Algunos Elementos Teóricos de las Ecuaciones de Maxwell Semilineales en el Vacío

Andrés Felipe Galindo Olarte

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

2014

ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL SEMILINEALES EN EL VACÍO

ANDRÉS FELIPE GALINDO OLARTE

Monografía

Trabajo Dirigido por:
Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

Profesor de Planta

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

2014

Nota de aceptación

Firma
Nombre:
Presidente del jurado

Firma
Nombre:
Jurado

Firma
Nombre:
Jurado

Bogotá, 5 de Febrero del 2014

Dedicado a mi familia, amigos y
a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es la conclusión de un proceso de cinco años de estudio en la carrera de Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, el cual no habría sido posible sin la influencia directa o indirecta de muchas personas e instituciones, las cuales han estado presentes en distintas etapas de mi vida.

Le agradezco al profesor Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar por manifestar su interés en dirigir mi trabajo de grado, por su confianza, colaboración y paciencia en la realización del mismo.

Al Colegio Bilingüe José Allamano por la excelente formación recibida durante once años. A la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, por haberme dado una excelente formación como futuro matemático.

A los docentes de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas que compartieron sus conocimientos, dentro y fuera de clase, haciendo posible que mi formación académica se resuma en satisfacciones académicas y personales.

A mis compañeros de la carrera, que durante estos años hemos compartido la academia y juntos hemos logrado estar mas cerca de nuestros sueños.

A mis amigos de toda la vida, que durante todo este tiempo hemos crecido juntos. Especial mención a Ximena Sarmiento, Cristian Buitrago, Carlos Goyeneche, Walter Cruz, Cristian Baquero y David Argüello.

A mi familia y seres queridos, especial mención a mi madre Martha Olarte, por su infinita paciencia, amor y voluntad de apoyarme en cualquiera de mis proyectos. A mi Padre José Galindo por sus invaluables consejos, por su apoyo y afecto incondicional y a mi hermano Sergio Galindo.

Y por ultimo a mis abuelos. Marina Gonzalez por siempre estar ahí para apoyarme. Y Luis Hernando Olarte Lopez Q.E.P.D tu ejemplo y enseñanzas siempre van a estar con migo donde quiere que yo me encuentre, nunca encontrare la manera de agradecerte todo lo que hiciste por nosotros.

ÍNDICE GENERAL

Introducción **1**

1. Motivación Física **15**

1.1. Electrodinámica Clásica 15

1.2. Las Ecuaciones de Maxwell 18

1.2.1. Ley de Gauss 18

1.2.2. Ecuación de Continuidad 20

1.2.3. Ley de Ampere 22

1.2.4. Ley de Coulomb 25

1.2.5. Ley de Faraday 26

2. Fundamentación Matemática **29**

2.1. El Teorema de Hahn-Banach 29

2.2. Derivadas sobre espacios vectoriales 32

2.3. Máximos y mínimos 41

2.4. Funciones de Soporte Compacto 44

2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange de la electrodinámica en el vacío. 45

2.5.1. El principio variacional. 45

2.5.2. Lagrangiano de la electrodinámica en el vacío. 50

3. Las Ecuaciones de Maxwell Semilineales **55**

3.1. Deducción de las ecuaciones 55

3.1.1. Perturbación de la densidad de lagrangiano 55

3.1.2. Perturbación y materia 58

3.2. El principio de invariancia y el grupo de Poincaré 59

3.2.1. Invariancia bajo la representación de un grupo de Lie 59

3.2.2. La invariancia de Poincaré 61

3.3. Teorema de Noether 81

3.4. Invariantes del Movimiento 88

3.5. Soluciones Estáticas 92

4. Conclusiones **96**

Bibliografia **98**

Índice alfabético **100**

ÍNDICE DE CUADROS

3.1. Grupo de las traslaciones con parámetros r_1, r_2, r_3. 63
3.2. Grupo de las rotaciones con parámetros θ_1, θ_2, θ_3. 63
3.3. Grupo de traslaciones temporales con parámetro t_0. 63
3.4. Grupo de los impulsos de Lorentz con parámetros v_1, v_2, v_3. 64

ÍNDICE DE FIGURAS

1. U es la energía de la partícula. 2

1.1. Ley de Coulomb[Griffiths, 1999, p.60] 16
1.2. Campo magnético alrededor del alambre.[Griffiths, 1999, p. 204] 17
1.3. líneas de campo eléctrico.[Griffiths, 1999, p.65] 18
1.4. líneas de **E** atravesando S.[Griffiths, 1999, p.67] 19
1.5. Conservación de la carga en un volumen. 21
1.6. Ley de Biot-Savarat [Griffiths, 1999, p.216]. 22
1.7. Cálculo del campo alrededor del alambre infinito [Jackson, 1999, p.177]. 23
1.8. Alambres rectos atravesando la curva C [Griffiths, 1999, p.222]. 23
1.9. Ley de Biot-Savarat para una distribución de carga volumétrica. 25
1.10. Ejemplo de un generador [Griffiths, 1999, p.294]. 27
1.11. Ley de Faraday [Jackson, 1999, p.209]. 27

2.1. Grafica de la función f 45
2.2. Sistema masa-resorte 47

3.1. Cono de Luz de Minkowski. 62
3.2. Esquema de la función φ 83

4.1. Partícula del campo electromagnético 96

RESUMEN

En esta monografía se estudia una teoría de campo electromagnético, basado en una perturbación de las Ecuaciones de Maxwell en el vacío. En el primer capítulo estudiamos la electrodinamica clásica y las Ecuaciones Maxwell, esto sin mayor rigor matemático, para introducir algunas ideas generales. En el segundo capítulo presentaremos los fundamentos matemáticos de gran importancia en el desarrollo de las ideas de la monografía, entre ellos el Teorema de Hahn-Banach, derivadas sobre espacios vectoriales, teoría de puntos críticos y el principio variacional, este ultima es el pilar de las teorías físicas modernas. El tercer capítulo presentaremos las Ecuaciones de Maxwell Semilineales, estas junto con el grupo de Poincaré y el Teorema de Noether, nos permitirá establecer ciertas leyes conservativas. Finalmente para concluir presentaremos las principales características y propiedades de las partículas en esta teoría de campo.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende estudiar [Benci and Fortunato, 2004]. En este artículo se presenta una formulación variacional de las Ecuaciones de Maxwell semilineales, además de estudian algunas de sus propiedades físicas y se encuentran soluciones débiles a dichas ecuaciones.

Planteamiento del Problema

Estudiemos el problema de calcular la energía de una partícula elemental. La energía de un sistema de cargas electrostático, por definición es igual a

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}^2 \, dx \tag{1}$$

donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico producido por las cargas, si ϕ denota el *potencial electrostático*, podemos sustituir en (1) $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, integrando por partes y usando la condición $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\infty} \mathbf{E}(x) = 0$ obtenemos

$$U = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E} \cdot \nabla\phi \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \phi \nabla \cdot \mathbf{E} \, dx.$$

Entonces para la integral del lado derecho, si dejamos ρ como la *densidad de carga volumétrica* substituyendo $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, se encuentra la siguiente expresión para el sistema de cargas

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \phi\rho \, dx. \tag{2}$$

Entonces para un sistema de cargas puntuales e_a, podemos escribir en lugar de la integral una suma sobre las cargas

$$\frac{1}{2}\sum_a e_a\phi_a \tag{3}$$

donde ϕ_a es el potencial del campo producido por todas las cargas, en el punto donde la carga e_a está localizada, y cumple la relación $\phi = e_a/R$, R es la distancia desde donde se mide el potencial con una carga de prueba. Si nosotros aplicamos la fórmula a una partícula (por decir un electrón), y al campo producido por sí misma, entonces la carga tiene una energía potencial propia igual a $e\phi/2 = e^2/2R$, donde R es un radio al interior de la partícula [Landau and Lifshitz, 1994, p.95].

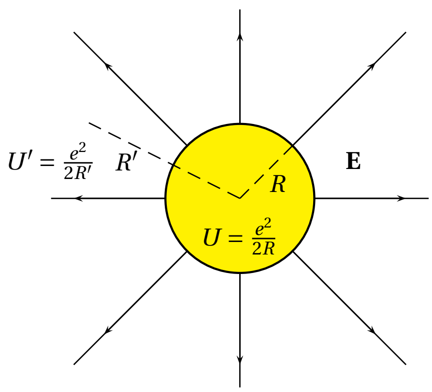

Figura 1: U es la energía de la partícula.

Pero sabemos por la teoría de la relatividad que toda partícula elemental debe ser considerada como un punto, por tanto para medir su energía se debe tomar $R = 0$, pero entonces su energía tendería a infinito, y por la equivalencia entra masa y energía, $E = mc^2 = m$ tendría masa infinita.

Resumiendo. De acuerdo a la electrodinámica, el electrón tiene energía infinita, y que esto es producto del hecho de que las partículas sean consideradas puntos. De esta manera concluimos que la electrodinámica clásica como una teoría física presenta contradicciones internas. Este hecho ha inspirado a gran variedad de científicos a la reformulación de la misma. En [Born and Infeld, 1934], se propone una teoría de campo que reemplaza la densidad de Lagrangiano usual para el campo electromagnético $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2\right) \tag{4}$$

con un Lagrangiano modificado

$$\mathscr{L} = 1 - \sqrt{1 - \left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2\right)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2\right) + o\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2\right). \tag{5}$$

Ellos afirman haber encontrado soluciones no triviales a las ecuaciones Euler-Lagrange asociadas con el Lagrangiano (5). Sin embargo esto ha sido refutado en [Yang, 2000].

En [Benci and Fortunato, 2004] los autores creen que una nueva formulación de la ecuaciones de Maxwell y por consiguiente de la electrodinámica es todavía válida. Hoy en día, los métodos del análisis no lineal son suficientemente fuertes para estudiar teorías de campo unitario derivadas de perturbaciones del Lagrangiano (4). Se presenta el nuevo Lagrangiano de la Electrodinámica como

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + W\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\right]. \tag{6}$$

Se tienen las relaciones $\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi$, $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ y $\mathbf{A}$, φ y W cumple algunas condiciones especiales que veremos más adelante. Aun más importante vía Teorema de Noether obtenemos una expresión para la energía de las partículas elementales en la Cuál ésta es finita.

Se ve entonces que el artículo [Benci and Fortunato, 2004] contiene una fuente rica en conocimientos profundos, de esta manera es propicio para nuestra formación conocer a profundidad las temáticas anteriores. Lo anterior nos permite establecer el punto de partida para formular el interrogante principal ¿Cuál debe ser nuestra base de conocimientos para la comprensión del artículo *Towards a unified field theory for classical Electrodynamics*?

Justificación

Es importante conocer los principios fundamentales de la física en sus distintas facetas para entender con más profundidad el universo. Así mismo, como estudiantes de matemáticas, es imperativo el saber cómo funcionan las matemáticas en el modelamiento de los fenómenos naturales, esto debido a que la historia nos ha mostrado cómo diversas teorías matemáticas nacen del estudio de la física y, así mismo, cómo la física depende fuertemente de la matemática a nivel teórico.

Objetivo general

Entender algunas propiedades variacionales y físicas de las ecuaciones de Maxwell semilineales y su formulación.

Objetivos específicos

1. Conseguir las base de conocimientos para entender algunas propiedades variacionales y físicas de las ecuaciones de Maxwell semilineales y su formulación.

2. Completar las deducciones omitidas en las secciones 1 y 2 de [Benci and Fortunato, 2004].

Marco Teórico

La *Electrodinámica Clásica* se encarga de estudiar la interacción entre partículas cargadas eléctricamente, vamos a nombrarlas simplemente *cargas* [Griffiths, 1999, p. xiii]. La solución clásica a este problema toma la forma de una *teoría de campo*: Nosotros decimos que el espacio alrededor de una carga eléctrica esta impregnado de dos *campos*, uno eléctrico **E** y otro magnético **H**. El comportamiento de estos campos están regidos por las *ecuaciones de Maxwell*,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 & \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{cases}$$

Cuando las combinamos con la ley de fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton , estas nos dan una descripción completa de la dinámica clásica de partículas cargadas y campos electromagnéticos [Jackson, 1999, p.239].

Todas estas ecuaciones, pueden ser deducidas físicamente. Sin embargo existe una herramienta más poderosa aún el *cálculo de variaciones*. Éste estudia la manera de que la forma, el tiempo, la energía, la velocidad, el volumen o ganancias etc., sean óptimas bajo ciertas condiciones. El objetivo principal del cálculo de variaciones es encontrar la soluciones gobernadas por esos principios [Chang, 2005, p.205].

El problema es formulado como sigue: Asumamos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ es una función continua, y que E es un conjunto de funciones vectoriales con N componentes. Sea J un funcional definido en E:

$$J[u] = \int f\left(x, u(x), \nabla u(x)\right) dx$$

encontremos $u_0 \in E$, tal que

$$J[u_0] = \text{mín}\{J(u) | u \in E\}$$

Un *principio variacional* es un método general para maximizar o minimizar J.

Para encontrar las ecuaciones que determinan estos puntos críticos, actuamos de manera análoga al Cálculo Diferencial: Por medio de la derivada de Gateaux calculamos la variación del funcional de la acción J en alguna dirección arbitraria v, $\langle J'[u], v\rangle$, con este último paso obtenemos la ecuación $J'[u] = 0$, la Cuál determina los puntos críticos de J [Caicedo, 2005, p. 321]. El sistema de ecuaciones $J'[u] = 0$, es conocido como las *Ecuaciones de Euler-Langrange* del funcional J.

La conexión entre la física y el cálculo de variaciones, queda expresada en lo siguiente:

> *"Las ecuaciones fundamentales de la física son las ecuaciones de Euler-Lagrange de un funcional adecuado. No hay un razón lógica para ésto. Es solo un hecho empírico: Todas las ecuaciones fundamentales que han sido descubiertas hasta ahora son derivadas de un principio variacional".* [Benci, 2009, p.273]

Por ejemplo, las ecuaciones de movimiento de k partículas cuyas posiciones en el tiempo t están dadas por $x_j(t)$, $x_j \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, k$ son obtenidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange relativas al funcional

$$I = \int \frac{m_j}{2} \left|\dot{x}_j\right|^2 - V(t, x_1, \ldots, x_k)\, dt$$

donde m_j es la masa de la j-esima partícula y V es la energía potencial del sistema. Más general, las ecuaciones de movimiento de sistema de dimensión finita cuyas coordenadas generalizadas son $q_j(t)$ $j = 1, \ldots, k$ son obtenidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange relativas a el funcional

$$I = \int L(t, q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k)\, dt$$

La función L se llama *lagrangiano.*También la dinámica de campos puede ser determinado por un principio variacional. Desde el punto de vista matemático un campo es una función

$$u : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^k,\ u = (u_1, \ldots, u_k)$$

donde $\mathbb{R}^{N+1}$ es el espacio-tiempo continuo y $\mathbb{R}^k$ son llamados los parámetros internos del espacio. Por supuesto en los problemas físicos, la dimensión del espacio N es 1,2 o 3. Las coordenadas espaciales y temporales serán denotadas por $x = (x_1, \ldots, x_N)$ y t respectivamente. La función $u(t, x)$ describe el estado interno del vació en el punto x en el instante t.

Es conocido que las ecuaciones de campo son obtenidas por medio de la variación del funcional de la acción definido como sigue:

$$S = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{L}(t, x, u, \nabla u, \partial_t u) \, dx \, dt$$

La función $\mathscr{L}$ es llamada *densidad de lagrangiano* [Benci, 2009, p.274]. La variación del funcional anterior, da el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = 0 \tag{7}$$

Si $u = (u_1, \ldots, u_k)$ entiéndase,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{1,x_i}}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{k,x_i}} \right), \ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_k} \right) \text{ y } u_{j,x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

.

Ver [Benci, 2009, p.274].

Por último intrínsecamente relacionado con los Lagrangianos, tenemos al *Teorema de Noether*, el Cuál es otro de los pilares de cualquier teoría física, este nos afirma que si nuestro lagrangiano es invariante bajo la representación T_g de algún *grupo de Lie* de un parámetro, entonces este satisface algunas leyes de conservación. Este último fue demostrado por Emily Noether en 1918, véase [Noether, 1918].

Metodología

En [Santos, 2007, p. 51] se identifica un *problema* como una tarea o situación en la Cuál aparecen los siguientes componentes:

1. La existencia de un interés; es decir, que una persona o un grupo de individuos quiere o necesita encontrar una solución.
2. La no existencia de una solución inmediata. Es decir, no hay un procedimiento o regla que garantice la solución completa de la tarea. Por ejemplo, la aplicación directa de un algoritmo o conjunto de reglas no es suficiente para determinar la solución.
3. La presencia de diversos caminos o métodos de solución (algebraico, geométrico, numérico). Aquí, también se considera la posibilidad de que el problema pueda tener más de una solución.
4. La atención por parte de una persona o un grupo de individuos para llevar a cabo un conjunto de acciones tendentes a resolver esta tarea. Es decir, un problema es tal hasta que existe un interés y se emprenden acciones específicas para intentar resolverlo.

En esta perspectiva, podemos inferir que la palabra *problema* incluye situaciones en donde se identifique el aprendizaje de determinado contenido. En nuestro caso el interés recae en el aprendizaje del contenido del artículo [Benci and Fortunato, 2004]. Aún más, si identificamos el artículo como un texto, la manera más razonable de que un lector logre un aprendizaje es por medio de los procesos de una elaboración de *comprensión de textos*.

[Duval, 2004, p. 278] resume todo lo anterior, como el *problema cognitivo de la comprensión de textos*, estos tienen que ver con los procesos de elaboración de una comprensión durante una lectura.

Operaciones fundamentales en la comprensión de textos

Para comenzar debemos tener claro, qué es el *contenido cognitivo* de un texto. Éste se define generalmente como el conjunto de los conocimientos que son necesarios para la comprensión del tema tratado independientemente de los que el texto movilice o presente [Duval, 2004, p. 285].

Durante toda situación de lectura encontraremos necesaria la realización de dos operaciones fundamentales la *segmentación* y la *recontextualización* de las unidades segmentadas. Entiéndase que esta segmentación no se realiza en unidades como palabras y frases, pero sí unidades textuales de información [Duval, 2004, p. 291]. Hay tres tipos de procedimientos que permiten distinguir estas unidades en el texto: La segmentación cognitiva, la segmentación proposicional y la segmentación funcional. A continuación describiremos cada uno de ellos.

- La *segmentación cognitiva* se efectúa a partir de una lista de "preguntas", cuyas respuestas delimitan, cada una, una unidad de información textual que debe buscarse en el texto. Podemos verla como el procedimiento que separa o segmenta cierto "conocimiento" que está implícito en el texto. La segmentación cognitiva es selectiva y extrínseca a la organización redaccional del texto.
- La *segmentación proposicional*, al contrario, se efectúa como una codificación independientemente de toda referencia a un contenido cognitivo determinado. Las unidades de textuales de información están definidas como "proposiciones", según la acepción lógica del término, es decir, como "predicado en n lugares". La consecuencia es una atomización del texto en una lista de determinaciones semánticas.
- La *segmentación funcional* se efectúa a través del reconocimiento de las operaciones discursivas que se cumplen en la producción del discurso: espontaneidad y entonación si se trata de una producción en tiempo real, redacción si se trata de un texto.

Sin embargo, notemos que al estudiar textos de matemática debemos realizar dos procedimientos importantes. En primer lugar tenemos que ver que los razonamientos que tenemos bajo la vista son correctos y segundo comprender el propósito de dicho paso [Polya, 1981, p. 119]. Para cumplir esto último vemos que no es suficiente discriminar todas las unidades de información explícitamente movilizadas en un texto; es necesario captar las conexiones que las unen en totalidad. Llamaremos recontextualización a esta segunda operación.

Ahora bien la operación de recontextualización inherente al proceso de comprensión no reubica las unidades segmentadas junto a sus vecinas de ocurrencia, sino en un *conjunto de conocimientos relativos al tema tratado o una red de relaciones propia a la organización redaccional del texto.* Este conjunto y esta red constituyen la totalidad integrada del texto. Esta operación de recontextualización la que determina las múltiples inferencias que requiere la comprensión de un texto para suplir las omisiones o para hacer desaparecer las ambigüedades encontradas durante la lectura [Duval, 2004, p. 293].

De la misma manera como existen distintas formas de segmentación según el procedimiento optado, existen diferentes procedimientos de recontextualización. Aquí mantendremos solo dos formas de recontextualización: una puramente cognitiva y otra redaccional.

- La *recontextualización cognitiva* moviliza esencialmente los conocimientos relativos a las situaciones, a los objetos o las preguntas que el texto evoca o que trata, independientemente de lo que la redacción del texto explicita. El conjunto de conocimientos movilizados es independiente de la organización redaccional del texto. Dicho de otra manera, *el texto es comprendido solo a partir de lo conocido sobre el tema que evoca o trata.*
- La *recontextualización redaccional* es la operación que explicita todas las relaciones que tienen entre sí las unidades discriminadas por segmentación funcional.

La comprensión de un texto se basa siempre en dos operaciones fundamentales: su segmentación en unidades y la recontextualización de las unidades obtenidas por segmentación. Pero la efectuación de estas dos operaciones puede tomar formas diferentes.

Dos procesos inversos de comprensión de textos

Con el lenguaje expuesto en la sección anterior, podemos caracterizar dos procesos de comprensión que son inversos entre sí. Uno conduce a desintegrar la organización redaccional del texto, en tanto que esta organización permite acceder al contenido cognitivo del mismo. El otro parte de una base de conocimientos que corresponden al contenido cognitivo del texto, la Cuál provee los esquemas para desintegrar la organización redaccional del texto, para anticipar el desarrollo, o para rápidamente identificar su aporte. Llamaremos “inductivo” y “deductivo” a estos dos procesos respectivamente [Duval, 2004, p. 294-295]. Son muy diferentes entre sí tal como lo muestra la siguiente comparación:

La comprensión de un texto depende de uno de estos dos procesos o de su interacción. El proceso inductivo está centrado en la organización redaccional y el proceso deductivo lo está en en un conjunto de conocimientos que sobrepasan ampliamente lo que el texto moviliza o explicita. Intuitivamente esto quiere decir que una *comprensión que depende solo del proceso inductivo* es una comprensión que se limita a lo que el texto explicita en las situaciones, los fenómenos o los problemas que son tratados, sin que implique una real comprensión de las situaciones, de los fenómenos o de los problemas en sí mismos. Al contrario. una *comprensión que dependa solo del proceso deductivo* es esa comprensión real de los fenómenos o de los problemas que el texto trata, pero en la Cuál la comprensión de la manera como el texto los explicita es secundario. Y una comprensión que dependa de la interacción de estos dos procesos es una *comprensión evolutiva*, es decir, que provoca una modificación sea en la comprensión de la organización del texto o bien en la de las situaciones, los fenómenos o los problemas que el texto trata. *La comprensión evolutiva es la que permite un aprendizaje a través de la lectura.*

Comprensión de textos y situación de lectura

Llamaremos *situación de lectura* al conjunto de parámetros que juegan simultáneamente en la selección de un proceso de comprensión, en la exigencia de su efectuación y logros. El primero, es el parámetro redaccional cuyos valores son la congruencia y no congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo [Duval, 2004, p. 298]. Intuitivamente, congruencia y no congruencia caracterizan el grado de “claridad” de un texto. El segundo parámetro, alude a la relación que existe entre la base de conocimientos del lector y el contenido cognitivo del texto que se lee [Duval, 2004, p. 298]. La base de conocimiento de que dispone el lector puede hacer que él tenga una comprensión del contenido cognitivo implícita o explícitamente movilizado por la redacción del texto; o puede que no le permita esta comprensión. La familiaridad con el contenido cognitivo del texto o, por el contrario la novedad de ese contenido, son los dos valores principales de este parámetro de posición del lector.

Evidentemente, estos dos parámetros son independientes entre sí, puesto que el primero concierne a la relación entre el contenido cognitivo del texto y la organización redaccional y el segundo, mientras que el segundo concierne la relación entre ese contenido cognitivo y la base de conocimientos del lector. La combinación de sus valores principales permite distinguir y clasificar las diferentes situaciones de lectura en las cuales pueden encontrarse un lector.

Clasificación de las situaciones de lectura

Limitándonos a los valores de congruencia y de no congruencia para el parámetro redaccional, y a los de familiaridad y de novedad para el parámetro de posición del lector, podemos definir cuatro situaciones tipo de lectura.

Ahora podemos ver cómo estas diferentes situaciones de lectura llevan a movilizar uno de los dos procesos de comprensión o su interacción. En las situaciones en las que hay ya una comprensión del contenido cognitivo (situaciones I y II), es suficiente el proceso deductivo. En las situaciones en que por el contrario, no hay esta comprensión del contenido cognitivo (situaciones III y IV),el proceso inductivo es el único posible: en estas situaciones, la recontextualización redaccional permite una primera adquisición del contenido cognitivo presentado por el texto. En las situaciones en que no hay congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo (situaciones II y IV), el proceso inductivo es necesario para controlar. En las situaciones en que, al contrario, hay congruencia (situaciones I y III), no es necesario un control del proceso deductivo por el proceso inductivo [Duval, 2004, p. 299].

Observemos que la situación de nuestro interés es la situación IV, esto debido que al comienzo del estudio de [Benci and Fortunato, 2004] el lector (o resolutor) no tiene una comprensión del contenido cognitivo del artículo. En segundo lugar el texto nos es congruente, puesto que en este se encuentra la omisión de varias deducciones y explicaciones.

En la situación IV, en razón de la no congruencia entre la organización redaccional y el contenido cognitivo, la aprehensión de la primera no permite el acceso del segundo. Con frecuencia es necesario un trabajo que se dirija directamente al contenido cognitivo del texto y que se efectúe independientemente del texto que se espera comprender, para que el texto llegue a ser “accesible” [Duval, 2004, p. 300]. En adición a ésto, son necesarios tratamientos paralelos al margen del texto: consulta de otros textos, subrayados, recurrir a otros registros de representación como la transcripción de ciertos pasajes en un esquema… Estos tratamientos pueden permitir después el inicio del proceso deductivo de comprensión.

Debido a ésto vemos que para solucionar nuestro problema de comprensión de texto, debemos primero adquirir la base de conocimientos necesaria para la comprensión del artículo y segundo y más importante debemos completar los detalles matemáticos omitidos en el artículo, estos detalles a completar los podemos ver como un conjunto de *problemas auxiliares.* Este por definición es un problema que consideramos no por su propio interés, sino por que esperamos que su estudio nos ayude a resolver otro problema, el original. El problema original es un fin que queremos alcanzar, el problema auxiliar es un medio por el Cuál trataremos de alcanzarlo [Polya, 1981, p. 153].

Entonces, para lograr nuestra meta, debemos realizar la resolución de estos problemas auxiliares. Para este sentido usaremos los métodos de la *resolución de problemas.*

Modelo para la resolución de problemas

En [Santos, 2007, p. 53] se muestra que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas:

1. Dominio del conocimiento o recursos.
2. Estrategias cognitivas o métodos heurísticos.
3. Estrategias metacognitivas.
4. Sistema de creencias.

Es necesario presentar algunos elementos importantes asociado a cada uno de estas categorías o dimensiones.

Los recursos. De manera general los recursos representan un inventario de lo que un individuo sabe de las formas en que adquiere este conocimiento. Existen varios factores que determinan el uso de los recursos ante situaciones problemáticas, en [Santos, 2007, p. 54] se identifican una serie de respuestas o acciones que la gente exhibe en su interacción con tales situaciones. Por ejemplo

- La gente categoriza sus experiencias en tipos o clases.
- La gente tiende a clasificar sus nuevas experiencias en formas que son consistentes con sus conocimientos o categorizaciones anteriores. Es decir, si las características importantes de esa nueva experiencia reflejan aspectos de una categoría ya definida, entonces ésta ayuda a darle forma a esta nueva experiencia.
- La gente tiene cuerpos de información acerca de las categorías que son muy útiles al tratar con una nueva experiencia. Es decir, enmarca lo que espera de las circunstancias teniendo en cuenta su experiencia previa, la Cuál incluye herramientas y técnicas que han sido útiles en el pasado.

En relación con el conocimiento relevante asociado con el dominio delos recursos, en [Santos, 2007, p. 54] se identifican cinco tipos de conocimientos que influyen en el uso de recursos:

1. **Conocimiento informal e intuitivo del dominio (la disciplina) o del problema por resolver.**
2. **Hechos y definiciones.** Durante el proceso de resolución de un problema, el resolutor debe utilizar algunos hechos necesarios para plantear o seleccionar algún camino de solución.
3. **Procedimientos rutinarios.** Aquí se identifican técnicas no algorítmicas que se utilizan para resolver ciertos tipos de problemas.
4. **Conocimiento acerca del discurso del dominio.** La percepción que el estudiante tenga acerca de las reglas al resolver un problema, determina la dirección y los recursos que utiliza en el proceso de solución. Por ejemplo, la forma en que el resolutor entienda el término *variable* influirá en la forma de usar este concepto en determinado problema.

5. **Errores consistentes o recursos débiles.**

Los métodos heurísticos. En esta característica se ubican las estrategias generales que pueden ser útiles para avanzar en la resolución de un problema. [Polya, 1981] identifica un conjunto de heurísticas que son comúnmente usadas al trabajar con problemas matemáticos. Por ejemplo, en el procesos de resolver un problema, un individuo puede explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema o trabajar problemas auxiliares, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema o trabajar con casos específicos. Junto a esto Polya identifica etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos desempeña un papel importante. De manera general, estas etapas son:

1. **Entendimiento del problema.** En este categoría se ubican la estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones del problema. Por ejemplo, ¿cuál es la información dada en el problema (datos) ?, ¿cuál es la incógnita?, y ¿cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema?, son algunas preguntas que preguntas que merecen atención en la fase de entendimiento del problema [Polya, 1981, p. 28].

   Otras heurísticas importantes aquí son dibujar una gráfica o diagrama, en introducir una notación adecuada.

2. **Diseño de un plan.** En esta etapa se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del problema que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución [Polya, 1981, p. 32].

   Algunas estrategias que pueden ayudar a construir un plan de solución incluyen:

   a) Pensar un problema conocido que involucre la misma clase de incógnitas, pero que sea más simple.
   b) Simplificar el problema por medio de una transformación por medio de una transformación a casos especiales.

3. **Ejecución del plan.** Aquí se consideran aspectos que ayudan a monitoreo el proceso de solución. Una idea fundamental es tratar de resolver el problema en una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida. De hecho, esta etapa tiene conexión con lo que Polya denomina una visión retrospectiva del procesos de solución. También es importante establecer conexiones y extensiones del problema original [Polya, 1981, p. 52-53].

Las estrategias metacognitivas. Un aspecto central en la resolución de problemas es el monitoreo o autoevaluación del proceso utilizado al resolver un problema. La metacognición se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de problemas. En [Santos, 2007] se identifican tres categorías donde se presenta la metacognición:

1. El *conocimiento y descripción* acerca de nuestro propio proceso de pensar.

2. El *control y la autorregulación*, hace referencia a qué tan bien es capaz uno de seguir lo que se hace cuando se resuelve algún problema y qué tan bien se ajusta uno al proceso. Allí se incluyen las decisiones relativas a la ejecución de un plan, al uso de la información que se tiene para resolver un problema.

3. Las *creencias e intuiciones* desde las ideas acerca de las matemáticas implícitas al trabajo matemático y la forma en que éstas se relacionan e identifican con la manera de resolver problemas.

Cuando se habla de control, este trata sobre la forma en que el individuo usa la información que posee al resolver el problema. Es decir, incluye las decisiones importantes que se toman acerca de qué hacer en un problema. Aquí , se ubican decisiones acerca de un plan, selección de metas o submetas , y monitoreo de soluciones y su evolución, así como revisar o abandonar planes con base en una evaluación [Santos, 2007, p. 60]. Por ejemplo, la acciones que involucran un control incluyen:

- Tener claridad acerca de lo que trata el problema antes de iniciar el proceso de resolución (fase de entendimiento del problema).

- Considerar varias formas de resolver el problema y seleccionar un método particular a partir de una evaluación en relación con su utilidad (fase de diseño).

- Monitorear el procesos y decidir cuando abandonar algún camino que no este produciendo resultados (fase de implantación).

- Revisar el proceso de resolución y evaluar la respuesta obtenida (visión retrospectiva).

Sistemas de creencias. En esta categoría se ubica la concepción que el individuo tenga acerca de las matemáticas. En este contexto, lo que uno piense acerca de esta disciplina determina la forma de como selecciona uno determinada dirección o método para resolver un problema. Las creencias establecen el contexto dentro del Cuál funcionan los recursos, las estrategias heurísticas y control [Santos, 2007, p. 62].

Cuaderno del resolutor

Este cuaderno fue propuesto por Mason, Burton y Stacy en [Mason et al., 1988], es la herramienta principal de la resolución. En este cuaderno se lleva un registro cronológico de la actividad del resolutor, entre estas están:

1. Transcripción de algunos pasajes de fuentes bibliográficas que se relacionen con las temáticas a estudiar.

2. Resolución de problemas relacionados con el contenido cognitivo del artículo. Esto se hace para crear experiencias con los objetos matemáticos presentados, y generar una verdadera comprensión de los mismos [Polya, 1981, p. 71]. Podemos notar que esto se relaciona con la dimensión de los recursos.

3. Transcripción de algunos pasajes del artículo [Benci and Fortunato, 2004].

4. Resolución de problemas guiadas hacia completar los detalles omitidos en [Benci and Fortunato, 2004].

5. Notas que guíen el trabajo, en un tiempo posterior.

En conclusión, en el cuaderno del resolutor actúa como ente de control en la resolución de nuestro problema.

CAPÍTULO 1

MOTIVACIÓN FÍSICA

En este capítulo daremos una introducción a las ecuaciones de Maxwell. Esto por medio de las deducciones físicas de las mismas. En este capítulo se trabajar sin mayor rigor matemático para introducir algunas ideas generales.

1.1. Electrodinámica Clásica

El problema fundamental de la *Electrodinámica Clásica* consiste en estudiar la interacción entre partículas cargadas eléctricamente, vamos a nombrarlas simplemente *cargas* [Griffiths, 1999, p. xiii]. La solución clásica a este problema toma la forma de una *teoría de campo*: Nosotros decimos que el espacio alrededor de una carga eléctrica está impregnado de dos *campos*, uno eléctrico y otro magnético. Una segunda carga, en la presencia de estos campos, experimenta una fuerza; los campos, entonces, transmiten la influencia de una carga a la otra. Es decir median la interacción. Nuestro interés en consecuencia se desplaza desde el estudió de fuerzas entre cargas a la teoría misma de los campos. Sin embargo se requiere una carga para *producir* un campo electromagnético, y se requiere otra carga para *detectarlo*. La carga cumple las siguientes propiedades:

1. *La carga viene en dos variedades*, las cuales nosotros llamamos **positivas** y **negativas**, esto debido a que sus efectos tienden a cancelarse entre si. Por ejemplo si tenemos $+q$ y $-q$ en el mismo punto, eléctricamente es lo mismo que no tener ninguna carga ahí.

2. *La carga se conserva*: No puede ser creada o destruida.

3. *La carga es cuantizada.* La carga eléctrica viene en múltiplos enteros de la unidad básica de carga. Por ejemplo si nosotros llamamos la carga del protón $+e$, entonces el electrón tiene carga $-e$ y el núcleo del carbón $+6e$.

La fuerza por unidad de carga es llamado, el campo eléctrico se denota por **E**. Un caso particular importante es el electrostático, esto es cuando **E** no depende del tiempo, para este caso el campo eléctrico producido por un conjunto de n cargas q_i, está dado por la *ley de Coulomb*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{\gamma_i^2}\hat{\gamma}_i \tag{1.1}$$

$\gamma_i = \mathbf{r} - \mathbf{r_i'}$, $\mathbf{r}$ es el vector que apunta del origen al punto donde se está midiendo el campo, $\mathbf{r_i'}$ es el vector que apunta del origen al punto donde está ubicada la carga q_i, $\hat{\gamma}_i$ es el vector unitario asociado y ϵ_o es llamada la *constante de permeabilidad del espacio libre.*

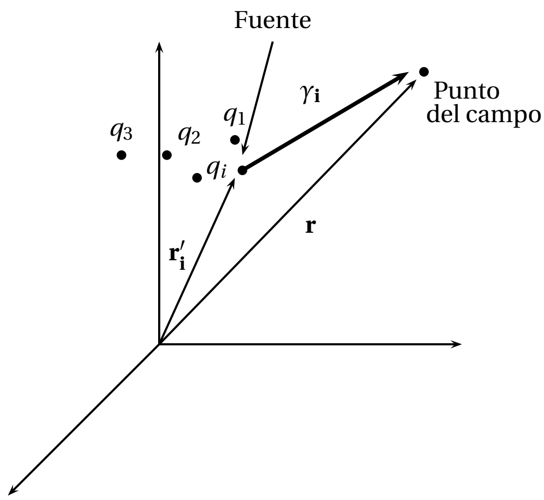

Figura 1.1: Ley de Coulomb[Griffiths, 1999, p.60]

Por otro lado tenemos el campo magnético **H**, este se produce cuando hay un conjunto de cargas moviéndose. Por ejemplo un conjunto de cargas moviéndose a través de un alambre recto infinito, produce un campo magnético Ver figura (1.1).

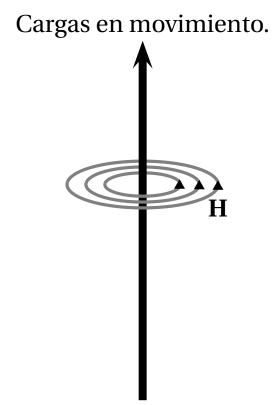

Figura 1.2: Campo magnético alrededor del alambre.[Griffiths, 1999, p. 204]

Existe una definición alternativa para **E** y **H**. Sea $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, campos especiales, entonces

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \tag{1.2}$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.3}$$

Además les vamos a exigir que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

Los campos **A** y φ son llamados la *calibración.* En [Landau and Lifshitz, 1994, p.51] y [Badiale et al., 2001, p.10] se puede ver la equivalencia de ambas definiciones.

En general, el campo electromagnético es una superposición de campos eléctricos y magnéticos. También para consideración, la fuerza **F** actuando sobre un punto de carga q moviéndose a una velocidad **v** en la presencia de un campo electromagnético está dada por la ecuación de *Fuerza de Lorentz* [Jackson, 1999, p.3]

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H})\,.$$

1.2. Las Ecuaciones de Maxwell

En ésta sección nos dedicaremos a la deducción de las *Ecuaciones de Maxwell*, las cuales son el pilar de la electrodinámica clásica .

1.2.1. Ley de Gauss

Para comenzar imaginemos un único punto de carga q, situado en el origen, su campo eléctrico viene dado por la ecuación (1.1)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Para conseguir una idea de este campo, podemos dibujar algunas líneas que apuntan radialmente hacia afuera del campo, esta son llamadas *líneas de campo* , ver Figura (1.3). La fuerza del campo es indicada entonces por la densidad de líneas de campo [Griffiths, 1999, p. 65]; es fuerte donde las líneas de campo son cercanas, y débil mas allá, donde las líneas son relativamente lejanas entre ellas. Para el caso cuando la carga es negativa las líneas de campo apunta radialmente hacia la carga.

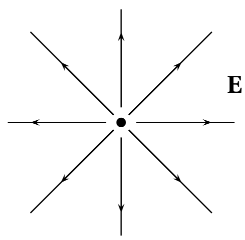

Figura 1.3: líneas de campo eléctrico.[Griffiths, 1999, p.65]

Ahora supongamos que queremos una medida del "número de líneas de campo", pasando a través de un superficie S, llamémoslo el *flujo* de $\mathbf{E}$ a través de S. Aclaremos que la densidad de líneas de campo atravesando a S está dada por número de líneas sobre unidad de área, de donde $\mathbf{E}\cdot\mathbf{da}$ es proporcional al número de líneas pasando a través del infinitesimal de área $\mathbf{da}$, ésto se tiene ya que la fuerza del campo está dado por $\mathbf{E}$ entonces, la fuerza del campo por la unidad de área debe ser proporcional al número de líneas atravesando el infinitesimal de área $\mathbf{da}$.

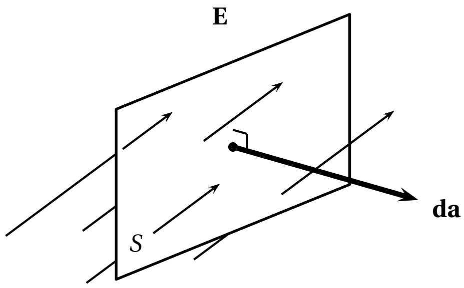

Figura 1.4: líneas de **E** atravesando *S*.[Griffiths, 1999, p.67]

Así para esté modelo el flujo de **E** a través de *S*,

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da}.$$

En el caso de un punto de carga q en el origen, el flujo de **E** a través de una esfera de radio r, es

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot \left(r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{r}} \right) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Debido a que el número de líneas es el mismo independientemente de la forma de la superficie, el flujo a través de cualquier superficie que encierre a la carga es $\frac{q}{\epsilon_0}$.

Ahora supongamos que en lugar de una única carga en el origen tenemos un montón de cargas q_i dispersadas. De acuerdo por el principio de superposición, el campo total es la suma

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$$

El flujo a través de la superficie que las encierra a todas, entonces es

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{da} = \sum_{i=1}^{n} \left(\oint_S \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{da} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i}{\epsilon_0} \right)$$

Entonces ahora sí podemos formular la *ley de Gauss*: Si S es una superficie cerrada entonces el flujo del campo es proporcional a la carga Q_{enc} encerrada por S [Griffiths, 1999, p.68],

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{da} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}.$$

La anterior ecuación integral puede ser transformada en una diferencial de la siguiente manera; aplicando el Teorema de la Divergencia [Apostol, 1969, p.457]

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{da} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dV$$

donde V es el volumen encerrado por la superficie S. Por otro lado la carga se distribuye en el espacio con una densidad ρ, si en el volumen dV está contenida la carga dQ. Entonces

$$\rho = \frac{dQ}{dV}.$$

De este manera, como

$$Q_{enc} = \int_V dQ = \int_V \rho\,dV$$

Entonces

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}\,dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\,dV$$

Y como esto se mantiene para cualquier volumen V, los integrados deben ser los mismos, es decir

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1.4}$$

Esta última se conoce como *Ley de Gauss en forma diferencial* [Griffiths, 1999, p.69].

1.2.2. Ecuación de Continuidad

La *corriente* en un alambre es la carga por unidad de tiempo pasando por un punto dado.

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{1.5}$$

La corriente también la describimos por el vector de *densidad de corriente* **J**, medida en unidades de carga positiva cruzando una unidad de área por unidad de tiempo

[Griffiths, 1999, p.213]. Por tanto la corriente en la dirección del movimiento de las cargas define la dirección de $\mathbf{J}$. De acuerdo con lo anterior la corriente atravesando una superficie S puede ser escrita como

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}. \tag{1.6}$$

La *ley de la conservación de la carga* afirma, que si la carga total en un volumen V cambia, entonces exactamente la misma cantidad de carga debe haber pasado desde adentro o afuera de la superficie [Griffiths, 1999, p.345]. En ese sentido si hay un aumento o disminución en la carga en un volumen, para que ésta se conserve, debe atravesar la superficie generando una corriente dada por (1.6). Aún más, este aumento también genera una corriente dada por la expresión (1.5), y debido a la naturaleza del fenómeno éstas tienen el signo opuesto.

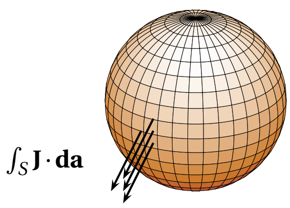

Figura 1.5: Conservación de la carga en un volumen.

Entonces la ley de la conservación de la carga dice

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}.$$

Usando el teorema de la divergencia,

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J}\, dV.$$

Como se cumple para cualquier volumen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

Equivalentemente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{1.7}$$

Esta última se conoce como *Ecuación de continuidad.* [Griffiths, 1999, p.345].

1.2.3. Ley de Ampere

Una *corriente constante* es un flujo continuo de corriente I, que pasa sin cambios y sin carga acumulándose en ningún lugar del espacio [Griffiths, 1999, p.215]. La *ley de Biot-Savart* establece que el campo magnético de un línea de corriente constante es dada por la ecuación

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_C \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \tag{1.8}$$

La integración es a lo largo del camino C, de la corriente, en la dirección del flujo; $d\mathbf{l}$ es un elemento de largo del alambre, y $\mathbf{x}$, es el vector desde la fuente a el punto $\mathbf{r}$. Ver la Figura (1.6). La constante μ_0 es llamada la *permeabilidad del espacio libre.*

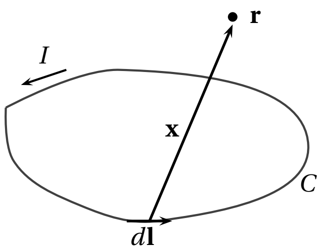

Figura 1.6: Ley de Biot-Savarat [Griffiths, 1999, p.216].

Por ejemplo el campo magnético $\mathbf{H}$ de un alambre recto infinito mostrado en la Figura (1.7) transportando una corriente constante I se puede ver que se dirige a lo largo de la normal a el plano que contiene el alambre y el punto P de observación, así que las líneas de campo magnético son círculos concéntricos alrededor del alambre. Usando la ley de Biot-Savarat la magnitud de $\mathbf{H}$ es

$$|\mathbf{H}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl\,|\mathbf{x}| \sin\theta}{|\mathbf{x}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R\,dl}{\left(l^2 + R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

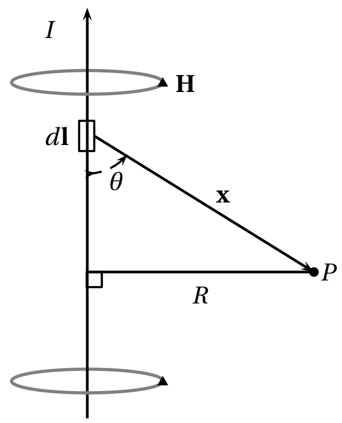

Figura 1.7: Cálculo del campo alrededor del alambre infinito [Jackson, 1999, p.177].

Calculemos ahora la integral del campo $\mathbf{H}$ anterior alrededor de un camino circular de radio s, centrado en el alambre

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot\mathbf{dl} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\, dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\oint_C dl = \mu_0 I,$$

Podemos darnos cuenta que la respuesta no depende del camino cualesquiera sea la curva que encierra el alambre daría la misma respuesta

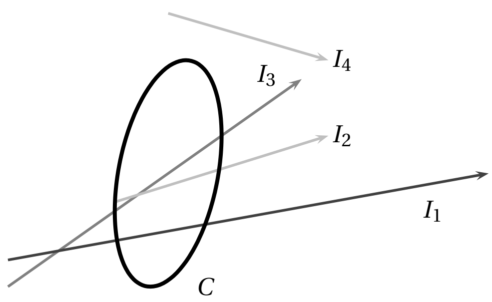

Figura 1.8: Alambres rectos atravesando la curva C [Griffiths, 1999, p.222].

Ahora supongamos un montón de alambres rectos atravesando una curva cerrada C. Cada alambre contribuye en $\mu_0 I$, y los de afuera no contribuyen en nada. Entonces la integral de línea será

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot\mathbf{dl} = \mu_0 I_{enc}$$

Donde I_{enc} es la corriente total encerrada por el camino de integración. El flujo de corriente es representado por la densidad de corriente volumétrica **J**, la corriente encerrada es

$$I_{enc} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$$

Con la integral tomada sobre la superficie encerrada por el camino, llamemosla S. Aplicando el teorema de Stokes [Apostol, 1969, p.438].

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{da} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{da}$$

Y como se cumple para toda superficie S,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J} \tag{1.9}$$

Sin embargo esta ecuación posee un problema ya que si calculamos la divergencia en ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) = 0.$$

Pero recordemos que la ecuación (1.7)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

entonces $\nabla \cdot \mathbf{J}$ no siempre va a ser cero. Vemos que el problema esta en el término de la derecha en la ecuación (1.9). Para arreglar esto usamos la ecuación de continuidad y la ley de Gauss (1.4), para reescribir el termino

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(-\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

Ya con esto vemos que si combinamos $\epsilon_0 (\partial \mathbf{E}/\partial t)$ con **J**, en (1.9), al calcular la divergencia se eliminaran los términos extra, entonces

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{1.10}$$

Esta última ecuación se le llama *Ley de Ampere*, la cual nos dice que un campo eléctrico variante en el tiempo induce un campo magnético [Griffiths, 1999, p.323].

1.2.4. Ley de Coulomb

La ley de Biot-Savarat para el caso general de un corriente volumétrica es

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\, dV'. \tag{1.11}$$

La integral se calcula sobre el volumen que encierra la corriente[Griffiths, 1999, p.222].

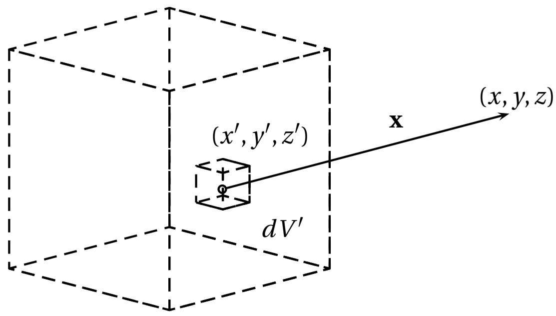

Figura 1.9: Ley de Biot-Savarat para una distribución de carga volumétrica.

Esta fórmula da el campo magnético en un punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ en términos de una integral sobre la distribución de corriente $\mathbf{J}(x', y', z')$. Para los siguientes pasos es mejor que seamos totalmente explícitos:

$$\begin{gathered} \mathbf{H} \text{ es una función de } (x, y, z), \\ \mathbf{J} \text{ es una función de } (x', y', z'). \\ \mathbf{x} = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}} \text{ y} \\ dV' = dx'dy'dz'. \end{gathered}$$

La integración es sobre las coordenadas primadas, además la divergencia y el rotacional son tomadas respecto a las no primadas. Aplicando la divergencia a la ecuación (1.11)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H} &= \nabla \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}\, dV' \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) dV'. \end{aligned}$$

Usando la regla del producto

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \cdot (\nabla \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \times \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} \right)$$

Entonces tenemos que $\nabla \times \mathbf{J} = 0$, puesto que $\mathbf{J}$ no depende de las variables (x, y, z), mientras que por un cálculo directo obtenemos $\nabla \times \left(\mathbf{x}/\,|\mathbf{x}|^3\right) = 0$. Así

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \tag{1.12}$$

Esta última ecuación es conocida como la *ley de Coulomb para campos magnéticos*. Esta ley afirma que no existen dipolos magnéticos. Informalmente no hay "cargas magnéticas positivas y negativas" [Griffiths, 1999, p.223].

1.2.5. Ley de Faraday

La conducción de corriente alrededor de un circuito es mediada por dos fuerzas, la *fuente* $\mathbf{f}_s$, la cual está ordinariamente confinada a una porción de la curva (por ejemplo una batería), y la fuerza electromotora: la cual sirve para suavizar el flujo y comunicar la influencia de la fuente a distintas partes del circuito[Griffiths, 1999, p.292]. La fuerza total $\mathbf{f}$ es

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$$

cualesquiera sea el mecanismo, el efecto neto es determinado por la integral de línea del campo eléctrico $\mathbf{E}$ generado por las cargas moviéndose alrededor del circuito C [Jackson, 1999, p.209]:

$$\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}. \tag{1.13}$$

Una de las fuentes más comunes de la fuerza electromotriz son los *generadores*, estos sistemas se obtienen cuando *movemos un alambre a través de un campo magnético* [Griffiths, 1999, p.294]. Un ejemplo se puede ver en la Figura (1.11), donde la región sombreada esta impregnada de un campo magnético constante, la curva C es un circuito de alambre atravesando por la derecha la región sombreada a una velocidad $\mathbf{v}$.

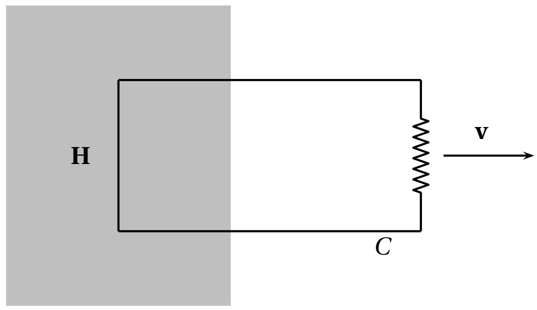

Figura 1.10: Ejemplo de un generador [Griffiths, 1999, p.294].

En 1813 Michael Faraday basado en datos experimentales, encontró que si la fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ sobre un circuito cerrado C proviene de un campo magnético, entonces

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_{\mathbf{H}}}{dt} \tag{1.14}$$

donde $\Phi_{\mathbf{H}} = \int_S \mathbf{H} \cdot \mathbf{da}$, es el flujo de campo magnético $\mathbf{H}$ a través de la superficie S encerrada por el circuito C [Griffiths, 1999, p.302].

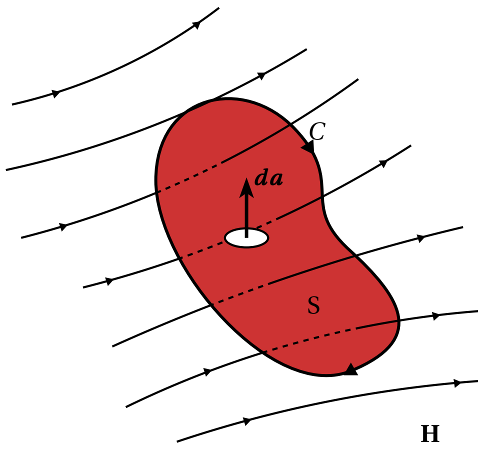

Figura 1.11: Ley de Faraday [Jackson, 1999, p.209].

Por (1.13), la ecuación (1.14), queda

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot \mathbf{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{H}\cdot \mathbf{da}$$

aplicando el teorema de Stokes, en el lado izquierda de la anterior ecuación

$$\int_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{da} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\cdot\mathbf{da}$$

como esta igualdad es independiente de la superficie S,

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{1.15}$$

Esta última ecuación se conoce como la *Ley de Faraday*. Nos indica que la presencia de un campo magnético variante en el tiempo, este induce un campo eléctrico [Griffiths, 1999, p.302].

Ahora juntemos las ecuaciones (1.4),(1.10),(1.12) y (1.15), para obtener el sistema,

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla\times\mathbf{H} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{H} = 0 & \nabla\times\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.16}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales parciales es conocido como las *Ecuaciones de Maxwell en la materia*. Cuando las combinamos con la ley de fuerza de Lorentz y la segunda ley de Newton, estas nos dan una descripción completa de la dinámica clásica de partículas cargadas y campos electromagnéticos [Jackson, 1999, p.239].

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN MATEMÁTICA

En este capítulo presentaremos las herramientas matemáticas que nos permitirá llegar a los resultados principales del siguiente capítulo. Se presentarán algunas aplicaciones del Teorema de Hahn-Banach y la derivada de Gateaux relacionados con puntos críticos de funcionales definidos en espacios vectoriales arbitrarios.

2.1. El Teorema de Hahn-Banach

En esta sección vamos a seguir las ideas de [Kreyszig, 1989, Cap. 4].

El *Teorema de Hahn-Banach* es uno de los pilares del análisis funcional. El propósito de este teorema es mostrar que un funcional f definido en un subespacio Z de espacio vectorial X y que tiene cierta propiedad de acotación la cual será formulada en términos de un *funcional sublineal* puede ser extendido a un funcional sobre todo X cumpliendo la misma propiedad de acotación.

Por definición, un *funcional sublineal* es un funcional de valor real p sobre un espacio vectorial X el cual es *subaditivo*, esto es,

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall\, x,\, y \in X,$$

y *homogéneo-positivo*, esto es,

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad \forall\, \alpha \geq 0 \in \mathbb{R} \text{ y } x \in X.$$

Por ejemplo $p(\cdot) = \|\cdot\|$, la *norma* sobre un espacio vectorial, cumple las condiciones anteriores.

Asumiremos de aquí en adelante que el espacio vectorial X es real, a continuación la formulación del teorema de Hahn-Banach

Teorema 2.1 (Teorema de Hahn-Banach, Extensión de funcionales lineales.)**.** Sea X un espacio vectorial real y p un funcional sublineal en X. Por otra parte, sea f un funcional líneal el cual está definido sobre un subespacio Z de X y que satisface

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in Z. \tag{2.1}$$

Entonces f tiene una extensión $\tilde{f}$ de Z a X satisfaciendo

$$\tilde{f}(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in X, \tag{2.2}$$

esto es, $\tilde{f}$ es un funcional líneal en X, satisfaciendo (2.2) en X y $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in Z$.

Demostración. La demostración de este teorema involucra el Lema de Zorn. Una demostración se puede ver en [Kreyszig, 1989, p. 214] y [Brezis, 2011, p. 1]. □

Para el caso en que X sea un espacio normado tenemos la siguiente versión del teorema de Hahn-Banach

Teorema 2.2 (Espacios Normados)**.** Sea f un funcional líneal acotado sobre un subespacio Z de un espacio normado X. Entonces existe un funcional líneal acotado $\tilde{f}$ en X el cual es una extensión de f a X y tiene la misma norma,

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z \tag{2.3}$$

donde

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)|, \qquad \|f\|_Z = \sup_{x\in Z,\, \|x\|=1} |f(x)|,$$

(y $\|f\|_Z = 0$ en el caso trivial $Z = \{0\}$).

Demostración. Si $Z = \{0\}$, entonces $f = 0$, y la extensión es $\tilde{f} = 0$. Sea $Z \neq \{0\}$. Queremos usar el Teorema 2.1. Y así debemos primero encontrar un p adecuado. Debido a que f es un funcional líneal acotado en Z, para todo $x \in Z$ tenemos

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|.$$

Esta es la fórmula (2.1), donde

$$p(x) = \|f\|_Z \|x\|$$

Como la norma está definida sobre todo X y $\|f\|_Z$ es una constante, p está definido sobre todo X. Además p satisface (2.1), por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}\|f\|_Z \|x+y\| &\leq \|f\|_Z \left(\|x\| + \|y\|\right)\\ &= p(x) + p(y)\end{aligned}$$

p también satisface (2.2) sobre X. Sea $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned}p(\alpha x) &= \|f\|_Z \|\alpha x\|\\ &= |\alpha| \|f\|_Z \|\alpha x\|\\ &= \alpha p(x).\end{aligned}$$

Y así podemos aplicar el Teorema 2.1 y concluir que existe un funcional líneal $\tilde{f}$ en X el cual es una extensión de f. Satisfaciendo

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x) = \|f\|_Z \|x\| \qquad x \in X.$$

Tomando el supremo sobre todos los $x \in X$ de norma 1, obtenemos la desigualdad

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \leq \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} \|f\|_Z \|x\| = \|f\|_Z. \tag{2.4}$$

debido a que

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| \geq \sup_{x\in Z,\, \|x\|=1} |\tilde{f}(x)| = \geq \sup_{x\in Z,\, \|x\|=1} |f(x)| = \|f\|_Z. \tag{2.5}$$

Juntando (2.4) y (2.5) tenemos

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$$

esto prueba el teorema. □

A continuación presentaremos una aplicación del teorema de Hahn-Banach que será de utilidad posteriormente.

Teorema 2.3 (Funcionales lineales acotados)**.** Sea X un espacio normado y sea $x_0 \neq 0$ cualquier elemento de X entonces existe un funcional líneal acotado $\tilde{f}$ en X tal que

$$\|\tilde{f}\| = 1, \qquad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|$$

Demostración. Consideremos el subespacio Z de X consistente de todos los elementos $z = \alpha x_0$ donde α es un escalar. Sobre Z definimos un funcional líneal f por

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$$

Claramente f es acotado y tiene norma $\|f\| = 1$, puesto que

$$\left|f(x)\right| = \left|f(\alpha x_0)\right| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|$$

luego

$$\sup_{x\in X,\, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in X,\, \|x\|=1} \|x\| = 1$$

El Teorema 2.2 implica que f tiene una extensión líneal $\tilde{f}$ de Z a X, de norma

$$\|\tilde{f}\| = \|f\| = 1.$$

Vemos que

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|.$$

$\square$

2.2. Derivadas sobre espacios vectoriales

Esta sección vamos a seguir las ideas de [Caicedo, 2005].

Dos conceptos importantes, son la *Derivada de Fréchet* y la *Derivada de Gateaux*, estos generalizan las derivadas que conocemos en $\mathbb{R}^n$, serán presentadas a continuación.

Denotemos con $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ el espacio de los operadores lineales acotados de $\mathbb{E}$ a $\mathbb{F}$,

Definición 2.1 (Derivada de Fréchet)**.** *Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ espacios vectoriales normados con norma notada en ambos por $\|\ \|$ y $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $f : A \to \mathbb{F}$, $a \in A$. f se dice diferenciable en a si existen una aplicación líneal continua $L(a,\cdot) = L \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ y una aplicación $r(a,h) = r(h)$, tales que:*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + r(h), \qquad \textit{donde } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

$L(a,\cdot) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ es llamada la derivada en el sentido de Fréchet de la función f. A la función $r(h)$ se le llama el resto de la diferencial.

[Caicedo, 2005, p. 63]

$L(a,\cdot)$ se nota usualmente por $f'(a)$, y cuando este es un funcional se suele usar el *producto de dualidad* $\langle f'(a), v\rangle$.

Ejemplos:

1. En el caso en que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, sea diferenciable en el sentido de Fréchet, su derivada toma la forma $\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\right]_{i=1}^{n}$, y actúa en forma de transformación líneal, por medio del producto interno:

$$\begin{aligned} \nabla f(a) :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &x \to \langle \nabla f(a), x\rangle \end{aligned}$$

2. Si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $f = (f_1,\dots,f_n)$, es diferenciable en el sentido de Fréchet, su derivada toma la forma de la *matriz Jacobiana*, $Jf(a) = [\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}]$

3. Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{E} = \mathbb{M}_{n\times n}$ de las matrices cuadradas de orden $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$, dotado de la norma

$$\|L\| = \sup\{\|Lx\| : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}.$$

Sea

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ &L \mapsto f(L) = LL^T \end{aligned}$$

donde el superíndice T denota la transpuesta.

Entonces f es diferenciable para todo L en $\mathbb{E}$ y $f'(L)H = LH^T + HL^T$. En efecto,

$$\begin{aligned} f(L+H) &= (L+H)(L+H)^T \\ &= (L+H)(L^T+H^T) \\ &= LL^T + LH^T + HL^T + HH^T \\ &= f(L) + f'(L)H + r(H) \end{aligned}$$

donde $f(L) = LL^T$, $f'(L)H = LH^T + HL^T$ y $r(H) = HH^T$

Vamos a ver, que cada termino satisface las condiciones requeridas. Tomamos $r(H) = HH^T$, puesto que $\|ST\| \le \|S\|\|T\|$, entonces , $\|r(H)\| = \|HH^T\| \le \|H\|\|H\|$, deducimos

$$0 \le \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} \le \frac{\|H\|\|H\|}{\|H\|} = \|H\|.$$

De esta desigualdad se deduce que:

$$\lim_{H\to 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0$$

No es difícil ver, que $f'(L)$ es líneal como función de H, deducimos que es líneal continua por ser $\dim \mathbb{E} = n^2$ finita [Kreyszig, 1989, Teorema 2.7-8, p. 96]. Esto muestra que $f'(L)$ existe, y es líneal continua y

$$\begin{aligned} f'(L) :& \mathbb{E} \to \mathbb{E} \\ & H \mapsto f'(L)H = LH^T + HL^T \end{aligned}$$

Observación

Una conclusión de la Definición 2.1, es que si $a \in A$ y A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(a) = \{x \in \mathbb{E} : \|x - a\| < r\} \subset A$. Luego si $h \in \mathbb{E}$ es tal que $\|h\| < r$ entonces $a + h \in A$, puesto que si $x_0 = a + h$

$$\|x_0 - a\| = \|a + h - a\| = \|h\| < r \Rightarrow x_0 = a + h \in B_R(a) \subset A.$$

Además si en en la Definición 2.1 fijamos $r(h) = \rho(h)\|h\|$, entonces $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$.

Con este lenguaje fijo, vamos a garantizar que $L(a, \cdot) = f'(a)$ en la Definición 2.1, es única. Por medio de la siguiente proposición.

Proposición 2.1. Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espacios normados $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $a \in A$,

$$f : A \to \mathbb{F}, \text{ diferenciable en el sentido de Fréchet en } a,$$

entonces la aplicación líneal continua $L = L(a, \cdot) = f'(a)$ en la definición 2.1 , es única.

Demostración. Sean $T, L \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$; satisfaciendo la Definición 2.1, mostraremos que $T = L$.

Como $a \in A$, existe $r > 0$ tal que $\|h\| < r$ implica que $a + h \in A$, luego

$$f(a + h) = f(a) + L(h) + \rho_1(h)\|h\| = f(a) + T(h) + \rho_2(h)\|h\|,$$

donde $\rho_i(h)\|h\|$, son los respectivos residuos, y $\lim_{h\to 0} \rho_i(h) = 0$, $\rho_i(0) = 0$, para $i = 1, 2$. Si $v = 0$ de $\mathbb{E}$, es claro que $L(0) = T(0) = 0$, por tanto sea $v \in \mathbb{E}$, $v \neq 0$. Entonces para todo real t, tal que $\|tv\| < r$, obtenemos que $a + tv \in A$. Luego, para estos $h = tv$ con $t \neq 0$, deducimos que:

$$f(a) + L(tv) + \rho_1(tv)\,\|tv\| = f(a) + T(tv) + \rho_2(tv)\,\|tv\|.$$

Es decir,

$$L(tv) - T(tv) = \rho_2(tv)\,\|tv\| - \rho_1(tv)\,\|tv\|.$$

Para $t \neq 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} L(v) - T(v) &= \frac{1}{t}\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right)\|tv\| \\ &= \frac{\|v\|}{t\,\|v\|}\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right)\|tv\| \\ &= \pm\frac{\|v\|}{\|tv\|}\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right)\|tv\| \\ &= \pm\,\|v\|\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$L(v) - T(v) = \pm\,\|v\|\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right).$$

El lado izquierdo de la igualdad no depende del real $t \neq 0$: como $tv \to 0$ si $t \to 0$, y como $\lim_{t\to 0}\rho_i(tv) = 0$, para $i = 1, 2$, obtenemos que:

$$L(v) - T(v) = \pm\,\|v\|\lim_{t\to 0}\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right) = 0.$$

Luego $L(v) = T(v)$ para todo $v \in \mathbb{E}$. Luego L en la Definición 2.1 es único. □

Otra proposición de importancia es la siguiente:

Proposición 2.2. Sean $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espacios normados $A \subset \mathbb{E}$ abierto $a \in A$, $f : A \to \mathbb{F}$, diferenciable en a (En el sentido de Fréchet); entonces para todo $v \in \mathbb{E}$,

$$f'(a)v = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Demostración. Sea $v \neq 0 \in \mathbb{E}$, como $a \in A$, A es abierto en $\mathbb{E}$, existe $\delta > 0$, tal que si $t \in \mathbb{R}$ satisface $\|tv\| = |t|\,\|v\| < \delta$, entonces $a + tv \in A$. Así obtenemos

$$f(a+tv) = f(a) + f'(a)(tv) + r(tv), \text{ donde } \lim_{t\to 0}\frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0.$$

Para $t \neq 0$, obtenemos

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \frac{r(tv)}{t} = f'(a)(v).$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior depende de t y el lado derecho existe independientemente de t, esto implica que el existe el límite del lado derecho, cuando $t \to 0$, es $f'(a)(v)$. Es decir, existe

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - \frac{r(tv)}{t} = f'(a)(v),$$

finalmente como

$$\lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{t} = \|v\| \lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{t\|v\|} = \pm \|v\| \lim_{t\to 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0.$$

Se sigue la conclusión. □

Otro concepto de fundamental importancia es la derivada en el sentido de Gateaux.

Definición 2.2 (Derivada de Gateaux)**.** *Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espacios normados, $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $a \in A$, $f: A \to \mathbb{F}$, y sea $v \in \mathbb{E}$, si existe el límite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

diremos que f, posee derivada en el sentido de Gateaux, y la denotaremos por $\partial f(a,v)$. Usualmente también se le conoce como la derivada de f en a en la dirección de v.

[Caicedo, 2005, p. 67]

Nota: Si f es diferenciable para todo $x \in A$, $A \subset \mathbb{E}$ abierto, diremos que f es diferenciable en A. (En el sentido de Fréchet o Gateaux, según sea el caso.)

A continuación ejemplos,

Ejemplos:

1. Por la Proposición 2.2 toda función $f: \mathbb{E} \to \mathbb{F}$, **diferenciable en el sentido de Fréchet es diferenciable en el sentido de Gateaux y ambas coinciden.**

2. Consideremos

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,z) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{xz^2}{x^2+z^2}, & \text{si } (x,z) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,z) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

veamos que f es diferenciable en $\vec{0} = (0,0)$ en el sentido de Gateaux, pero f no es diferenciable en el sentido de Fréchet en ese mismo punto, en efecto: Si f fuese diferenciable en $\vec{0}$, en efecto

$$f'(\vec{0})(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0} + t(1,0)) - f(\vec{0})}{t} = 0$$

y

$$f'(\vec{0})(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{0} + t(0,1)) - f(\vec{0})}{t} = 0$$

por la linealidad de $f'(\vec{0})$, obtenemos

$$f'(\vec{0})(u,v) = uf'(\vec{0})(1,0) + vf'(\vec{0})(0,1) = 0 + 0 = 0.$$

Como $(u.v) \in \mathbb{R}^2$ es arbitrario, $f'(\vec{0}) \equiv 0$, luego

$$f(h,k) = f(0,0) + f'(0)(h,k) + r(h,k) = f(0,0) + r(h,k) \qquad \lim_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{r(\vec{h})}{\left\|\vec{h}\right\|}$$

donde $\vec{h} = (h,k)$, por tanto, si trabajamos en $\mathbb{R}^2$, con la norma euclidiana, obtenemos que para $h = k \neq 0$,

$$f(h,h) = r(h,h) = \frac{h^3}{2h^2} = \frac{1}{2}h.$$

Por tanto

$$\frac{r(h,h)}{\|(h,h)\|} = \frac{h}{2\sqrt{2}|h|} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Luego el límite no existe cuando $h \to 0$; entonces f no es diferenciable en el sentido de Fréchet en $(0,0)$.

Veamos que es diferenciable en el sentido de Gateaux en $(0,0)$.

Para $v = (v_1, v_2) \neq (0,0)$,

$$\partial f(0,v) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^3(v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1 v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)}.$$

Observemos que $\partial f(0,v)$ no es lineal.

De estos ejemplos, podemos obtener dos conclusiones. Primero, toda función diferenciable en el sentido de Fréchet es diferenciable en el sentido de Gateaux y el valor de ambas coinciden, por la proposición 2.2. Segundo. Debido al segundo ejemplo vemos que hay casos en que la derivada en el sentido de Gateaux de una función existe y la derivada en el sentido de Fréchet no, aun más $\partial f(a,\cdot)$ en el segundo ejemplo, no era un operador lineal. Sin embargo podemos observar que calcular la derivada en el sentido de Gateaux es más sencillo operativamente que calcular la derivada en el sentido de Fréchet, pues ésto implica, entre otras los cálculos con residuos. Por eso deseamos saber cuando una derivada en el sentido de Gateaux es diferenciable en el sentido de Fréchet y que sus valores coincidan. Este es el propósito de lo restante en esta sección.

Vamos ahora a recordar un teorema del cálculo elemental:

Teorema 2.4 (Teorema de igualdad del Valor Medio)**.** Sean a y b números reales con $a<b$,

$$f:[a,b]\to\mathbb{R},\ \text{continua en } [a,b],\ \text{diferenciable en } (a,b).$$

Entonces existe $\theta\in(0,1)$ tal que $f(b)-f(a)=f'(a+\theta b)(b-a)$.

Para una demostración véase,[Rudin, 1976, p. 108].

Definición 2.3. *Sean* $(\mathbb{E},\|\cdot\|)$ *espacio vectorial normado;* $a,b\in\mathbb{E}$*. Llamaremos segmento cerrado de extremos a y b al conjunto*

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{E}: x=a+\lambda(b-a),\ \lambda\in[0,1]\}$$

,

y llamaremos segmento abierto de extremos a y b al conjunto

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{E}: x=a+\lambda(b-a),\ \lambda\in(0,1)\}$$

.

Ahora con ayuda de este teorema y esta definición, vamos a presentar una generalización para espacios de Banach, y con diferenciación en el sentido de Gateaux.

Teorema 2.5 (Teorema del Valor Medio para aplicaciones de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{R}$)**.** Sean $\mathbb{E}$ espacio de Banach $A\subset\mathbb{E}$ abierto, $f:A\to\mathbb{R}$. Suponemos que $a\in A$ y $h\in\mathbb{E}$, son tales que si $[a,a+h]\subset A$ y f restringida a $[a,a+h]$ es continua y para todo $x\in(a,a+h)$ existe la derivada en el sentido de Gateaux, de f en en x, en la dirección h, $\partial f(x,h)$. Entonces existe $\theta\in(0,1)$, tal que

$$f(a+h)-f(a)=\partial f(a+\theta h,h).$$

Demostración. Consideramos $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $F(a+th)$. Entonces existe

$$F'(t) = \lim_{s\to 0} \frac{F(t+s)-F(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(a+(t+s)h)-f(a+th}{s} = \partial f(a+th,h)$$

para todo $t \in (0,1)$. El Teorema del Valor Medio Clásico (Teorema 2.4), aplicado a F nos implica que existe $\theta \in (0,1)$ tal que $F(1)-F(0) = F'(\theta)$, lo que reemplazando por nuestras cuentas anteriores es equivalente a

$$f(a+h)-f(a) = \partial f(a+\theta h,h)$$

□

Existe otra manera de definir, las funciones diferenciables tanto en el sentido de Fréchet como en el de Gateaux, por medio de la notación *o minúscula de Landau.* Recordemos que nosotros escribimos, $f(x) = o(g(x))$ para $x \to x_0$ si y solo sí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Para el caso de la derivada de Fréchet, recordemos que una condición esencial para la diferenciabilidad de una función $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ es que el resto de la diferencial $r(h)$, en la definición 2.1, satisfaga

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|_{\mathbb{E}}} = 0,$$

esto en términos de la norma es que $\lim_{h\to 0} \left\| \frac{r(h)}{\|h\|_{\mathbb{E}}} \right\|_{\mathbb{F}} = \lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|_{\mathbb{F}}}{\|h\|_{\mathbb{E}}} = 0$. Si despejamos $r(h)$ en la definición 2.1, obtenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left\| f(a+h)-f(a)-L(a)(h) \right\|_{\mathbb{F}}}{\|h\|_{\mathbb{E}}} = 0.$$

Por tanto si f cumple las mismas condiciones que en la definición 2.1, se dice que f es diferenciable en en el sentido de Fréchet en a si $\exists L \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, tal que

$$\left\| f(a+h)-f(a)-L(a)(h) \right\|_{\mathbb{F}} = o\left(\|h\|_{\mathbb{E}}\right).$$

De manera análoga, a las afirmaciones anteriores, si f cumple las mismas condiciones de la definición 2.2, decimos que f es diferenciable en el sentido de Gateaux en a, si $\forall h \in \mathbb{E}$, $\exists \partial f(a,h) \subset \mathbb{F}$, tal que

$$\left\| f(a+th)-f(a)-t\partial f(a,h) \right\|_{\mathbb{F}} = o(t) \qquad \text{cuando } t \to 0$$

para todo $a+th \in A$. Claramente $\partial f(a,\cdot)$ es la derivada en el sentido de Gateaux de f en a.

Ahora vamos a juntar los Teoremas 2.3 y 2.5, para probar uno de los resultados más importantes y útiles en todo el trabajo:

Teorema 2.6. Supongamos que $f : A \to \mathbb{F}$ es diferenciable en el sentido de Gateaux, y que $\forall a \in A$, $\exists L(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ satisfaciendo

$$\partial f(x,h) = L(x)h \qquad \forall h \in \mathbb{E}.$$

Si la función $x \mapsto L(x)$ es continua en x_0, entonces f es diferenciable en el sentido de Fréchet en x_0 con $f'(x_0) = L(x_0)$.

[Chang, 2005, p.3]

Demostración. Sin perdida de generalidad vamos a asumir que el segmento $[x_0, x_0 + h] \subset A$. De acuerdo al Teorema 2.3, existe $y^* \in \mathbb{F}^*$ con $\|y^*\| = 1$, tal que

$$\left\| f(x_0+h) - f(x_0) - L(x_0)h \right\|_{\mathbb{F}} = \left\langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0 - L(x_0)h \right\rangle$$

fijemos

$$\varphi(t) = \left\langle y^*, f(x_0+th) \right\rangle$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(t+s)-\varphi(t)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\left\langle y^*, f(x_0+(t+s)h)\right\rangle - \left\langle y^*, f(x_0+th)\right\rangle}{s} \\
&= \left\langle y^*, \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+(t+s)h) - f(x_0+th)}{s} \right\rangle \\
&= \left\langle y^*, \partial f(x_0+th, h)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio, $\exists \xi \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}
\left\| f(x_0+h) - f(x_0) - L(x_0)h \right\|_{\mathbb{F}} &= \left| \left\langle y^*, f(x_0+h)\right\rangle - \left\langle y^*, f(x_0)\right\rangle - \left\langle y*, L(x_0)h\right\rangle \right| \\
&= \left| \varphi(1) - \varphi(0) - \left\langle y^*, L(x_0)h\right\rangle \right| \\
&= \left| \varphi'(\xi) - \left\langle y^*, L(x_0)h\right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle y^*, \partial f(x_0+\xi h, h)\right\rangle - \left\langle y^*, L(x_0)h\right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle y^*, L(x_0+\xi h)h\right\rangle - \left\langle y^*, L(x_0)h\right\rangle \right| \\
&= \left| \left\langle y^*, [L(x_0+\xi h) - L(x_0)]\, h\right\rangle \right|.
\end{aligned}$$

Observemos entonces que

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\left\| f(x_0+h)-f(x_0)-L(x_0)h\right\|_{\mathbb{F}}}{\|h\|_{\mathbb{E}}} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left|\left\langle y^*,[L(x_0+\xi h)-L(x_0)]\,h\right\rangle\right|}{\|h\|_{\mathbb{E}}}\\
&\leq \lim_{h\to 0}\frac{\left\| y^*\right\|_{\mathbb{F}^*}\|[L(x_0+\xi h)-L(x_0)]\,h\|_{\mathbb{F}}}{\|h\|_{\mathbb{E}}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\|[L(x_0+\xi h)-L(x_0)]\,h\|_{\mathbb{F}}}{\|h\|_{\mathbb{E}}}\\
&\leq \lim_{h\to 0}\frac{\|[L(x_0+\xi h)-L(x_0)]\|_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}\,\|h\|_{\mathbb{E}}}{\|h\|_{\mathbb{E}}}\\
&= \lim_{h\to 0}\|[L(x_0+\xi h)-L(x_0)]\|_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} \qquad = 0
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left\| f(x_0+h)-f(x_0)-L(x_0)h\right\|_{\mathbb{F}}}{\|h\|_{\mathbb{E}}}=0$$

Es decir

$$\left\| f(x_0+h)-f(x_0)-L(x_0)h\right\|_{\mathbb{F}}=o(\|h\|_{\mathbb{E}})$$

esto quiere decir que, $f'(x_0)=L(x_0)$.

□

Ahora con ayuda de este teorema seremos capaces de calcular las derivadas en el sentido de Fréchet por un simple proceso de límite.

2.3. Máximos y mínimos

En esta sección introduciremos algunos conceptos básicos sobre valores extremos de aplicaciones diferenciables a valor real. Mostraremos cómo la teoría clásica de máximos y mínimos de funciones de variable real a valor real, es generalizada a funciones de un espacio de Banach arbitrario a valor real.

Definición 2.4. *Sea A un subconjunto de un espacio normado $\mathbb{E}$ y $f: A\to\mathbb{R}$.*

(a) Un punto $a\in A$ se dice un máximo local para f si existe una vecindad V de a en $\mathbb{E}$, tal que

$$f(x)\leq f(a),\qquad \textit{para todo } x\in V\cap A.$$

(b) El punto a se llama máximo local estricto de f, si podemos escoger la vecindad V de a, tal que

$$f(x)<f(a),\qquad \textit{para todo } x\in (V-\{a\})\cap A.$$

(c) El punto a se dice máximo absoluto para f en A si

$$f(x) \leq f(a), \qquad \textit{para todo } x \in A.$$

Es usual decir máximo para f en A.

(d) El punto a se dice máximo absoluto estricto para f en A si

$$f(x) < f(a), \qquad \textit{para todo } x \in A - \{a\}.$$

De manera semejante definimos las nociones de mínimo local, mínimo local estricto y mínimo absoluto, cambiando $\leq$, por $\geq$ y $<$ por $>$, respectivamente.

De ahora en adelante cuando digamos que a es un puntos crítico, se entenderá que a es bien un máximo o bien un mínimo.

Ver [Caicedo, 2005, p. 319].

Deseamos ahora caracterizar los puntos críticos de funciones diferenciables, en nuestro lenguaje, diferenciables en el sentido de Fréchet. El siguiente teorema nos permitirá realizar, este proceso de manera análoga que en el calculo de una variable.

Teorema 2.7. Sean $\mathbb{E}$ espacio de Banach, A subconjunto abierto de $\mathbb{E}$, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ función diferenciable en el sentido de Fréchet en A. Entonces una condición necesaria para que el punto a sea un máximo local o un mínimo local para f es que $f'(a) = 0$.

Demostración. Supongamos que a es un máximo local para f. Por definición existe V vecindad de a, $V \subset A$, tal que

$$f(x) \leq f(a),\ x \in V.$$

Como f es diferenciable en a, tenemos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(h) + r(h),\ a+h \in V, \text{ donde } \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Por tanto, como $f(a) \geq f(a+h)$,

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)(h) + r(h) \leq 0,\ h \in V - \{a\}. \tag{2.6}$$

Al cambiar h por $-h$, en la anterior desigualdad, se obtiene que

$$f(a-h) - f(a) = -f'(a)(h) + r(-h) \leq 0,\ h \in V - \{a\}. \tag{2.7}$$

De (2.6) y (2.7) deducimos

$$r(-h) \leq f'(a)(h) \leq -r(h),$$

para todo $h \in V - a$. Luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(a)(h)}{\|h\|} = 0,$$

ya que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(-h)}{\|-h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Ésto implica que $f'(a) = 0$. En efecto, como $f'(a) = T$ es aplicación líneal continua de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{R}$, si T no es nula, existe $w \in \mathbb{E}$, $w \neq 0$, tal que $z = T(w) \neq 0$, podemos suponer $z > 0$. Para toda $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\frac{|T(bw)|}{\|bw\|} = \frac{z}{\|w\|} = c > 0$. Cuando $0 < b \to 0$, $\|bw\| \to 0$, entonces si $\hat{h} = bw$, $\hat{h} \to 0$ y $\frac{T(\hat{h})}{\|\hat{h}\|} \to c$. Se contradice que

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)}{\|h\|} = 0.$$

Luego $T(h) = 0$ □

Podemos hacer las siguiente observaciones:

- Geométricamente, la condición $f'(a) = 0$ significa que el hiperplano tangente al gráfico de f en a es paralelo al subespacio $\mathbb{E}$ de $\mathbb{E} \times \mathbb{R}$.
- La condición $f'(a) = 0$ es necesaria pero no es suficiente para que f posea un máximo o un mínimo en a. Por ejemplo, la función

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &(x, y) \mapsto x^2 - y^2, \end{aligned}$$

tiene por derivada en el sentido de Fréchet,

$$f'(x, y) = \nabla f = [2x, -2y]$$

entonces $f'(0,0) \equiv 0$ sin embargo el origen no es punto de máximo ni de mínimo para f, ya que f toma valores positivos y negativos en toda vecindad del origen.

2.4. Funciones de Soporte Compacto

Las funciones de *soporte compacto continuamente diferenciables*, desempeñan un papel fundamental, en el estudio del análisis funcional. A continuación vamos a definir este concepto formalmente, ver [Rudin, 1970, p. 38]

Definición 2.5. *El soporte de una función f a valor real, sobre un espacio topológico X es la clausura de el conjunto*

$$\{x : f(x) \neq 0\}.$$

La colección de todos las funciones continuas sobre X cuyo soporte es compacto es denotado por $C_0(X)$.

Observemos que $C_0(X)$ es un espacio vectorial. Esto debido a los siguientes hechos:

(a) El soporte de $f+g$ esta en la unión de el soporte de f y el de g, y cualquier unión finita de conjuntos compactos es compacto.

(b) La suma de dos funciones a valor real es continua así como el producto escalar de funciones continuas es continuo.

Vamos a denotar con $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ al subespacio de $C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, que consiste en todas las funciones de soporte compacto continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^N$.

Ejemplo:

1. Un ejemplo sencillo, de una función en $C_0^\infty(\mathbb{R})$, es

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \in (1,3) \\ 0, & \text{si } x \notin (1,3). \end{cases} \end{aligned}$$

El soporte de f es $[1,3]$, Véase la Figura (2.4), la región punteada es el soporte de f.

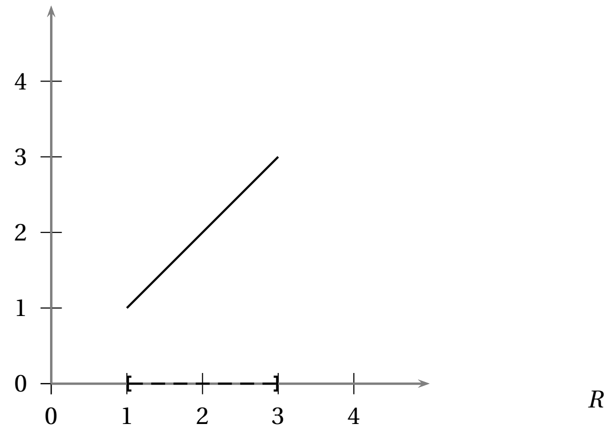

Figura 2.1: Grafica de la función f

2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange de la electrodinámica en el vacío.

Esta sección está dedicada a deducir las ecuaciones de Maxwell de un principio variacional.

2.5.1. El principio variacional.

El *cálculo de variaciones* estudia la manera de qué la forma, el tiempo, la energía, la velocidad, el volumen o ganancias etc., sean optimas bajo ciertas condiciones. El objetivo principal del cálculo de variaciones es encontrar la soluciones gobernadas por esos principios [Chang, 2005, p.205].

El problema es formulado como sigue: Asumamos que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ es una función continua, y que E es un conjunto de funciones vectoriales con N componentes. Sea J un funcional definido en E:

$$J[u] = \int f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Encontremos $u_0 \in E$, tal que

$$J[u_0] = \text{mín}\{J(u) | u \in E\}$$

Un *principio variacional* son los métodos generales para maximizar o minimizar J.

Para encontrar las ecuaciones que determinan estos puntos críticos, usaremos los resultados de las secciones anteriores de este capítulo, de la siguiente manera: Por medio de la derivada de Gateaux calculamos la variación del funcional de la acción J en alguna dirección arbitraria v, $\langle J'[u], v\rangle$, con este último paso obtenemos la ecuación $J'[u] = 0$, la cual determina los puntos críticos de J [Caicedo, 2005, p. 321]. El sistema de ecuaciones $J'[u] = 0$, es conocido como las *Ecuaciones de Euler-Langrange* del funcional J.

Para seguir con nuestro estudio es imperativo conocer y aceptar como cierto el siguiente hecho:

> *"Las ecuaciones fundamentales de la física son las ecuaciones de Euler-Langrange de un funcional adecuado. No hay un razón lógica para esto. Es solo un hecho empírico: Todas las ecuaciones fundamentales que han sido descubiertas hasta ahora son derivadas de un principio variacional".* [Benci, 2009, p.273]

Por ejemplo, las ecuaciones de movimiento de k partículas cuyas posiciones en el tiempo t están dadas por $x_j(t)$, $x_j \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \ldots, k$ son obtenidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange relativas al funcional

$$I = \int \frac{m_j}{2} \left|\dot{x}_j\right|^2 - V(t, x_1, \ldots, x_k)\, dt$$

donde m_j es la masa de la j-esima partícula y V es la energía potencial del sistema. Con el propósito de ilustrar lo anterior mostraremos un ejemplo canónico de la física.

Ejemplo (El Oscilador Armónico):

El ejemplo canónico de la física es el *oscilador armónico*, pues éste aparece en los diferentes contextos de la misma. Es por definición una masa puntual m inmersa en una dimensión cuya fuerza es directamente proporcional a la elongación y dirigida en sentido contrario al movimiento [Scheck, 2005, p. 33]. Es decir que la fuerza $F = -kx$, con $k > 0$, k es llamada *constante de elasticidad*. El movimiento descrito por la masa puntual se le denomina, *movimiento armónico simple*, y a la ecuación diferencial que lo modela es llamada *ecuación del movimiento armónico simple*.

Con el objetivo de obtener la ecuación del movimiento armónico simple, estudiaremos el *sistema masa-resorte* como caso particular del oscilador armónico.

- **Deducción del fenómeno físico**

  Supóngase un bloque de masa m atado al final de un resorte horizontal, además el otro extremo está fijado a una pared. El bloque reposa sobre una superficie horizontal sin fricción, la fuerza F ejercida por un resorte extendido es dada por la ley de Hooke, la cual afirma que la extensión de un resorte es proporcional a la fuerza aplicada, para desplazamientos positivos y negativos [Klepner and Kolenkow, 1973, p. 97], es decir $F = -kx$, donde k es una constante llamada la constante del resorte y x es el desplazamiento al final del resorte desde su posición de equilibrio.

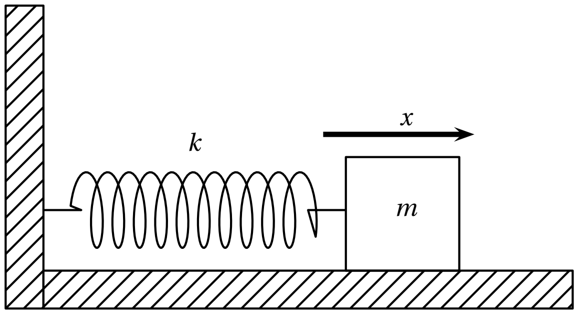

Figura 2.2: Sistema masa-resorte

Una representación gráfica de la situación se ve en la Figura (2.5.1). Dado que la fuerza del resorte es la única fuerza horizontal actuando sobre el bloque, la ecuación del movimiento es

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Equivalentemente

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.8}$$

Las soluciones de esta ecuación diferencial están dadas por $x = A\operatorname{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$, ω es conocida como la frecuencia de movimiento y las constantes A y B están dadas por las condiciones iniciales [Hirsch and Smale, 1973, p. 15].

- **Ecuaciones de Euler-Lagrange:** En primer lugar la energía cinética y potencial del sistema masa-resorte vienen expresadas por las formulas

  $$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \text{y} \qquad U = \frac{1}{2}kx^2$$

  Ahora calculamos el Lagrangiano del sistema, $L = T - U$

  $$L = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 - kx^2\right).$$

  Por lo anteriormente expuesto, se requiere que el funcional de la acción

  $$I[x] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2\, dt$$

  adquiera extremos para obtener soluciones físicas al sistema [Scheck, 2005, p. 425]. Si hay soluciones, éstas deben satisfacer la condición

$$I'[x] = 0.$$

Para esto calculamos la derivada del funcional de la acción vía derivada de Gateaux [Caicedo, 2005, p. 67]. Para calcular esta derivada, debemos imponer algunas condiciones sobre el fenómeno. Supongamos que en el tiempo t_0 el resorte esta comprimido, y que en el tiempo t_1 hubo una oscilación completa, es decir que $\dot{x}(t_0) = \dot{x}(t_1) = 0$. Sea entonces v una función lo suficientemente diferenciable.

$$\begin{aligned}
\left\langle I'[x], v\right\rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{I[x+tv]-I[x]}{t}\\
&= \lim_{t\to 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2t}\left\{m\left[(\dot{x}+t\dot{v})^2-\dot{x}^2\right]-k\left[(x+tv)^2-x^2\right]\right\} dt\\
&= \lim_{t\to 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\left\{m\left[2\dot{x}\dot{v}+t\dot{v}^2\right]-k\left[2xv+tv^2\right]\right\} dt\\
&= \int_{t_0}^{t_1} m\dot{x}\dot{v}-kxv\, dt\\
&= \int_{t_0}^{t_1} -(m\ddot{x}+kx)\, v\, dt \quad \text{(por partes)}.
\end{aligned}$$

De este modo si $\left\langle I'[x], v\right\rangle = 0$ para toda función v. Entonces

$$\ddot{x}+\omega^2 x = 0.$$

Este es *las ecuaciones de Euler-Lagrange* para el Lagrangiano L. Podemos observar que el resultado es consistente con los resultados de la mecánica Newtoniana, la constante ω es la misma que en (2.8), por tanto sus soluciones son equivalentes.

En el caso más general, las ecuaciones de movimiento de sistema de dimensión finita cuyas coordenadas generalizadas son $q_j(t)$ $j = 1,\ldots,k$ son obtenidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange relativas al funcional

$$I = \int L(t, q_1,\ldots,q_k, \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k)\, dt.$$

La función L se llama *lagrangiano*. También la dinámica de campos puede ser determinado por un principio variacional. Desde el punto de vista matemático un campo es una función

$$u : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^k,\ u = (u_1,\ldots,u_k)$$

donde $\mathbb{R}^{N+1}$ es el espacio-tiempo continuo y $\mathbb{R}^k$ son llamados los parámetros internos del espacio. Por supuesto en los problemas físicos, la dimensión del espacio N es 1, 2 o 3. Las coordenadas espaciales y temporales serán denotadas por

$x = (x_1, \ldots, x_N)$ y t respectivamente. La función $u(t,x)$ describe el estado interno del vació en el punto x en el instante t.

Es conocido que las ecuaciones de campo son obtenidas por medio de la variación del funcional de la acción definido como sigue:

$$S = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \mathscr{L}(t, x, u, \nabla u, \partial_t u)\, dx\, dt. \tag{2.9}$$

La función $\mathscr{L}$ es llamada densidad de lagrangiano[Benci, 2009, p.274]. Para que la integral en (2.9) éste bien definida vamos a exigir que $\mathscr{L} \to 0$ y su derivadas tiendan a cero en el infinito y así mismo que en el espacio donde se encuentre definido este funcional u y todas sus derivadas tiendan a cero cuando cualquiera de sus variables tienda a cero.

Vamos ahora a calcular la variación de (2.9), para el caso en que $u : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, sea $v : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$, lo suficientemente diferenciable y fijemos $(t = x_0)$,

$$\begin{aligned}
\langle S'(u), v \rangle &= \lim_{h \to 0} \frac{S(u + hv) - S(u)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \iint \frac{\mathscr{L}(t, x, u + hv, \nabla u + h\nabla v, \partial_t u + h\partial_t v) - \mathscr{L}(t, x, u, \nabla u, \partial_t u)}{h}\, dx\, dt \\
&= \iint \nabla_{(u, \nabla u, \partial_t u)} \mathscr{L}(t, x, u, \nabla u, \partial_t u) \cdot (v, \nabla v, \partial_t v)\, dx\, dt \\
&= \iint \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \cdot v + \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx\, dt.
\end{aligned}$$

Por otro lado, integrando por partes obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx_i = \left. \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \right) \cdot v\, dx_i = -\int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \right) \cdot v\, dx_i$$

Esto último por las condiciones en el infinito sobre u y $\mathscr{L}$. Si tenemos en cuenta que $dx\, dt = dx_1 \cdots dx_N\, dx_0$,

$$\iint \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\, dt = -\iint \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \right) \cdot v\, dx\, dt.$$

Juntando todas las cuentas,

$$\langle S'(u), v \rangle = \iint \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} - \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} \right) \right) \cdot v\, dx\, dt.$$

Sabemos que para que halla un punto critico, $\langle S'(u), v\rangle$ para todo v, de la expresión anterior al sér v arbitrario, tenemos que :

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = 0. \tag{2.10}$$

Esta es la famosa Ecuación de Euler-Lagrange. En el caso en que $u = (u_1, \ldots, u_k)$, por cálculos idénticos, obtenemos la misma ecuación pero con,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x_i}} = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{1,x_i}}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{k,x_i}}\right),\ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_k}\right) \text{ y } u_{j,x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Ver [Benci, 2009, p.274].

2.5.2. Lagrangiano de la electrodinámica en el vacío.

La electrodinámica en el vacío, se obtiene cuando $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$, es decir que no hay medios materiales en el espacio[Griffiths, 1999, p.328]. De ahora en adelante con el objetivo de hacer los cálculos más sencillos, realizamos un cambio de unidades, dejando $\epsilon_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, y $c = 1$, c denota la constante de la velocidad de la luz, ha este sistema de unidades se le conoce como *Unidades Fundamentales.*.

Afirmamos que la densidad de lagrangiano de la electrodinámica clásica en el vacío es

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2\right). \tag{2.11}$$

Por tanto el funcional de la acción viene dada por

$$S = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2\right) dx\, dt. \tag{2.12}$$

Es interesante notar que los términos $\frac{1}{2}\int |\mathbf{E}|^2\, dx$ y $\frac{1}{2}\int |\mathbf{H}|^2\, dx$ son respectivamente la energía del campo eléctrico y la energía del campo magnético [Griffiths, 1999, p.94,p.318]. Deseamos ahora encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange relativas a (2.12), para esto usemos la calibración (1.2) y (1.3), entonces (2.12) toma la forma,

$$S(\mathbf{A}, \varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2\right) dx\, dt. \tag{2.13}$$

Para que (2.12) sea finito siempre, vamos a poner como condición de frontera sobre $\mathbf{A}$ y φ, que ellas y todas sus derivadas tiendan a 0 cuando cualquiera de sus variables tiende a infinito. Otra condición que imponemos es que $\mathbf{E}(-t) = \mathbf{E}(t)$ la justificación de este hecho son argumentos físicos, esta se puede encontrar en [Landau and Lifshitz, 1994, p.52]. Ya con ésto, dispongámonos a calcular las ecuaciones de Maxwell.

- **Ley de Gauss**

  Calculemos la variación, $S(\mathbf{A},\varphi)$ con respecto a φ, $\delta\varphi$, vía derivada de Gateaux, sea $v:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, una función los suficientemente diferenciable.

$$
\begin{aligned}
\langle \delta\varphi, v\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{S(\mathbf{A},\varphi+tv)-S(\mathbf{A},\varphi)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi+t\nabla v\right|^2-\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2 dx\,dt\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint 2t\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)\cdot\nabla v+t^2|\nabla v|^2\,dx\,dt\\
&= \lim_{t\to 0}\iint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)\cdot\nabla v+\frac{t}{2}|\nabla v|^2\,dx\,dt\\
&= \iint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)\cdot\nabla v\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

Usando (1.2),

$$
\langle \delta\varphi, v\rangle = -\iint \mathbf{E}\cdot\nabla v\,dx\,dt
$$

Solo resta calcular, $\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{E}\cdot\nabla v\,dx$. Si $B_R=\{x\in\mathbb{R}^3 : |x|<R\}$ para R arbitrario, pero fijo. Además notemos con $\mathbf{E}(R,\theta,\varphi)$ al campo $\mathbf{E}$ cuando la variable t es fija y $\mathbf{E}$ solo depende de las coordenadas esféricas (R,θ,φ).

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{E}\cdot\nabla v\,dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{B_R}\mathbf{E}\cdot\nabla v\,dx\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} v\mathbf{E}\cdot\mathbf{da}-\lim_{R\to\infty}\int_{B_R}\nabla\cdot\mathbf{E}v\,dx && \text{(Por partes.)}\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v\mathbf{E}(R,\theta,\varphi)\cdot\mathbf{da}-\lim_{R\to\infty}\int_{B_R}\nabla\cdot\mathbf{E}v\,dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot\mathbf{E}v\,dx && (\lim_{R\to\infty}\mathbf{E}(R,\theta,\varphi)=0).
\end{aligned}
$$

De donde,

$$
\begin{aligned}
\langle \delta\varphi, v\rangle &= -\iint \mathbf{E}\cdot\nabla v\,dx\,dt\\
&= \iint \nabla\cdot\mathbf{E}v\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

Para que halla un punto critico, requerimos que $\langle \delta\varphi, v \rangle = 0$, para todo v. Como v, es arbitrario:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.14}$$

Esta expresión es la *Ley de Gauss en el vacío.*

- **Ley de Ampere**

  Calculemos la variación, $S(\mathbf{A}, \varphi)$ con respecto a $\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{A}$, vía derivada de Gateaux, sea $\mathbf{v} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, una función los suficientemente diferenciable,

$$\begin{aligned}
\langle \delta\mathbf{A}, \mathbf{v} \rangle &= \lim_{t\to 0} \frac{S(\mathbf{A}+t\mathbf{v}, \varphi) - S(\mathbf{A}, \varphi)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \iint \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi + t\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|^2 - \left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right|^2 \, dx\, dt \\
&- \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \iint |\nabla \times \mathbf{A} + t\nabla \times \mathbf{v}|^2 - |\nabla \times \mathbf{v}|^2 \, dx\, dt \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \iint 2t\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - t^2 \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|^2 \, dx\, dt \\
&- \lim_{t\to 0} \frac{1}{2t} \iint 2t\, (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) + t^2 |\nabla \times \mathbf{v}|^2 \, dx\, dt \\
&= \iint \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, dx\, dt - \iint \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{v}\, dx\, dt
\end{aligned}$$

  Nuevamente usando la calibración (1.2),(1.3), obtenemos,

$$\langle \delta\mathbf{A}, \mathbf{v} \rangle = -\iint \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{v}\, dx\, dt. \tag{2.15}$$

  Por un lado,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, dt &= \lim_{t_0\to\infty} \int_{-t_0}^{t_0} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, dt \\
&= \lim_{t_0\to\infty} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{-t_0}^{t_0} - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}\, dt && \text{(Por partes)} \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}\, dt. && \text{(Cond. de frontera.)}
\end{aligned}$$

  Con esto obtenemos

$$\iint \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \, dx\, dt = -\iint \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}\, dx\, dt. \tag{2.16}$$

Ahora calculemos el otro sumando. Usando la identidad

$$\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{v} - \nabla\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{v})$$

Obtenemos,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{v}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^3}\nabla\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{v}\,dx - \int_{\mathbb{R}^3}\nabla\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{v})\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\nabla\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{v}\,dx - \lim_{R\to\infty}\int_{B_R}\mathbf{H}(R,\theta,\varphi)\times\mathbf{v}\cdot\mathbf{da}\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}\nabla\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{v}\,dx.
\end{aligned}$$

Las últimas dos líneas son obtenidas por el Teorema de la Divergencia y el hecho de que $\lim\limits_{R\to\infty}\mathbf{H}(R,\theta,\varphi)=0$. Obteniendo así,

$$\iint \mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{v}\,dx = \iint \nabla\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{v}\,dx. \tag{2.17}$$

Reemplazando (3.33) y (2.17) en (2.15), obtenemos

$$\langle\delta\mathbf{A},\mathbf{v}\rangle = \iint\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \nabla\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{v}\,dx\,dt.$$

Para que halla un punto critico requerimos $\langle\delta\mathbf{A},\mathbf{v}\rangle = 0$, para todo $\mathbf{v}$. Dado que $\mathbf{v}$ es arbitrario,

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{2.18}$$

Esta es expresión es la *Ley de Ampere en el vacío.*

- **Ley de Coulomb**

  Puesto que $\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}$, claramente

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \tag{2.19}$$

  Esta expresión es llamada *la ley de Coulomb en el vacío.*

- **Ley de Faraday**

  Calculemos el rotacional de $\mathbf{E}$,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) \\
&= \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \nabla \times \nabla \varphi \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \\
&= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}
\end{aligned}$$

En conclusión

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{2.20}$$

Esta es la *ley de Faraday en el vacío*

Juntando (2.14),(2.18),(2.19) y (2.20), obtenemos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 & \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{cases} \tag{2.21}$$

Estas son las *Ecuaciones de Maxwell en el vacío.* Estas serán de gran importancia en el trabajo a seguir.

CAPÍTULO 3

LAS ECUACIONES DE MAXWELL SEMILINEALES

En este capítulo presentaremos las Ecuaciones de Maxwell Semilíneales (EMS), las cuales se obtienen de un perturbación del lagrangiano (2.11), obteniendo así mismo una teoría de Campo Electromagnético. En primer lugar mostraremos que esta nueva teoría es consistente con la Teoría de la relatividad general. En segundo lugar estudiaremos lo principales invariantes bajo el movimiento o leyes de conservación del sistema vía Teorema de Noether y por último estudiaremos el caso estático de las Ecuaciones de Maxwell Semilineales.

3.1. Deducción de las ecuaciones

En esta sección presentaremos las *ecuaciones de Maxwell semilineales*. Estas ecuaciones son obtenidas por medio de un principio variacional, esta vez aplicado a una perturbación de la densidad de lagrangiano y la acción .

3.1.1. Perturbación de la densidad de lagrangiano

Con el objetivo de obtener unas nuevas ecuaciones de campo, vamos a modificar la acción (2.11) de la siguiente manera,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + W\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\right]. \tag{3.1}$$

Donde $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{A}, \varphi$ son como en (1.2) y (1.3). Así la acción toma la forma

$$S\big(\mathbf{A},\varphi\big) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2 - |\nabla\times\mathbf{A}|^2 + W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right]dx\,dt. \tag{3.2}$$

La importancia de escoger el argumento $|\mathbf{A}|^2-\varphi^2$ se verá en la siguiente sección. Ahora vamos a calcular las variaciones $\delta\mathbf{A}$ y $\delta\varphi$

- **Variación** $\delta\varphi$

  Calculemos la variación, $S\big(\mathbf{A},\varphi\big)$ con respecto a φ, $\delta\varphi$, vía derivada de Gateaux. Sea $v:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$, una función lo suficientemente diferenciable.

$$\begin{aligned}\big\langle\delta\varphi, v\big\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{S\big(\mathbf{A},\varphi+tv\big)-S\big(\mathbf{A},\varphi\big)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint\left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi+t\nabla v\right|^2-\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2\right)dx\,dt \\ &+\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint\left(W\left(|\mathbf{A}|^2-\left(\varphi+tv\right)^2\right)-W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right)dx\,dt\end{aligned} \tag{3.3}$$

  Por los cálculos de (2.14) sabemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint\left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi+t\nabla v\right|^2-\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2\right)dx\,dt &= \iint \nabla\cdot\mathbf{E}v\,dx\,dt \\ &= \iint -\nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)v\,dx\,dt.\end{aligned}$$

  Ahora el segundo término del lado derecho de la igualdad (3.3), toma la forma

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\iint\frac{1}{t}\left[W\left(|\mathbf{A}|^2-\left(\varphi+tv\right)^2\right)-W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right]dx\,dt \\ &= \frac{1}{2}\iint -W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\cdot 2\varphi\cdot v\,dx\,dt \\ &= \iint -W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\cdot\varphi\cdot v\,dx\,dt\end{aligned}$$

  Juntando lo anterior tenemos

$$\big\langle\delta\varphi, v\big\rangle = \iint\left[-\nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)-W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\varphi\right]\cdot v\,dx\,dt$$

  Para que haya un punto crítico, requerimos que $\big\langle\delta\varphi, v\big\rangle = 0$, para toda v lo suficientemente diferenciable. Por ésto último debido a la arbitrariedad de v,

$$-\nabla\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)-W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\varphi = 0 \tag{3.4}$$

- **Variación $\delta\mathbf{A}$**

  Calculemos la variación, $S(\mathbf{A},\varphi)$ con respecto a $\mathbf{A}$, $\delta\mathbf{A}$, vía derivada de Gateaux, sea $\mathbf{v}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$, una función los suficientemente diferenciable,

$$
\begin{aligned}
\langle\delta\mathbf{A},\mathbf{v}\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{S(\mathbf{A}+t\mathbf{v},\varphi)-S(\mathbf{A},\varphi)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint\left(\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi+t\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right|^2-\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2\right)dx\,dt\\
&-\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint\left(|\nabla\times\mathbf{A}+t\nabla\times\mathbf{v}|^2-|\nabla\times\mathbf{v}|^2\right)dx\,dt\\
&+\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint W\left(|\mathbf{A}+t\mathbf{v}|^2-\varphi^2\right)-W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)dx\,dt
\end{aligned}
$$

  Por los cálculos de (2.18) sabemos que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint\left(\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi+t\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right|^2-\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2\right)dx\,dt\\
&-\lim_{t\to 0}\frac{1}{2t}\iint\left(|\nabla\times\mathbf{A}+t\nabla\times\mathbf{v}|^2-|\nabla\times\mathbf{v}|^2\right)dx\,dt\\
&=\iint\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\nabla\times\mathbf{H}\right)\cdot\mathbf{v}\,dx\,dt\\
&=\iint\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]\cdot\mathbf{v}\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

  El término restante toma la forma

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}\frac{1}{2}\iint\frac{1}{t}\left[W\left(|\mathbf{A}+t\mathbf{v}|^2-\varphi^2\right)-W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right]dx\,dt\\
&=\frac{1}{2}\iint W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)2\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\,dx\,dt\\
&=\iint W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

  Juntando los cálculos anteriores

$$
\langle\delta\mathbf{A},\mathbf{v}\rangle=\iint\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})+W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\mathbf{A}\right]\cdot\mathbf{v}\,dx\,dt-
$$

  Para que exista un punto crítico requerimos que $\langle\delta\mathbf{A},\mathbf{v}\rangle=0$, para toda $\mathbf{v}$. Por ésto último debido a la arbitrariedad de $\mathbf{v}$,

$$
-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})+W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\mathbf{A}=0. \tag{3.5}
$$

Juntando (3.4) y (3.5), obtenemos el sistema

$$-\nabla\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)=W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\varphi \tag{3.6}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\mathbf{A}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right). \tag{3.7}$$

Fijando

$$\rho=W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\varphi, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{J}=W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\mathbf{A}. \tag{3.9}$$

Usando la calibración (1.2),(1.3) y las ecuaciones (2.19),(2.20) conseguimos las siguientes ecuaciones:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho\left(\mathbf{A},\varphi\right) \tag{3.10}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}\left(\mathbf{A},\varphi\right)+\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.11}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{3.12}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0, \tag{3.13}$$

estas son las ecuaciones de Maxwell en la presencia de materia si interpretamos $\rho\left(\mathbf{A},\varphi\right)$ como la densidad de carga y $\mathbf{J}\left(\mathbf{A},\varphi\right)$ como el vector de densidad de corriente. Notes que ρ y $\mathbf{J}$ son funciones de la calibración así que estamos en presencia de una teoría en el sentido de Born-Infeld. De ahora en adelante al sistema (2.5),(2.6)(o (2.9)-(2.12)) será llamado *Ecuaciones de Maxwell Semilineales* o por brevedad *EMS*.

3.1.2. Perturbación y materia

Vamos a hacer la siguiente suposición sobre la perturbación W definida al principio de la sección 3.1.1:

($\mathfrak{W}1$) Existen dos constantes $0<\epsilon_1,\epsilon_2\ll 1$ tales que

$$\left|W'(t)\right|\le\epsilon_1\,|t| \qquad \text{para } |t|\le 1 \tag{3.14}$$

$$\left|W'(t)\right|\ge|t| \qquad \text{para } |t|\ge 1+\epsilon_2 \tag{3.15}$$

La interpretación de esta suposición es que el término $W'(t)$ es muy pequeño cuando $|t| \leq 1$, en otras palabras $W'(t)$ es despreciable si $|t| \leq 1$. Por otro lado cuando $|t| \geq 1+\epsilon_2$ el término $W'(t)$ ya no es despreciable pues su valor absoluto ya es mayor o igual que 1. Entonces cuando $\left||\mathbf{A}(x,t)|^2 - \varphi(x,t)^2\right| \geq 1$, $W'\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)$ es un término que no es despreciable, por lo tanto en la región

$$\Omega_t\left(\mathbf{A},\varphi\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \left||\mathbf{A}(x,t)|^2 - \varphi(x,t)^2\right| \geq 1\right\},$$

el término $W'\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)$ es fuerte, haciendo así mismo a $\rho = W'\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\varphi$ y a $\mathbf{J} = W'\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\mathbf{A}$ fuertes dentro de Ω_t, al menos en la región donde $\left||\mathbf{A}(x,t)|^2 - \varphi(x,t)^2\right| \geq 1+\epsilon_2$.

Entonces señalemos dos puntos importantes acerca de lo anterior

1. Como ρ es fuerte en Ω_t, significa hay volumen en esa región del espacio.(Ver sección 1.3.1).

2. Como $\mathbf{J}$ es fuerte en Ω_t, significa que hay un medio material donde la corriente se mueve. (Ver sección 1.3.2).

Conclusión:

Como en Ω_t hay un volumen encerrado y un medio material, **esta región del espacio está llena de materia en el tiempo t.**

Por tanto llegamos al sorprendente resultado de que la no linealidad de las EMS es la responsable de la presencia de materia en el espacio. Además la suposición (2.13) nos indica que ρ y $\mathbf{J}$ se vuelven despreciables fuera de Ω_t y las EMS pueden ser interpretadas como las ecuaciones de Maxwell en el vacío.

3.2. El principio de invariancia y el grupo de Poincaré

En esta sección estudiaremos las importantes consecuencias de que una densidad de lagrangiano $\mathscr{L}$ es invariante bajo el grupo de Poincaré.

3.2.1. Invariancia bajo la representación de un grupo de Lie

Un *grupo de Lie* es un grupo G, cuyos elementos son puntos de una variedad diferenciable de dimensión finita con la condición de que la operación del grupo

$$G \times G \to G : \left(g,h\right) \mapsto gh\ \left(g,h \in G\right)$$

es una función C^{∞} [Martin, 2002, p. 243]. Algunos ejemplos son:

1. $\mathbb{R}^n$. Este grupo aditivo es el ejemplo trivial de una variedad diferenciable y además es una grupo de Lie debido a que la función $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ definido por $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \mapsto (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ es C^∞.

2. $GL(n,\mathbb{R})$. El grupo de las matrices no singulares $n \times n$, $GL(n,\mathbb{R})$, puede ser dotado de una estructura de variedad diferenciable viendo cada entrada de una matriz como las coordenadas de un punto de $\mathbb{R}^{n^2}$. Se denotara $g \cdot h$ al producto usual de matrices. Si

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \text{ y } h = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}.$$

   Entonces

$$g \cdot h = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^n g_{1r} h_{r1} & \cdots & \sum_{r=1}^n g_{1r} h_{rn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=1}^n g_{nr} h_{r1} & \cdots & \sum_{r=1}^n g_{nr} h_{rn} \end{bmatrix}.$$

   Como cada entrada en $g \cdot h$ de las matrices g, h es un polinomio en las entradas de g y de h, la función $(g,h) \mapsto g \cdot h$ es C^∞. $GL(n,\mathbb{R})$ es por lo tanto un grupo de Lie de dimensión n^2.

Con ésto deseamos saber qué sucede cuando un Grupo de Lie actúa sobre un espacio de funciones y las implicaciones de ésto. Un grupo G se dice que *actúa* en un conjunto M por la izquierda si existe una transformación $T : G \times M \to M$ tal que para todo $x \in M$

1. $T_e(x) = x$, donde e es el elemento identidad de G.

2. $T_{g_1}\left(T_{g_2}(x)\right) = T_{g_1 g_2}(x) \ \left(\forall g_1 g_2 \in G\right)$

[Martin, 2002]. Al grupo de transformaciones T_g, $g \in G$ lo vamos a llamar *Representación del grupo Lie G* . Por ejemplo si u pertenece a algún espacio de funciones $\mathfrak{f}(\Omega, V)$, (Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y V un espacio vectorial de dimensión finita), tomemos $G = \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R}^n$, la representación T_h que actúa en $\mathfrak{f}$ es

$$(T_h u)(x) = u(x-h).$$

Ya con ésto podemos dar la siguiente definición [Benci, 2009, p. 275].

Definición 3.1. *Decimos que una densidad de lagrangiano $\mathscr{L}$ es invariante bajo la representación T_g del grupo de Lie G si para todo conjunto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, se cumple:*

$$\int_{T_g\Omega} \mathscr{L}\left(t',x',u',\nabla u',\partial_t u'\right)\, dx\, dt = \int_{\Omega} \mathscr{L}\,(t,x,u,\nabla u,\partial_t u)\, dx\, dt. \tag{3.16}$$

Donde $u'(t',x') = T_g u(x,t)$, *y*

$$T_g\Omega := \left\{(x',t') \in \mathbb{R}^{N+1} : (x,t) \in \Omega\right\}.$$

donde $g \in G$ *y* (t',x') *denota la acción de el elemento* g *sobre el elemento* $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

3.2.2. La invariancia de Poincaré

Las ecuaciones fundamentales de la Física son invariantes bajo la acción del grupo de Poincaré, este es el principio básico sobre el cual la teoría especial de la relatividad esta basada [Scheck, 2005, p.248]:

Postulado 3.1. ***(Postulado de la relatividad general)*** *Las leyes de la naturaleza son invariantes bajo el grupo de Poincaré* $(\mathfrak{P},\circ)$.

Es decir que si probamos que las leyes de alguna teoría física son invariantes bajo la acción del grupo de Poincaré $\mathfrak{P}$, está teoría será entonces consistente con la relatividad especial y por tanto podremos usar todas sus herramientas en nuestro estudio. A continuación haremos una exposición del grupo de Poincaré y el espacio tiempo de Minkowski.

El *Espacio-Tiempo de Minkowski* es $\mathbb{R}^{N+1}$ con la forma bilineal

$$\left\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle_M = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

la cual induce la forma cuadrática

$$|\mathbf{x}|_M^2 = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \tag{3.17}$$

Los vectores de Minkowski $v = (v_0,\ldots,v_N) \equiv (v_0,\mathbf{v})$ son clasificados según su *naturaleza causal* como sigue:

- Si $\langle v,v\rangle_M > 0$ el vector v es llamado *espacial*, ésto debido a que si ésto último se cumple $\sum_{i=1}^N v_i^2 > v_0$, es decir que en ese punto hay "más" espacio que tiempo.
- Si $\langle v,v\rangle_M < 0$ el vector v es llamado del *temporal*, ésto debido a que si ésto último se cumple $\sum_{i=1}^N v_i^2 < v_0$, es decir que en ese punto hay "mas" tiempo que espacio.

- Si $\langle v, v\rangle_M = 0$ es llamado del *tipo luz*.

Cuando $N = 3$ el conjunto de vectores del tipo luz, forman el cono $-v_0^2+v_1^2+v_2^2+v_3^2 = 0$, conocido como el *cono de luz*. Por las definiciones anteriores, vectores espaciales se encuentran dentro del cono y vectores temporales son encontrados afuera del mismo. Vectores temporales para los cuales $v_0 > 0\,(< 0)$ se dice que apuntan al *futuro-pasado* .Ver Figura (3.2.2).

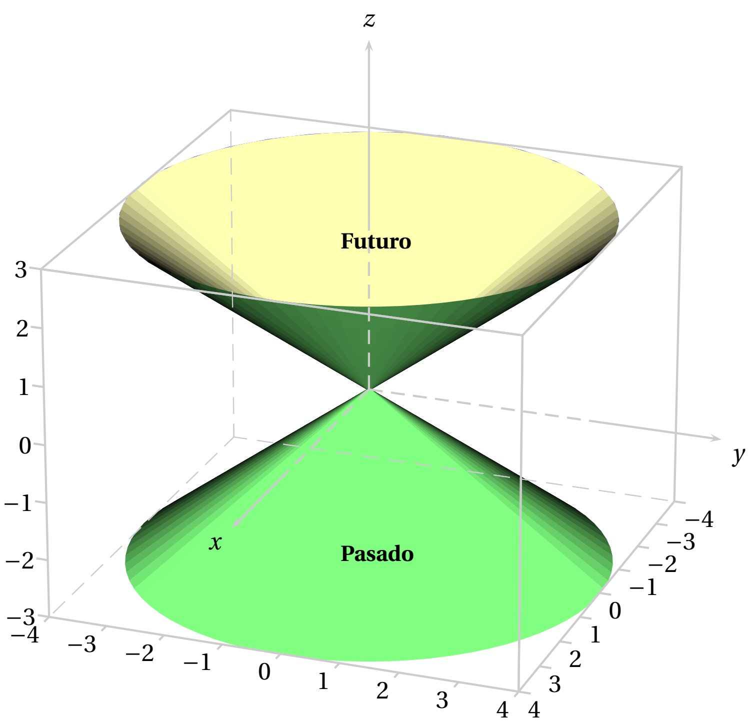

Figura 3.1: Cono de Luz de Minkowski.

El grupo de Poincaré $\mathfrak{P}$, por definición, es el grupo de transformaciones en $\mathbb{R}^{N+1}$ el cual preserva la forma cuadrática (3.17) y por lo tanto, al aplicar cualquier transformación en $\mathfrak{P}$ no afecta la naturaleza causal.

En el ”mundo real” tenemos $N = 3$ y el grupo de Poincaré es un grupo de Lie de 10 parámetros generado por las siguientes transformaciones de un parámetro:

- Traslaciones espaciales en las direcciones x_1, x_2 y x_3:

	T. en x_1	T. en x_2	T. en x_3
x'_1	$x_1 + r_1$	x_1	x_1
x'_2	x_2	$x_2 + r_2$	x_2
x'_3	x_3	x_3	$x_3 + r_3$
t'	t	t	t

Cuadro 3.1: Grupo de las traslaciones con parámetros r_1, r_2, r_3.

Esta invariancia garantiza que el espacio es homogéneo. Es decir. que las leyes de la física son independientes del espacio: Si un experimento es hecho aquí o allá, éste nos da los mismos resultados.

- Rotaciones espaciales:

	R. en el eje x_1	R. en el eje x_2	R. en el eje x_3
x'_1	x_1	$x_1 \cos\theta_2 - x_3 \sin\theta_2$	$x_1 \cos\theta_3 - x_2 \sin\theta_3$
x'_2	$x_2 \cos\theta_1 - x_3 \sin\theta_1$	x_2	$x_1 \sin\theta_3 + x_2 \cos\theta_3$
x'_3	$x_2 \sin\theta_1 + x_3 \cos\theta_1$	$x_1 \sin\theta_2 + x_3 \cos\theta_2$	x_3
t'	t	t	t

Cuadro 3.2: Grupo de las rotaciones con parámetros $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

Esta invariancia garantiza que el espacio es isotrópico, es decir que las leyes de la física son independientes de la orientación.

- Traslaciones temporales:

	T. en t
x'_1	x_1
x'_2	x_2
x'_3	x_3
t'	$t + t_0$

Cuadro 3.3: Grupo de traslaciones temporales con parámetro t_0.

Esta invariancia garantiza que el tiempo es isotrópico, es decir que las leyes de la física son independientes del tiempo: si un experimento es hecho temprano o tarde, este nos debe dar los mismo resultados.

- Impulsos de Lorentz:

	I. en el eje x_1	I. en el eje x_2	I. en el eje x_3
x_1'	$\gamma\,(x_1 - v_1\,t)$	x_1	x_1
x_2'	x_2	$\gamma\,(x_2 - v_2\,t)$	x_2
x_3'	x_3	x_3	$\gamma\,(x_3 - v_3\,t)$
t'	$\gamma\,(t - v_1 x_1)$	$\gamma\,(t - v_2 x_2)$	$\gamma\,(t - v_3 x_3)$

Cuadro 3.4: Grupo de los impulsos de Lorentz con parámetros v_1, v_2, v_3.

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

con $v = v_i$, $i = 1,2,3$. Esta invariancia es un hecho empírico.

- Por último tenemos la inversión temporal, $t \mapsto -t$, y la inversión de paridad $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, -x_3)$.

En adelante vamos a denotar las traslaciones con subíndices, estos nos indicarán en qué eje está actuando la transformación de Poincaré. Para $i = 1,2,3$,

- Traslaciones con parámetro r_i, en el eje x_i, serán denotadas por T_{r_i},
- Rotaciones con parámetro θ_i, en el eje x_i, serán denotadas por R_{θ_i},
- Traslaciones temporales con parámetro t_0 serán denotadas por T_{t_0},
- Impulsos de Lorentz con parámetro v_i, en la dirección del eje x_i, serán denotados por I_{v_i}.

A manera de ejemplo, para ver que efectivamente el grupo de Poincaré $\mathfrak{P}$ conserva la forma cuadrática (3.17), tomemos $\mathbf{w} = (t_0, w_1, w_2, w_3)$ y un impulso de Lorentz en la dirección x_1, I_{v_1},

$$\begin{aligned}
\left|I_{v_1}\mathbf{w}\right|_M^2 &= -\big(\gamma\,(t_0 - v_1\,w_1)\big)^2 + \big(\gamma\,(w_1 - v_1\,t)\big)^2 + (w_2)^2 + (w_3)^2 \\
&= \gamma^2\left(-\left(1 - v_1^2\right)t_0^2 + \left(1 - v_1^2\right)w_1^2\right) + (w_2)^2 + (w_3)^2 \\
&= -\,(t_0)^2 + (w_1)^2 + (w_2)^2 + (w_3)^2 \\
&= |\mathbf{w}|_M^2\,.
\end{aligned}$$

Ahora consideremos la manera en la cual cada subgrupo del Grupo de Poincaré $\mathfrak{P}$ actúa sobre un campo vectorial $U = \left(\mathbf{A}, \varphi\right) \in \mathbb{R}^4$:

$$\forall g \in \mathfrak{P} \qquad \begin{cases} \text{Si } g \in R_{\theta_i}, I_{v_i}: & T_g U(x,t) = gU\left(g^{-1}(x,t)\right) \\ \\ \text{Si } g \in T_{r_i}, T_{t_0}: & T_g U(x,t) = U\left(g^{-1}(x,t)\right) \end{cases}.$$

[Badiale et al., 2001]

En lo subsecuente vamos a probar que el Lagrangiano (3.1) es invariante bajo la acción del grupo de Poincaré.

Observación 1. Si desea, el lector puede intentar verificar la invariancia de (3.1) directamente bajo el grupo de Poincare $\mathfrak{P}$, sin embargo cuando se trate el término

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right|^2-|\nabla\times\mathbf{A}|^2\right)dx\,dt \tag{3.18}$$

se podrá dar cuenta que los cálculos se hacen prácticamente imposibles de realizar, debido a la gran cantidad de términos que aparecen y la carencia de simplificaciones. Por estas razones vamos a calcular la invariancia indirectamente de la siguiente manera. Como veremos la densidad de lagrangiano mas simple invariante bajo la acción del grupo de Poincaré $\mathfrak{P}$ es

$$\mathscr{L} = \left|\nabla\varphi\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-|\nabla\mathbf{A}|^2+\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2$$

,

obteniendo así el funcional

$$V\left(\mathbf{A},\varphi\right)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\left|\nabla\varphi\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2-|\nabla\mathbf{A}|^2+\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2\right)dx\,dt \tag{3.19}$$

donde si $\mathbf{A}=(A_1,A_2,A_3)$, $|\nabla\mathbf{A}|^2=|\nabla A_1|^2+|\nabla A_2|^2+|\nabla A_3|^2$. Asumiendo como siempre en esta monografía que $\mathbf{A}$ y sus derivadas tienen todas las propiedades de integración necesarias. Vamos a transformar el funcional anterior por medio de los cálculos que siguen.

Primero notemos que

$$\int_{\mathbb{R}^4}|\nabla\mathbf{A}|^2\,dx\,dt=\int_{\mathbb{R}^4}\sum_{i=1}^{3}\nabla A_i\cdot\nabla A_i\,dx\,dt$$

fijemos nuevamente $B_R=\left\{x\in\mathbb{R}^3:|x|<R\right\}$, por lo tanto para $i=1,2,3$, la integración por partes nos da

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{B_R} \nabla A_i \cdot \nabla A_i \, dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} A_i \nabla A_i \cdot \mathbf{da} - \lim_{R\to\infty}\int_{B_R} \nabla \cdot (\nabla A_i)\, A_i \, dx \\
&= -\lim_{R\to\infty}\int_{B_R} \nabla \cdot (\nabla A_i)\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla^2 A_i\right) A_i \, dx.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{A}|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \nabla A_i \cdot \nabla A_i \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{i=1}^{3} \nabla^2 A_i \, A_i \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \, dx
\end{aligned}$$

recordando la identidad algebraica $-\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{A}|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \, dx.$$

Para terminar solo resta calcular las dos integrales del lado derecho. Para ésto utilicemos la identidad $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$, con $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, para obtener $(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = |\nabla \times \mathbf{A}|^2 - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}))$. Con ésto

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} \, dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{B_R} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \, dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{B_R} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \, dx - \lim_{\mathbb{R}\to\infty}\int_{\partial B_R} \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{da} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Para la integral del lado derecho, usamos integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dx &= \lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A} \cdot \mathbf{da} - \lim_{R\to\infty}\int_{B_R} (\nabla \cdot \mathbf{A}) (\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} (\nabla \cdot \mathbf{A})^2 \, dx
\end{aligned}$$

juntando todo lo anterior

$$\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla \mathbf{A}|^2 \, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}^4} |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + (\nabla \cdot \mathbf{A})^2$$

por lo tanto reemplazando en (3.19),

$$V(\mathbf{A},\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \left(\left(|\nabla\varphi|^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 - (\nabla\cdot\mathbf{A})^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 \right)\right) dx\, dt.$$

En segunda medida,

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{A},\varphi) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + (\nabla\cdot\mathbf{A})^2 \right) \\
&+ 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\nabla\cdot\mathbf{A})\right)^2 \\
&+ 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})\, dx\, dt
\end{aligned}$$

recordemos que $\mathbf{A}$ y φ satisfacen la ecuación $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, así

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{A},\varphi) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\nabla\varphi|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) \right) dx\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + 2\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\varphi + |\nabla\varphi|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) \right. \\
&\left. -2\frac{\partial A}{\partial t}\cdot\nabla\varphi \right) dx\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^3} \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + 2\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - 2\frac{\partial A}{\partial t}\cdot\nabla\varphi \right) dx\, dt
\end{aligned}$$

calculemos $\int_{\mathbb{R}^4} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \frac{\partial A}{\partial t}\cdot\nabla\varphi\, dx\, dt$. Tomemos en primer lugar

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})\, dt &= \lim_{\tau\to\infty}\int_{-\tau}^{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})\, dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty} (\nabla\cdot\mathbf{A})\,\varphi\,\big|_{-\tau}^{\tau} - \int_{\mathbb{R}} \left(\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\varphi\, dt \qquad \text{(Por partes)} \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)\varphi\, dt
\end{aligned}$$

obteniendo así

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dt = -\int_{\mathbb{R}^4} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \varphi\, dt$$

Deseamos ahora «cambiar de lugar» la divergencia en la integral anterior. Integremos entonces sobre las coordenadas espaciales

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \varphi\, dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{B_R} \left(\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \varphi\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} \varphi \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{da} - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\varphi \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, dx.
\end{aligned}$$

Reemplazando en lo anterior

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \varphi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dx\, dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \nabla\varphi\, dx\, dt$$

ya podemos concluir que

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{A}, \varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + 2\frac{\partial \varphi}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - 2\frac{\partial A}{\partial t} \cdot \nabla\varphi\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + 2\frac{\partial A}{\partial t} \cdot \nabla\varphi - 2\frac{\partial A}{\partial t} \cdot \nabla\varphi\, dx\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2\, dx\, dt
\end{aligned}$$

por lo tanto hemos llegado a que los términos (3.18) y (3.19) son idénticos, por tanto cualquier propiedad que satisfaga (3.19) será hereda naturalmente a (3.18).

Calculemos, la invariancia para cada subgrupo de $\mathfrak{P}$ por separado. Se usára de aquí en adelante la notación de la *Definición 2.1*

Traslaciones espaciales y temporales: Para este caso probaremos la invariancia para una traslación en la dirección x_1. Para las demás direcciones el proceso es idéntico. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ acotado, sea T_r la representación de las traslaciones en la dirección x_1, entonces pongamos la ecuación (3.16) en los términos que necesitamos

$$\int_{T_r\Omega} \mathscr{L}\left(t', x', u', \nabla u', \partial_t u'\right)\, dx\, dt,$$

con $T_r\Omega := \left\{(x_1 + r, x_2, x_3, t) \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, t) \in \Omega\right\}$, la expresión anterior es equivalente a

$$\int_{T_r\Omega} \mathscr{L}\left(t', x', u', \nabla u', \partial_t u'\right)\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_{T_r\Omega} \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{T_{-r}x}) + \nabla_x \varphi(\mathbf{T_{-r}x})\right|^2 - |\nabla_x \times \mathbf{A}(\mathbf{T_{-r}x})|^2\right.$$
$$\left. + W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{T_{-r}x})|^2 - \varphi(\mathbf{T_{-r}x})^2\right)\right) dx\, dt$$

donde $T_{-r}x = (x_1 - r, x_2, x_3, t) = (u_1, u_2, u_3, \tau) = \mathbf{u} = (u, \tau)$, apliquemos entonces la fórmula de cambio de variables con $x_1 = u_1 + r$, $x_2 = u_2$, $u_3 = x_3$, y $t = \tau$ y transformándose la región de integración a

$$\int_{T_r\Omega} \mathscr{L}\left(t', x', u', \nabla u', \partial_t u'\right)\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{u}) + \nabla_x \varphi(\mathbf{u})\right|^2 - |\nabla_x \times \mathbf{A}(\mathbf{u})|^2\right.$$
$$\left. + \; W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 - \varphi(\mathbf{u})^2\right) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \tau)}\right) du\, d\tau$$

Calculemos $\dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \tau)}$,

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t}{\partial u_1} & \frac{\partial t}{\partial u_2} & \frac{\partial t}{\partial u_3} & \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

de ésto

$$\int_{T_r\Omega} \mathscr{L}\left(t', x', u', \nabla u', \partial_t u'\right)\, dx\, dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{u}) + \nabla_x \varphi(\mathbf{u})\right|^2 - |\nabla_x \times \mathbf{A}(\mathbf{u})|^2$$
$$+ W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 - \varphi(\mathbf{u})^2\right) du\, d\tau$$

Sin embargo, todavía falta notar que las derivadas están en términos de x y t, y nosotros las necesitamos en términos de u y τ. Para ésto usemos la fórmula de la derivada de la composición de funciones,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_1} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_1}\\ &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_2} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_2}\\ &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_3} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_3}\\ &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\\ &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\end{aligned}$$

observemos que las fórmulas anteriores también se cumplen para **A**. Por tanto los rotacionales, divergencias y gradientes en términos de x y t, son equivalentes, que con los términos u y τ. Reemplazando en la última integral,

$$\begin{aligned}\int_{T_r\Omega}\mathscr{L}\left(t',x',u',\nabla u',\partial_t u'\right)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\Bigg(\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\tau}(\mathbf{u})+\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2 - |\nabla_u\times\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2\\ +W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2-\varphi(\mathbf{u})^2\right)\Bigg)\,du\,d\tau\\ = \int_{\Omega}\mathscr{L}\left(t,x,u,\nabla u,\partial_t u\right)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Los cálculos para las traslaciones espaciales en x_2, x_3 y las traslaciones temporales en t son idénticos, por tanto llegamos a que **el lagrangiano** (3.2) **es invariante bajo las traslaciones espaciales y temporales.**

Rotaciones espaciales: Para este caso probaremos la invariancia alrededor del eje x_1. Para la rotaciones en los otros ejes el proceso es idéntico. Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^4$ acotado, sea

R_θ la representación de las rotaciones en alrededor del eje x_1. entonces pongamos la ecuación (3.16) en los términos que necesitamos

$$\int_{R_\theta\Omega} \mathscr{L}\left(t', x', u', \nabla u', \partial_t u'\right)\, dx\, dt,$$

con $R_\theta\Omega := \left\{(x_1, x_2\cos\theta - x_3\sin\theta, x_2\sin\theta + x_3\cos\theta, t) \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3, t) \in \Omega\right\}$.
Las rotaciones actúan en $U(x) = \left(\mathbf{A}(x), \varphi(x)\right)$ de la forma

$$\begin{aligned}
R_\theta U(x) &= g_\theta U(g_\theta^{-1} x)\\
&= \left(A_1(x'), A_2(x')\cos\theta - A_3(x')\sin\theta, A_2(x')\sin\theta + A_3(x'), \varphi(x')\right)\\
&= \left(\mathbf{A}', \varphi'\right)
\end{aligned}$$

donde g_θ es la rotación en el eje x_1 y con $x' = (x_1, x_2\cos\theta + x_3 \operatorname{sen}\theta, -x_2\sin\theta + x_3\cos\theta, t)$.
Con esta notación vamos a probar que

$$\begin{aligned}
\int_{R_\theta\Omega} \mathscr{L}\left(t', x', u', \nabla u', \partial_t u'\right)\, dx\, dt, = \frac{1}{2}\int_{R_\theta\Omega} \left|\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} + \nabla_x \varphi'\right|^2 - \left|\nabla_x \times \mathbf{A}'\right|^2\, dx\, dt\\
+ \frac{1}{2}\int_{R_\theta\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2\right)\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Primero tratemos la última integral, como

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2 &= \left(A_1(x')\right)^2 + \left(A_2(x')\cos\theta - A_3(x')\sin\theta\right)^2 + \left(A_2(x')\sin\theta + A_3(x')\cos\theta\right)^2\\
&\quad - \varphi(x')^2\\
&= \left(A_1(x')\right)^2 + \left(A_2(x')\right)^2\cos^2\theta - 2A_2(x')A_3(x')\cos\theta\sin\theta + \left(A_3(x')\right)^2\sin^2\theta\\
&\quad + \left(A_2(x')\right)^2\sin^2\theta + 2A_2(x')A_3(x')\cos\theta\sin\theta + \left(A_3(x')\right)^2\cos^2\theta - \varphi(x')^2\\
&= \left(A_1(x')\right)^2 + \left(A_2(x')\right)^2 + \left(A_3(x')\right)^2 - \varphi(x')^2\\
&= \left|\mathbf{A}(x')\right|^2 - \varphi(x')^2
\end{aligned}$$

reemplazando ésto, obtenemos que,

$$\int_{R_\theta\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2\right)\, dx\, dt = \int_{R_\theta\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}(x')\right|^2 - \varphi(x')^2\right)\, dx\, dt$$

Ahora deseamos usar la fórmula de cambio de variables, hagamos $\mathbf{u} = (u, \tau) = x'$, por tanto $x = g_\theta \mathbf{u}$ y $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2 \cos\theta - u_3 \sin\theta$, $x_3 = u_2 \sin\theta + u_3 \cos\theta$ y $t = \tau$. Por tanto, el jacobiano del cambio de variables es

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t}{\partial u_1} & \frac{\partial t}{\partial u_2} & \frac{\partial t}{\partial u_3} & \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Así la fórmula de sustitución la región de integración es $g_\theta^{-1} R_\theta \Omega = \Omega$

$$\begin{aligned} \int_{R_\theta\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2\right) dx\,dt &= \int_{R_\theta\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}(x')\right|^2 - \varphi(x')^2\right) dx\,dt \\ &= \int_\Omega W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 - \varphi(\mathbf{u})^2\right) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \tau)}\, du\,d\tau \\ &= \int_\Omega W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 - \varphi(\mathbf{u})^2\right) du\,d\tau. \end{aligned}$$

Ahora, sólo nos falta calcular la invariancia de la primera integral, pero por la *Observación 1.* ésto es lo mismo que probar que el funcional (3.19) es invariante bajo la acción de las rotaciones en el eje x_1, ésto es

$$\frac{1}{2}\int_{R_\theta\Omega} \left|\nabla_x \varphi'\right|^2 - \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)^2 - \left|\nabla_x \mathbf{A}'\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}\right|^2 dx\,dt.$$

Sustituyendo $x' = \mathbf{u}$, como en la parte superior, tenemos, que la expresión anterior es

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|\nabla_x \varphi(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 - \left|\nabla_x \mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2 + \left|\frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right|^2\right) du\,d\tau.$$

Ahora necesitamos poner las derivadas que están en términos de x y t en términos de u y τ, para eso usemos la fórmula de la derivada de una composición de funciones o regla de la cádena

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_1} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_2} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\cos\theta - \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_3} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\sin\theta + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} \\
&= \frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}
\end{aligned}
$$

notemos que las mismas fórmulas valen para $\mathbf{A}(\mathbf{u})$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 &= \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\cos\theta - \frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\sin\theta\right)^2 \\
&+ \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\sin\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial u_3}\cos\theta\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\right)^2\cos^2\theta - 2\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\cos\theta\sin\theta \\
&+ \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\right)^2\sin^2\theta \\
&+ 2\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\right)^2\sin^2\theta - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2 \\
&= \left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2
\end{aligned}
$$

Ahora usando las fórmulas obtenidas anteriormente,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial A'(\mathbf{u})}{\partial t}\right|^2 &= \left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}, \frac{\partial A_2(\mathbf{u})}{\partial t}\cos\theta - \frac{\partial A_3(\mathbf{u})}{\partial t}\sin\theta, \frac{\partial A_2(\mathbf{u})}{\partial t}\sin\theta + \frac{\partial A_3(\mathbf{u})}{\partial t}\right)\\ &= \left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial \tau}, \frac{\partial A_2(\mathbf{u})}{\partial \tau}\cos\theta - \frac{\partial A_3(\mathbf{u})}{\partial \tau}\sin\theta, \frac{\partial A_2(\mathbf{u})}{\partial \tau}\sin\theta + \frac{\partial A_3(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)\\ &= \left|\frac{\partial A'(\mathbf{u})}{\partial t}\right|^2.\end{aligned}$$

Por los cálculos anteriores, llegamos a que $\left|\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\right|^2 = \left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2$, por tanto aplicando ésto a cada A_i, llegamos a que

$$\begin{aligned}|\nabla_x\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 &= \sum_{i=1}^{3}|\nabla_x A_i(\mathbf{u})|^2\\ &= \sum_{i=1}^{3}|\nabla_u A_i(\mathbf{u})|^2\\ &= |\nabla_u\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2\end{aligned}$$

juntando todas nuestras cuentas,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{R_\theta\Omega}\left(\left|\nabla_x\varphi'(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial\varphi'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 - \left|\nabla_x\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2 + \left|\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right|^2\right)dx\,dt\\ &\quad= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2 - |\nabla_u\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 + \left|\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right|^2\right)du\,d\tau\end{aligned}$$

Y por la *Observación 2*, se puede concluir que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{R_\theta\Omega}\left(\left|\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla_x\varphi'(\mathbf{u})\right|^2 - \left|\nabla_x\times\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2\right)dx\,dt\\ &\quad= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\left|\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{u})}{\partial \tau} + \nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2 - |\nabla_u\times\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2\right)du\,d\tau\end{aligned}$$

ya con ésto tenemos

$$\begin{aligned}\int_{R_\theta\Omega} \mathscr{L}\left(t',x',u',\nabla u',\partial_t u'\right)\,dx\,dt &= \frac{1}{2}\int_{R_\theta\Omega}\left|\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}+\nabla_x\varphi'\right|^2-\left|\nabla_x\times\mathbf{A}'\right|^2\,dx\,dt\\ &+\frac{1}{2}\int_{R_\theta\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2-\varphi'^2\right)\,dx\,dt\\ &=\int_\Omega \mathscr{L}\left(t,x,u,\nabla u,\partial_t u\right)\,du\,d\tau\end{aligned}$$

los cálculos para las rotaciones en los ejes x_2 y x_3 son análogos, por tanto llegamos a que **el lagrangiano** (3.2) **es invariante bajo las rotaciones.**

Impulsos de Lorentz: Para este caso probaremos la invariancia para el impulso en el eje x_1. Para los impulsos en los otros ejes el proceso es idéntico. Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^4$ acotado, sea I_v la representación de los impulsos en el eje x_1. Entonces pongamos la ecuación (3.16) en los términos que necesitamos

$$\int_{I_v\Omega} \mathscr{L}\left(t',x',u',\nabla u',\partial_t u'\right)\,dx\,dt,$$

con $I_v\Omega := \left\{(\gamma(x_1+vt),x_2,x_3,\gamma(t+vx_1))\in\mathbb{R}^4 : (x_1,x_2,x_3,t)\in\Omega\right\}$.

Los impulsos en la dirección x_1 actúan en $U(x)=\left(\mathbf{A}(x),\varphi(x)\right)$ de la forma,

$$\begin{aligned}I_vU(x) &= g_vU(g_v^{-1}x)\\ &=\left(\gamma\left(A_1(x')-v\varphi(x')\right),A_2(x'),A_3(x'),\gamma\left(\varphi(x')-vA_1(x')\right)\right)\\ &=\left(\mathbf{A}',\varphi'\right)\end{aligned}$$

g_v es el impulso en el eje x_1 con $x'=\left(\gamma(x_1-vt),x_2,x_3,\gamma(t-vx_1)\right)$. Con esta notación vamos a probar que

$$\begin{aligned}\int_{I_v\Omega} \mathscr{L}\left(t',x',u',\nabla u',\partial_t u'\right)\,dx\,dt, &= \frac{1}{2}\int_{I_v\Omega}\left|\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}+\nabla_x\varphi'\right|^2-\left|\nabla_x\times\mathbf{A}'\right|^2\,dx\,dt\\ &+\frac{1}{2}\int_{I_v\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2-\varphi'^2\right)\,dx\,dt\end{aligned}$$

Primero tratemos la última integral, como

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2 &= \gamma^2\left(A_1(x' - v\varphi(x'))\right)^2 + \left(A_2(x')\right)^2 + \left(A_3(x')\right)^2 - \gamma^2\left(\varphi(x') - vA_1(x')\right)^2 \\
&= \gamma^2\left(A_1(x')\right)^2 - 2\gamma^2 vA_1(x')\varphi(x') + \gamma^2 v^2\varphi(x')^2 + \left(A_2(x')\right)^2 + \left(A_3(x')\right)^2 \\
&- \gamma^2\varphi(x')^2 + 2\gamma^2 vA_1(x')\varphi(x') - \gamma^2 v^2\left(A_1(x')\right)^2 \\
&= \left(\gamma^2 - v^2\gamma^2\right)\left(A_1(x')\right)^2 + \left(A_2(x')\right)^2 + \left(A_3(x')\right)^2 - \left(\gamma^2 - v^2\gamma^2\right)\varphi(x')^2
\end{aligned}$$

y como $\gamma^2 - v^2\gamma^2 = 1$

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2 &= \left(A_1(x')\right)^2 + \left(A_2(x')\right)^2 + \left(A_3(x')\right)^2 - \varphi(x')^2 \\
&= \left|\mathbf{A}(x')\right|^2 - \varphi(x')^2
\end{aligned}$$

reemplazando ésto, obtenemos que,

$$\int_{I_v\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2\right) dx\,dt = \int_{I_v\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}(x')\right|^2 - \varphi(x')^2\right) dx\,dt$$

Ahora deseamos usar la fórmula de cambio de variables, hagamos $\mathbf{u} = (u, \tau) = x'$, por tanto $x = g_v\mathbf{u}$ y $x_1 = \gamma(u_1 - v\tau)$, $x_2 = u_2$, $x_3 = u_3$ y $t = (\tau - vu_1)$, por tanto el jacobiano del cambio de variables es

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \tau)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} & \frac{\partial x_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \tau} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t}{\partial u_1} & \frac{\partial t}{\partial u_2} & \frac{\partial t}{\partial u_3} & \frac{\partial t}{\partial \tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \gamma^2 - v^2\gamma^2 = 1.$$

Por tanto, por la fórmula de sustitución la región de integración es $g_v^{-1} I_v\Omega = \Omega$

$$\begin{aligned}
\int_{I_v\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2 - \varphi'^2\right) dx\,dt &= \int_{I_v\Omega} W\left(\left|\mathbf{A}(x')\right|^2 - \varphi(x')^2\right) dx\,dt \\
&= \int_{\Omega} W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 - \varphi(\mathbf{u})^2\right) \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial(u_1, u_2, u_3, \tau)}\, du\,d\tau \\
&= \int_{\Omega} W\left(|\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2 - \varphi(\mathbf{u})^2\right) du\,d\tau.
\end{aligned}$$

Ahora, solo nos falta calcular la invariancia de la primera integral, pero por la *Observación 1*, ésto es lo mismo que probar que el funcional (3.19) es invariante bajo la acción de los impulsos de Lorentz en el eje x_1. ésto equivale a probar que la siguiente integral

$$\frac{1}{2}\int_{I_v\Omega}\left|\nabla_x\varphi'\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)^2-\left|\nabla_x\mathbf{A}'\right|^2+\left|\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\right|^2 dx\,dt$$

cumple la *Definición 3.1.*

Sustituyendo $x'=\mathbf{u}$, como en la parte superior, tenemos, que la expresión anterior es

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2-\left|\nabla_x\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2+\left|\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right|^2 du\,d\tau.$$

Ahora necesitamos poner las derivadas que están en términos de x y t en términos de u y τ, para eso usemos la fórmula de la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_1}&=\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_1}\\&=\gamma\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}+v\gamma\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_2}&=\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_2}\\&=\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial x_3}&=\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x_3}\\&=\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t}&=\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\\&=v\gamma\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial u_1}+\gamma\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\end{aligned}$$

Ya con estas fórmulas para las derivadas de $\varphi(\mathbf{u})$ $(\mathbf{A}(\mathbf{u}))$, podemos llegar a la siguiente fórmula útil,

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla_x \varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 &= \left(\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\text{‘}v\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\right)^2-\left(v\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}+\gamma\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2\\
&= \gamma^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2+2v\gamma^2\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}+v^2\gamma^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\right)^2\\
&-v^2\gamma^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2-2v\gamma^2\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}+\gamma^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2\\
&= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\right)^2-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2\\
&= \left|\nabla_u \varphi\right|^2-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Notemos que las mismas fórmulas valen para $\mathbf{A}(\mathbf{u})$, por tanto.

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla_x \varphi'(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial \varphi'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 &= \left|\nabla_x \gamma(\varphi(\mathbf{u})-vA_1(\mathbf{u}))\right|^2-\left(\gamma\frac{\partial(\varphi(\mathbf{u})-vA_1(\mathbf{u}))}{\partial t}\right)^2\\
&= \gamma^2\left|\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\right|^2-2v\gamma^2\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\cdot\nabla_x A_1+v^2\gamma^2\left|\nabla_x A_1\right|^2\\
&-\gamma^2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2+2v\gamma^2\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}-v^2\gamma^2\left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2\\
&= \gamma^2\left(\left|\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2\right)\\
&+v^2\gamma^2\left(\left|\nabla_x A_1(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2\right)\\
&-2v\gamma^2\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\cdot\nabla_x A_1(\mathbf{u})+2v\gamma^2\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Por la cuentas anteriores tenemos $\left|\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2=\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2$,

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla_x \varphi'(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial \varphi'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 &= \gamma^2\left(\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2\right)\\
&+v^2\gamma^2\left(\left|\nabla_u A_1(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2\right)\\
&-2v\gamma^2\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\cdot\nabla_x A_1(\mathbf{u})+2v\gamma^2\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}
\end{aligned}
$$

Por otro lado, nos falta transformar la expresión $\left|\nabla_x\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2$. Usando las fórmulas anteriores,

$$
\begin{aligned}
\left|\nabla_x \mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{3} \left|\nabla_x A_i'(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial A_i'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 \\
&= \sum_{i=2}^{3} |\nabla_x A_i(\mathbf{u})|^2 - \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 \\
&+ \left|\gamma \nabla_x A_1(\mathbf{u}) - v\gamma \nabla_x \varphi\right|^2 - \left(\frac{\partial\left(\gamma A_1(\mathbf{u}) - v\gamma\varphi(\mathbf{u})\right)}{\partial t}\right)^2 \\
&= \sum_{i=2}^{3} |\nabla_x A_i(\mathbf{u})|^2 - \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 \\
&+ \left|\gamma \nabla_x A_1(\mathbf{u}) - v\gamma \nabla_x \varphi\right|^2 - \left(\gamma\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t} - v\gamma\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 \\
&= \sum_{i=2}^{3} |\nabla_u A_i(\mathbf{u})|^2 - \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2 \\
&+ \gamma^2 |\nabla_x A_1(\mathbf{u})|^2 - 2v\gamma^2 \nabla_x \varphi(\mathbf{u}) \cdot \nabla_x A_1(\mathbf{u}) \\
&+ v^2\gamma^2 \left|\nabla_x \varphi(\mathbf{u})\right|^2 - \gamma^2 \left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 \\
&+ 2v\gamma^2 \frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v^2\gamma^2 \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2 \\
&= \sum_{i=2}^{3} |\nabla_u A_i(\mathbf{u})|^2 - \left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2 \\
&+ \gamma^2 \left(|\nabla_u A_1(\mathbf{u})|^2 - \left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2\right) \\
&+ v^2\gamma^2 \left(\left|\nabla_u \varphi(\mathbf{u})\right|^2 - \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial \tau}\right)^2\right) \\
&+ 2v\gamma^2 \frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2v\gamma^2 \nabla_x \varphi(\mathbf{u}) \cdot \nabla_x A_1(\mathbf{u})
\end{aligned}
$$

Ya con ésto obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\nabla_x\varphi'(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2-\left|\nabla_x\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2+\left(\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2\\
&\qquad=\gamma^2\left(\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)\\
&\qquad+v^2\gamma^2\left(|\nabla_u A_1(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)\\
&\qquad-2v\gamma^2\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\cdot\nabla_x A_1(\mathbf{u})+2v\gamma^2\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial t}\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}\\
&\qquad-\gamma^2\left(|\nabla_u A_1(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)\\
&\qquad-v^2\gamma^2\left(\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)\\
&\qquad-2v\gamma^2\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+2v\gamma^2\nabla_x\varphi(\mathbf{u})\cdot\nabla_x A_1(\mathbf{u})\\
&\qquad-\sum_{i=2}^{3}\left[|\nabla_u A_i(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

Cancelando términos y asociando términos semejantes, y usando $\gamma^2-v^2\gamma^2=1$,

$$\begin{aligned}
&\left|\nabla_x\varphi'(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2-\left|\nabla_x\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2+\left(\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2\\
&\qquad=\left(\gamma^2-v^2\gamma^2\right)\left(\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)\\
&\qquad-\left(\gamma^2-v^2\gamma^2\right)\left(|\nabla_u A_1(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)\\
&\qquad-\sum_{i=2}^{3}\left[|\nabla_u A_i(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right]\\
&\qquad=\left(\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)-\left(|\nabla_u A_1(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_1(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)\\
&\qquad-\sum_{i=2}^{3}\left[|\nabla_u A_i(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right]\\
&\qquad=\left(\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right)-\sum_{i=1}^{3}\left[|\nabla_u A_i(\mathbf{u})|^2-\left(\frac{\partial A_i(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2\right]\\
&\qquad=\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2-|\nabla_u\mathbf{A}(\mathbf{u})|^2+\left(\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2
\end{aligned}$$

juntando todas nuestras cuentas,

$$\frac{1}{2}\int_{I_v\Omega}\left|\nabla_x\varphi'(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi'(\mathbf{u})}{\partial t}\right)^2-\left|\nabla_x\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2+\left|\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}\right|^2 dx\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right)^2-\left|\nabla_u\mathbf{A}(\mathbf{u})\right|^2+\left|\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{u})}{\partial\tau}\right|^2 du\,d\tau.$$

Y por la *Observación 2*, se puede concluir que

$$\frac{1}{2}\int_{I_v\Omega}\left|\frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{u})}{\partial t}+\nabla_x\varphi'(\mathbf{u})\right|^2-\left|\nabla_x\times\mathbf{A}'(\mathbf{u})\right|^2 dx\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{u})}{\partial\tau}+\nabla_u\varphi(\mathbf{u})\right|^2-\left|\nabla_u\times\mathbf{A}(\mathbf{u})\right|^2 du\,d\tau$$

ya con ésto, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{I_v\Omega}\mathscr{L}\left(t',x',u',\nabla u',\partial_t u'\right)dx\,dt&=\frac{1}{2}\int_{I_v\Omega}\left|\frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}+\nabla_x\varphi'\right|^2-\left|\nabla_x\times\mathbf{A}'\right|^2 dx\,dt\\&+\frac{1}{2}\int_{I_v\Omega}W\left(\left|\mathbf{A}'\right|^2-\varphi'^2\right)dx\,dt\\&=\int_{\Omega}\mathscr{L}\left(t,x,u,\nabla u,\partial_t u\right)du\,d\tau\end{aligned}$$

los cálculos para los impulsos en los ejes x_2 y x_3 son análogos, por tanto llegamos a que **el lagrangiano** (3.2) **es invariante bajo los impulsos de Lorentz.**

Inversiones temporales y Inversiones de Paridad Este caso se obtiene simplemente aplicando la fórmula de sustitución en (3.2).

Con ésto probamos que el Lagrangiano (3.1) es invariante bajo el grupo de Poincare, por tanto **las EMS son consistentes con la relatividad general**.

3.3. Teorema de Noether

El Teorema Noether afirma que si el Lagrangiano es invariante bajo un grupo de transformaciones de un parámetro, las soluciones suaves y que decaen suficientemente rápido a las ecuaciones de Euler-Lagrange, satisfacen algunas leyes de conservación.

Esta sección vamos a seguir las ideas de [Benci, 2009].

De las ecuaciones de Maxwell se puede deducir la ecuación de continuidad $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{J}=0$ donde ρ y $\mathbf{J}$ representan la carga y la corriente eléctrica respectivamente. Esta ecuación implica la conservación de la carga en todo el espacio. Sin embargo, podemos formular un resultado análogo en donde ρ y $\mathbf{J}$ no necesariamente representan la carga y la corriente eléctrica.

Lema 3.1. Sea $\rho : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{J} : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ dos funciones suaves que satisfacen la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

y para todo t

$$\rho(\cdot, t),\ \frac{\partial \rho}{\partial t}(\cdot, t)\ \text{ y } \mathbf{J}(\cdot, t) \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$$

Entonces, para todo t

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x,t)\,dx = 0$$

Demostración. Sea

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\right\},\ R > 0;$$

Entonces, Integremos la ecuación de continuidad sobre B_R para $R > 0$ arbitrario pero fijo. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial t}\int_{B_R} \rho(x,t)\,dx\right| &= \left|\int_{B_R} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t}\,dx\right| \\
&= \left|\int_{B_R} \nabla \cdot \mathbf{J}\,dx\right| \\
&= \left|\int_{\partial B_R} (\mathbf{J}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma\right| && \text{(Teorema de la Divergencia)} \\
&\leq \int_{\partial B_R} |\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}|\,d\sigma
\end{aligned}$$

$\mathbf{n}$ denota el vector normal unitario.

Definimos

$$\begin{aligned}
\varphi : (0,\infty) &\to \mathbb{R} \\
R \mapsto \varphi(R) &= \int_{\partial B_R} |\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}|\,d\sigma
\end{aligned}$$

Denotamos con

$$\alpha := \lim_{R\to\infty} \left| \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_R} \rho(x,t)\,dx \right|$$

$\alpha < \infty$ así definido tiene sentido porque $\mathbf{J}(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ y solamente tiene dos opciones excluyentes $\alpha > 0$ 0 $\alpha = 0$. Supongamos que $\alpha > 0$ a partir de cierto R_0 la gráfica de φ está por encima de α (Ver figura (3.3)),

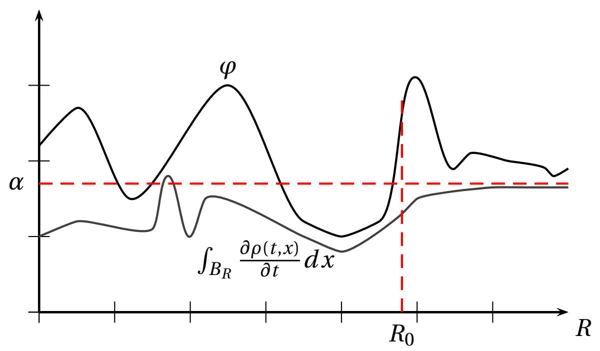

Figura 3.2: Esquema de la función φ

De este modo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}|\,d\sigma &= \int_0^\infty \varphi(R)\,dR \\
&= \int_0^{R_0} \varphi(R)\,dR + = \int_{R_0}^\infty \varphi(R)\,dR \\
&> \int_0^{R_0} \varphi(R)\,dR + = \int_{R_0}^\infty \alpha\,dR \\
&= \infty
\end{aligned}$$

lo que contradice el hecho que $\mathbf{J} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Por tal razón $\alpha = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x,t)\,dx = 0.$$

□

Decimos que una integral de una función $\phi(x,t)$ es una *integral de movimiento* si

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \phi(x,t)\,dx = 0 \tag{3.20}$$

ésto quiero decir que la integral en (3.20) es una cantidad que se *conserva* en el tiempo.

Supongamos que un Lagrangiano es invariante bajo la acción T_g de algún grupo de Lie G. Denotamos por $T_{g(\lambda)}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) a la acción de un subgrupo uni-parámetrico $\{g(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. Nótese que este subgrupo bien es isomorfo a S^1 o a $\mathbb{R}$. Usaremos la notación

$$u_\lambda = T_{g(\lambda)} u, \tag{3.21}$$

y si el grupo también actúa sobre las variables, fijemos

$$t_\lambda = T_{g(\lambda)} t \tag{3.22}$$

$$x_\lambda = T_{g(\lambda)} x. \tag{3.23}$$

Por ejemplo, considere el primer impulso de Lorentz, (Ver Tabla (3.4); en este caso el parámetro λ es la primera componente de la velocidad v, y tenemos

$$\begin{aligned} t_v &= \frac{t - v x_1}{\sqrt{1-v^2}} \\ x_{1,v} &= \frac{x_1 - v t}{\sqrt{1-v^2}} \\ u_v &= u(t_v, x_{1,v}, x_2, x_3). \end{aligned}$$

A continuación usaremos un lema de carácter técnico:

Lema 3.2. Si $\mathscr{L}$ es invariante con respecto a un grupo de Lie de un parámetro $g(\lambda)$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\int_\Omega \mathscr{L}(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda, \nabla u_\lambda, \partial_t u_\lambda)\,\varphi(x_\lambda, t_\lambda)\,dx\,dt\right]_{\lambda=0} = 0$$

donde $\Omega = [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^N$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Demostración. Utilizaremos una técnica de aproximación de funciones suaves para φ, por funciones escalonadas de la siguiente manera. Para cada $\epsilon > 0$, definimos los dominios

$$\Omega_j = \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^{N+1} : j\epsilon < \varphi(x,t) < (j+1)\epsilon\right\}$$

y una función

$$\varphi_\epsilon = \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\epsilon\chi_{\Omega_j},$$

Si $\epsilon \to 0$, $\varphi_\epsilon(x) \to \varphi(x)$, pero también $\varphi_\epsilon \to \varphi$ en L^1. SI λ es suficientemente pequeño, el soporte de $\varphi(x_\lambda, t_\lambda)$ está contenido en Ω, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathscr{L}(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda, \nabla u_\lambda, \partial_t u_\lambda)\, \varphi_\epsilon(x_\lambda, t_\lambda)\, dx\, dt \\
&= \int_\Omega \left[\mathscr{L}(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda, \nabla u_\lambda, \partial_t u_\lambda) \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\epsilon\chi_{T_{g(\lambda)}\Omega_j}\right] dx\, dt \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\epsilon \int_{T_{g(\lambda)}\Omega_j} \left[\mathscr{L}(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda, \nabla u_\lambda, \partial_t u_\lambda)\right] dx\, dt \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} j\epsilon \int_{\Omega_j} \left[\mathscr{L}(t, x, u, \nabla u, \partial_t u)\right] dx\, dt \\
&= \int_\Omega \mathscr{L}(t, x, u, \nabla u, \partial_t u)\, \varphi_\epsilon(x, t)\, dx\, dt
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0$ tenemos que

$$\int_\Omega \mathscr{L}(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda, \nabla u_\lambda, \partial_t u_\lambda)\, \varphi(x_\lambda, t_\lambda)\, dx\, dt = \int_\Omega \mathscr{L}(t, x, u, \nabla u, \partial_t u)\, \varphi(x, t)\, dx\, dt$$

Si llamamos

$$I[u_\lambda] = \int_\Omega \mathscr{L}(t_\lambda, x_\lambda, u_\lambda, \nabla u_\lambda, \partial_t u_\lambda)\, \varphi(x_\lambda, t_\lambda)\, dx\, dt$$

entonces

$$\frac{\partial I[u_\lambda]}{\partial \lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{I[u_\lambda] - I[u]}{\lambda} = 0.$$

□

A continuación demostraremos que la invariancia implica la ecuación de continuidad para unas ρ y **J** especiales. Esta ecuación de continuidad implicara la conservación de la cantidad ρ.

Teorema 3.1. Sea $\mathscr{L}$ invariante con respecto a un grupo de Lie de un parámetro $g(\lambda)$ y sea $u = u_\lambda$ una función suave de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Si definimos

$$\rho = \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{\lambda,t}} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} - \mathscr{L}\frac{\partial t_\lambda}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} \tag{3.24}$$

y

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{\lambda,x^i}} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} - \mathscr{L} \frac{\partial x^i_\lambda}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} \mathbf{e_i} \tag{3.25}$$

entonces

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Demostración. Por el lema anterior, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\int \mathscr{L} \varphi \right]_{\lambda=0} = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Derivando con respecto a λ bajo el signo de integral

$$\left[\int \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} \varphi + \mathscr{L} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Para hacer más legibles los cálculos, escribiremos u, x, t en vez de $x_\lambda, t_\lambda, u_\lambda$ $(x^0 = t)$. Calculemos en primer lugar $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} &= \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \frac{\partial u_{x_i}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} && \text{(por regla de la cadena)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda \partial x^i} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda \partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \right) \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right] + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u} \right] \frac{\partial u}{\partial \lambda} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right). && \text{(por Euler-Lagrange)}
\end{aligned}$$

Por su parte

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \lambda}$$

Ahora sobre el campo

$$\mathbf{F} = \left(\mathscr{L}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\varphi\right)_{i=0}^{N}$$

aplicamos el teorema de la divergencia, teniendo en cuanta que φ al ser de soporte compacto se anula sobre por fuera de su soporte. Así.

$$\int \nabla \cdot \mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\int \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathscr{L}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\right)\varphi\, dx\, dt + \int \mathscr{L}\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\, dx\, dt = 0$$

Recopilando nuestras cuentas.

$$\begin{aligned}
0 &= \int (\partial_\lambda \mathscr{L})\varphi + \mathscr{L}\left(\partial_\lambda \varphi\right) dx\, dt \\
&= \int \left[\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}}\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)\varphi + \mathscr{L}\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\right] dx\, dt \\
&= \int \left[\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}}\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)\varphi\, dx\, dt - \int \sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\mathscr{L}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\right)\varphi\right] dx\, dt \\
&= \int \left[\sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}}\frac{\partial u}{\partial \lambda} - \mathscr{L}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\right)\varphi\right] dx\, dt.
\end{aligned}$$

Como φ es arbitraria tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{J} &= \sum_{i=0}^{N}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{x^i}}\frac{\partial u}{\partial \lambda} - \mathscr{L}\frac{\partial x^i}{\partial \lambda}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Del lema anterior obtenemos que ρ y $\mathbf{J}$ definidos en (3.24) y (3.24), satisfacen la ecuación de continuidad por tanto usando el Lema 3.1, tenemos que

$$\int \rho(x,t)\, dx = \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{\lambda,t}}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} - \mathscr{L}\frac{\partial t_\lambda}{\partial \lambda}\right]_{\lambda=0} dx$$

es una integral de movimiento. Lo afirmado queda depositado en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Teorema de Noether)**.** Sea $\mathscr{L}$ invariante con respecto a un grupo de transformaciones de un parámetro $g(\lambda)$ y sea u una función suave de las ecuaciones de Euler-Langrange. Suponga que u decae suficientemente rápido se mantiene. Entonces,

$$\mathscr{T}[u] = \int \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_{\lambda,t}} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} - \mathscr{L} \frac{\partial t_\lambda}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=0} dx$$

es una integral de movimiento.

3.4. Invariantes del Movimiento

En esta sección asumiremos, que las EMS tienen soluciones lo suficientemente suaves y analizaremos algunas de sus propiedades. También asumiremos que estas soluciones y sus derivadas son lo suficientemente pequeñas en el infinito de manera que podamos llevar a cabo integración. Los principales invariantes del movimiento de las EMS, a saber la energía y el momentum, pueden ser calculadas por medio del Teorema de Noether. Vamos a realizar los calculos

- **Energía**

  La energía es, por definición, la cantidad que se preserva por la invariancia del Lagrangiano en el tiempo. De este modo, una transformación del tipo t_λ es tal que $\frac{\partial t_\lambda}{\partial \lambda} = 1$, $u_{\lambda,t} = u_t$ y la energía se convierte en

  $$\mathscr{E}(\mathbf{A}, \varphi) = \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t u)} \partial_t u - \mathscr{L} \right)$$

  Para el caso de las ecuaciones de Maxwell, tenemos el Lagrangiano definido por

  $$\mathscr{L}(\mathbf{A}, \varphi) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2 + W\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right) \right)$$

  y fijemos que $u = (\mathbf{A}, \varphi)$

  $$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t u)} &= \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t \mathbf{A})}, \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_t \varphi)} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \varphi, 0 \right). \end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right) &= \int \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + \nabla\varphi\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{2}\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla\times\mathbf{A}\right|^2 - \frac{1}{2}W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2 + \left|\nabla\times\mathbf{A}\right|^2 - W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right) dx\end{aligned}$$

Resumiendo, la energía $\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right)$ del sistema esta dada por la expresión

$$\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right) = \frac{1}{2}\int \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2 + \left|\nabla\times\mathbf{A}\right|^2 - W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right) dx. \tag{3.26}$$

- **Momentum**

  Por definición esta es la cantidad que se preserva, por la invariancia bajo traslaciones espaciales en el Lagrangiano. Primero vamos a calcular la invariancia para una traslación en una dirección arbitraria dirección x_i $(i = 1,2,3)$, entonces $\frac{\partial t_\lambda}{\partial \lambda} = 0$ y $\left.\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=0} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)$ y $\left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (u_{\lambda,t})}\right|_{\lambda=0} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi, 0\right)$ entonces el momentum en la dirección i, toma la forma

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_i\left(\mathbf{A},\varphi\right) &= \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial (u_{\lambda,t})}\cdot\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} dx \\ &= \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^i}\, dx \\ &= \int \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\, dx.\end{aligned}$$

  Por lo tanto el momentum total $\mathscr{P}\left(\mathbf{A},\varphi\right)$ es,

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\left(\mathbf{A},\varphi\right) &= \sum_{i=1}^{3}\mathscr{P}_i\left(\mathbf{A},\varphi\right)\mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(\int \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\, dx\right)\mathbf{e}_i \\ &= \int \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\mathbf{e}_i\right) dx \\ &= \int \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\nabla A_j\, dx\end{aligned}$$

  Resumiendo, la expresión para el momentum es,

$$\mathscr{P}\left(\mathbf{A},\varphi\right) = \int \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)\nabla A_j\, dx \tag{3.27}$$

- **Carga**

  Por último observemos que, usando las expresiones para $\rho\left(\mathbf{A},\varphi\right)$ y $\mathbf{J}\left(\mathbf{A},\varphi\right)$, satisfacen la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0.$$

  Por tanto por el *Lema 3.1* la integral de ρ es una integral de movimiento, de este modo, si $\mathscr{C}\left(\mathbf{A},\varphi\right)$ la carga entonces, esta es una cantidad conservativa y esta dada por

$$\mathscr{C}\left(\mathbf{A},\varphi\right) = \int \rho\left(\mathbf{A},\varphi\right)\, dx = \int W'\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\varphi\, dx. \tag{3.28}$$

Podemos expresar la energía por medio de una expresión significativa la cual será útil mas adelante:

Proposición 3.1. La energía de las soluciones de las EMS es

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right) &= \int \left(\frac{1}{2}|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2 - W'(\sigma)\varphi^2 - \frac{1}{2}W(\sigma)\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{H}|^2\right) dx - \int \left(\rho\varphi + \frac{1}{2}W(\sigma)\right) dx,\end{aligned}$$

donde

$$\sigma = |\mathbf{A}|^2 - \varphi^2.$$

Demostración. Tomemos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

multiplicando en ambos lados por φ e integrando

$$\int (\nabla \cdot \mathbf{E})\varphi\, dx = \int \rho\varphi\, dx$$

por cálculos anteriores, sabemos que si integramos por partes, el lado izquierdo de la ecuación es

$$\int -\mathbf{E}\cdot\nabla\varphi\, dx = \int \rho\varphi\, dx$$

de la cual obtenemos trivialmente

$$\int \left(-\mathbf{E}\cdot\nabla\varphi\, dx - \rho\varphi\right)\, dx = 0.$$

Usemos $\rho = W'(\sigma)\varphi$ y $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$, obteniendo así

$$\begin{aligned}
0 &= \int \left(\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right)\cdot\nabla\varphi - W'(\sigma)\varphi^2\right) dx\\
&= \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\varphi + \left|\nabla\varphi\right|^2 - W'(\sigma)\varphi^2\right) dx
\end{aligned}$$

Luego sumando este término en (3.26)

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right) &= \frac{1}{2}\int \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - \left|\nabla\varphi\right|^2 + |\nabla\times\mathbf{A}|^2 - W(\sigma)\right) dx\\
&= \int \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\times\mathbf{A}|^2 - \frac{1}{2}W(\sigma)\right) dx\\
&+ \int \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\varphi + \left|\nabla\varphi\right|^2 - W'(\sigma)\varphi^2\right) dx\\
&= \int \left(\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right|^2 + 2\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot\nabla\varphi + \left|\nabla\varphi\right|^2\right) + \frac{1}{2}|\nabla\times\mathbf{A}|^2\right) dx\\
&- \int \left(\frac{1}{2}W(\sigma) - W'(\sigma)\varphi^2\right) dx\\
&= \frac{1}{2}\int \left(\left|\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla\varphi\right|^2 + |\nabla\times\mathbf{A}|^2\, dx - \int \frac{1}{2}W(\sigma) + W'(\sigma)\varphi^2\right) dx\\
&= \frac{1}{2}\int \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2\, dx - \int \frac{1}{2}W(\sigma) + W'(\sigma)\varphi^2\right) dx\\
&= \frac{1}{2}\int \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2\right), dx - \int \left(\rho\varphi + \frac{1}{2}W(\sigma)\right) dx.
\end{aligned}$$

□

El término

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2\right) dx$$

representa la energía del campo electromagnética, mientras

$$-\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}W(\sigma)+W'(\sigma)\varphi^2\right)dx=-\int_{\mathbb{R}^3}\left(\rho\varphi+\frac{1}{2}W(\sigma)\right) \tag{3.29}$$

representa la energía de la materia (campos de corto alcance como los nucleares). Este puede ser interpretado como la energía de enlace y ésta está "concentrada" esencialmente en Ω_t.

3.5. Soluciones Estáticas

Las soluciones estáticas de las de las EMS, son las soluciones que dependen solo de la variable espacial x; por tanto si modificamos las ecuaciones (3.6) y (3.7), de acuerdo a este supuesto obtenemos que $\mathbf{A}$, φ son soluciones estáticas de las EMS si satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\mathbf{A} \tag{3.30}$$

$$-\Delta\varphi=W'\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\varphi. \tag{3.31}$$

Podemos aun mas modificar las expresión para le energía del sistema (3,26), cancelando el término $\left|\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right|^2$, ya que $\mathbf{A}$ no depende del tiempo t, por tanto, para el caso estático

$$\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right)=\frac{1}{2}\int\left(|\nabla\times\mathbf{A}|^2-\left|\nabla\varphi\right|^2-W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\right)dx. \tag{3.32}$$

Ahora presentaremos un propiedad fundamental de la energía $\mathscr{E}$ de las soluciones estáticas de (3.6) y (3.7),

Proposición 3.2. Si $\left(\mathbf{A},\varphi\right)$ es una solución de las EMS, de energía finita, entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right)&=\frac{1}{3}\int\left(|\nabla\times\mathbf{A}|^2-|\nabla\varphi|^2\right)dx\\&=\int W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)dx\end{aligned}$$

Demostración. Sea $\lambda>0$ y

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda(x)&=\varphi\left(\lambda^{-1}x\right)\\\mathbf{A}_\lambda(x)&=\mathbf{A}\left(\lambda^{-1}x\right)\end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\left(\mathbf{A}_\lambda,\varphi_\lambda\right) &= \frac{1}{2}\int \left(|\nabla_x \times \mathbf{A}_\lambda(x)|^2 - \left|\nabla_x\varphi_\lambda(x)\right|^2\right) dx \\ &\quad - \frac{1}{2}\int W\left(|\mathbf{A}_\lambda(x)|^2 - \varphi_\lambda(x)\right) dx.\end{aligned}$$

Entonces, fijando $y = \lambda^{-1}x$, aplicamos la fórmula de sustitución. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$, entonces $x = \lambda y$ y $x = (\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3)$ y , el jacobiano de la transformación es

$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3.$$

Por tanto, obtenemos

$$\int W\left(|\mathbf{A}_\lambda(x)|^2 - \varphi_\lambda(x)\right) dx = \lambda^3 \int W\left(\left|\mathbf{A}(y)\right|^2 - \varphi(y)^2\right) dy. \tag{3.33}$$

Análogamente,

$$\int \left(|\nabla_x \times \mathbf{A}_\lambda(x)|^2 - \left|\nabla_x\varphi_\lambda(x)\right|^2\right) dx = \lambda^3 \int \left(\left|\nabla_x \times \mathbf{A}(y)\right|^2 - \left|\nabla_x\varphi(y)\right|^2\right) dy.$$

Ahora como, $(y_1, y_2, y_3) = (\frac{x_1}{\lambda}, \frac{x_3}{\lambda}, \frac{x_3}{\lambda})$, usando regla de la cadena tenemos para $i = 1,2,3$ y $j = 1,2,3$,

$$\frac{\partial\varphi(y)}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial A_j(y)}{\partial x_i} = \frac{\partial A_j(y)}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial A_j(y)}{\partial y_i}.$$

De ésto podemos concluir

$$\begin{aligned}\left|\nabla_x\varphi(y)\right| &= \left|\frac{1}{\lambda}\nabla_y\varphi(y)\right| = \frac{1}{\lambda^2}\left|\nabla_y\varphi(y)\right| \\ \left|\nabla_x \times \mathbf{A}(y)\right| &= \left|\frac{1}{\lambda}\nabla_y \times \mathbf{A}(y)\right| = \frac{1}{\lambda^2}\left|\nabla_y \times \mathbf{A}(y)\right|\end{aligned}$$

Juntando nuestras cuentas

$$\begin{aligned}\int \left(|\nabla_x \times \mathbf{A}_\lambda(x)|^2 - \left|\nabla_x \varphi_\lambda(x)\right|^2\right) dx &= \lambda^3 \int \left(\left|\nabla_x \times \mathbf{A}(y)\right|^2 - \left|\nabla_x \varphi(y)\right|^2\right) dy \\ &= \lambda^3 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \int \left(\left|\nabla_y \times \mathbf{A}(y)\right|^2 - \left|\nabla_y \varphi(y)\right|^2\right) dy \\ &= \lambda \int \left(\left|\nabla_y \times \mathbf{A}(y)\right|^2 - \left|\nabla_y \varphi(y)\right|^2\right) dy. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Juntando (3.33) y (3.34)

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\left(\mathbf{A}_\lambda, \varphi_\lambda\right) = &\frac{\lambda}{2} \int \left(\left|\nabla_y \times \mathbf{A}(y)\right|^2 - \left|\nabla_y \varphi(y)\right|^2\right) dy \\ &- \frac{\lambda^3}{2} \int W\left(\left|\mathbf{A}(y)\right|^2 - \varphi(y)^2\right) dy. \end{aligned}$$

Fijemos $g(\lambda) = \mathscr{E}\left(\mathbf{A}_\lambda, \varphi_\lambda\right)$, y puesto que $\left(\mathbf{A}, \varphi\right)$ es un punto critico de $\mathscr{E}$

$$\left.\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = 0 \tag{3.35}$$

Esta expresión explícitamente es

$$\begin{aligned}\frac{dg(\lambda)}{d\lambda} = &\frac{1}{2} \int \left(\left|\nabla_y \times \mathbf{A}(y)\right|^2 - \left|\nabla_y \varphi(y)\right|^2\right) dy \\ &- \frac{3\lambda^2}{2} \int W\left(\left|\mathbf{A}(y)\right|^2 - \varphi(y)^2\right) dy \end{aligned}$$

Para $\lambda = 1$, usando (3.35), se obtiene

$$\frac{1}{2} \int \left(\left|\nabla_y \times \mathbf{A}(y)\right|^2 - \left|\nabla_y \varphi(y)\right|^2\right) dy - \frac{3}{2} \int W\left(\left|\mathbf{A}(y)\right|^2 - \varphi(y)^2\right) dy = 0$$

y por tanto

$$\frac{1}{3} \int \left(\left|\nabla_y \times \mathbf{A}\right|^2 - \left|\nabla_y \varphi(y)\right|^2\right) dx = \int W\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right) dx \tag{3.36}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\left(\mathbf{A}, \varphi\right) &= \frac{1}{2} \int \left(|\nabla \times \mathbf{A}|^2 - \left|\nabla \varphi\right|^2 - W\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int |\nabla \times \mathbf{A}|^2\, dx \end{aligned}$$

Y por (3.36), se obtiene

$$\mathscr{E}\left(\mathbf{A},\varphi\right)=\int W\left(|\mathbf{A}|^2-\varphi^2\right)\,dx.$$

□

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

En la teoría de Campo Electromagnético presentado en el capitulo anterior tenemos que si $(\mathbf{A},\varphi)$ es una solución estática, las condiciones (3.13) y (3.14), sobre W implican que la región

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \left||\mathbf{A}(x)|^2 - \varphi(x)^2\right| \geq 1\right\},$$

es la región llena de materia, por tanto podemos identificar a Ω como el espacio que ocupa la partícula del campo. Es decir que en nuestra teoría de campo las partículas tienen extensión espacial. Ver Figura (4.1).

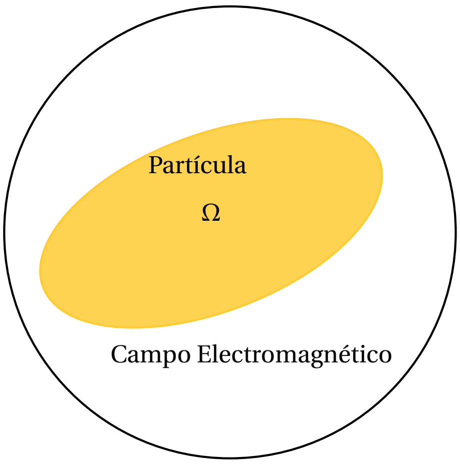

Figura 4.1: Partícula del campo electromagnético

Debido a que la teoría es consistente con la relatividad general, y recordemos que en nuestro sistema de unidades $c = 1$ tenemos, que para la masa m de nuestra partícula se cumple

$$mc = m = \mathscr{E}\left(\mathbf{A}, \varphi\right) = \int W\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\, dx < \infty. \tag{4.1}$$

Por tanto la energía y masa de nuestras partículas es finita. Lo que hace nuestra teoría de campo consistente.

Aun mas, las partícula moviéndose en un campo exterior **E**, **H**, a una velocidad **v** experimenta un una fuerza **F** (Fuerza de Lorentz):

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}\right)$$

donde e es la carga (3.28)

$$e = \int W'\left(|\mathbf{A}|^2 - \varphi^2\right)\varphi\, dx.$$

Concluyendo, las partículas obtenidas por la perturbación del lagrangiano, se comportan como partículas relativistas excepto que estas tienen extensión espacial. Aun mas estas tienen energía finita y por tanto masa finita. Lo que hace a la Electrodinámica consistente. Observemos que todos estos hechos son consecuencia de la invariancia de Lagrangiano respecto al grupo de Poincaré.

BIBLIOGRAFÍA

[Apostol, 1969] Apostol, T. M. (1969). *Calculus VOLUME 2.* John Wiley & Sons, London.

[Arnold, 1989] Arnold, V. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer Verlag.

[Badiale et al., 2001] Badiale, M., Benci, V., and Rolando, S. (2001). Solitary waves: physical aspects and mathematical results. *Third Fortnight on Nonlinear Analysis*, pages 1–50.

[Badiale et al., 2011] Badiale, M., Pisani, L., and Rolando, S. (2011). Sum of wheighted lebesgue spaces and nonlinear elliptic equations. *Nonlinear Differential Equations and Applications*, 18:369–105.

[Benci, 2009] Benci, V. (2009). Hylomorphic solitons. *Milan Journal of Mathematics*, 77:271–332.

[Benci and Fortunato, 1994] Benci, V. and Fortunato, D. (1994). On the existence of infinitely many geodesics on space-time manifolds. *Advanced in Mathematics*, 105:1–25.

[Benci and Fortunato, 2004] Benci, V. and Fortunato, D. (2004). Towards a unified field theory for classical electrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 173:379–414.

[Benci and Fortunato, tion] Benci, V. and Fortunato, D. (In preparation). Solitary waves of the semilinear maxwell equations and their dynamical properties.

[Benci and Rabinowitz, 1979] Benci, V. and Rabinowitz, P. H. (1979). Critical point theorems for indefinite functionals. *Inventiones Math*, 52:241–273.

[Berestycki and Lions, 1983] Berestycki, H. and Lions, P. (1983). Nonlinear scalar field equations, i- existence of a ground state. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 82:313–345.

[Born and Infeld, 1934] Born, M. and Infeld, L. (1934). Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 144:425–451.

[Brezis, 2011] Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer.

[Caicedo, 2005] Caicedo, J. F. (2005). *Calculo Avanzado. Introducción.* Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

[Chang, 2005] Chang, K.-C. (2005). *Methods in nonlinear Analysis.* Springer-Verlag, Berlin.

[Duval, 2004] Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Universidad del Valle, Cali.

[Esteban and Séré, 1995] Esteban, M. J. and Séré, E. (1995). Stationary states of the nonlinear dirac equation: a variational approach. *Communications in Mathematical Physics*, 171:323–350.

[Griffiths, 1999] Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics.* Prentice Hall, New Jersey.

[Hadamard, 1945] Hadamard, J. (1945). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Dover publications, INC., New York.

[Herstein, 1998] Herstein, I. (1998). *Álgebra Abstracta.* Grupo Editorial Iberoamérica, México D.F.

[Hirsch and Smale, 1973] Hirsch, M. W. and Smale, S. (1973). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear ALgebra.* Academic Press.

[J. and J., 1976] J., B. and J., L. (1976). *Interpolation Spaces.* Spriger-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[Jackson, 1999] Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics.* John Wiley & Sons, New York.

[Klepner and Kolenkow, 1973] Klepner, D. and Kolenkow, R. J. (1973). *An introduction to mechanics.* McGraw Hill.

[Kreyszig, 1989] Kreyszig, E. (1989). *Introductory Functional Analysis with Applications.* JOHN WILEY & SONS, New York.

[Landau and Lifshitz, 1994] Landau, L. and Lifshitz, E. (1994). *The Classical Theory of Fields.* Butterworth Heinemann.

[Martin, 2002] Martin, D. (2002). *Manifold theory. an introduction to mathematical physicits.* Horwood Published, Chichester,England.

[Mason et al., 1988] Mason, J., Burton, L., and Stacey, K. (1988). *Pensar Matemáticamente.* Editorial Labor S.A., Madrid.

[Noether, 1918] Noether, E. (1918). Invariant variational problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1:186–207.

[Polya, 1981] Polya, G. (1981). *Cómo Plantear Y Resolver Problemas.* Editorial Trillas, México D.F.

[Rana, 2002] Rana, I. K. (2002). *An Introduction to Measure and Integration.* American Mathematical Society.

[Rudin, 1970] Rudin, W. (1970). *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York.

[Rudin, 1976] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New York.

[Santos, 2007] Santos, M. (2007). *La Resolución de Problemas: Fundamentos cognitivos.* Trillas, México, D.F.

[Scheck, 2005] Scheck, F. (2005). *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos.* Springer Verlag.

[Yang, 2000] Yang, Y. (2000). Classical solutions in the born-infeld theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 456:615–640.

ÍNDICE ALFABÉTICO

Ampere
    Ley
        en el vacío, 53
Ampere, Ley, 24

Biot-Savarat, Ley
    caso volumétrico, 25
Biot-Savart, Ley, 22

calculo
    de variaciones, 45
Calibración, 17
Campo
    Electromagnético, 15
    Eléctrico, 15
    Magnético, 15
    Matemáticas, 5, 48
Carga, 15
    Ley de conservación, 21
Corriente, 20
    constante, 22
Coulomb
    Ley de, 26
    Ley de para campos magnéticos
        en el vacío, 53

Densidad
    de carga, 20
    de corriente, 20
Divergencia,Teorema, 20

Ecuaciones de Maxwell
    en el vacío, 54
    en la materia, 28
Ecuación
    de continuidad, 22
    de Euler-Lagrange, 48, 50
    del movimiento armónico simple, 46
Electrodinámica Clásica, 4, 15
    en el vacío, 50

Faraday
    Ley, 28, 53
        en el vacío, 54
    Michael, 27
Fuente, 26
Fuerza
    de Lorentz, 17, 28
    electromotora, 26
funcional, 4, 45

Gauss
    Ley, 20, 51
        en el vacío, 52
Generador, 26

Integral de Movimiento, 83

Lagrangiano, 47, 48
    Densidad de, 49
        de la electrodinámica, 50
Ley
    de Ampere, 24
        en el vacío, 53

- de Biot-Savart, 22
- de Coulomb, 16
  - campos magnéticos, 26
  - en el vacío, 53
- de Faraday, 28
  - en el vacío, 54
- de Gauss, 20, 51
  - en el vacío, 52
  - forma diferencial, 20
- de Hooke, 46

Lorentz
- Fuerza, 28

líneas de campo, 18

Maxwell
- Ecuaciones
  - en el vacío, 54
  - en la materia, 28

Mecanica Newtoniana, 48
Movimiento armónico simple, 46

Oscilador armónico, 46

Potencial, 1

Segunda Ley de Newton, 28
Stokes, Teorema, 24

Teorema
- de la divergencia, 20
- de Stokes, 24

Unidades Fundamentales, 50

variacional
- principio, 45

variaciones
- calculo, 45