y Benjamin Preskill y pretende estudiar algunas temáticas que los autores utilizan para encontrar soluciones débiles a la ecuación de onda semilineal $\Box u = p(x,t) - g(u)$, donde $\Box u \equiv u_{tt} - u_{xx}$ y $x, t \in \mathbb{R}$, con no linealidad asintóticamente lineal, no monótona y sin resonancia. Dichas soluciones están en L^∞ siempre que el forzamiento esté en L^∞.

Palabras claves: Ecuación de onda semilineal, solución débil, operadores compactos, función no plana sobre características, principio de contracciones, espacios de Sobolev, Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt, Puntos fijos.

Abstract

This work is based on the article *Existence of solutions for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity* by Alfonso Castro and Benjamin Preskill and pretends to study some subjects which the authors use to find weak solutions to the semilinear wave equation $\Box u = p(x,t) - g(u)$, where $\Box u \equiv u_{tt} - u_{xx}$ and $x, t \in \mathbb{R}$, with asymptotically linear nonlinearity, non-monotone nonlinearity and no resonance. These solutions are in L^∞ provided that the forcing belong to L^∞.

Keywords: semilinear wave equation, weak solution, compact operators, function not flat on characteristics, contraction principle, Sobolev spaces, Lyapunov-Schmidt Reduction Method, fixed points.

Índice general

1. Introducción

El problema de la vibración de una cuerda se inicia hacia 1727 cuando Johann Bernoulli consideró la vibración de un número finito de masas puntuales igualmente espaciadas a lo largo de una cuerda sin masa. Años más tarde alrededor de 1746 el matemático Jean le Rond D'Alembert estudió la vibración de una cuerda continua, de densidad uniforme, aplicando los cálculos de Bernoulli a n masas y haciendo luego tender n a infinito. Partiendo de los resultados de Bernoulli, que se basaron en las condiciones ideales del fenómeno físico como tal, D'Alambert llegó a la ecuación diferencial parcial llamada *ecuación de onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $u(x,t)$ es la forma de la cuerda en el instante t, como función de la coordenada horizontal x [Stewart, 2008, p.134]. D'Alembert y Euler demostraron que la solución general para esta ecuación tiene la forma

$$u(x,t) = f(x+t) + g(t-x),$$

para f, g funciones arbitrarias y donde $x+t$, $t-x$ son llamadas rectas características. Con el paso de los años, se hace inevitable el avance en las diferentes ramas de la matemática, esto ha permitido desarrollar cada vez más la teoría relacionada con el análisis funcional no lineal, que es la base del presente trabajo. El problema de onda semilineal presentado por [Castro and Preskill, 2010], que se desarrolla en este trabajo es

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = p(x,t) - g(u) \\ u(x,t) = u(x+2\pi, t) \\ u(x,t) = u(x, t+2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

$x, t \in \mathbb{R}$, donde la función g representa la no linealidad y p el forzamiento. El factor no lineal se considera por lo menos en $C^1(\mathbb{R})$, asintóticamente lineal pero no necesariamente monónoto. Este problema se caracteriza porque la función u es considerada periódica en las dos componentes de periodo 2π, esto significa que u es doble periódica. Denotamos $\Box u = u_{tt} - u_{xx}$ y $\Box$ es conocido como el operador de onda u operador D'Alembertiano.

En este trabajo se estudia lo realizado en [Castro and Preskill, 2010], en el cual, tal como lo enuncia el teorema (3.5.1), suponen $\tau \notin \sigma(\Box)$, donde $\sigma(\Box)$ representa el espectro del operador de onda con condición doble periódica, $p(x,t) = cq(x,t) \in L^{\infty}$, φ la solución doble periódica, no plana sobre características de la ecuación $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \tau\varphi = q(x,t)$ y $|c|$ suficientemente grande el problema (1) tiene una solución débil en L^{∞}.

El trabajo está dividido por capítulos de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presentan los preliminares del trabajo, es decir, se realizará la deducción y solución para el problema de onda lineal homogéneo, se precisará la definición de no plano sobre características, se hablará sobre operadores compactos, se presentarán algunos ejemplos de operadores compactos y no compactos, se darán algunas características de los operadores $\Box$, $\Box^{-1}$ y $(\Box + \tau I)^{-1}$. Este último juega un papel fundamental en el trabajo. También se definirá el espectro de un operador, el conjunto de valores propios de un operador, las relaciones que existen entre estos dos conjuntos y por último se calcula el espectro del operador de onda sujeto a condición doble periódica. Lo anterior incluye algunos ejemplos que permiten clarificar la teoría.

En el segundo capítulo se abordará el problema semilineal en el cual estamos interesados, se presentarán las suposiciones que se imponen a los factores de la ecuación, se introducirán los espacios de Sobolev, los cuales están estrechamente relacionados con la noción de solución débil, de lo cual también se habla en este capítulo. Todo enfocado al problema de onda que se está considerando. Por medio del método de reducción de Lyapunov-Schmidt se separan las ecuaciones en dos, una parte en el núcleo y otra en el rango. Se mostrará que la ecuación del núcleo es equivalente a una ecuación integral, se encontrará solución a la ecuación del núcleo usando una versión del principio de contracción de Banach con parámetros y finalmente se encontrará solución a la ecuación del rango usando el Teorema de Punto Fijo de Schauder.

Precisemos algo de notación que será usada en el desarrollo del trabajo.

Notación

$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega\ ;\ u(x) \neq 0\}}$	
$C(\Omega)$	Conjunto de funciones continuas en Ω, su norma es dada por $\lvert u\rvert_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \lvert u(x)\rvert$.
$C^k(\Omega)$	Conjunto de funciones k-veces continuamente diferenciables en Ω.
$C^\infty(\Omega)$	Conjunto de funciones infinitamente diferenciables en Ω con derivadas continuas en Ω.
$C_c(\Omega) = \left\{u \in C(\Omega)\ ;\ \text{supp}(u) \text{ es compacto}\right\}$	Conjunto de funciones continuas con soporte compacto.
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\overline{\Omega})\ ;\ \lvert u(x) - u(y)\rvert \leq M\lvert x - y\rvert^\alpha\right\}$	Espacio de funciones uniformemente Höldereanas de exponente α, con $0 < \alpha \leq 1$, su norma es dada por $\lvert\lvert u\rvert\rvert_\alpha = \lvert u\rvert_\infty + \sup_{x\neq y\in\overline{\Omega}} \dfrac{\lvert u(x) - u(y)\rvert}{\lvert x - y\rvert^\alpha}$.
$l^p(\Omega) = \left\{x = (x_n) \subset \mathbb{C}\ ;\ \sum_{j=1}^{\infty} \lvert x_j\rvert^p < \infty\right\}$	Su norma está dada por $\lvert\lvert x\rvert\rvert = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lvert x_j\rvert^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
$\mathscr{L}(E,F)$	Conjunto de operadores lineales y acotados de E en F. $\mathscr{L}(E,E) = \mathscr{L}(E)$.
$\mathscr{K}(E,F)$	Conjunto de operadores compactos de E en F. $\mathscr{K}(E,E) = \mathscr{K}(E)$.
$L^2(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ \int_\Omega \lvert u\rvert^2 < \infty \text{ c.t.p. en } \Omega\right\}$	Los elementos de este espacio son clases de equivalencia donde $u \equiv v$ si y solo si $u = v$ c.t.p. en Ω. Su norma está dada por $\lvert\lvert u\rvert\rvert_2 = \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y producto interno definido por $\langle u, v\rangle_2 = \int_\Omega uv$.
$L^\infty(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}\ ;\ \exists C \in \mathbb{R}, \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\right\}$	Los elementos de este espacio son clases de equivalencia donde $u \equiv v$ si y solo si $u = v$ c.t.p. en Ω. Su norma está dada por $\lvert\lvert u\rvert\rvert_\infty = \text{ínf}\left\{C\ ;\ \lvert u(x)\rvert \leq C \text{ c.t.p. en } \Omega\right\}$.

2. Preliminares teóricos

En principio hablar de ecuación de onda lineal homogénea nos permitirá entrar en el mundo de las ecuaciones diferenciales parciales de una manera apropiada y consecuente con los objetivos del trabajo. Las rectas características que permiten introducir el concepto de funciones no planas sobre características serán definidas en este capítulo. Se estudiarán las propiedades de los operadores $\Box$, $\Box^{-1}$ y $(\Box + \tau I)^{-1}$, en qué espacios están definidos y las propiedades topológicas con las que están dotados. El conjunto de valores propios resulta de resolver el problema lineal no homogéneo $\Box u = \lambda u$ y por las propiedades de los operadores mencionados anteriormente se podrá caracterizar el espectro del operador de onda $\sigma(\Box)$.

§ 2.1. Ecuación de onda lineal homogénea

2.1.1. Deducción de la ecuación

En esta subsección se seguirán las ideas planteadas en [Kreyszig, 2003, p.90]. Consideremos una cuerda elástica de longitud L

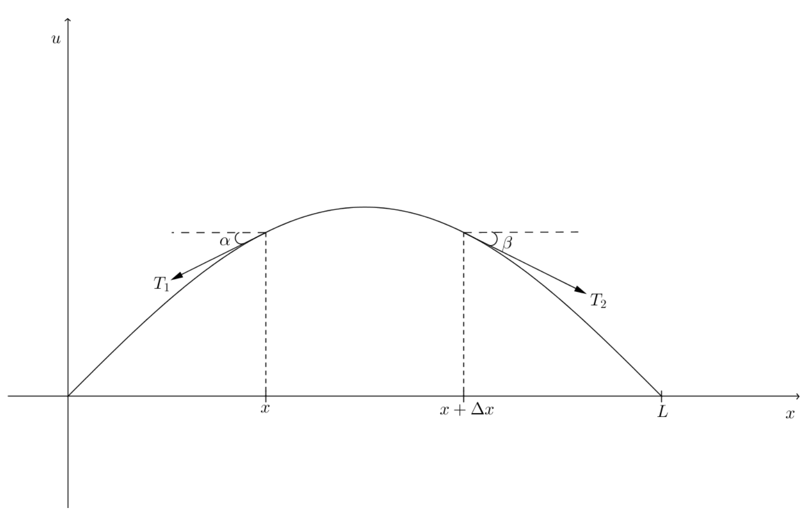

Figura 2.1: Cuerda elástica

Supuestos físicos

- La masa de la cuerda por unidad de longitud es constante (cuerda homogénea).
- La cuerda es perfectamente elástica y no ofrece resistencia alguna a la flexión.
- La tensión causada por el estiramiento de la cuerda antes de fijarla en los extremos es tan grande que puede despreciarse la fuerza gravitacional sobre la cuerda.
- La cuerda realiza pequeños movimientos transversales en un plano vertical, es decir, cada partícula de la cuerda se mueve estrictamente en la dirección vertical y de tal modo que la deflexión y la pendiente en cada punto de la cuerda se mantienen siempre con valores absolutos pequeños.

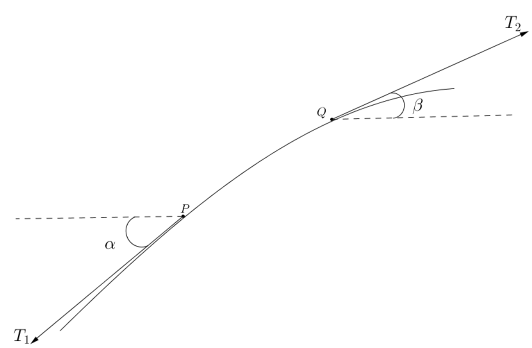

Figura 2.2: Tensiones T_1 y T_2 de la cuerda en los puntos P y Q respectivamente

Tenemos que la tensión es tangencial a la curva en cada punto de ella. Sean T_1 y T_2 las tensiones en los puntos P y Q respectivamente, como lo muestra la figura 2.2, donde tenemos,

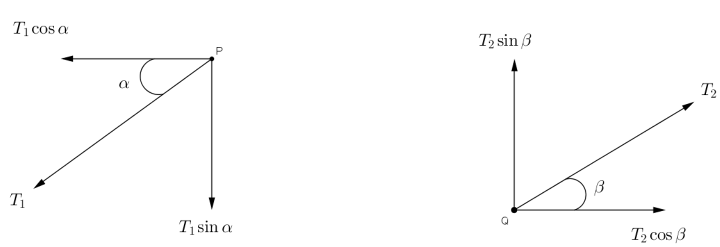

Figura 2.3: Diagramas de fuerzas en los puntos P y Q

Ya que no hay movimientos horizontales las tensiones horizontales son constantes, esto es,

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = cte.$$

En las direcciones verticales y por la segunda ley de Newton tenemos que

$$\begin{aligned}
-T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta &= \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{T_2 \sin\beta}{T} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T} &= \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} &= \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\tan\beta - \tan\alpha &= \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},
\end{aligned}$$

$\tan\alpha$ y $\tan\beta$ son las pendientes de la cuerda en x y $x + \Delta x$ respectivamente, que es,

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \qquad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x &= \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] &= \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

Si hacemos $\Delta x \to 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{con} \qquad c^2 = \frac{\rho}{T}$$

Que es la ecuación de onda unidimensional.

2.1.2. Solución por características

Siguiendo las ideas de [Haberman, 1987, p.423] encontramos soluciones para la ecuación de onda unidimensional que se dedujo anteriormente, considerando $c = 1$. La Ecuación de onda

$$u_{tt} = u_{xx} \tag{2.1}$$

es una ecuación diferencial parcial de segundo orden homogénea, la cual podemos reescribir como

$$u_{tt} - u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

Si hacemos $v = u_t + u_x$ tenemos

$$v_t - v_x = u_{tt} + u_{xt} - (u_{tx} + u_{xx}) = u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Así las ecuaciones

$$v_t - v_x = 0 \tag{2.2}$$

$$u_t + u_x = v \tag{2.3}$$

Son equivalentes a (2.1). Resolviendo (2.2) tenemos

$$\begin{aligned} v_t - v_x &= 0 \\ (1,-1)\cdot \nabla v &= 0 \\ D_{(1,-1)} v &= 0 \end{aligned}$$

Esto es, la derivada direccional de v en dirección del vector $(1,-1)$ es cero, lo que significa que $v(x,t)$ es constante en la dirección de $(1,-1)$. Las rectas paralelas a $(1,-1)$ tienen la forma $x + t = k$ (conocidas como las características), k constante, por tanto la solución $v(x,t)$ será constante sobre cada una de estas rectas. Por lo tanto $v(x,t)$ depende solo de $x + t$, de donde se sigue que

$$v(x,t) = h(x+t)$$

Donde $h \in C^1(\mathbb{R})$ es cualquier función. Para la solución de (2.3), la cual podemos escribir,

$$u_t + u_x = h(x+t) \tag{2.4}$$

Debemos encontrar una solución particular y la solución de la homogénea asociada. Podemos ver que $u_p(x,t) = f(x+t)$ donde $f'(x+t) = \frac{h(x+t)}{2}$ es una solución particular de (2.4), de la misma manera que en la solución de (2.2) encontramos que $u_h(x,t) = g(t-x)$ es solución de la homogénea asociada a (2.4). Así la solución general de (2.1) es

$$u(x,t) = u_p + u_h = f(x+t) + g(t-x),$$

Donde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ son funciones arbitrarias.

§ 2.2. Función no plana sobre características

En [Castro and Preskill, 2010, p.650] presentan la siguiente definición,

Definición 2.2.1. Se dice que $\phi : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es plana sobre las características si

$$\lambda\left(\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ \phi(x, r \pm x) = 0\right\}\right) = 0 \qquad \forall r \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

λ representa la medida de Lebesgue.

Ejemplo 2.2.1. Veamos que $q(x,t) = \sin(x+t) + \sin(t-x)$ satisface (2.5), ,

$$\begin{aligned} q : [0,2\pi] \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\to \sin(x+t) + \sin(t-x) \end{aligned}$$

La gráfica correspondiente se muestra en la figura (2.4),

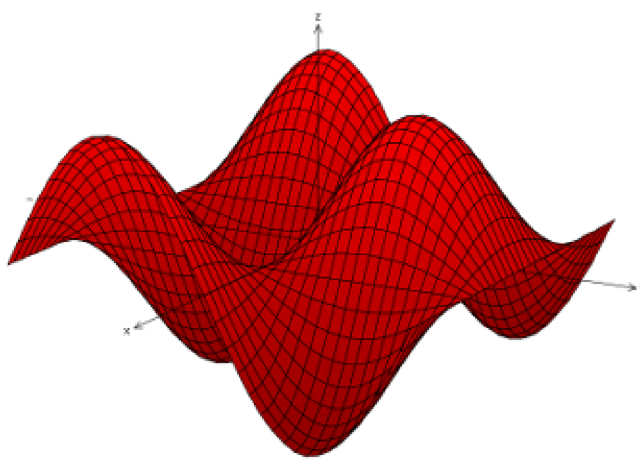

Figura 2.4: gráfica función $q(x,t) = \sin(x+t) + \sin(t-x)$

Se encontrará en primer lugar el conjunto

$$\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ q(x, r \pm x) = 0\right\} = \underbrace{\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ q(x, r+x) = 0\right\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ q(x, r-x) = 0\right\}}_{B}$$

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in [0,2\pi]\ ;\ \sin(2x+r)+\sin(r)=0\} \\
&= \{x \in [0,2\pi]\ ;\ \sin(2x+r)=\sin(-r)\} \\
&= \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ (2x+r=r+(2k+1)\pi) \text{ o } (2x+r=-r+2k\pi)\ \text{ para } k\in\mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ \left(x=\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) \text{ o } (x=-r+k\pi)\ \text{ para } k\in\mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \{x \in [0,2\pi]\ ;\ \sin(r)+\sin(r-2x)=0\} \\
&= \{x \in [0,2\pi]\ ;\ \sin(r)=-\sin(r-2x)\} \\
&= \{x \in [0,2\pi]\ ;\ \sin(r)=\sin(2x-r)\} \\
&= \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ (2x-r=r+2k\pi) \text{ o } (2x-r=-r+(2k+1)\pi)\ \text{ para } k\in\mathbb{Z}\right\} \\
&= \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ (x=r+k\pi) \text{ o } \left(x=\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\ \text{ para } k\in\mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}
$$

Así

$$A\cup B=\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ (x=r+k\pi) \text{ o } (x=-r+k\pi) \text{ o } \left(x=\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)\ \text{ para } k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Dado que r es fijo y $k\in\mathbb{Z}$ entonces el conjunto $A\cup B=\left\{x\in[0,2\pi]\ ;\ q(x,r\pm x)=0\right\}$ está formado por puntos aislados en la recta real, cuya medida de Lebesgue es cero.

Ejemplo 2.2.2. Veamos que $q(x,t)=\sin(x+t)$ no satisface (2.5),

$$
\begin{aligned}
q:[0,2\pi]\times\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
(x,t) &\to \sin(x+t)
\end{aligned}
$$

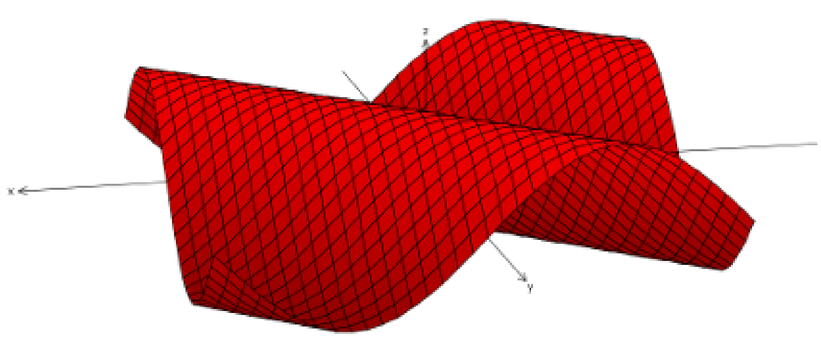

Figura 2.5: gŕfica función $q(x,t)=\sin(x+t)$

Encontremos el siguiente conjunto

$$\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ q(x,r\pm x)=0\right\} = \underbrace{\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ q(x,r+x)=0\right\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ q(x,r-x)=0\right\}}_{B}$$

$$\begin{aligned} A &= \{x \in [0,2\pi]\ ;\ \sin(2x+r)=0\} \\ &= \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ 2x+r=k\pi \ \text{ para } k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ x=\frac{k\pi - r}{2} \ \text{ para } k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \{x \in [0,2\pi]\ ;\ \sin(r)=0\} \\ &= \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ (r=k\pi) \text{ para } k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Dado que r es fijo, para $r = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, el conjunto B es igual a $[0,2\pi]$ por tanto $A \cup B = \left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ q(x,k\pi \pm x)=0, \ \text{ para } k \in \mathbb{Z}\right\} = [0,2\pi]$ cuya medida de Lebesgue es 2π. Por tanto $\sin(x+t)$ es plana sobre características, como se aprecia en la figura 2.5.

Teorema 2.2.1. *Sea ϕ como en la definición* (2.2.1)*, entonces* (2.5) *es equivalente a decir que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\lambda\left(\left\{x \in [0,2\pi]\ ;\ \phi(x,r\pm x) < \delta\right\}\right) < \epsilon \qquad \forall r \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Igualmente λ representa la medida de Lebesgue.

§ 2.3. Principio de contracción de Banach

En esta sección seguiremos las ideas y notaciones planteadas en [Caicedo, 2012, p.322]. Empecemos por la definición de contracción.

Definición 2.3.1. Sean (M_k, d_k), $k = 1,2$ dos espacios métricos, una aplicación $f : M_1 \to M_2$ se dice una contracción si existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \le \lambda < 1$ tal que para todo $x, y \in M_1$, $d_2(f(x), f(y)) \le \lambda d_1(x,y)$.

Nota 2.3.1. Sea f una contracción, si dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ de forma que $\lambda\delta < \epsilon$, se tiene que si $x, x_0 \in M_1$ con x_0 fijo y $d(x,x_0) < \delta$

$$\begin{aligned} d_2(f(x), f(x_0)) &\le \lambda d_1(x,x_0) \\ &< \lambda\delta \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Por tanto f es continua. Es decir, si f es contracción, f es continua.

Ejemplo 2.3.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto convexo, $f : A \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $||f'(x)|| \leq \lambda$ para todo $x \in A$, $0 \leq \lambda < 1$. Al ser A convexo se garantiza que $[a,b] \subset A$ para $a, b \in A$, $a \neq b$. Al ser f diferenciable en A lo será en $[a,b]$ y será continua en (a,b), con esto podemos usar la Desigualdad de Valor Medio [Caicedo, 2012, p.228],

$$||f(a) - f(b)|| \leq ||a-b|| \sup_{c \in [a,b]} \left\{ ||f'(c)|| \right\} \leq \lambda ||a-b||,$$

luego f es una contracción.

Definición 2.3.2. Sea $f : M \to M$, donde M es un espacio métrico con métrica d. Un punto $a \in M$, se dice un punto fijo de f si $f(a) = a$

Lema 2.3.1 (Principio de Contracción)**.** *Sean (M,d) un espacio métrico completo y $f : M \to M$ una contracción con constante de contracción λ, $(0 \leq \lambda < 1)$. Entonces f posee un único punto fijo, aún más, si $a \in M$, la sucesión $x_1 = f(a), x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$ converge al punto fijo de f.*

Prueba. Dados $x, y \in M$, $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y)$ por ser f una contracción, entonces

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\
&\leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \\
&= d(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \\
&\leq d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\vdots \\
&\leq \lambda^{n-1} d(x_1, x_2) \\
&= \lambda^{n-1} d(f(a), f(x_1)) \\
&\leq \lambda^n d(a, x_1)
\end{aligned}$$

Veamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sean $n, k \in \mathbb{N}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $k > n$, entonces $k = n + m$ con $m \geq 1$ entonces

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\
&\leq \lambda^n d(a, x_1) + \lambda^{n+1} d(a, x_1) + \cdots + \lambda^{n+m-1} d(a, x_1) \\
&= \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+m-1}\right) d(a, x_1) \\
&= \lambda^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} \lambda^k \right) d(a, x_1) \\
&\leq \lambda^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \right) d(a, x_1) \\
&= \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(a, x_1) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

para n, m suficientemente grandes. Así $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, como M es completo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge en M, es decir, existe $w \in M$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = w$, de esto y por ser f continua

$$\begin{aligned} w &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &= f(w) \end{aligned}$$

por tanto w es un punto fijo de f. Supongamos que z es otro punto fijo de f, es decir, $f(z) = z$

$$\begin{aligned} d(z,w) &= d(f(z), f(w)) \\ &\leq \lambda d(z,w) \end{aligned}$$

De aquí $(\lambda - 1)d(z,w) \geq 0$, lo cual solo se cumple cuando $d(z,w) = 0$ ya que $0 \leq \lambda < 1$, por tanto $z = w$, lo que muestra que el punto fijo es único, con lo cual termina de prueba.

Este lema también es conocido como el principio de aproximaciones sucesivas o *Teorema de Punto Fijo de Banach*. Veamos un ejemplo de una función que no tiene punto fijo y sus características.

Ejemplo 2.3.2. Sea $M = [1, \infty)$ con la métrica inducida por el valor absoluto usual de $\mathbb{R}$, M es cerrado y todo cerrado en un espacio métrico completo es completo [Kreyszig, 1978, p.30], por tanto $(M, |.|)$ es un espacio métrico completo. Consideremos

$$\begin{aligned} f : M &\to M \\ x &\longmapsto x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

f no tiene un punto fijo, ya que de tenerlo significa que $f(x) = x$, $x = x + \frac{1}{x}$, de donde $\frac{1}{x} = 0$, pero no existe $x \in M$ que cumpla esta relación, por tanto f no posee puntos fijos, Además para $x, y \in M$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| \\ &= \left| (x-y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) \right| \\ &\leq |x - y| \end{aligned}$$

Dado que $1 - \frac{1}{xy} \leq 1$ para $x, y \in M$. Esto muestra que la condición sobre λ, es decir que se encuentre en el intervalo $[0, 1)$ es necesaria para que una función tenga un punto fijo.

Ejemplo 2.3.3. Sea $\mathbb{B}$ un espacio de Banach y $T : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ una aplicación lineal continua, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $I : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ la aplicación identidad. Muestre que el operador $(\lambda I - T) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ es sobre para $|\lambda|$ suficientemente grande.

Prueba. Existe $a > 0$ tal que $||T(x)|| \leq a||x||$ por ser T lineal continuo, además para todo $x \in \mathbb{B}$ $|\|\lambda x\| - \|T(x)\|| \leq \|(\lambda I - T)(x)\|$ (ver [Caicedo, 2012, p.2]), de esto tenemos que $||\lambda x|| - ||T(x)|| \leq ||(\lambda I - T)(x)||$, también se tiene que $-||T(x)|| \geq -a||x||$ entonces

$$\begin{aligned}(|\lambda| - a)||x|| &\leq ||(\lambda I - T)(x)|| \\ &= ||\lambda x - T(x)|| \\ &\leq ||\lambda x|| + ||T(x)|| \\ &\leq |\lambda|||x|| + a||x|| \\ &= (|\lambda| + a)||x||\end{aligned}$$

por [Caicedo, 2012, p.23] $\lambda I - T$ es un homeomorfismo lineal, por tanto tiene inversa continua definida en $(\lambda I - T)(\mathbb{B})$. Sea $|\lambda| > a$, $v \in \mathbb{B}$ dado, definimos el operador

$$\begin{aligned}T_v : \mathbb{B} &\to \mathbb{B} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\lambda}(v + T(x))\end{aligned}$$

Este operador es una contracción ya que para $x, y \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned}||T_v(x) - T_v(y)|| &= \left\| \frac{1}{\lambda}(v + T(x)) - \frac{1}{\lambda}\big(v + T(y)\big) \right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}||T(x) - T(y)|| \\ &= \frac{1}{|\lambda|}||T(x - y)|| \\ &\leq \left|\frac{a}{\lambda}\right| ||x - y||\end{aligned}$$

Por el Principio de Contracción de Banach, T_v tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $w \in \mathbb{B}$ tal que

$$\begin{aligned}w &= T_v(w) \\ &= \frac{1}{\lambda}(v + T(w)) \\ &= \frac{v}{\lambda} + \frac{T(w)}{\lambda}\end{aligned}$$

De donde

$$v = \lambda w - T(w) = (\lambda I - T)(w)$$

Es decir que $\lambda I - T$ es sobre.

§ 2.4. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Las siguientes definiciones son tomadas en su mayoría de [Brezis, 2010, p.202]. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y sea $p \in \overline{\mathbb{R}}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ ; existe } g_i \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \phi \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),\ i = 1,2 \right\}$$

ϕ es llamada función test. Se denotará por $H^1(\Omega)$ al espacio $W^{1,2}(\Omega)$.

Ejemplo 2.4.1. Considérese el intervalo $I = (-1,1)$, se verá que la función $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$ y que $u' = g$ donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \end{cases}$$

Primero se verifica que $u \in L^p(I)$, con $p < \infty$, mostrando que $\int_I |u(x)|^p dx < \infty$ así,

$$\begin{aligned} \int_I |u(x)|^p dx &= \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2}(|x| + x) \right|^p dx \\ &= \int_{-1}^0 \left| \frac{1}{2}(-x + x) \right|^p dx + \int_0^1 \left| \frac{1}{2}(x + x) \right|^p dx \\ &= \int_0^1 \left| \frac{1}{2}(2x) \right|^p dx \\ &= \int_0^1 |x|^p dx \\ &= \left. \frac{x^{p+1}}{p+1} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{p+1} < \infty. \end{aligned}$$

Por tanto $u \in L^p(I)$ para $1 \leq p < \infty$. Como $|I| < \infty$ el supremo esencial coincide con el supremo usual y $\sup_{x \in I} |u(x)| = 1 < \infty$, por tanto $u \in L^\infty(I)$.para probar que $u' = g$ se verifica,

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Por un lado, sabiendo que φ' existe, dado que pertenece a $C_c^1(I)$, y que $\varphi(1) = 0$, ya que φ es de soporte compacto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_I u(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}(|x|+x)\right)\varphi'(x)dx \\
&= \int_0^1 x\varphi'(x)dx \\
&= x\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx \\
&= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)dx \\
&= -\int_0^1 \varphi(x)dx \\
&= -\left(0 + \int_0^1 \varphi(x)dx\right) \\
&= -\left(\int_{-1}^{0} 0\cdot\varphi(x)dx + \int_0^1 1\cdot\varphi(x)dx\right) \\
&= -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Esto implica que $u' = g$ casi toda parte en I, por consiguiente $u \in W^{1,p}(I)$.

Definición 2.4.1. (Derivada débil)
Sea $u \in L^2(\Omega)$, se dice que v es la primera derivada débil de u, notado por $D^1 u = v$ si

$$\int_\Omega u\phi' = -\int_\Omega v\phi \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

[Evans, 1997, p.242]. Con esto se puede sustituir la anterior definición de espacio $W^{1,2}(\Omega)$ por

Definición 2.4.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto. El espacio de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)\ ;\ u_x, u_t \in L^2(\Omega)\right\}$$

La norma usual en H^1 es $||u||_{H^1} \equiv ||u||_2 + ||\nabla u||_2$.

Definición 2.4.3. El nucleo del operador de onda en $C^2(\Omega)$, viene dado por las todas las soluciones a $\Box u = 0$ y es denotado por $\ker_{C^2(\Omega)}(\Box)$. Podemos tomar la adherencia de este conjunto en $L^2(\Omega)$ y a este conjunto lo notamos por

$$N = \overline{\ker_{C^2(\Omega)}(\Box)}^{L^2(\Omega)} \tag{2.7}$$

también podemos escribir $N = \overline{\text{spam}\left\langle \alpha_{kk}, \beta_{kk}, \gamma_{kk}, \delta_{kk}\right\rangle_{k=1}^{\infty}}^{L^2(\Omega)}$ donde

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{\pi}\sin(kx)\cos(jt),\ \ \beta_{kj} = \frac{1}{\pi}\sin(kx)\sin(jt)$$
$$\gamma_{kj} = \frac{1}{\pi}\cos(kx)\cos(jt),\ \ \delta_{kj} = \frac{1}{\pi}\cos(kx)\sin(jt)$$

Con $N^{\perp}$ denotamos el complemento ortogonal de N en $L^2(\Omega)$(ver [Kreyszig, 1978, p.146]). Todo elemento $y \in N^{\perp}$ se puede representar por la serie doble

$$y(x,t) = \sum_{\substack{k,j=0 \\ k\neq j}}^{\infty} y_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + y_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + y_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + y_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)$$

que por simplicidad escribimos como

$$y(x,t) = \sum_{k\neq j} y_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + y_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + y_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + y_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)$$

Definición 2.4.4. Sea H el espacio de Sobolev

$$H = \left\{u \in L^2(\Omega)\ ;\ u(x,t) = u(x+2\pi,t) = u(x,t+2\pi),\ u_t, u_x \in L^2(\Omega)\right\} \tag{2.8}$$

con la norma $||u||_1 = ||\nabla u||_2 = ||u_x||_2 + ||u_t||_2$.

Denotemos por Y el subespacio de H de funciones y tal que

$$\int_{\Omega} y(x,t)v(x,t)\,dxdt = 0 \tag{2.9}$$

Para todo $v \in N$. (2.9) es equivalente a decir que $\langle y,v\rangle_2 = 0$, por tanto $y \in N^{\perp}$. De esta forma podemos decir que $Y = H \cap N^{\perp}$.

Proposición 2.4.1. *Supongase que $u \in Y$, entonces es válida la siguiente desigualdad de Poincaré*

$$||u||_2 \leq \frac{1}{2}||\nabla u||_2 \tag{2.10}$$

Demostración. A cada $u \in Y$ se le puede asociar una serie de Fourier de la forma

$$u = \sum_{k\neq j}\left[u_1(k,j)\alpha_{kj} + u_2(k,j)\beta_{kj} + u_3(k,j)\gamma_{kj} + u_4(k,j)\delta_{kj}\right]$$

De donde

$$u_t = \sum_{k\neq j} j\left[-u_1(k,j)\beta_{kj} + u_2(k,j)\alpha_{kj} - u_3(k,j)\delta_{kj} + u_4(k,j)\gamma_{kj}\right]$$
$$u_x = \sum_{k\neq j} k\left[u_1(k,j)\gamma_{kj} + u_2(k,j)\delta_{kj} - u_3(k,j)\alpha_{kj} - u_4(k,j)\beta_{kj}\right]$$

Consideremos en primera medida $j \neq 0$, suponiendo esto tendriamos

$$\begin{aligned} ||u_t||_2^2 &= \sum_{k\neq j} j^2\left[|u_1(k,j)|^2 + |u_2(k,j)|^2 + |u_3(k,j)|^2 + |u_4(k,j)|^2\right] \\ &\geq \sum_{k\neq j}\left[|u_1(k,j)|^2 + |u_2(k,j)|^2 + |u_3(k,j)|^2 + |u_4(k,j)|^2\right] \\ &= ||u||_2^2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Si $k = 0$, u sería una función solo en terminos de t donde j es distinta de cero y se tendria un caso particular de (2.11), supongamos entonces que $k \neq 0$

$$
\begin{aligned}
||u_x||_2^2 &= \sum_{k\neq j} k^2 \left[|u_1(k,j)|^2 + |u_2(k,j)|^2 + |u_3(k,j)|^2 + |u_4(k,j)|^2\right] \\
&\geq \sum_{k\neq j} \left[|u_1(k,j)|^2 + |u_2(k,j)|^2 + |u_3(k,j)|^2 + |u_4(k,j)|^2\right] \\
&= ||u||_2^2 \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

De la misma manera si $j = 0$, u sería una función solo en terminos de x donde k es distinta de cero y se tendria un caso particular de (2.12). De esta forma se han contemplado todos los casos y sumando (2.11) con (2.12) se tendría

$$2||u||_2 \leq ||u_t||_2 + ||u_x||_2$$

$\square$

Nota 2.4.1. la norma usual de H^1, a saber, $||u||_{H^1}$ es equivalente a la norma $||u||_1 = ||\nabla u||_2$.

Prueba. Para ver que estas dos normas son equivalentes es necesario mostrar la existencia de constantes $a, b > 0$ tal que

$$a||u||_{H^1} \leq ||u||_1 \leq b||u||_{H^1}$$

La segunda desigualdad se tiene inmediata, ya que,

$$||u||_1 = ||\nabla u||_2 \leq ||\nabla u||_2 + ||u||_2 = ||u||_{H^1}$$

entonces $b = 1$. La primera desigualdad resulta de la siguiente manera usando la desigualdad (2.10),

$$||u||_{H^1} = ||u||_2 + ||\nabla u||_2 \leq \frac{1}{2}||\nabla u||_2 + ||\nabla u||_2 = (\frac{1}{2} + 1)||\nabla u||_2 = \frac{3}{2}||u||_1$$

luego para $a = \frac{2}{3}$ se cumple la primera desigualdad, lo que implica que dichas normas son equivalentes. Es precisamente con la norma $||u||_1$ que se desarrolla este trabajo.

§ 2.5. Operadores compactos

Los temas que se desarrollan en esta sección son tomados de[Brezis, 2010, p.157] y [Kreyszig, 1978, p.405].

Definición 2.5.1. Sean E y F espacios de Banach. Un operador acotado $T \in \mathscr{L}(E,F)$ es llamado **compacto** si para todo subconjunto acotado M de E, la imagen $T(M)$ es relativamente compacta, es decir, la clausura $\overline{T(M)}$ es compacta.

$\mathscr{L}(E,F)$ denota el conjunto de los operadores lineales acotados de E en F. Recordemos algunos teoremas con los cuales es posible, en algunos casos, demostrar la compacidad de forma más sencilla.

Teorema 2.5.1. *Sean E y F espacios de Banach y $T \in \mathscr{L}(E,F)$. T es compacto sí y solo si toda sucesión acotada $(x_n) \subset E$ es enviada por medio de T a una sucesión $(Tx_n) \subset F$ la cual tiene una subsucesión convergente.*

El conjunto de todos los operadores compactos de E en F es denotado por $\mathscr{K}(E,F)$.

Teorema 2.5.2. *Sea (T_n) una sucesión de operadores lineales compactos de un espacio normado X sobre un espacio de Banach Y. Si (T_n) converge uniformemente a un operador T, es decir, $||T_n - T|| \to 0$, entonces el operador límite T es compacto.*

Teorema 2.5.3. *Sean E, F y G espacios de Banach, $T \in \mathscr{L}(E,F)$ y $S \in \mathscr{K}(F,G)$. Entonces $S \circ T \in \mathscr{K}(E,G)$*

Ejemplo 2.5.1. Sea $T : l^2 \to l^2$ definido por $Tx = y = (\eta_j)$ donde $x = (\xi_j)$ y $\eta_j = \frac{\xi_j}{2^j}$ para $j = 1,2,\ldots$. Probar que T es compacto.

Prueba. T es lineal ya que, para $x, w \in l^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene,

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta w) &= \left(\frac{\alpha \xi_j + \beta \sigma_j}{2^j} \right) \\ &= \alpha \left(\frac{\xi_j}{2^j} \right) + \beta \left(\frac{\sigma_j}{2^j} \right) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(w) \end{aligned}$$

Si $x = (\xi_j) \in l^2$, entonces $y = (\eta_j) \in l^2$. Sea $T_n : l^2 \to l^2$ definido por

$$T_n x = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{4}, \frac{\xi_3}{8}, \ldots, \frac{\xi_n}{2^n}, 0, 0, \ldots \right)$$

De forma similiar a la anterior se puede comprobar que T_n es lineal. T_n también es acotado puesto que,

$$\begin{aligned} ||T_n x||^2 &= \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\xi_j}{2^j} \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4^j} |\xi_j|^2 \\ &\le \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \\ &= ||x||^2 \end{aligned}$$

Dado que T_n es acotada y $\dim T_n(l^2) < \infty$ se tiene que T_n es compacto (ver [Kreyszig, 1978, p. 407]), Ahora se verá que (T_n) es una sucesión de operadores uniformemente convergente así,

$$\begin{aligned}
||(T-T_n)x||^2 &= ||Tx - T_n x||^2 \\
&= \left\| \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{4}, \frac{\xi_3}{8}, \dots, \frac{\xi_n}{2^n}, \frac{\xi_{n+1}}{2^{n+1}}, \dots\right) - \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{4}, \frac{\xi_3}{8}, \dots, \frac{\xi_n}{2^n}, 0, 0, \dots\right) \right\|^2 \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \left| \frac{\xi_j}{2^j} \right|^2 \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} |\xi_j|^2 \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2(n+1)}} |\xi_j|^2 \\
&= \frac{1}{2^{2(n+1)}} \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^2 \\
&\leq \frac{1}{2^{2(n+1)}} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \\
&= \frac{1}{2^{2(n+1)}} ||x||^2
\end{aligned}$$

Así,

$$||T - T_n|| = \sup_{\substack{x \in l^2 \\ ||x||=1}} ||(T-T_n)x|| \leq \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

Lo que significa que $||T - T_n|| \to 0$, luego (T_n) es uniformemente convergente y T es compacto en virtud del teorema (2.5.2).

Veamos algunos ejemplos de operadores que no son compactos, y más adelante se explicará la importancia de la comapacidad en el desarrollo del trabajo.

Teorema 2.5.4. *Sea E un espacio de Banach. Si* $\dim X = \infty$ *el operador identidad $I : X \to X$ no es compacto.*

Demostración. La bola cerrada $M = \{x \in X \ ; \ ||x|| \leq 1\}$ es acotada, como M es cerrada

$$\overline{I(M)} = \overline{M} = M$$

Por [Kreyszig, 1978, p.80] la bola cerrada M no es compacta, así $I(M)$ no es relativamente compacto. □

Ejemplo 2.5.2. Sea $E = l^2$, un elemento $x \in l^2$ es denotado por $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Consideremos los operadores $S_r : l^2 \to l^2$ y $S_l : l^2 \to l^2$ definidos por $S_r x = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$ y $S_l x = (x_2, x_3, x_4, \dots)$ estos operadores son conocidos como operador de desplazamiento a la derecha y operador de desplazamiento a la izquierda respectivamente.

- Operador S_r
  Es evidente que este operador es lineal y
  $$||S_r x|| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||x||$$
  de donde
  $$||S_r|| = \sup_{x\in l^2} \frac{||S_r x||}{||x||} = 1$$
  Por tantoS_r es acotado y su norma es 1.

- Operador S_l
  Al igual que anteriormente este operador también es lineal y acotado ya que
  $$\begin{aligned} ||S_l x||^2 &= \sum_{j=2}^{\infty} |x_j|^2 \\ &\le |x_1|^2 + \sum_{j=2}^{\infty} |x_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \\ &= ||x||^2 \end{aligned}$$
  Además, tomando sup sobre los $x \in l^2$ se tiene que $||S_l|| \le 1$. Por otro lado
  $$\begin{aligned} ||S_l|| &= \sup_{x\in l^2} \frac{||S_l x||}{||x||} \\ &\ge \frac{||S_l y||}{||y||} \end{aligned}$$
  Para cualquier $y \in l^2$, en particular para $y = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$, entonces $S_l y = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ y $||S_l y|| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||y||$, luego $||S_l|| \ge 1$ y por consiguiente $||S_l|| = 1$.

Ahora el operador $S_l \circ S_r$ definido por
$$\begin{aligned} S_l \circ S_r : l^2 &\to l^2 \\ x &\to S_l \circ S_r(x) = S_l\left(S_r(x)\right) \end{aligned}$$
para $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2$ se tiene que
$$\begin{aligned} S_l\left(S_r(x)\right) &= S_l\left(S_r(x_1, x_2, x_3, \ldots)\right) \\ &= S_l\left(0, x_1, x_2, x_3, \ldots\right) \\ &= (x_1, x_2, x_3, \ldots) \end{aligned}$$
Luego $S_l \circ S_r = I$. Como $\dim(l^2) = \infty$, por el teorema (2.5.4) I no es compacto. Por (2.5.3) dado que S_l es lineal y acotado entonces S_r no es compacto.

2.5.1. El operador $\Box^{-1}$

El estudio del operador $\Box^{-1}$ es de gran importancia en el desarrollo del trabajo ya que a diferencia del operador de onda ($\Box$), este cuenta con algunas propiedades que permiten recurrir a resultados importantes del análisis funcional, una de estas propiedades es la compacidad.

Proposición 2.5.1. *El operador* $\Box^{-1} : N^{\perp} \to N^{\perp}$ *es un operador compacto.*

Demostración. Sea $B \subset N^{\perp}$ acotado. $\Box^{-1}B$ es acotado en $C^{\frac{1}{2}}$ ya que dado $f \in N^{\perp}$ existe $c_0 > 0$ tal que

$$\left\|\Box^{-1} f\right\|_{\frac{1}{2}} \leq c_0 ||f||_2, \tag{2.13}$$

ver [Rabinowitz, 1978, p.43] o para más detalle [Sanjuán, 2014, p.23]. Ya que $|\Box^{-1} f|_{\infty} \leq \left\|\Box^{-1} f\right\|_{\frac{1}{2}} \leq c_0 ||f||_2$ se tiene que $\Box^{-1}B$ también es acotado en $C(\Omega)$.

Observación. de (2.13) se tiene

$$\begin{aligned}
c_0||f||_2 &\geq \left\|\Box^{-1} f\right\|_{\frac{1}{2}} \\
&= |\Box^{-1} f|_{\infty} + \sup_{(x,t)\neq(y,s)\in\Omega} \frac{\left|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)\right|}{\left|(x,t)-(y,s)\right|^{\frac{1}{2}}} \\
&\geq \sup_{(x,t)\neq(y,s)\in\Omega} \frac{\left|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)\right|}{\left(|x-y|+|t-s|\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\geq \frac{\left|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)\right|}{\left(|x-y|+|t-s|\right)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

si $c_0||f||_2 = k$ entonces

$$\begin{aligned}
\left|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)\right| &\leq k\left(|x-y|+|t-s|\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq k\left(|x-y|+|t-s|\right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Dado $\epsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ de forma que $k\delta < \epsilon$. De (2.14) se tiene que si $(x,t), (y,s) \in \Omega$ verifican

$$|x-y|+|t-s| < \delta$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)\right| &\leq k\left(|x-y|+|t-s|\right) \\
&< k\delta \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Por tanto $\Box^{-1}B$ es una familia uniformemente equicontinua de funciones.

Por el teorema de Arzela-Ascoli ([Brezis, 2010, p.111]) toda sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $f_n \in \square^{-1}B$ tiene una subsucesión convergente $\{f_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ en la norma de $C(\Omega)$. Esto es $f_{n_k} \to f$ para algún $f \in N^{\perp}$. Ahora

$$
\begin{aligned}
\|f_{n_k} - f\|_2 &= \left(\int_{\Omega} |f_{n_k} - f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{2}} ||f_{n_k} - f||_{C(\Omega)} \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}
$$

esto es $f_{n_k} \to f$ en la norma de $L^2(\Omega)$. Así por teorema (2.5.1) $\square^{-1}$ es compacto de $N^{\perp}$ a $N^{\perp}$. $\square$

Definición 2.5.2. Sea $T \in \mathscr{L}(E)$. El conjunto resolvente, denotado por $\rho(T)$ es definido por

$$\rho(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{R};\ (T - \lambda I) \text{ es biyectivo de } E \text{ sobre } E\right\}.$$

El espectro, denotado por $\sigma(T)$, es el complemento del conjunto resolvente, a saber, $\sigma(T) = \mathbb{R}\backslash\rho(T)$. Un número real λ es llamado un valor propio de T si

$$N(T - \lambda I) \neq \{0\}$$

$N(T - \lambda I)$ es el correspondiente espacio propio. El conjunto de los valores propios es denotado por $EV(T)$. Es de resaltar que dado un operador T el conjunto de valores propios no siempre es igual al espectro.

Observación. Dado un operador $T \in \mathscr{L}(E)$, siempre se tiene que $EV(T) \subset \sigma(T)$. Sea $\lambda \in EV(T)$ entonces $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$, esto es, $\{u \in \text{dom}(T - \lambda I);\ (T - \lambda I)u = 0\} \neq \{0\}$. Por tanto, existen al menos dos elementos que por medio de $(T - \lambda I)$ son enviados al 0, esto significa que $(T - \lambda I)$ no puede ser sobreyectivo y $\lambda \notin \rho(T)$ entonces $\lambda \in \sigma(T)$.

La relación contraria $\sigma(T) \subset EV(T)$ no siempre se tiene, por ejemplo,

Ejemplo 2.5.3. Consideremos el operador S_r del ejemplo (2.5.2). Sea $x \neq 0$, veamos para que valores de λ, $(S_r - \lambda I)x = 0$, que es $S_r x = \lambda x$, de donde

$$
\begin{aligned}
\lambda x_1 &= 0 \\
\lambda x_2 &= x_1 \\
\lambda x_3 &= x_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

lo cual no tiene solución ya que, si $\lambda = 0$ entonces $x = 0$, que no puede suceder. si $\lambda \neq 0$ entonces $x_1 = 0$ y $x = 0$. Por tanto $EV(S_r) = \emptyset$. Para $\lambda = 0$ el operador $S_r - \lambda I = S_r$ el cual no es sobreyectivo, por tanto $0 \notin \rho(S_r)$, que es lo mismo que decir $0 \in \sigma(S_r)$. Así $\lambda = 0$ es un valor espectral pero no es un valor propio de S_r.

Lo interesante sucede cuando el operador T resulta ser compacto, ya que el siguiente teorema permite caracterizar el espectro del operador.

Teorema 2.5.5. *Sea* $T \in \mathcal{K}(E)$, *con* $\dim(E) = \infty$, *entonces se verifica*

a) $0 \in \sigma(T)$,

b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = EV(T) \setminus \{0\}$,

c) una de las siguiente situaciones:

- $\sigma(T) = \{0\}$
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es finito,*
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *es una sucesión que tiende a* 0

Es precisamente por el numeral (b) del teorema anterior que basta con hallar $EV(\Box)$ (por ser $\Box^{-1}$ compacto) para determinar el espectro del operador de onda $\sigma(\Box)$.

2.5.2. El operador $(\Box + \tau I)^{-1}$

Sea $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $k^2 - j^2 + \tau \neq 0$ para $j, k = 0, 1, 2, \ldots$ y sea $\Gamma_\tau := \text{mín}|k^2 - j^2 + \tau| > 0$. El operador

$$(\Box + \tau I)^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

actua de la siguiente forma, sean $p, q \in L^2(\Omega)$ esto es,

$$p = \sum_{k,j=0}^{\infty} f_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + f_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + f_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + f_4(k,j)\delta_{kj}(x,t) \tag{2.15}$$

$$q = \sum_{k,j=0}^{\infty} g_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + g_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + g_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + g_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)$$

derivando usualmente se verifica que

$$\frac{\partial^2 \alpha_{kj}}{\partial t^2} = -j^2 \alpha_{kj}, \qquad \frac{\partial^2 \beta_{kj}}{\partial t^2} = -j^2 \beta_{kj}, \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{kj}}{\partial t^2} = -j^2 \gamma_{kj}, \qquad \frac{\partial^2 \delta_{kj}}{\partial t^2} = -j^2 \delta_{kj}$$
$$\frac{\partial^2 \alpha_{kj}}{\partial x^2} = -k^2 \alpha_{kj}, \qquad \frac{\partial^2 \beta_{kj}}{\partial x^2} = -k^2 \beta_{kj}, \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{kj}}{\partial x^2} = -k^2 \gamma_{kj}, \qquad \frac{\partial^2 \delta_{kj}}{\partial x^2} = -k^2 \delta_{kj}$$

entonces

$$q_{tt}(x,t) = \sum_{k,j=0}^{\infty} -j^2 \left(g_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + g_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + g_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + g_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)\right)$$

$$-q_{xx}(x,t) = \sum_{k,j=0}^{\infty} k^2 \left(g_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + g_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + g_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + g_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)\right)$$

$$\tau q(x,t) = \sum_{k,j=0}^{\infty} \tau \left(g_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + g_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + g_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + g_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)\right)$$

Ahora

$$\begin{aligned}
(\Box + \tau I)^{-1} p &= q \\
(\Box + \tau I)(\Box + \tau I)^{-1} p &= (\Box + \tau I) q \\
p &= (\Box + \tau I) q \\
&= \Box q + \tau q \\
&= q_{tt} - q_{xx} + \tau q
\end{aligned}$$

de donde

$$p = \sum_{k,j=0}^{\infty} \left(k^2 - j^2 + \tau\right)\left(g_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + g_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + g_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + g_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)\right)$$

si se hace

$$f_i(k,j) = \left(k^2 - j^2 + \tau\right) g_i(k,j) \quad \text{entonces} \quad g_i(k,j) = \frac{f_i(k,j)}{k^2 - j^2 + \tau} \quad i = 1,2,3,4$$

de donde

$$(\Box + \tau I)^{-1} p = q = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{f_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + f_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + f_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + f_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)}{k^2 - j^2 + \tau}$$

para casi todo $(x,t) \in \Omega$

Proposición 2.5.2. *Existen constantes $A_\tau > 0$ y $B_\tau > 0$, que solo dependen de τ, tales que*

$$A_\tau \leq \left| \frac{k^2 - j^2}{k^2 - j^2 + \tau} \right| \leq B_\tau$$

Tomado de [Sanjuán, 2014, p.29]

Demostración.

$$\begin{aligned}
A_\tau = \frac{1}{1 + |\tau|} &\leq \frac{1}{1 + \frac{|\tau|}{|k^2 - j^2|}} \\
&\leq \frac{1}{\left|1 + \frac{\tau}{k^2 - j^2}\right|} \\
&= \left| \frac{k^2 - j^2}{k^2 - j^2 + \tau} \right| \\
&= \left| 1 - \frac{\tau}{k^2 - j^2 + \tau} \right| \\
&\leq 1 + \frac{|\tau|}{|k^2 - j^2 + \tau|} \\
&\leq 1 + \frac{|\tau|}{\Gamma_\tau} = B_\tau
\end{aligned}$$

Que finaliza la prueba. $\square$

Proposición 2.5.3. *El operador $(\Box+\tau I)^{-1}$ definido en $N^{\perp}$ satisface, para cualquier $p \in N^{\perp}$, la siguiente desigualdad*

$$||(\Box+\tau I)^{-1}(p)||_1 \leq k_1||p||_2 \tag{2.16}$$

También el operador $(\Box+\tau I)^{-1} : N^{\perp} \to L^q(\Omega)$, con $q \geq 2$, es un operador compacto.

Demostración. Sea $p \in N^{\perp}$ entonces

$$\frac{\partial(\Box+\tau I)^{-1}p}{\partial t} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{-jf_1(k,j)\beta_{kj} + jf_2(k,j)\alpha_{kj} - jf_3(k,j)\delta_{kj} + jf_4(k,j)\gamma_{kj}}{k^2-j^2+\tau} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial(\Box+\tau I)^{-1}p}{\partial x} = \sum_{k,j=0}^{\infty} \frac{kf_1(k,j)\gamma_{kj} + kf_2(k,j)\delta_{kj} - kf_3(k,j)\alpha_{kj} - kf_4(k,j)\beta_{kj}}{k^2-j^2+\tau} \tag{2.18}$$

De (2.17), (2.18) y la Identidad de Parseval en dos variables [Kreyszig, 2003, p.56] se tiene que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial(\Box+\tau I)^{-1}p}{\partial t}\right\|_2^2 &= \sum_{k,j=0}^{\infty}\left(\left|j\frac{f_1(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2 + \left|j\frac{f_2(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2 + \left|j\frac{f_3(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2 + \left|j\frac{f_4(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2\right)\\ &= \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{j^2}{(k^2-j^2+\tau)^2}\left(f_1^2(k,j)+f_2^2(k,j)+f_3^2(k,j)+f_4^2(k,j)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial(\Box+\tau I)^{-1}p}{\partial x}\right\|_2^2 &= \sum_{k,j=0}^{\infty}\left(\left|k\frac{f_1(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2 + \left|k\frac{f_2(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2 + \left|k\frac{f_3(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2 + \left|k\frac{f_4(k,j)}{k^2-j^2+\tau}\right|^2\right)\\ &= \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{k^2}{(k^2-j^2+\tau)^2}\left(f_1^2(k,j)+f_2^2(k,j)+f_3^2(k,j)+f_4^2(k,j)\right)\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\left\|(\Box+\tau I)^{-1}p\right\|_1^2 &= \left\|\frac{\partial(\Box+\tau I)^{-1}p}{\partial t}\right\|_2^2 + \left\|\frac{\partial(\Box+\tau I)^{-1}p}{\partial x}\right\|_2^2\\ &= \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(k^2+j^2)\left(f_1^2(k,j)+f_2^2(k,j)+f_3^2(k,j)+f_4^2(k,j)\right)}{(k^2-j^2+\tau)^2}\\ &= \sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{|k^2-j^2|^2}{|k^2-j^2+\tau|^2}\frac{(k^2+j^2)\left(f_1^2(k,j)+f_2^2(k,j)+f_3^2(k,j)+f_4^2(k,j)\right)}{(k^2-j^2)^2}\\ &\leq B_\tau^2\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(k^2+j^2)\left(f_1^2(k,j)+f_2^2(k,j)+f_3^2(k,j)+f_4^2(k,j)\right)}{(k^2-j^2)^2}\\ &\leq B_\tau^2\sum_{k,j=0}^{\infty}\frac{(k^2+j^2)\left(f_1^2(k,j)+f_2^2(k,j)+f_3^2(k,j)+f_4^2(k,j)\right)}{(k+j)^2(k-j)^2}\\ &\leq B_\tau^2\sum_{k,j=0}^{\infty}\left(f_1^2(k,j)+f_2^2(k,j)+f_3^2(k,j)+f_4^2(k,j)\right)\\ &\leq B_\tau^2||p||_2^2\end{aligned}$$

esto es

$$\left\|(\Box+\tau I)^{-1}p\right\|_1 \leq B_\tau\|p\|_2 \tag{2.19}$$

Sea $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada con $p_n \in L^2(\Omega)$, por (2.19) se tiene que $(\Box+\tau I)^{-1}p_n$ es acotada en H. Por el teorema de Rellich-Kondrakov ([Brezis, 2010, p.285]) $(\Box+\tau I)^{-1}p_n$ tiene una subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$ para $q \geq 2$, por tanto $(\Box+\tau I)^{-1}$ es un operador compacto. (ver [Kreyszig, 1978, p.407]) □

§ 2.6. Espectro del operador de onda

Para determinar el espectro del operador de onda $\sigma(\Box)$ es necesario saber para que valores de λ el siguiente problema tiene soluciones no triviales

$$\begin{cases} \Box u = \lambda u \\ u(x,t) = u(x+2\pi,t) \\ u(x,t) = u(x,t+2\pi) \end{cases} \tag{2.20}$$

Usando el método de separación de variables, se supone una solución u de la forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ de donde (2.20) toma la forma

$$\begin{aligned} \ddot{G}(t)F(x) - F''(x)G(t) &= \lambda F(x)G(t) \\ \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} - \frac{F''(x)}{F(x)} &= \lambda \\ \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} - \lambda = \frac{F''(x)}{F(x)} &= k. \end{aligned}$$

Donde $k \in \mathbb{R}$, una constante que no depende de x ni de t. De lo anterior resultan dos ecuaciones diferenciales ordinarias homogéneas de segundo orden

$$\begin{cases} F''(x) - kF(x) = 0 \\ \ddot{G}(t) - (\lambda + k)G(t) = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Dado que k, λ son constantes y arbitrarias para solucionar (2.21) se consideran 9 casos: Para $k = 0$, $k < 0$ y $k > 0$ se toman $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

Como las soluciones para (2.20) deben ser no triviales $G(t)$ y $F(x)$ deben ser distintas de cero.

(a) Si $k = 0$, $F''(x) = 0$ de donde $F(x) = c_1x + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ya que $u(x,t)$ es periódica de periodo 2π en la varible x

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u(x+2\pi,t)\\
F(x)G(t) &= F(x+2\pi)G(t)\\
F(x) &= F(x+2\pi)\\
c_1x+c_2 &= c_1(x+2\pi)+c_2\\
c_1 &= 0
\end{aligned}$$

Luego $F(x)=c_2$ y $u(x,t)=c_2G(t)$ es solución de (2.20). Veamos la forma que debe tener $G(t)$

i) Si $\lambda=0$, $\ddot{G}(t)=0$ de donde $G(t)=k_1t+k_2$ con $k_1,k_2\in\mathbb{R}$. Ya que $u(x,t)$ es periódica de periodo 2π en la varible t

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u(x,t+2\pi)\\
F(x)G(t) &= F(x)G(t+2\pi)\\
G(t) &= G(t+2\pi)\\
k_1t+k_2 &= k_1(t+2\pi)+k_2\\
k_1 &= 0
\end{aligned}$$

Luego $G(t)=k_2$ y $u(x,t)=c_2k_2=K$ es solución para (2.20). Por tanto $\lambda=0\in\sigma_p(\Box)$

ii) Si $\lambda<0$, se toma $\lambda=-s^2$ y $\ddot{G}(t)+s^2G(t)=0$, cuya solución es $G(t)=k_1\cos(st)+k_2\sin(st)$ con $s\in\mathbb{Z}$, G así definida es 2π periódica de donde $u(x,t)=A\cos(st)+B\sin(st)$ es solución de (2.20). Por tanto $\lambda=-s^2\in\sigma_p(\Box)$ con $s=1,2,\ldots$

iii) Si $\lambda>0$ se toma $\lambda=s^2$ y $\ddot{G}(t)-s^2G(t)=0$, cuya solución es $G(t)=k_1\mathrm{e}^{st}+k_2\mathrm{e}^{-st}$. Ya que G debe ser 2π periódica este caso queda descartado.

(b) Si $k<0$, se toma $k=-j^2$ y $F''(x)+j^2F(x)=0$, cuya solución es $F(x)=c_1\cos(jx)+c_2\sin(jx)$ si $j\in\mathbb{Z}$, F es 2π periódica y $u(x,t)=[c_1\cos(jx)+c_2\sin(jx)]G(t)$ es solución de (2.20). Veamos la forma que debe tener $G(t)$ sabiendo que $\ddot{G}(t)+(j^2-\lambda)G(t)=0$

i) Si $j^2-\lambda=0$ $\ddot{G}(t)=0$ de donde $G(t)=k_1t+k_2$ con $k_1,k_2\in\mathbb{R}$. Ya que $u(x,t)$ es periódica de periodo 2π en la varible t,mediante cálculos similares a los anteriormente realizados se llega a $G(t)=k_2$ y $u(x,t)=A\cos(jx)+B\sin(jx)$ es solución de (2.20). Por tanto $\lambda=j^2\in\sigma_p(\Box)$ con $j=1,2,\ldots$

ii) Si $j^2-\lambda>0$, se toma $j^2-\lambda=s^2$ y $\ddot{G}(t)+s^2G(t)=0$, cuya solución es $G(t)=k_1\cos(st)+k_2\sin(st)$ con $s\in\mathbb{Z}$, G así definida es 2π periódica de donde $u(x,t)=A\cos(jx)\cos(st)+B\cos(jx)\sin(st)+C\sin(jx)\cos(st)+D\sin(jx)\sin(st)$ es solución de (2.20). Por tanto $\lambda=j^2-s^2\in\sigma_p(\Box)$ con $j,s=1,2,\ldots$

iii) Si $j^2-\lambda<0$, se toma $j^2-\lambda=-s^2$ y $\ddot{G}(t)-s^2G(t)=0$, cuya solución es $G(t)=k_1\mathrm{e}^{st}+k_2\mathrm{e}^{-st}$. Ya que G debe ser 2π periódica este caso queda descartado.

(c) Si $k > 0$, se toma $k = j^2$ y $F''(x) - j^2 F(x) = 0$, cuya solución es $F(x) = c_1 \mathrm{e}^{jx} + c_2 \mathrm{e}^{-jx}$. Ya que F debe ser 2π periódica este caso queda descartado.

Por lo anterior se dice que

$$\sigma(\Box) = \left\{ j^2 - s^2;\ \ j, s = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

3. El problema semilineal

En éste capítulo se hará uso de los resultados del capítulo anterior, con el fin de encontrar soluciones débiles a la ecuación de onda semilineal (1). Las herramientas principales para obtener lo deseado son el Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt, el principio de contracciones y el Teorema de Punto Fijo de Schauder.

§ 3.1. Suposiciones

Para el problema (1) se considera g diferenciable y asintóticamente lineal pero no necesariamente monótona, es decir

$$g(t) = \tau t + h(t) \qquad \text{con} \qquad \tau \in (0, \infty) \tag{3.1}$$

y que para algún $\beta < 0$ y $A > 0$

$$|h'(u)| \leq |u|^{\beta} \qquad \text{para} \qquad |u| \geq A \tag{3.2}$$

Nota 3.1.1. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\beta \in (-1, 0)$.

Prueba. Supongamos que $\beta \leq -1$ entonces $\beta \leq -\frac{1}{2}$, por tanto

$$|h'(s)| \leq |s|^{\beta} \leq |s|^{-\frac{1}{2}}.$$

Nota 3.1.2. Existe una constante $M_1 > 0$ tal que

$$|h(s)| \leq M_1 + \frac{|s|^{\beta+1}}{\beta+1} \tag{3.3}$$

Prueba. Supongamos en primer lugar que $s \geq A > 1$

$$\begin{aligned}
|h(s)| &= |h(A) + \int_A^s h'(t)\, dt| \\
&\leq |h(A)| + \int_A^s |h'(t)|\, dt \\
&\leq |h(A)| + \int_A^s |t|^{\beta}\, dt \\
&\leq |h(A)| + \frac{s^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{A^{\beta+1}}{\beta+1}
\end{aligned}$$

entonces

$$|h(s)| \leq |h(A)| + \frac{|s|^{\beta+1}}{\beta+1}.$$

Supongamos ahora que $s \leq -A$

$$\begin{aligned}
|h(s)| &= |h(-A) - \int_s^{-A} h'(t)\, dt| \\
&\leq |h(-A)| + \left|\int_s^{-A} h'(t)\, dt\right| \\
&\leq |h(-A)| + \int_s^{-A} |h'(t)|\, dt \\
&\leq |h(-A)| + \int_s^{-A} |t|^{\beta}\, dt \\
&\leq |h(-A)| + \int_s^{-A} (-t)^{\beta}\, dt \\
&\leq |h(-A)| + \frac{A^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{(-s)^{\beta+1}}{\beta+1} \\
&\leq |h(-A)| + \frac{A^{\beta+1}}{\beta+1} \\
&\leq |h(-A)| + \frac{(-s)^{\beta+1}}{\beta+1}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$|h(s)| \leq |h(-A)| + \frac{|s|^{\beta+1}}{\beta+1}$$

Por último, supongamos que $|s| \leq A$. Como $h \in C^1(\mathbb{R})$, h es acotado, entonces existe M_0 tal que

$$\begin{aligned}
|h(s)| &\leq M_0 \\
&\leq M_0 + \frac{|s|^{\beta+1}}{\beta+1}
\end{aligned}$$

Tomando $M_1 = \text{máx}\{M_0, |h(A)|, |h(-A)|\}$, queda demostrada la afirmación, ver [Duque, 2011, p.28].

§ 3.2. Soluciones débiles

Definición 3.2.1. Para el problema de onda

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = p(x,t) - g(u) \\ u(x,t) = u(x+2\pi, t) \\ u(x,t) = u(x, t+2\pi) \end{cases} \tag{3.4}$$

Se dice que $u = y + v \in Y \oplus N$ es una solución débil de (3.4) si

$$\int_\Omega \left\{ (y_t \hat{y}_t - y_x \hat{y}_x) - (g(u) - p)(\hat{y} + \hat{v}) \right\} dxdt = 0 \tag{3.5}$$

Para todo $\hat{y} + \hat{v} \in Y \oplus N$.

Se verificará que toda solución fuerte (clásica) es solución débil, es decir pasar de (3.4) a (3.5). Supongase que $u = y + v \in (Y \cap C^2) \oplus (N \cap C^2)$

$$y_{tt} + v_{tt} - y_{xx} - v_{xx} = p(x,t) - g(u)$$

sea $\hat{y} + \hat{v} \in (Y \cap C^2) \oplus (N \cap C^2)$ entonces

$$\begin{aligned}
(p(x,t) - g(u))(\hat{y} + \hat{v}) &= (y_{tt} + v_{tt} - y_{xx} - v_{xx})(\hat{y} + \hat{v}) \\
&= (y_{tt} - y_{xx})(\hat{y} + \hat{v}) + (v_{tt} - v_{xx})(\hat{y} + \hat{v}) \\
&= (y_{tt} - y_{xx})(\hat{y} + \hat{v}) \\
&= y_{tt}\hat{y} + y_{tt}\hat{v} - y_{xx}\hat{y} - y_{xx}\hat{v}
\end{aligned}$$

Integrando por partes sobre Ω y dado que $y, \hat{y} \in (Y \cap C^2)$ y $v, \hat{v} \in (N \cap C^2)$, se tiene que $y\Big|_0^{2\pi} = v\Big|_0^{2\pi} = \hat{y}\Big|_0^{2\pi} = \hat{v}\Big|_0^{2\pi} = 0$ por ser funciones 2π-periódicas, entonces

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[(p - g(u))(\hat{y} + \hat{v}) \right] dxdt &= \int_\Omega \left[y_{tt}\hat{y} + y_{tt}\hat{v} - y_{xx}\hat{y} - y_{xx}\hat{v} \right] dxdt \\
&= \int_\Omega y_{tt}\hat{y} + \int_\Omega y_{tt}\hat{v} - \int_\Omega y_{xx}\hat{y} - \int_\Omega y_{xx}\hat{v} \\
&= y_t\hat{y}\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega y_t\hat{y}_t + y_t\hat{v}\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega y_t\hat{v}_t - y_x\hat{y}\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega y_x\hat{y}_x - y_x\hat{v}\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega y_x\hat{v}_x \\
&= -\int_\Omega y_t\hat{y}_t + \int_\Omega y_x\hat{y}_x - \int_\Omega y_t\hat{v}_t + \int_\Omega y_x\hat{v}_x \\
&= -\int_\Omega y_t\hat{y}_t + \int_\Omega y_x\hat{y}_x - \hat{v}_t y|_{\partial\Omega} + \int_\Omega y\hat{v}_{tt} + \hat{v}_x y|_{\partial\Omega} - \int_\Omega y\hat{v}_{xx} \\
&= -\int_\Omega y_t\hat{y}_t + \int_\Omega y_x\hat{y}_x + \int_\Omega y(\hat{v}_{tt} - \hat{v}_{xx}) \\
&= -\int_\Omega y_t\hat{y}_t + \int_\Omega y_x\hat{y}_x
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_\Omega \left[(p - g(u))(\hat{y} + \hat{v}) \right] dxdt = -\int_\Omega y_t\hat{y}_t + \int_\Omega y_x\hat{y}_x,$$

que al reordenar obtenemos

$$\int_\Omega \left\{ y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - (g(u) - p)(\hat{y} + \hat{v}) \right\} dxdt = 0$$

Ahora veamos que bajo cierta regularidad toda solución débil es solución fuerte, es decir pasar de (3.5) a (3.4). Supóngase que es válida la ecuación (3.5) para todo $\hat{y}+\hat{v} \in (Y \cap C^2) \oplus (N \cap C^2)$ esto es

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[(p-g(u))(\hat{y}+\hat{v})\right] dx\,dt &= -\int_\Omega y_t \hat{y}_t + \int_\Omega y_x \hat{y}_x \\
&= -\int_\Omega y_t \hat{y}_t + \int_\Omega y_x \hat{y}_x + \int_\Omega \Box \hat{v}\, y \\
&= -\int_\Omega y_t \hat{y}_t + \int_\Omega y_x \hat{y}_x + \int_\Omega (\hat{v}_{tt} - \hat{v}_{xx})\, y \\
&= -\int_\Omega y_t \hat{y}_t + \int_\Omega y_x \hat{y}_x + \int_\Omega y \hat{v}_{tt} - \int_\Omega y \hat{v}_{xx}
\end{aligned}$$

Integrando por partes y usando el hecho de que $v, y, \hat{v}, \hat{y}$ son funciones doble periódicas de periodo 2π se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[(p-g(u))(\hat{y}+\hat{v})\right] dx\,dt &= -y_t\hat{y}\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega y_{tt}\hat{y} + y_x\hat{y}\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega y_{xx}\hat{y} + \hat{v}_t y\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega y_t\hat{v}_t - \hat{v}_x y\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega y_x\hat{v}_x \\
&= \int_\Omega y_{tt}\hat{y} - \int_\Omega y_{xx}\hat{y} - \int_\Omega y_t\hat{v}_t + \int_\Omega y_x\hat{v}_x \\
&= \int_\Omega y_{tt}\hat{y} - \int_\Omega y_{xx}\hat{y} - y_t\hat{v}\Big|_{\partial\Omega} + \int_\Omega y_{tt}\hat{v} + y_x\hat{v}\Big|_{\partial\Omega} - \int_\Omega y_{xx}\hat{v} \\
&= \int_\Omega y_{tt}\hat{y} - y_{xx}\hat{y} + y_{tt}\hat{v} - y_{xx}\hat{v} \\
&= \int_\Omega (y_{tt} - y_{xx})(\hat{y}+\hat{v}) \\
&= \int_\Omega (y_{tt} - y_{xx})(\hat{y}+\hat{v}) + \int_\Omega (v_{tt} - v_{xx})(\hat{y}+\hat{v}) \\
&= \int_\Omega (y_{tt} - y_{xx} + v_{tt} - v_{xx})(\hat{y}+\hat{v})
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_\Omega (y_{tt} - y_{xx} + v_{tt} - v_{xx} - p + g(u))(\hat{y}+\hat{v}) = 0$$

para todo $\hat{y}+\hat{v}$. Dado que $\hat{y}+\hat{v} \in C^2$ y $y_{tt} - y_{xx} + v_{tt} - v_{xx} - p + g(u)$ esta al menos en $L^1(\Omega)$ (ver [Brezis, 2010, p.110]), se tiene $y_{tt} - y_{xx} + v_{tt} - v_{xx} - p + g(u) = 0$ entonces,

$$\begin{aligned}
p(x,t) - g(u) &= y_{tt} - y_{xx} + v_{tt} - v_{xx} \\
&= u_{tt} - u_{xx}
\end{aligned}$$

Así,

$$\Box u = p(x,t) - g(u)$$

Donde $u = y + v \in (Y \cap C^2) \oplus (N \cap C^2)$. De lo anterior se puede concluir que toda solución fuerte es solución débil y bajo cierta regularidad toda solución débil es solución fuerte.

§ 3.3. Método de reducción de Lyapunov-Schmidt

Para poder encontrar soluciones al problema (3.4) se recurre al Método de reducción de Lyapunov-Schmidt (ver [Chang, 2005, p.33]). Este método es muy utilizado en los problemas de análisis no lineal, ya que usualmente permite reducir un problema de dimensión infinita a un sistema de dimensión finita o como en nuestro caso reducir a espacios más sencillos. El método de reducción varía de acuerdo al problema no lineal que se esté considerando. Para el caso semilineal (3.4) la siguiente proposición ilustra el método.

Proposición 3.3.1. *$u = y + v \in Y \oplus N$ es solución débil al problema (3.4) si y solo si v, y satisfacen el sistema*

$$v = -\frac{1}{\tau} Q_1(h(y+v) - p) \tag{3.6}$$

$$y = (\Box + \tau I)^{-1} Q_2(h(y+v) - p) \tag{3.7}$$

donde $Q_1 : L^2(\Omega) \to N$ es la proyección ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre N y $Q_2 : L^2(\Omega) \to N^{\perp}$ denota la proyección ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre $N^{\perp}$

Demostración. Demostremos primero la necesidad. Supóngase que $u = y + v \in Y \oplus N$ es solución débil al problema (3.4). Como (3.5) se cumple para todo $\hat{y} + \hat{v} \in Y \oplus N$ tomemos $\hat{y} = 0$, entonces para todo $\hat{v} \in N$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} -(g(u) - p)\hat{v}\, dxdt \\
&= \int_{\Omega} -(\tau u + h(u) - p)\hat{v}\, dxdt \\
&= \int_{\Omega} -(\tau(y+v) + h(y+v) - p)\hat{v}\, dxdt \\
&= \int_{\Omega} -\tau y \hat{v}\, dxdt - \int_{\Omega} \tau v \hat{v}\, dxdt - \int_{\Omega} (h(y+v) - p)\hat{v}\, dxdt
\end{aligned}$$

Por ser Q_1 operador autoadjunto[1] se tiene que $\langle Q_1(\hat{v}), h(y+v) - p \rangle_2 = \langle \hat{v}, Q_1(h(y+v) - p) \rangle_2$, donde $\hat{v} = Q_1(\hat{v})$ por estar $\hat{v} \in N$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} -\tau v \hat{v}\, dxdt &= \int_{\Omega} (h(y+v) - p)\hat{v}\, dxdt \\
&= \int_{\Omega} (h(y+v) - p) Q_1(\hat{v})\, dxdt \\
&= \int_{\Omega} Q_1(h(y+v) - p)\hat{v}\, dxdt
\end{aligned}$$

[1]Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal y acotado donde H_1, H_2 son espacios de Hilbert. El operador adjunto de Hilbert de T es $T^* : H_2 \to H_1$ tal que para $x \in H_1$, $y \in H_2$, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$. Se dice que T es autoadjunto si $T = T^*$, es decir, $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$

Como esta igualdad se cumple para todo $\hat{v}$, $-\tau v = Q_1(h(y+v)-p)$, que es (3.6). Para $y \in Y$ se tiene que

$$y(x,t) = \sum_{k\neq j} y_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + y_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + y_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + y_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)$$

$$y_t(x,t) = \sum_{k\neq j} -j\left[y_1(k,j)\beta_{kj}(x,t) - y_2(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + y_3(k,j)\delta_{kj}(x,t) - y_4(k,j)\gamma_{kj}(x,t)\right]$$

$$y_x(x,t) = \sum_{k\neq j} k\left[y_1(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + y_2(k,j)\delta_{kj}(x,t) - y_3(k,j)\alpha_{kj}(x,t) - y_4(k,j)\beta_{kj}(x,t)\right]$$

Tomando en (3.5) $\hat{v} = 0$ y $\hat{y} = \alpha_{k_0 j_0}$ fijo, $\hat{y}_t = -j_0\beta_{k_0 j_0}$, $\hat{y}_x = k_0\gamma_{k_0 j_0}$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \left\{(y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x) - (g(u)-p)\hat{y}\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{(y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x) - (\tau u + h(u)-p)\hat{y}\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{(y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x) - \tau y\hat{y} - \tau v\hat{y} - (h(u)-p)\hat{y}\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega y_t\hat{y}_t\, dxdt - \int_\Omega y_x\hat{y}_x\, dxdt - \int_\Omega \tau y\hat{y}\, dxdt - \int_\Omega (h(u)-p)\hat{y}\, dxdt
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Es claro que $\langle \alpha_{kj}, \beta_{k_0 j_0}\rangle_2 = \langle \gamma_{kj}, \beta_{k_0 j_0}\rangle_2 = \langle \delta_{kj}, \beta_{k_0 j_0}\rangle_2 = 0$ para todo $k, j = 0,1,2,\ldots$ y que $\langle \beta_{kj}, \beta_{k_0 j_0}\rangle_2 = 0$ para $k \neq k_0$ y $j \neq j_0$, por tanto

$$\begin{aligned}
\int_\Omega y_t\hat{y}_t\, dxdt &= \int_\Omega \left\{\left[\sum_{k\neq j} -j\left(y_1(k,j)\beta_{kj} - y_2(k,j)\alpha_{kj} + y_3(k,j)\delta_{kj} - y_4(k,j)\gamma_{kj}\right)\right](-j_0\beta_{k_0 j_0})\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{\sum_{k\neq j} j j_0\left[y_1(k,j)\beta_{kj}\beta_{k_0 j_0} - y_2(k,j)\alpha_{kj}\beta_{k_0 j_0} + y_3(k,j)\delta_{kj}\beta_{k_0 j_0} - y_4(k,j)\gamma_{kj}\beta_{k_0 j_0}\right]\right\}\, dxdt \\
&= \sum_{k\neq j} j j_0\left[y_1(k,j)\int_\Omega \beta_{kj}\beta_{k_0 j_0} - y_2(k,j)\int_\Omega \alpha_{kj}\beta_{k_0 j_0} + y_3(k,j)\int_\Omega \delta_{kj}\beta_{k_0 j_0} - y_4(k,j)\int_\Omega \gamma_{kj}\beta_{k_0 j_0}\right] \\
&= \sum_{k\neq j} j j_0\left[y_1(k,j)\int_\Omega \beta_{kj}\beta_{k_0 j_0}\, dxdt\right] \\
&= j_0^2 y_1(k_0, j_0)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(k_0 x)\sin^2(j_0 t)\, ddt \\
&= \pi^2 j_0^2 y_1(k_0, j_0)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Análogamente

$$\int_\Omega y_x\hat{y}_x\, dxdt = \pi^2 k_0^2 y_1(k_0, j_0) \tag{3.10}$$

$$\int_\Omega \tau y\hat{y}\, dxdt = \pi^2\tau y_1(k_0, j_0).. \tag{3.11}$$

Ahora denotemos $q(x,t) = h(u(x,t))$ entonces

$$Q_2(q(x,t)) = \sum_{k\neq j} q_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + q_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + q_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + q_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)$$

$$Q_2(p(x,t)) = \sum_{k\neq j} p_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + p_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + p_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + p_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)$$

Razonando de forma similar a (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega p(x,t)\hat{y}\,dxdt &= \int_\Omega p(x,t)Q_2(\hat{y})\,dxdt\\ &= \int_\Omega Q_2(p(x,t))\hat{y}\,dxdt\\ &= \pi^2 p_1(k_0,j_0) \qquad (3.12)\\ \int_\Omega q(x,t)\hat{y}\,dxdt &= \int_\Omega q(x,t)Q_2(\hat{y})\,dxdt\\ &= \int_\Omega Q_2(q(x,t))\hat{y}\,dxdt\\ &= \pi^2 q_1(k_0,j_0) \qquad (3.13)\end{aligned}$$

de (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) se tiene que (3.8) queda

$$\begin{aligned}0 &= \pi^2\left[j_0^2 y_1(k_0,j_0) - k_0^2 y_1(k_0,j_0) - \tau y_1(k_0,j_0) - q_1 y_1(k_0,j_0) + p_1 y_1(k_0,j_0)\right]\\ &= j_0^2 y_1(k_0,j_0) - k_0^2 y_1(k_0,j_0) - \tau y_1(k_0,j_0) - q_1 y_1(k_0,j_0) + p_1 y_1(k_0,j_0)\end{aligned}$$

de donde

$$y_1(k_0,j_0) = \frac{-1}{k_0^2 - j_0^2 + \tau}(q_1 - p_1)(k_0,j_0).$$

Del mismo modo tomando en (3.5)

$$\begin{aligned}\hat{v} = 0 \;\text{ y }\; \hat{y} = \beta_{k_0 j_0}\\ \hat{v} = 0 \;\text{ y }\; \hat{y} = \gamma_{k_0 j_0}\\ \hat{v} = 0 \;\text{ y }\; \hat{y} = \delta_{k_0 j_0}\end{aligned}$$

fijos, se obtiene respectivamente

$$\begin{aligned}y_2(k_0,j_0) &= \frac{-1}{k_0^2 - j_0^2 + \tau}(q_2 - p_2)(k_0,j_0)\\ y_3(k_0,j_0) &= \frac{-1}{k_0^2 - j_0^2 + \tau}(q_3 - p_3)(k_0,j_0)\\ y_4(k_0,j_0) &= \frac{-1}{k_0^2 - j_0^2 + \tau}(q_4 - p_4)(k_0,j_0)\end{aligned}$$

para cada $k_0, j_0 = 0,1,2\ldots$, $k_0 \neq j_0$, entonces

$$\begin{aligned}y &= \sum_{k\neq j}\frac{-1}{k^2 - j^2 + \tau}\left[(q_1-p_1)(k,j)\alpha_{k,j} + (q_2-p_2)(k,j)\beta_{k,j} + (q_3-p_3)(k,j)\gamma_{k,j} + (q_4-p_4)(k,j)\delta_{k,j}\right]\\ &= -(\Box + \tau I)^{-1}Q_2(q(x,t) - p(x,t))\\ &= -(\Box + \tau I)^{-1}Q_2(h(y+v) - p).\end{aligned}$$

Demostremos ahora la suficiencia. Supongamos que son válidas las ecuaciones (3.6) y (3.7), para $\hat{y} \in Y$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(x,t) &= \sum_{k\neq j} \hat{y}_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + \hat{y}_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + \hat{y}_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + \hat{y}_4(k,j)\delta_{kj}(x,t) \\
\hat{y}_t(x,t) &= \sum_{k\neq j} -j\left[\hat{y}_1(k,j)\beta_{kj}(x,t) - \hat{y}_2(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + \hat{y}_3(k,j)\delta_{kj}(x,t) - \hat{y}_4(k,j)\gamma_{kj}(x,t)\right] \\
\hat{y}_x(x,t) &= \sum_{k\neq j} k\left[\hat{y}_1(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + \hat{y}_2(k,j)\delta_{kj}(x,t) - \hat{y}_3(k,j)\alpha_{kj}(x,t) - \hat{y}_4(k,j)\beta_{kj}(x,t)\right]
\end{aligned}
$$

Multiplicando (3.7) por $\hat{y}$, usando la ortogonalidad de las funciones $\alpha_{kj}, \beta_{kj}, \gamma_{kj}, \delta_{kj}$, la representación de $Q_2(q-p)$ para $q(x,t) = h(u(x,t))$ y propiedades de la integral, de (3.7)

$$\int_\Omega \left\{y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - \tau y\hat{y} - (h(u)-p)\hat{y}\right\}\, dxdt = 0 \tag{3.14}$$

para todo $\hat{y} \in Y$. De (3.6) para todo $\hat{v} \in N$

$$\hat{v}v = -\frac{1}{\tau}Q_1(h(y+v)-p)\hat{v}.$$

Integrando sobre Ω

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \tau v\hat{v}\, dxdt &= \int_\Omega Q_1(h(y+v)-p)\hat{v}\, dxdt \\
&= \int_\Omega (h(y+v)-p)\hat{v}\, dxdt
\end{aligned}
$$

De donde

$$\int_\Omega \left\{-\tau v\hat{v} - (h(u)-p)\hat{v}\right\}\, dxdt = 0 \tag{3.15}$$

Sumando (3.14) y (3.15)

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \left\{y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - \tau y\hat{y} - (h(u)-p)\hat{y}\right\}\, dxdt + \int_\Omega \left\{-\tau v\hat{v} - (h(u)-p)\hat{v}\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - \tau y\hat{y} - (h(u)-p)\hat{y} - \tau v\hat{v} - (h(u)-p)\hat{v}\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - \tau y\hat{y} - \tau v\hat{y} - \tau y\hat{v} - \tau v\hat{v} - (h(u)-p)(\hat{v}+\hat{y})\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - \tau(y+v)(\hat{v}+\hat{y}) - (h(u)-p)(\hat{v}+\hat{y})\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - \left[\tau(y+v) + h(u) - p\right](\hat{v}+\hat{y})\right\}\, dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{y_t\hat{y}_t - y_x\hat{y}_x - \left[g(y+v) - p\right](\hat{v}+\hat{y})\right\}\, dxdt
\end{aligned}
$$

para todo $\hat{y} + \hat{v} \in Y \oplus N$, esto es $u = y + v$ es solución débil de (3.4). $\square$

§ 3.4. Análisis en el núcleo

Sea $u = v + y \in N \oplus Y$ una solución débil para (3.4). A su vez $v(x,t) = \bar{v} + v_1(x+t) + v_2(t-x)$ con $\bar{v} \in \mathbb{R}$, v_1, v_2 funciones $2\pi-$periódicas.

Proposición 3.4.1. *Si v_1, v_2 tienen promedio nulo, es decir*

$$\int_0^{2\pi} v_1(s)ds = \int_0^{2\pi} v_2(s)ds = 0 \tag{3.16}$$

La representación de v es única.

Demostración. Supongamos que $v_1, v_2, w_1, w_2 \in L^2(\Omega)$ tal que,

$$\bar{v} + v_1(x+t) + v_2(t-x) = \bar{v} + w_1(x+t) + w_2(t-x)$$

de aquí

$$(v_1 - w_1)(x+t) = (w_2 - v_2)(t-x)$$

Si notamos $p_1 = v_1 - w_1$ y $p_2 = w_2 - v_1$ se tiene $p_1(x+t) = p_2(t-x)$ para todo $x, t \in [0, 2\pi]$. Dado que se cumple para todo $x, t \in [0, 2\pi]$ en particular para $t = x$, de donde $p_1(2x) = p_2(0)$, esto sginifica que p_1 es constante. Ahora

$$\begin{aligned}
\bar{p_1} &= \int_0^{2\pi} p_1(s)\,ds \\
&= \int_0^{2\pi} (v_1 - w_1)(s)\,ds \\
&= \int_0^{2\pi} v_1(s)\,ds - \int_0^{2\pi} w_1(s)\,ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

$p_1(t) = k$ donde k una constante que no depende de x ni de t, integrando entre 0 y 2π se tiene

$$\int_0^{2\pi} p_1(s)\,ds = 0 = \int_0^{2\pi} k\,ds$$

de donde $2\pi k = 0$ por tanto $k = 0$. Esto quiere decir que $p_1(t) = 0$ y $v_1(t) = w_1(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Argumentando de manera similiar para $x = -t$ se obtiene que $w_2(t) = v_2(t)$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, así la representación es única. □

Lo que sigue se hace para determinar las ecuaciones integrales para $\bar{v}, v_1$ y v_2. Como (3.5) se cumple para todo $\hat{y} + \hat{v} \in Y \oplus N$, tomando $\hat{y} = 0$ y $\hat{v} = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \left\{p(x,t) - g(u)\right\}\,dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{p(x,t) - \tau(v+y) - h(u)\right\}\,dxdt \\
&= \int_\Omega \left\{p(x,t) - \tau(\bar{v} + v_1(x+t) + v_2(t-x) + y) - h(u)\right\}\,dxdt
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Por (2.9), (3.16) y (3.17) se obtiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega \{p(x,t)-h(u)\} &= \int_\Omega \tau\bar{v} + \int_\Omega \tau v_1(x+t) + \int_\Omega \tau v_2(t-x) + \int_\Omega \tau y\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau\bar{v}\,dx\,dt\\ &= \tau\bar{v}\int_0^{2\pi}\left(x|_0^{2\pi}\right)dt\\ &= 2\pi\tau\bar{v}\int_0^{2\pi} dt\\ &= 4\pi^2\tau\bar{v}\end{aligned}$$

Así,

$$\bar{v} = \frac{1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega \{p(x,t)-h(u(x,t))\}\,dx\,dt \tag{3.18}$$

Para determinar las ecuaciones integrales de v_1, v_2 se consideran las siguientes regiones y los siguientes cambios de variables. Sea $0 \le r \le s \le 2\pi$, considérese la función 2π-periódica $\chi_{[r,s]} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\chi_{[r,s]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [r,s] \\ 0 & \text{si} \quad t \in [0,2\pi]\setminus[r,s]. \end{cases}$$

Sea $\phi(x,t) = \chi_{[r,s]}(t-x)$ y la región

$$A_{r,s} := A = \{(x,t) \in \Omega \ ; \ t-x \in [r-2\pi, s-2\pi] \cup [r,s]\}$$

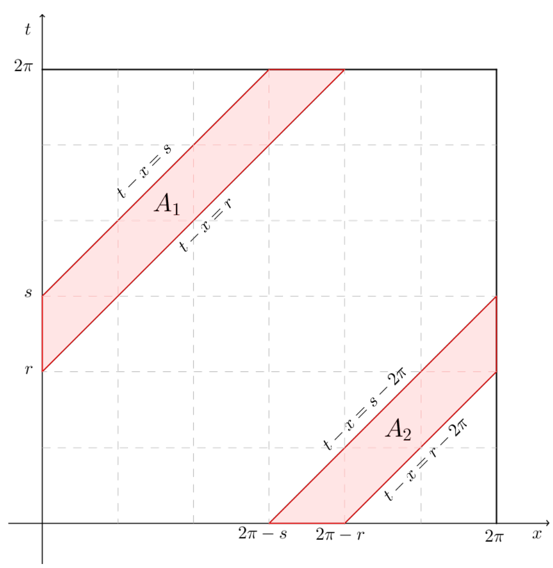

Figura 3.1: Región $A = A_1 \cup A_2$

De esto se tiene que A_1 y A_2 son

$$A_1 = \{(x,t) \in \Omega \ ; \ r \le t-x \le s\}$$

$$A_2 = \{(x,t) \in \Omega \ ; \ r - 2\pi \leq t - x \leq s - 2\pi\}$$

Si se hace para A_1 la transformación $x = \zeta$ y $t = \eta + \zeta$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix}$$

Es claro que el Jacobiano que viene dado por $\frac{\partial(x,t)}{\partial(\zeta,\eta)}$=1 y A_1 se transforma en

$$\mathtt{A}_1 = \left\{(\zeta,\eta) \in \Omega \ ; \ r \leq \eta \leq s, \ 0 \leq \zeta \leq 2\pi, \ 0 \leq \eta + \zeta \leq 2\pi\right\}$$

que es

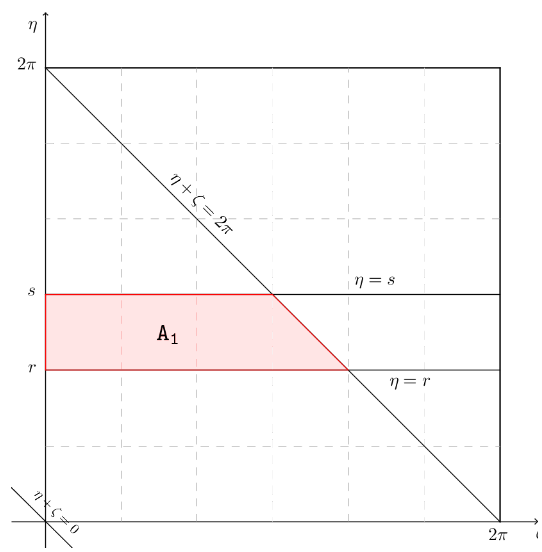

Figura 3.2: Región A_1 transformada

Si se hace para A_2 la transformación $x = \zeta$ y $t = \eta + \zeta - 2\pi$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

Es claro que el jacobiano que viene dado por $\frac{\partial(x,t)}{\partial(\zeta,\eta)}$=1 y A_2 se transforma en

$$\mathtt{A}_2 = \left\{(\zeta,\eta) \in \Omega \ ; \ r \leq \eta \leq s, \ 0 \leq \zeta \leq 2\pi, \ 2\pi \leq \eta + \zeta \leq 4\pi\right\}$$

que es

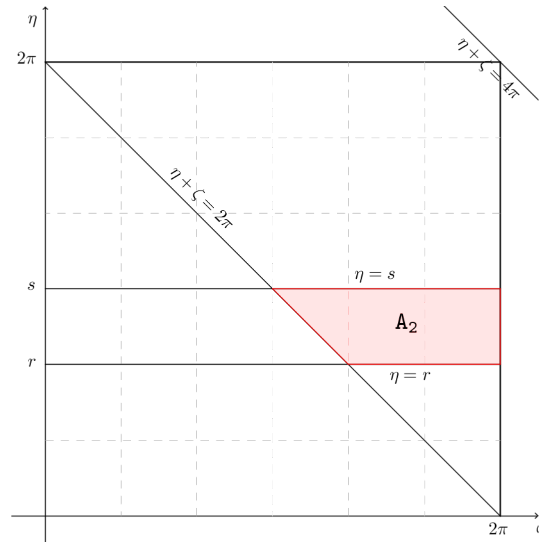

Figura 3.3: Región A_2 transformada

Por tanto la nueva región de integración se convierte en el rectángulo $[0,2\pi]\times[r,s]$ en el plano ζ,η

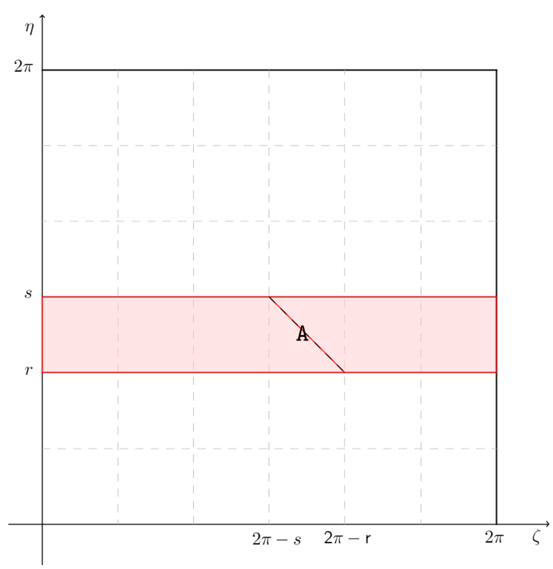

Figura 3.4: Región A transformada

Recordemos dos resultados importantes que se usarán en lo que sigue del trabajo

Teorema 3.4.1. ***(Teorema del valor medio para integrales en** L^p**).*** *Sea $f\in L^p(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, μ la medida de Lebesgue. Si f es integrable en Ω entonces*

$$\int_\Omega f=\mu(\Omega)f(s_0)$$

Para algún $s_0 \in \Omega$.

Teorema 3.4.2. ***(Teorema de diferenciación de Lebesgue)*** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, B una bola cerrada que contiene a x entonces en casi todo punto x vale*

$$\lim_{r(B)\to 0} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)-f(x)|\, dy = 0 \quad y \quad \lim_{r(B)\to 0} \frac{1}{|B|}\int_B f(y)\, dy = f(x)$$

[Folland, 1999, p.98].

Teniendo en cuenta lo realizado anteriormente se encontrarán las expresiones para v_1, v_2. Dado que $\Box\phi = 0$ se tiene que $\phi \in N$ y por (3.17)

$$\begin{aligned}
\int_A p(x,t)\, dxdt &= \int_\Omega \phi(x,t)p(x,t)\, dxdt \\
&= \int_\Omega \phi(x,t)\,(\tau v(x,t) + h(u(x,t)))\, dxdt \\
&= \int_A \{\tau v(x,t) + h(u(x,t))\}\, dxdt \\
&= \int_A \tau v(x,t)\, dxdt + \int_A h(u(x,t))\, dxdt
\end{aligned} \tag{3.19}$$

obsérvese que

$$\begin{aligned}
\int_A p(x,t)\, dxdt &= \int_{A_1} p(x,t)\, dxdt + \int_{A_2} p(x,t)\, dxdt \\
&= \int_{\mathtt{A}_1} p(x,x+\eta)\, dxd\eta + \int_{\mathtt{A}_2} p(x,x+\eta-2\pi)\, dxd\eta \\
&= \int_{\mathtt{A}_1} p(x,x+\eta)\, dxd\eta + \int_{\mathtt{A}_2} p(x,x+\eta)\, dxd\eta \\
&= \int_{\mathtt{A}} p(x,x+\eta)\, dxd\eta
\end{aligned}$$

realizando el cambio de variable propuesto anteriormente y por (3.16)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathtt{A}} p(x,x+\eta)\, dxd\eta &= \int_{\mathtt{A}} \tau v(x,x+\eta)\, dxd\eta + \int_{\mathtt{A}} h(u(x,x+\eta))\, dxd\eta \\
&= \int_r^s \int_0^{2\pi} \tau\left(\hat{v} + v_1(2x+\eta) + v_2(\eta)\right)\, dxd\eta + \int_{\mathtt{A}} h(u(x,x+\eta))\, dxd\eta \\
&= \int_r^s \left[\tau\hat{v}\int_0^{2\pi} dx + \tau\int_0^{2\pi} v_1(2x+\eta)\, dx + \tau v_2(\eta)\int_0^{2\pi} dx\right] d\eta \\
&+ \int_{\mathtt{A}} h(u(x,x+\eta))\, dxd\eta \\
&= 2\pi\tau\left[\int_r^s \hat{v}\, d\eta + \int_r^s v_2(\eta)\, d\eta\right] + \int_{\mathtt{A}} h(u(x,x+\eta))\, dxd\eta \\
&= 2\pi\tau\hat{v}(s-r) + 2\pi\tau\int_r^s v_2(\eta)\, d\eta + \int_{\mathtt{A}} h(u(x,x+\eta))\, dxd\eta
\end{aligned}$$

Usando el Teorema de Valor Medio para Integrales en $L^p(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathtt{A}} p(x,x+\eta)\,dxd\eta &= 2\pi\tau\hat{v}(s-r)+2\pi\tau(s-r)v_2(s_2)+\int_{\mathtt{A}} h(u(x,x+\eta))\,dxd\eta\\ &= 2\pi\tau(s-r)(\hat{v}+v_2(s_2))+\int_{\mathtt{A}} h(u(x,x+\eta))\,dxd\eta\end{aligned}$$

donde $s_2\in(r,s)$, Esto es

$$\int_r^s\int_0^{2\pi} p(x,x+\eta)\,dxd\eta = 2\pi\tau(s-r)(\hat{v}+v_2(s_2))+\int_r^s\int_0^{2\pi} h(u(x,x+\eta))\,dxd\eta,$$

dividiendo entre $s-r$ y tomando límite cuando $s\to r$ se tiene

$$\lim_{s\to r}\frac{1}{s-r}\int_r^s\int_0^{2\pi} p(x,x+\eta)\,dxd\eta = \lim_{s\to r}\frac{2\pi\tau(s-r)(\hat{v}+v_2(s_2))}{s-r}+\lim_{s\to r}\frac{1}{s-r}\int_r^s\int_0^{2\pi} h(u(x,x+\eta))\,dxd\eta$$

Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue se tiene que

$$\int_0^{2\pi} p(x,x+r)\,dx = 2\pi\tau(\hat{v}+v_2(r))+\int_0^{2\pi} h(u(x,x+r))\,dx \tag{3.20}$$

Para casi todo $r\in[0,2\pi]$. Tomando $\psi(x,t)=\chi_{[r,s]}(x+t)$,remplazando A por

$$\{(x,t)\in\Omega\ ;\ t+x\in[r+2\pi,s+2\pi]\cup[r,s]\}$$

y argumentando de manera similar a lo anterior se llega a

$$\int_0^{2\pi} p(x,r-x)\,dx = 2\pi\tau(\hat{v}+v_1(r))+\int_0^{2\pi} h(u(x,r-x))\,dx, \tag{3.21}$$

para casi todo $r\in[0,2\pi]$.

3.4.1. Ecuación integral de núcleo

Lema 3.4.1. *Si $\bar{v}, v_1, v_2$ satisfacen (3.18), (3.21), (3.20) entonces v satisface* (3.6).

Demostración. Sea ϕ como en (3.19), recordemos que $L^2(\Omega)=N\oplus N^{\perp}$ y si $p\in L^2(\Omega)$ entonces $p=Q_1(p)+Q_2(p)$ luego

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi Q_1(p)\,dxdt &= \int_\Omega \phi Q_1(p)\,dxdt+\int_\Omega \phi Q_2(p)\,dxdt\\ &= \int_\Omega \phi\big(Q_1(p)+Q_2(p)\big)\,dxdt\\ &= \int_\Omega \phi p\,dxdt\\ &= \int_\Omega \chi_{[r,s]}(t-x)p(x,t)\,dtdx\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\chi_{[r,s]}(t-x)p(x,t)\,dtdx\\ &= \int_0^{2\pi}\int_x^{x+2\pi}\chi_{[r,s]}(t-x)p(x,t)\,dtdx\end{aligned} \tag{3.23}$$

Si se hace el cambio de variable $x = \zeta$ y $t = \eta + \zeta$ la integral (3.23) queda

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi Q_1(p)\, dxdt &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{[}r,s](\eta) p(x,x+\eta)\, d\eta dx \\
&= \begin{cases} \int_0^{2\pi}\int_r^s p(x,x+\eta)\, d\eta dx & \text{si} \quad \eta \in [r,s] \\ 0 & \text{si} \quad \eta \in [0,2\pi]\setminus[r,s] \end{cases} \\
&= \int_r^s \int_0^{2\pi} p(x,x+\eta)\, dx d\eta
\end{aligned}$$

por (3.20)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi Q_1(p)\, dxdt &= \int_r^s \left[2\pi\tau(\hat{v}+v_2(\eta)) + \int_0^{2\pi} h(u(x,x+\eta))\, dx\right] d\eta \\
&= \int_r^s \int_0^{2\pi} \left\{\tau(\hat{v}+v_2(\eta)) + h(u(x,x+\eta))\right\} dx d\eta \\
&= \int_0^{2\pi} \chi_{[}r,s](\eta) \int_0^{2\pi} \left[\tau(\hat{v}+v_2(\eta)) + h(u(x,x+\eta))\right] dx d\eta \\
&= \int_0^{2\pi} \chi_{[}r,s](\eta) \int_0^{2\pi} \left[\tau(\hat{v}+v_1(2x+\eta)+v_2(\eta)) + h(u(x,x+\eta))\right] dx d\eta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_{[}r,s](\eta) \left[\tau(\hat{v}+v_1(2x+\eta)+v_2(\eta)) + h(u(x,x+\eta))\right] dx d\eta \\
&= \int_\Omega \chi_{[}r,s](\eta) \left[\tau(\hat{v}+v_1(2x+\eta)+v_2(\eta)) + h(u(x,x+\eta))\right] dx d\eta
\end{aligned}$$

Ahora el cambio de variable $x = \zeta$ y $\eta = t - x$ hace que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi Q_1(p)\, dxdt &= \int_0^{2\pi}\int_x^{x+2\pi} \chi_{[}r,s](t-x)\,[\tau(\hat{v}+v_1(t+x)+v_2(t-x)) + h(u(x,t))]\, dtdx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_x^{x+2\pi} \chi_{[}r,s](t-x)\,[\tau v(x,t) + h(u(x,t))]\, dtdx \\
&= \int_0^{2\pi}\int_x^{x+2\pi} \phi\,[\tau v(x,t) + h(u(x,t))]\, dtdx \\
&= \int_\Omega \phi\,[\tau v(x,t) + h(u(x,t))]\, dxdt. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Como Q_1 es un operador autoadjunto y $\phi \in N$ entonces para todo $f \in L^2(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi f &= \int_\Omega Q_1(\phi) f \\
&= \int_\Omega \phi Q_1(f)
\end{aligned}$$

Tomando $f = \tau v(x,t) + h(u(x,t))$ de (3.3)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi Q_1(p)\, dxdt &= \int_\Omega \phi Q_1\left([\tau v(x,t) + h(u(x,t))]\right) dxdt \\
&= \int_\Omega \phi\,[\tau v(x,t) + Q_1(h(u(x,t)))]\, dxdt
\end{aligned}$$

Como $u = y + v \in Y \oplus N$ entonces

$$\int_\Omega \phi Q_1(p)\, dxdt = \int_\Omega \phi \left[\tau v(x,t) + Q_1(h(y+v))\right] dxdt$$

Tomando $\psi(x,t) = \chi_{[r,s]}(x+t)$ y argumentando de forma similar a la anterior

$$\int_\Omega \psi Q_1(p)\, dxdt = \int_\Omega \psi \left[\tau v + Q_1(h(y+v))\right]\, dxdt$$

Si η es una combinación lineal de funciones de la forma $\chi_{[r,s]}(x+t)$ y $\chi_{[r,s]}(t-x)$

$$\int_\Omega \eta Q_1(p)\, dxdt = \int_\Omega \eta \left[\tau v + Q_1(h(y+v))\right]\, dxdt \tag{3.25}$$

ϕ, ψ son funciones simples[2] de N y toda combinación lineal de estas funciones es simple en N. Ya que las funciones simples de N son densas en N entonces (3.25) se cumple para todo $\eta \in N$, por [Kreyszig, 1978, p.190]

$$Q_1(p) = \tau v + Q_1(h(y+v)).$$

□

3.4.2. Soluciones en el núcleo

Sea $\tau \notin \sigma(\Box)$, $p(x,t) = cq(x,t)$ y φ una solución para

$$\begin{cases} \varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \tau\varphi = q(x,t) \\ \varphi(x,t) = \varphi(x+2\pi, t) = \varphi(x, t+2\pi) \end{cases} \tag{3.26}$$

De (3.4) y (3.26) se tiene el sistema

$$\begin{cases} \Box u + \tau u + h(u) = p(x,t) \\ \Box\varphi + \tau\varphi = q(x,t) \end{cases}$$

multiplicando la segunda ecuación por $c > 0$

$$\begin{cases} \Box u + \tau u + h(u) = p(x,t) \\ \Box(c\varphi) + \tau(c\varphi) = cq(x,t) = p(x,t) \end{cases} \tag{3.27}$$

Restando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\Box(u - c\varphi) + \tau(u - c\varphi) + h(u) = 0 \tag{3.28}$$

Como se esta suponiendo u de la forma $y + v \in Y \oplus N$, $u - c\varphi$ queda partida en dos, una parte en el núcleo y la otra en el rango, a saber

$$\begin{cases} v - cQ_1\varphi \in N \\ y - cQ_2\varphi \in Y \end{cases}$$

[2]Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama *simple* si su imagen es un conjunto finito

Lo anterior es un tecnicismo para mostrar el tipo de soluciones que se quieren encontrar en el núcleo. Sea $z(x,t) = v(x,t) - cQ_1\varphi(x,t)$, como $v, Q_1\varphi \in N$ se pueden escribir

$$\begin{aligned} Q_1\varphi(x,t) &= \bar{\varphi} + \varphi_1(x+t) + \varphi_2(t-x) \\ v(x,t) &= \bar{v} + v_1(x+t) + v_2(t-x) \end{aligned}$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, v_1, v_2$ son doble periódicas de periodo 2π y de promedio nulo, así $z(x,t) = \bar{z} + z_1(x+t) + z_2(t-x)$ donde

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \bar{v} - c\bar{\varphi} \\ z_1 &= v_1 - c\varphi_1 \\ z_2 &= v_2 - c\varphi_2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Remplazando (3.29) en (3.21)

$$\begin{aligned} c\int_0^{2\pi} q(x,r-x)\,dx &= 2\pi\tau\left(\bar{z} + c\bar{\varphi} + z_1(r) + c\varphi_1(r)\right) + \int_0^{2\pi} h((y+z+cQ_1\varphi)(x,r-x))\,dx \\ &= 2\pi\tau\left(\bar{z} + c\bar{\varphi} + z_1(r) + c\varphi_1(r)\right) + \int_0^{2\pi} h((c\varphi - c\varphi + y + z + cQ_1\varphi)(x,r-x))\,dx \\ &= 2\pi\tau\left(\bar{z} + c\bar{\varphi} + z_1(r) + c\varphi_1(r)\right) + \int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x,r-x))\,dx \end{aligned} \tag{3.30}$$

donde $\zeta = y - c\varphi + cQ_1\varphi = y - cQ_2\varphi \in Y$. Dado que φ es solución de (3.26) también cumple la ecuación (3.21) para $h = 0$ entonces

$$\int_0^{2\pi} q(x,r-x)\,dx = 2\pi\tau\left[\bar{\varphi} + \varphi_1(r)\right]$$

para casi todo $r \in [0,2\pi]$, sustituyendo esto en (3.30)

$$2c\pi\tau\left[\bar{\varphi} + \varphi_1(r)\right] = 2\pi\tau\left(\bar{z} + c\bar{\varphi} + z_1(r) + c\varphi_1(r)\right) + \int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x,r-x))\,dx$$

de donde

$$z_1(r) = -\bar{z} - \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x,r-x))\,dx \tag{3.31}$$

Similarmente remplazando (3.29) en (3.20) y teniendo en cuenta que

$$\int_0^{2\pi} q(x,r+x)\,dx = 2\pi\tau\left[\bar{\varphi} + \varphi_2(r)\right]$$

se obtiene

$$z_2(r) = -\bar{z} - \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x,r+x))\,dx \tag{3.32}$$

Ya que φ es solución de (3.26), ésta cumple la ecuación (3.18) para $h = 0$, es decir $\bar{\varphi} = \dfrac{1}{4\pi^2\tau}\displaystyle\int_\Omega q(x,t)\,dxdt$. Multiplicando por c se tiene

$$\int_\Omega p(x,t)\,dxdt = 4\pi^2\tau c\bar{\varphi} \tag{3.33}$$

Si reemplazamos (3.29) en (3.18) y usando (3.33) se tiene

$$\begin{aligned}\bar{z} + c\bar{\varphi} &= \frac{1}{4\pi^2\tau}\left[\int_\Omega p(x,t)\,dxdt - \int_\Omega h(y+v)\,dxdt\right]\\ &= \frac{1}{4\pi^2\tau}\left[4\pi^2\tau c\bar{\varphi} - \int_\Omega h((c\varphi + z + \zeta)(x,t))\,dxdt\right]\end{aligned}$$

Así

$$\bar{z} = \frac{-1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega h((c\varphi + z + \zeta)(x,t))\,dxdt \tag{3.34}$$

En lo que sigue del trabajo se hará uso del siguiente teorema, el cual es una versión del principio de contracción con parámetros.

Teorema 3.4.3. *Sean (X_1, d) un espacio métrico completo y (X_2, δ) un espacio métrico. Si $f : X_1 \times X_2 \to X_1$ es una función continua y existe $\Gamma \in [0,1)$ tal que*

$$d(f(x_1, y), f(x_2, y)) \leq \Gamma d(x_1, x_2) \tag{3.35}$$

para todo $x_1, x_2 \in X_1$ y $y \in X_2$, entonces existe una función $\phi : X_2 \to X_1$ tal que $f(\phi(y), y) = \phi(y)$. Más aún si $f(x, y) = x$ entonces $x = \phi(y)$

Lema 3.4.2. *Si φ no es plana sobre características, entonces existe una constante c_0 tal que para $|c| > c_0$ y $\zeta \in Y$ con $||\zeta||_\infty \leq c^\gamma$ el sistema (3.31), (3.32) y (3.34) tiene una única solución $z(\zeta)$. Más aún la transformación*

$$\zeta \to z(\zeta)$$

es continua con respecto a la norma de L^∞ y $||z(\zeta)||_\infty \leq c^\gamma$

Demostración. Sea $\gamma \in (\beta + 1, 1)$ y X_1 el espacio métrico de funciones z de la forma $z(x,t) = \bar{z} + z_1(x+t) + z_2(t-x)$ con $\bar{z} \leq \frac{c^\gamma}{16}$ y z_1, z_2 funciones periódicas medibles, con $||z_i||_\infty \leq c^\gamma$ $(i = 1,2)$ y la métrica dada por

$$\begin{aligned}d(z,w) &\equiv d((\bar{z}, z_1, z_2), (\bar{w}, w_1, w_2))\\ &= |\bar{z} - \bar{w}| + ||z_1 - w_1||_\infty + ||z_2 - w_2||_\infty\end{aligned}$$

X_1 es un subespacio cerrado de N por tanto es completo. Sea $X_2 = \left\{\zeta \in Y\ ;\ ||\zeta||_\infty \leq c^\gamma\right\}$ con $\delta(\zeta_1, \zeta_2) = ||\zeta_1 - \zeta_2||_\infty$. Definimos $N_1(z,\zeta)(r), N_2(z,\zeta)(r)$ y $N_3(z,\zeta)(r)$ como la parte derecha de (3.34), (3.31) y (3.32) respectivamente. también denotamos

$$f(z,\zeta)(r) = (N_1(z,\zeta)(r), N_2(z,\zeta)(r), N_3(z,\zeta)(r)) \tag{3.36}$$

Veamos que para $|c|$ suficientemente grande f satisface las hipótesis del teorema (3.4.3). Para $z \in X_1$ y $\zeta \in X_2$, para algún $r \in [0, 2\pi]$ se tiene

$$\begin{aligned}|N_2(z,\zeta)(r)| &= \left|-\bar{z} - \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x, r-x))\,dx\right|\\ &\leq |\bar{z}| + \frac{1}{2\pi\tau}\left|\int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x, r-x))\,dx\right|\\ &\leq |\bar{z}| + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} \left|h((c\varphi + z + \zeta)(x, r-x))\right|\,dx\end{aligned}$$

Por (3.3) y dado que $z(x,t) = \bar{z} + z_1(x+t) + z_2(t-x)$

$$
\begin{aligned}
|N_2(z,\zeta)(r)| &\leq \frac{|c|^\gamma}{16} + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi}\left[M_1 + \frac{|c\varphi + z + \zeta|^{\beta+1}}{\beta+1}\right] \\
&= \frac{|c|^\gamma}{16} + \frac{1}{2\pi\tau}\left[2\pi M_1 + \int_0^{2\pi}\frac{|c\varphi + z + \zeta|^{\beta+1}}{\beta+1}\,dx\right] \\
&= \frac{|c|^\gamma}{16} + \frac{M_1}{\tau} + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi}\frac{|c\varphi + \bar{z} + z_1 + z_2 + \zeta|^{\beta+1}}{\beta+1}\,dx \\
&= \frac{|c|^\gamma}{16} + \frac{M_1}{\tau} + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi}\left[\frac{|c|^{\beta+1}}{\beta+1}\left|\varphi + \frac{\bar{z}}{c} + \frac{z_1}{c} + \frac{z_2}{c} + \frac{\zeta}{c}\right|^{\beta+1}\right]dx \\
&\leq \frac{|c|^\gamma}{16} + \frac{M_1}{\tau} + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi}\left[\frac{|c|^{\beta+1}}{\beta+1}\left(|\varphi| + \frac{|\bar{z}|}{|c|} + \frac{|z_1|}{|c|} + \frac{|z_2|}{|c|} + \frac{|\zeta|}{|c|}\right)^{\beta+1}\right]dx \\
&\leq \frac{|c|^\gamma}{16} + \frac{M_1}{\tau} + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi}\left[\frac{|c|^{\beta+1}}{\beta+1}\left(|\varphi| + \frac{|c|^\gamma}{16|c|} + \frac{|c|^\gamma}{|c|} + \frac{|c|^\gamma}{|c|} + \frac{|c|^\gamma}{|c|}\right)^{\beta+1}\right]dx \\
&= \frac{|c|^\gamma}{16} + A_1 + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi}\left[\frac{|c|^{\beta+1}}{\beta+1}\left(|\varphi| + \frac{|c|^{\gamma-1}}{16} + 3|c|^{\gamma-1}\right)^{\beta+1}\right]dx \\
&= \frac{|c|^\gamma}{16} + A_1 + \frac{|c|^{\beta+1}}{2\pi\tau(\beta+1)}\int_0^{2\pi}\left(|\varphi| + \frac{49|c|^{\gamma-1}}{16}\right)^{\beta+1}dx \\
&\leq \frac{|c|^\gamma}{16} + A_1 + \frac{|c|^{\beta+1}}{2\pi\tau(\beta+1)}\int_0^{2\pi}\left(|\varphi| + 4|c|^{\gamma-1}\right)^{\beta+1}dx
\end{aligned}
$$

Donde $A_1 = \frac{M_1}{\tau}$. Ya que $\gamma \in (\beta+1, 1)$, $\gamma - 1 \in (\beta, 0)$ donde $\beta \in (-1, 0)$ por tanto $|c|^{\gamma-1} < 1$ y para $A_2 = \frac{1}{2\pi\tau(\beta+1)}\int_0^{2\pi}\left(|\varphi| + 4\right)^{\beta+1}dx$

$$
\begin{aligned}
|N_2(z,\zeta)(r)| &\leq \frac{|c|^\gamma}{16} + A_1 + \frac{|c|^{\beta+1}}{2\pi\tau(\beta+1)}\int_0^{2\pi}\left(|\varphi| + 4\right)^{\beta+1}dx \\
&\leq \frac{|c|^\gamma}{16} + A_1 + A_2|c|^{\beta+1} \\
&\leq \frac{|c|^\gamma}{16} + A_3|c|^{\beta+1}
\end{aligned}
$$

Donde $A_3 \in \mathbb{R}$ con $A_3 > A_1 + A_2$, veamos para que valores de $|c|$ se tiene que $|N_2(z,\zeta)(r)| \leq |c|^\gamma$, que es

$$\frac{|c|^\gamma}{16} + A_3|c|^{\beta+1} \leq |c|^\gamma$$

de donde

$$A_3|c|^{\beta+1} \leq \frac{15}{16}|c|^\gamma$$

Aplicando logaritmo a ambos lados de la inecuación

$$(\beta+1)\ln(|c|) + \ln(A_3) \leq \gamma \ln|c| + \ln\left(\frac{15}{16}\right)$$

y

$$(\gamma-(\beta+1))\ln(|c|)\geq\ln\left(\frac{16}{15}A_3\right)$$

Así para $|c|>k_0$ se tiene

$$|N_2(z,\zeta)(r)|\leq|c|^{\gamma} \tag{3.37}$$

donde

$$k_0=\mathrm{e}^{\left[\frac{\ln\left(\frac{16}{15}A_3\right)}{\gamma-(\beta+1)}\right]}$$

De manera similar se muestra que

$$|N_3(z,\zeta)(r)|\leq|c|^{\gamma} \tag{3.38}$$

por (3.3) y para $A_3>A_1+A_2$, $|c|>k_1$

$$\begin{aligned}
|N_1(z,\zeta)(r)|&=\left|\frac{-1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega h((c\varphi+z+\zeta)(x,t))\,dxdt\right|\\
&\leq\frac{1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega\left|h((c\varphi+z+\zeta)(x,t))\right|\,dxdt\\
&\leq\frac{1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega\left[M_1+\frac{|(c\varphi+z+\zeta)(x,t)|^{\beta+1}}{\beta+1}\right]\,dxdt\\
&=\frac{M_1}{\tau}+\frac{1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega\frac{|(c\varphi+z+\zeta)(x,t)|^{\beta+1}}{\beta+1}\,dxdt\\
&\leq A_1+\frac{1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega\frac{|c|^{\beta+1}}{\beta+1}\left(|\varphi|+\frac{|z|}{|c|}+\frac{|\zeta|}{|c|}\right)^{\beta+1}\,dxdt\\
&\leq A_1+\frac{|c|^{\beta+1}}{4\pi^2\tau(\beta+1)}\int_\Omega\left(|\varphi|+4|c|^{\gamma-1}\right)^{\beta+1}\,dxdt\\
&\leq A_1+\frac{|c|^{\beta+1}}{4\pi^2\tau(\beta+1)}\int_\Omega\left(|\varphi|+4\right)^{\beta+1}\,dxdt\\
&\leq A_1+A_2|c|^{\beta+1}\\
&\leq A_3|c|^{\beta+1}\\
&\leq\frac{|c|^{\gamma}}{16}
\end{aligned}$$

donde

$$k_1=\mathrm{e}^{\left[\frac{\ln(16A_3)}{\gamma-(\beta+1)}\right]}$$

Se ha demostrado que para $|c|>c_0=\text{máx}\{k_0,k_1\}$ f transforma $X_1\times X_2$ en X_1, ya que $h\in C^1$ entonces N_1,N_2,N_3 son continuas por tanto f lo será. Veamos que f es una contracción, es decir que cumple (3.35) donde para $z,w\in X_1$ y $\zeta\in X_2$

$$\begin{aligned}
d(f(z,\zeta),f(w,\zeta))&=d((N_1(z,\zeta)(r),N_2(z,\zeta)(r),N_3(z,\zeta)(r)),(N_1(w,\zeta)(r),N_2(w,\zeta)(r),N_3(w,\zeta)(r)))\\
&=|N_1(z,\zeta)(r)-N_1(w,\zeta)(r)|+\|N_2(z,\zeta)(r)-N_2(w,\zeta)(r)\|_\infty+\|N_3(z,\zeta)(r)-N_3(w,\zeta)(r)\|_\infty
\end{aligned}$$

Para $r \in [0, 2\pi]$, sea $D_r \equiv D = \left\{x \in [0, 2\pi]\ ;\ |\varphi(x, r-x)| \geq 8|c|^{\gamma-1}\right\}$, Dado que φ no es plana sobre características, por teorema (2.2.1), existe c_0 tal que si $|c| > c_0$

$$\mu([0, 2\pi] - D) < \frac{\tau}{10||h'||_{\infty} + 1} \tag{3.39}$$

Sea $I_r(x) \equiv |h\left(\left(c\varphi + z + \zeta\right)(x, r-x)\right) - h\left(\left(c\varphi + w + \zeta\right)(x, r-x)\right)|$, por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned}
I_r(x) &= |h\left(c\varphi(x, r-x) + z(x, r-x) + \zeta(x, r-x)\right) - h\left(c\varphi(x, r-x) + w(x, r-x) + \zeta(x, r-x)\right)| \\
&= |h\left(c\varphi(x, r-x) + z(x, r-x) + \zeta(x, r-x) - c\varphi(x, r-x) + w(x, r-x) + \zeta(x, r-x)\right)| \\
&= |h\left(z(x, r-x) - w(x, r-x)\right)| \\
&= |h'(\sigma)||z(x, r-x) - w(x, r-x)| \\
&\leq |h'(\sigma)| d(z, w)
\end{aligned}$$

donde $\sigma \in [\left(c\varphi + z + \zeta\right)(x, r-x), \left(c\varphi + w + \zeta\right)(x, r-x)]$.

Nota 3.4.1. Si $x \in D$, $|\sigma| \geq 4|c|^{\gamma}$

Prueba. Dado que $\sigma \in [\left(c\varphi + z + \zeta\right)(x, r-x), \left(c\varphi + w + \zeta\right)(x, r-x)]$ entonces

$$\begin{aligned}
\sigma &\geq \left|\left(c\varphi + z + \zeta\right)(x, r-x)\right| \\
&= \left|c\varphi(x, r-x) + z(x, r-x) + \zeta(x, r-x)\right| \\
&\geq |c||\varphi(x, r-x)| - |z(x, r-x)| - |\zeta(x, r-x)| \\
&\geq |c||\varphi(x, r-x)| - ||z||_{\infty} - ||\zeta||_{\infty}
\end{aligned}$$

Si $x \in D$, $|\varphi(x, r-x)| \geq 8|c|^{\gamma-1}$

$$\begin{aligned}
\sigma &\geq 8|c||c|^{\gamma-1} - \frac{|c|^{\gamma}}{16} - 2|c|^{\gamma} - |c|^{\gamma} \\
&\geq 8|c|^{\gamma} - 3|c|^{\gamma} - \frac{|c|^{\gamma}}{16} \\
&\geq 5|c|^{\gamma} - \frac{|c|^{\gamma}}{16} \\
&\geq 4|c|^{\gamma}
\end{aligned}$$

Que es lo que se quería demostrar.

Recordemos que $\beta \in (-1, 0)$, para $x \in D$ por (3.4.1) $|\sigma|^{\beta} \leq 4^{\beta}|c|^{\beta\gamma}$, por (3.2) y por lo anterior

$$\begin{aligned}
I_r(x) &\leq |h'(\sigma)| d(z, w) \\
&\leq |\sigma|^{\beta} d(z, w) \\
&\leq 4^{\beta}|c|^{\beta\gamma} d(z, w)
\end{aligned}$$

Ahora estimemos $d(f(z,\zeta), f(w,\zeta))$ para lo cual es necesario calcular

$$\begin{aligned}
|N_2(z,\zeta)(r) - N_2(w,\zeta)(r)| &= \left|\bar{z} + \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x, r-x)) - \bar{z} - \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} h((c\varphi + w + \zeta)(x, r-x))\right| \\
&= \frac{1}{2\pi\tau}\left|\int_0^{2\pi} h((c\varphi + z + \zeta)(x, r-x))\,dx - \int_0^{2\pi} h((c\varphi + w + \zeta)(x, r-x))\,dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} \left|h((c\varphi + z + \zeta)(x, r-x)) - h((c\varphi + w + \zeta)(x, r-x))\right|\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} I_r(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi\tau}\left[\int_D I_r(x)\,dx + \int_{D^c} I_r(x)\,dx\right] \\
&\leq \frac{1}{2\pi\tau}\left[\int_D |h'(\sigma)| d(z,w)\,dx + \int_{D^c} |h'(\sigma)| d(z,w)\,dx\right] \\
&\leq \frac{1}{2\pi\tau}\left[\int_D 4^\beta |c|^{\beta\gamma} d(z,w)\,dx + \int_{D^c} |h'(\sigma)| d(z,w)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\tau}\left[\mu(D) 4^\beta |c|^{\beta\gamma} d(z,w) + \mu(D^c)|h'(\sigma)| d(z,w)\right] \\
&\leq \frac{1}{2\pi\tau}\left[2\pi 4^\beta |c|^{\beta\gamma} + \frac{\tau|h'(\sigma)|}{10||h'||_\infty + 1}\right] d(z,w) \\
&\leq \left[\frac{4^\beta |c|^{\beta\gamma}}{\tau} + \frac{||h'||_\infty}{2\pi(10||h'||_\infty + 1)}\right] d(z,w) \\
&\leq \left[c^\delta + \frac{||h'||_\infty}{10||h'||_\infty + 1}\right] d(z,w) \\
&\leq \left[c^\delta + \frac{1}{10}\right] d(z,w)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|N_2(z,\zeta)(r) - N_2(w,\zeta)(r)\|_\infty \leq \left[c^\delta + \frac{1}{10}\right] d(z,w) \tag{3.40}$$

Para $\delta \in (\beta, \beta\gamma)$ y $|c|$ suficientemente grande. De manera similar se verifica que

$$\|N_3(z,\zeta)(r) - N_3(w,\zeta)(r)\|_\infty \leq \left[c^\delta + \frac{1}{10}\right] d(z,w) \tag{3.41}$$

$$\|N_1(z,\zeta)(r) - N_1(w,\zeta)(r)\|_\infty \leq \left[c^\delta + \frac{1}{10}\right] d(z,w) \tag{3.42}$$

Así $d(f(z,\zeta), f(w,\zeta)) \leq 3\left[c^\delta + \frac{1}{10}\right] d(z,w)$, ya que c es suficientemente grande $3c^\delta + \frac{3}{10} = \Gamma \in [0,1)$ por tanto f es una contracción. De esta forma se cumplen las hipótesis del teorema (3.4.3), por la construcción se tiene que $f(z,\zeta) = z$ entonces $z = z(\zeta)$, esto quiere decir que para cada ζ existe un $z(\zeta)$ que soluciona el sistema (3.34), (3.31) y (3.32). □

§ 3.5. Solución en el rango

Teorema 3.5.1. *Sea $\tau \notin \sigma(\Box)$, $p(x,t) = cq(x,t) \in L^\infty$, y φ como en* (3.26)*. Si φ no es plana sobre características entonces para $|c|$ suficientemente grande la ecuación* (3.4) *tiene una solución débil en L^∞*

Demostración teorema 3.5.1. Sea $|c| \geq c_0$ y $N^\perp$ el complemento ortogonal de N en $L^2(\Omega)$. Dado que $\tau \notin \sigma(\Box)$, el operador $(\Box + \tau I)^{-1}$ define una aplicación lineal continua entre $N^\perp$ y $H^{1,2}(\Omega)$ (ver(2.19)).

Nota 3.5.1. Para todo $p \in N^\perp$ existe un η tal que

$$||(\Box + \tau I)^{-1} p||_\infty \leq \eta ||p||_2 \tag{3.43}$$

Prueba. Si $p \in N^\perp$ tendra una representación de la forma

$$p(x,t) = \sum_{k\neq j} p_1(k,j)\alpha_{kj}(x,t) + p_2(k,j)\beta_{kj}(x,t) + p_3(k,j)\gamma_{kj}(x,t) + p_4(k,j)\delta_{kj}(x,t)$$

y

$$\begin{aligned}
|(\Box + \tau I)^{-1} p| &= \left| \sum_{k\neq j} \frac{1}{k^2 - j^2 + \tau} \left[p_1(k,j)\alpha_{kj} + p_2(k,j)\beta_{kj} + p_3(k,j)\gamma_{kj} + p_4(k,j)\delta_{kj} \right] \right| \\
&\leq \sum_{k\neq j} \frac{1}{|k^2 - j^2 + \tau|} \left[|p_1(k,j)||\alpha_{kj}| + |p_2(k,j)||\beta_{kj}| + |p_3(k,j)||\gamma_{kj}| + |p_4(k,j)||\delta_{kj}| \right]
\end{aligned}$$

Por esto y la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
||(\Box + \tau I)^{-1} p||_\infty &\leq \sum_{k\neq j} \frac{1}{|k^2 - j^2 + \tau|} \left[|p_1(k,j)| + |p_2(k,j)| + |p_3(k,j)| + |p_4(k,j)| \right] \\
&\leq \left(\sum_{k\neq j} \frac{1}{(k^2 - j^2 + \tau)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\neq j} \left(|p_1(k,j)| + |p_2(k,j)| + |p_3(k,j)| + |p_4(k,j)| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k\neq j} \frac{1}{(k^2 - j^2 + \tau)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\neq j} \left(4 \max_i (|p_i(k,j)|) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k\neq j} \frac{1}{(k^2 - j^2 + \tau)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\neq j} 16(|p_1(k,j)|^2 + |p_2(k,j)|^2 |p_3(k,j)|^2 |p_4(k,j)|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 4 \left(\sum_{k\neq j} \frac{1}{(k^2 - j^2 + \tau)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\neq j} (|p_1(k,j)|^2 + |p_2(k,j)|^2 |p_3(k,j)|^2 |p_4(k,j)|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \eta \left(\sum_{k\neq j} (|p_1(k,j)|^2 + |p_2(k,j)|^2 + |p_3(k,j)|^2 + |p_4(k,j)|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \eta ||p||_2
\end{aligned}$$

Recordemos un resultado que será de gran importancia en lo que sigue del trabajo,

Teorema 3.5.2 (Punto Fijo de Schauder)**.** *Sea U un espacio de Banach y M un subconjunto no vacio, cerrado, acotado y convexo de U y sea $T : M \to M$ un operador compacto entonces T tiene un punto fijo, es decir, existe $x \in M$ tal que $T(x) = x$.*

Nota 3.5.2. El conjunto $X = \left\{p \in N^{\perp} \ ; \ ||p||_{\infty} \leq c^{\gamma}\right\}$ dotado de la norma de L^{∞} es un subconjunto cerrado y convexo de $L^2(\Omega)$.

Prueba. Veamos que X es convexo. Sean $p, q \in X$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, evidentemente $\alpha p + (1-\alpha)q \in N^{\perp}$ y

$$\begin{aligned} ||\alpha p + (1-\alpha)q||_{\infty} &\leq ||\alpha p||_2 + ||(1-\alpha)q||_{\infty} \\ &= \alpha ||p||_{\infty} + (1-\alpha)||q||_{\infty} \\ &\leq \alpha c^{\gamma} + (1-\alpha)c^{\gamma} \\ &= c^{\gamma}(\alpha + 1 - \alpha) \\ &= c^{\gamma} \end{aligned}$$

Por tanto $\alpha p + (1-\alpha)q \in X$ lo que implica que X es convexo. Veamos que X es cerrado, Sea (p_n) una sucesión en X tal que $p_n \to p$, con $p \in L^2(\Omega)$, es decir

$$||p - p_n||_2 \to 0$$

Claramente $p_n \in N^{\perp}$. Por [Brezis, 2010, p.94] existe una subsucesión (p_{n_k}) y $h \in L^2(\Omega)$ tal que

(a) $p_{n_k}(x,t) \to p(x,t)$ c.t.p. en Ω

(b) $|p_{n_k}(x,t)| \leq h(x,t)$ para todo k c.t.p. en Ω

Para $v \in N$, por Teorema de la Convergencia Dominada se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p(x,t)v(x,t)\,dxdt &= \int_{\Omega} \lim_{n_k \to \infty} p_{n_k}(x,t)v(x,t)\,dxdt \\ &= \lim_{n_k \to \infty} \int_{\Omega} p_{n_k}(x,t)v(x,t)\,dxdt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto $p \in N^{\perp}$. Veamos que $\left\|p - p_{n_k}\right\|_{\infty} = 0$. Dicho de otra manera el numeral (a) significa que (p_{n_k}) converge casi toda parte a p. El numeral (b) me está indicando que la subsucesión (p_{n_k}) esta dominada por una función $h \in L^2(\Omega)$ y en virtud de [Bartle, 1995, p.75] convergencia casi toda parte implica convergencia casi uniformemente, es decir, para todo $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, existen $k(\epsilon) \in \mathbb{N}$ y $N_{\delta} \subset \Omega$ con $\lambda(N_{\delta}) < \delta$, tal que si $n > k(\epsilon)$

$$|p_{n_k}(x,t) - p(x,t)| \leq \epsilon$$

para todo $(x,t) \in N_{\delta}^{c}$. Sea M subconjunto de Ω con medida cero, esto es, $\lambda(M) < \delta$ para todo $\delta > 0$. Esto quiere decir que M es uno de los N_{δ}. Denotemos por C al siguiente conjunto,

$$C = \left\{c > 0 \ ; \ |p_{n_k}(x,t) - p(x,t)| \leq c \ \text{ c.t.p. } \ \text{en } \Omega\right\}$$

$|p_{n_k}(x,t) - p(x,t)| \leq \epsilon$ para todo $(x,t) \in M^c$ con $\lambda(M) = 0$, esto es, $|p_{n_k}(x,t) - p(x,t)| \leq \epsilon$ c.t.p. en Ω, esto significa que $\epsilon \in C$. Dado que $\left\| p - p_{n_k} \right\|_\infty = \text{ínf} C$, cualquier elemento de C es mas grande que $\text{ínf} C$, en particular ϵ, por tanto

$$\left\| p - p_{n_k} \right\|_\infty = \text{ínf} C \leq \epsilon$$

Para todo $\epsilon > 0$, por tanto $\left\| p - p_{n_k} \right\|_\infty = 0$. Ahora,

$$\begin{aligned} ||p||_\infty &= ||p - p_{n_k} + p_{n_k}||_\infty \\ &\leq ||p - p_{n_k}||_\infty + ||p_{n_k}||_\infty \\ &\leq c^\gamma \end{aligned}$$

De esto concluimos que $p \in X$ y en virtud de [Kreyszig, 1978, p.30] se tiene que X es cerrado.

Proposición 3.5.1. *La transformación T definida por*

$$\zeta \to T(\zeta) = -(\Box + \tau I)^{-1} \left(Q_2(h(c\varphi + \zeta + z(\zeta))) \right)$$

Está bien definida y es compacta de X sobre el mismo.

Demostración. Al estar Q_2 definido de $L^2(\Omega)$ sobre $N^\perp$, $Q_2(h(c\varphi + \zeta + z(\zeta))) \in N^\perp$ y también tenemos que $(\Box + \tau I)^{-1}$ está definido de $N^\perp$ sobre $N^\perp$, por tanto $T(\zeta) \in N^\perp$. Ahora estimemos la norma infinito de $T(\zeta)$, esto es,

$$\| T(\zeta) \|_\infty = \left\| (\Box + \tau I)^{-1} \left(Q_2(h(c\varphi + \zeta + z(\zeta))) \right) \right\|_\infty$$

Por (3.43) y usando la notación y algunas estimación del lema (3.4.2)

$$\begin{aligned} \| T(\zeta) \|_\infty &\leq \eta \left\| Q_2(h(c\varphi + \zeta + z(\zeta))) \right\|_2 \\ &\leq \eta \left\| h(c\varphi + \zeta + z(\zeta)) \right\|_2 \\ &= \eta \left(\int_\Omega \left| h(c\varphi + \zeta + z(\zeta)) \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta \left[\int_\Omega \left(M_1 + \frac{\left| c\varphi + \zeta + z(\zeta) \right|^{\beta+1}}{\beta + 1} \right)^2 dx dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta \left[\int_\Omega 2{M_1}^2 + 2 \frac{\left| c\varphi + \zeta + z(\zeta) \right|^{2(\beta+1)}}{(\beta+1)^2} dx dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta \left[8\pi^2 {M_1}^2 + \frac{2|c|^{2(\beta+1)}}{(\beta+1)^2} \int_\Omega \left(|\varphi| + \frac{|\zeta|}{|c|} + \frac{|z(\zeta)|}{|c|} \right)^{2(\beta+1)} dx dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta \left[8\pi^2 {M_1}^2 + \frac{2|c|^{2(\beta+1)}}{(\beta+1)^2} \int_\Omega \left(|\varphi| + 4 \right)^{2(\beta+1)} dx dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{2}\pi\eta M_1 + \frac{\sqrt{2}\eta |c|^{\beta+1}}{\beta+1} \left(\int_\Omega \left(|\varphi| + 4 \right)^{2(\beta+1)} dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M_2 + M_3 |c|^{\beta+1} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Donde $M_2 = 2\sqrt{2}\pi\eta M_1$ y $M_3 = \dfrac{\sqrt{2}\eta}{\beta+1}\left(\int_\Omega \left(|\varphi|+4\right)^{2(\beta+1)}\ dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$. Ahora para $M_4 > M_2 + M_3$ tenemos

$$\begin{aligned}\|T(\zeta)\|_\infty &\leq M_4|c|^{\beta+1}\\ &\leq c^\gamma\end{aligned}$$

para $|c| > \mathrm{e}^{\frac{\ln(M_4)}{\gamma-(\beta+1)}}$. Por tanto $\|T(\zeta)\|_\infty \leq c^\gamma$ lo que implica que $\|T(\zeta)\|_\infty \in X$.

Vamos a mostrar ahora que la aplicación T es compacta. Sea (ζ_n) una sucesión acotada en X, es decir, $|\zeta_n(x,t)| \leq k$. Realizando cálculos similares a (3.31) obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|Q_2(h(c\varphi+\zeta_n+z(\zeta_n)))\right\|_2 &\leq \left\|h(c\varphi+\zeta_n+z(\zeta_n))\right\|_2\\ &= \left(\int_\Omega \left|h(c\varphi+\zeta_n+z(\zeta_n))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq c^\gamma\end{aligned}$$

Por tanto la sucesión (y_n) donde $y_n = Q_2(h(c\varphi+\zeta_n+z(\zeta_n)))$ es acotada en$N^\perp$. Por la proposición (2.5.3) el operador $(\Box+\tau I)^{-1}$ de $N^\perp$ sobre el mismo es comapcto, por tanto $\left((\Box+\tau I)^{-1}y_n\right) = (T(\zeta_n))$ tiene una subsucesión convergente en $N^\perp$, así T es una aplicación compacta de X sobre X. □

Contamos con una aplicación compacta de$X$ sobre el mismo, donde X es un subconjunto no vacio, cerrado, convexo y acotado de un espacio de Banach, a saber $L^2(\Omega)$, entonces por (3.5.2) existe $\zeta \in X$ tal que

$$\zeta = -(\Box+\tau I)^{-1}\left(Q_2(h(c\varphi+\zeta+z(\zeta)))\right) \tag{3.44}$$

Observación. Dado que φ es solución de (3.26) se tiene que $\Box c\varphi + \tau c\varphi = cq$ entonces

$$\begin{aligned}Q_2(cq) &= Q_2(\Box c\varphi+\tau c\varphi)\\ &= c\Box(Q_2\varphi)+\tau c(Q_2\varphi)\\ &= (\Box+\tau I)cQ_2(\varphi)\end{aligned}$$

de donde

$$cQ_2(\varphi) = (\Box+\tau I)^{-1}Q_2(cq) \tag{3.45}$$

De (3.44) y (3.45)

$$\begin{aligned}cQ_2(\varphi)+\zeta &= (\Box+\tau I)^{-1}Q_2(cq) - (\Box+\tau I)^{-1}\left(Q_2(h(c\varphi+\zeta+z(\zeta)))\right)\\ &= -(\Box+\tau I)^{-1}\left(Q_2(h(c\varphi+\zeta+z(\zeta))-cq)\right)\end{aligned}$$

$z(\zeta)$ satisface el lema 3.4.1, por la definición de $\bar{z}, z_1, z_2$ para $p=0$, esto es

$$\tau z(\zeta) + Q_1\left(h(cQ_2\varphi+\zeta+v)\right) = 0 \tag{3.46}$$

Además dado que φ es solución de (3.26) se tiene que $\Box c\varphi + \tau c\varphi = cq$ entonces

$$\begin{aligned} Q_1(cq) &= Q_1(\Box c\varphi + \tau c\varphi) \\ &= c\Box(Q_1\varphi) + \tau c Q_1(\varphi) \\ &= \tau c Q_1(\varphi) \end{aligned} \tag{3.47}$$

Sumando (3.46) y (3.47) se tiene que

$$\tau\left(z(\zeta) + cQ_1(\varphi)\right) + Q_1\left(h(cQ_2\varphi + \zeta + v)\right) = Q_1(cq)$$

Que es el lema 3.4.1 donde $v = z(\zeta) + cQ_1(\varphi)$. Así

$$[\tau\left(z(\zeta) + cQ_1(\varphi)\right) + Q_1\left(h(c\varphi + \zeta + z(\zeta))\right) = Q_1(cq)$$

Tomando $y = cQ_2\varphi + \zeta$ y $v = cQ_1(\varphi) + z(\zeta)$ vemos que $u = y + v$ es una solución de (3.4) en virtud de la proposición 3.3.1. $\Box$

4. Conclusiones

Para estudiar el problema de onda semilineal con condición doble periódica es de gran importancia haber estudiado previamente problemas más sencillos, como el problema de onda homogéneo o el problema de valores propios con condición doble periódica. Es precisamente a partir de estos problemas (cuya resolución no es muy complicada) que podemos entender ciertas temáticas que finalmente son primordiales en la solución del problema semilineal que se ha considerado. Como por ejemplo el espectro del operador de onda con condición doble periódica o de las rectas catracterísticas, las cuales fueron introducidas al solucionar el problema de onda homogéneo.

Para el problema de onda semilineal que se está estudiando las soluciones que se encuentran son soluciones débiles. La necesidad de hablar de soluciones débiles radica en que este tipo de soluciones (como se pudo ver en el trabajo) no cuentan con todas las condiciones de derivabilidad con las que están dotadas las soluciones fuertes. Inevitablemente al hablar de solución débil se hizo necesesaria la introducción de los espacios de Sobolev.

La base para el desarrollo de este trabajo es el análisis funcional no lineal. Como muestra de esto encontramos la teoría de operadores compactos, que sin duda alguna nos permitió realizar avances significativos. Por ejemplo, el operador $(\Box + \tau I)^{-1}$ definido de $N^{\perp}$ sobre $N^{\perp}$, resultó ser compacto, lo cual al final del trabajo permitió encontrar soluciones en el rango por medio del Teorema de Punto Fijo de Schauder. O como ejemplo más sencillo, vemos que al ser el operador $\Box^{-1}$ compacto de $L^2(\Omega)$ sobre $L^2(\Omega)$ es suficiente encontrar el conjunto de valores propios del operador de onda con condición doble periódica para determinar el espectro del operador de onda bajo estas condiciones.

El operador $\Box$ no es compacto, es por esto que para encontrar las soluciones en el núcleo, es necesario recurrir a procedimientos un poco más elaborados y quizá más complicados. Donde se debe optar por buscar una tipo de soluciones especiales, introduciendo las funciones $z(x,t)$, las cuales dependen de las funciones $v(x,t)$ del núcleo y $\varphi(x,t)$ como solución de la ecuación $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + t\varphi = q(x,t)$. Más aún, dichas soluciones del núcleo no se podrían hallar por los métodos aquí expuestos si $|c|$ no fuera suficientemente grande. Así podemos decir, que la no compacidad del operador $\Box$ obliga a imponer más condiciones al problema para hallar soluciones.

Bibliografía

[Apostol, 1969] Apostol, T. M. (1969). *Calculus VOLUME 2*. John Wiley & Sons, London.

[Bartle, 1995] Bartle, R. G. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley and Sons, USA. 52

[Brezis, 2010] Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, USA. 14, 17, 22, 26, 32, 52

[Burton et al., 1988] Burton, L., Mason, J., and Stacey, K. (1988). *Pensar Matemáticamente*. Editorial Labor S.A., Madrid.

[Caicedo, 2012] Caicedo, J. F. (2012). *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. 10, 11, 13

[Castro and Preskill, 2010] Castro, A. and Preskill, B. (2010). Existence of solutions for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity. *Discrete and continuous dynamical systems*, 28:649–658. 1, 2, 8

[Chang, 2005] Chang, K.-C. (2005). *Methods in nonlinear Analysis*. Springer-Verlag, Berlin. 33

[Deimling, 1985] Deimling, K. (1985). *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, USA.

[Duque, 2011] Duque, R. (2011). Ecuaciones de onda semilineales con parte no lineal no monótona. *Universidad Nacional de Colombia*. 30

[Duval, 2004] Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad del Valle, Cali.

[Evans, 1997] Evans, L. C. (1997). *Partial differential equations*. American mathematical society, USA. 15

[Folland, 1999] Folland, G. B. (1999). *Real Analysis, Modern Tecniques and their Applications second edition*. John Wiley and Sons, USA. 41

[Haberman, 1987] Haberman, R. (1987). *Elementary applied partial differential equations*. Prentice Hall, USA. 6

[Kreyszig, 1978] Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley and Sons, USA. 12, 16, 17, 18, 19, 26, 44, 53

[Kreyszig, 2003] Kreyszig, E. (2003). *Matemáticas avanzadas para ingeniería vol.2*. Limusa Wiley, México. 4, 25

[Polya, 1981] Polya, G. (1981). *Cómo Plantear Y Resolver Problemas*. Editorial Trillas, México D.F.

[Rabinowitz, 1978] Rabinowitz, P. H. (1978). Free vibrations for a semilinear wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 31:31–68. 21

[Rudin, 1976] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York.

[Sanjuán, 2014] Sanjuán, A. A. (2014). Membranas vibrantes. *Universidad Nacional de Colombia, en impresión*. 21, 24

[Stewart, 2008] Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas*. Crítica, España. 1