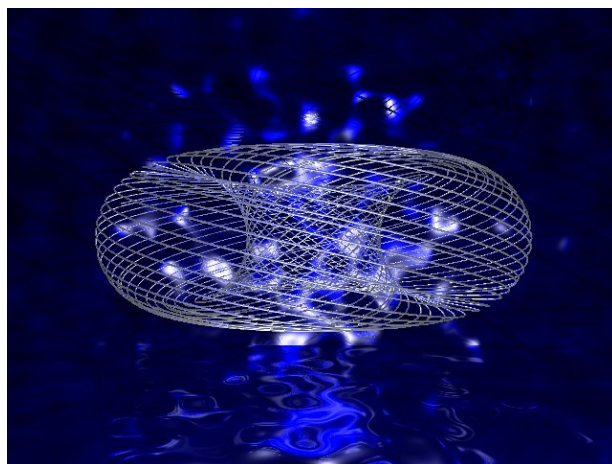


ALGUNOS ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS



ARTURO SANJUÁN

Bogotá 2002

1. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	1
1.1. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD	1
1.1.1. CAMPOS VECTORIALES	1
1.1.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD	2
1.2. PROPIEDADES POSTERIORES	7
2. VARIEDADES DIFERENCIABLES	16
2.1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS	16
2.1.1. VARIEDADES TOPOLÓGICAS	16
2.1.2. ESTRUCTURAS DIFERENCIABLES	18
2.1.3. FUNCIONES DIFERENCIABLES	20
2.1.4. ESPACIOS TANGENTES Y COTANGENTES	24
2.1.5. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN DE CLASE C^k	35
2.2. UN EJEMPLO CLÁSICO: EL TORO.	39
2.2.1. PLANOS TANGENTES, INMERSIONES Y SUBVARIEDADES EN EL TORO	41
2.2.2. LA CURVA DE KRONECKER	42
3. EDOS EN VARIEDADES	46
3.1. CAMPOS EN VARIEDADES	46
3.1.1. PRIMEROS EJEMPLOS	46
3.1.2. FLUJOS, TRAYECTORIAS Y SINGULARIDADES	51

3.1.3.	TEOREMA DEL FLUJO TUBULAR	53
3.1.4.	GRUPO DE DIFEOMORFISMOS GENERADOS POR UN FLUJO	56
3.1.5.	EQUIVALENCIA LOCAL DE TRAYECTORIAS	56
3.2.	PUNTOS SINGULARES	58
3.2.1.	LINEALIZACIÓN	58
3.2.2.	TEOREMA DE HARTMAN-GROBMAN	58
3.2.3.	TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE	65
3.3.	TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON	67

INTRODUCCIÓN

Durante los años 1930's la topología desarrolló algunas de sus más importantes nociones. La primera conferencia internacional sobre el tema de las variedades, tuvo lugar en Moscú en el año 1935. Los Espacios Fibrados fueron introducidos por H. Seifert (1907-1996). En 1950 las nociones de espacio fibrado y fibrados vectoriales fueron centrales en el estudio de la Topología Algebraica. En este año en Bruselas, y en 1953 en la Universidad de Cornell, hubo conferencias internacionales que centraron el estudio en estos espacios.

W.S. Massey citó cinco definiciones de espacio fibrado que se dieron en la conferencia de la Universidad de Cornell. Esta serie de definiciones competentes entre si desarrolló un gran interes en la comunidad científica por investigar sobre estos temas.

El personaje principal en el desarrollo de los espacios fibrados fué H. Whitney (1907-1989). La introducción de sus espacios de esferas y las aplicaciones entre las mismas fueron un gran motor del estudio de las variedades.

Cuando se habla de variedades, se debe hablar de Henri Poincaré (1854-1912), quien sembró sus semillas de Topología Algebraica en su tan celebrado artículo "Análisis Situs", y sus subsiguinetes cinco "Complements". Su interés en los métodos topológicos lo aproximó al estudio cualitativo de los sistemas dinámicos.

La definición de plano de D. Hilbert (1862-1943) comienza con un sistema de coordenadas que satisfice algunas propiedades topológicas. El uso de vecindades localmente euclideas es la base de muchos refinamientos que eventualmente dieron pié a la definición de variedad usada hoy en día.

Por otro lado, las raices de las ecuaciones diferenciales se remontan a las raices del cálculo mismo con Leibniz y Newton. Por tal razón solo vamos a mirar los antecedentes de los sistemas dinámicos. El problema central en la teoría de las ecuaciones diferenciales es la existencia y la unicidad. Cauchy da su primer resultado para funciones analíticas siguiendo algunas idas de Euler. A finales del siglo antepasado, G. Peano(1858-1932) publica dos artículos en los cuales formula dos teoremas de existencia diferentes. Estos teoremas usan las aproximaciones sucesivas como herramienta principal, así como algunos resultados expuestos por Hartman.

El desarrollo simultaneo de los sistemas dinámicos en variedades diferenciales se debe, en gran parte, a S. Smale, quien formuló y demostró una serie de resultados relacionados con este tema.

El objetivo principal de esta monografía, es hacer una exposición del Teorema de Existencia y Unicidad para ecuaciones autónomas, de las variedades diferenciables y de la definición de las ecuaciones diferenciales en variedades, con algunos de sus resultados para puntos singulares hiperbólicos.

El desarrollo de las ecuaciones diferenciales es de vital importancia en todas las ciencias exactas, ya que la gran mayoría de los modelos explicativos en estas, son soportados en las ecuaciones diferenciales. Ahora bien, gracias a los nuevos desarrollos científicos, los comportamientos cualitativos de los fenómenos están tomando cada vez más relevancia. Aquí es donde entran las ecuaciones diferenciales definidas en variedades, jugando un papel protagónico en la investigación contemporánea. Según S. Smale [?] algunos de los grandes problemas para investigar en matemáticas en este siglo, están relacionados bien con variedades; bien con Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Ejemplos de estos son: La conjetura de Poincaré, la finitud del número de singularidades relativas en mecánica celeste o la hiperbolicidad de la dinámica 1-dimensional.

Proceder en la lectura de esta monografía supone un conocimiento previo de las ecuaciones diferenciales y la geometría diferencial, además de algunos elementos de topología y análisis. La exposición de los contenidos se hará de manera formal sin pasar al extremo y su presentación es estándar en la matemática contemporánea. Se usará el símbolo \square para denotar fin de la demostración.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Este primer capítulo es como el primer ingrediente de una comida que solo consta de dos ingredientes: Las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas y la variedades diferenciables. Las primeras están definidas en espacios de Banach y las segundas son localmente espacios de Banach.

En este capítulo se expondrá la teoría fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.

1.1. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

1.1.1. CAMPOS VECTORIALES

Definición. Sean \mathbb{E} un espacio de Banach, $W \subset \mathbb{E}$ un abierto contenido en \mathbb{E} . Cualquier aplicación $f : W \rightarrow \mathbb{E}$ es un **campo vectorial** en W . Consideraremos solo los campos de clase C^r con $r \geq 1$ o $r = \infty$. Una **curva integral** de f por un punto $x_0 \in W$ es una aplicación diferenciable $x : (-a, a) \rightarrow W$ con $a > 0$ tal que $x(0) = x_0$ y $x'(t) = f(x(t))$. Asumiendo que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ para algún $n = 1, 2, \dots$; f se puede interpretar como la regla que asigna a cada punto de $x_0 \in W$ el vector $f(x_0)$ con base en x_0 y tangente a la curva $x(t)$ como se ve en la Figura 1.1.

Ejemplo 1.1. Imaginemos un péndulo formado por una cuerda y un disco homogéneo de masa m . Dicha cuerda tiene masa despreciable y es de longitud constante [?]. Además el movimiento del péndulo está contenido en un plano ortogonal al horizonte; la tierra ejerce sobre el disco una fuerza constante y suponemos una fuerza de fricción proporcional a la velocidad del disco con constante de proporcionalidad $k > 0$.

De lo anterior, podemos deducir que la trayectoria del centro del disco está contenida en una circunferencia, y ésta está dada por

$$T(\theta) = (r \operatorname{sen} \theta, -r \operatorname{cos} \theta);$$

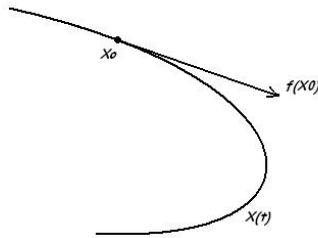


Figura 1.1: Tangente a x en x_0

donde r es la longitud de la cuerda y θ es el ángulo formado en sentido anti-horario por la vertical y la cuerda del péndulo, como se puede ver en la Figura 1.2. La cinemática del movimiento de rotación, nos brinda una relación entre la velocidad angular y la velocidad lineal o del del disco [?] de la siguiente manera:

$$v(t) = r\omega(t) = \theta'(t).$$

Donde v es la velocidad lineal y ω es la velocidad angular. Por lo tanto, sobre le disco se ejerce una fuerza total dada por

$$G := - (kr\theta' + m \operatorname{sen} \theta),$$

por la Ley Fundamental de la Dinámica o Segunda Ley de Newton, podemos igualar el segundo miembro de la ecuación anterior al producto de la masa por la aceleración; esto implica que:

$$- (kr\theta' + m \operatorname{sen} \theta) = mr\omega',$$

esto es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ \omega' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ \frac{-1}{r} \operatorname{sen} \theta - \frac{k}{m} \omega \end{bmatrix}.$$

Designemos con $F(\theta, \omega)$ al segundo miembro de la igualdad anterior y restrinjamos el dominio de F a $W := (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi/2, \pi/2)$. La gráfica del campo vectorial F se puede ver en la Figura 1.3.

1.1.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD

Definición. Una función $f : W \rightarrow \mathbb{E}$ es de **Lipschitz** si existe una constante $K > 0$ tal que para todos $x, y \in W$ se cumple la siguiente desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Además f se dice **localmente Lipschitz** si cada punto de W tiene una vecindad $W_0 \subset W$ tal que la restricción de f a W_0 es una función de Lipschitz. La constante de Lipschitz puede variar con el conjunto W_0 .

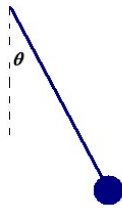


Figura 1.2: Equema de péndulo

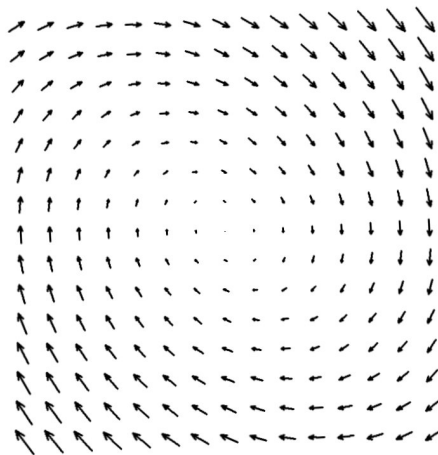


Figura 1.3: Campo vectorial de la ecuacion $x' = F(x)$

Lema 1.1. Si f es una función continuamente diferenciable, es localmente Lipschitz.

Demostración. Como en [?]. Sean $x_0 \in W_0$ y $b > 0$ tal que $\bar{B}_b(x_0) \subset W$. Definamos $W_0 := \bar{B}_b(x_0)$. Esto implica que $Df | W_0$ es una función continua en un compacto. Lo mismo sucederá con la función $|\cdot| \circ Df$ en W_0 . Debido a que W_0 es un compacto, esta última función adquiere un mínimo y un máximo allí. Sea entonces $K > 0$ tal que

$$|Df(x)| \leq K.$$

W_0 es un conjunto convexo [?], esto quiere decir que para todo $x, y \in W_0$ y todo $s \in [0, 1]$, $y + su \in W_0$. Sean $u := z - y$ y

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow W_0 \\ s &\mapsto y + su. \end{aligned}$$

Definamos ahora una función auxiliar ϕ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{E} \\ s &\mapsto \phi(s) = f(g(s)) = f(y + su). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 f(y) - f(z) &= \phi(1) - \phi(0) \\
 &= \int_0^1 \phi'(s) ds \\
 &= \int_0^1 Df(g(s))g'(s) ds \\
 &= \int_0^1 Df(y + su)u ds;
 \end{aligned}$$

tomando valor absoluto a ambos lados, conseguimos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &= \left| \int_0^1 Df(y + su)u ds \right| \\
 &\leq \int_0^1 |Df(y + su)||u| ds \\
 &\leq \int_0^1 K|u| ds \\
 &= K|z - y|.
 \end{aligned}$$

✠

El siguiente teorema, que usaremos como un lema, se conoce como el Criterio de Cauchy para la Convergencia Uniforme y su demostración se puede encontrar en [?].

Lema 1.2 (Teorema de la Convergencia Uniforme). *La sucesión de funciones $g_n : [-a, a] \rightarrow \mathbb{E}$ converge uniformemente en $[-a, a]$ a una función definida en $[-a, a]$ si y solamente si para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N , tal que para todos $m, n \geq N$ y $t \in [-a, a]$ se cumple*

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \epsilon.$$

Que la sucesión de funciones g_n converja uniformemente en I a g , quiere decir que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero N , tal que para todo $n \geq N$, $|g_n(t) - g(t)| \leq \epsilon$ para todo $t \in I$.

Ahora demostraremos el teorema más importante de esta sección. Se conoce como el Teorema Fundamental de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias para sistemas autónomos. Un sistema autónomo es tal, que el campo vectorial no depende del tiempo. Seguiremos las ideas de [?]

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental de las EDO). *Sean \mathbb{E} un espacio vectorial normado, W un subconjunto abierto de \mathbb{E} , $f : W \rightarrow \mathbb{E}$ una función continuamente diferenciable y $x_0 \in W$; entonces existe algún $a > 0$ y una única solución $x : (-a, a) \rightarrow W$, continuamente diferenciable, al problema de valores iniciales*

$$\begin{aligned}
 x(0) &= x_0 \\
 x' &= f(x).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Demostración. Si x es solución al problema de valores iniciales (1.1) también debe ser solución a

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds \tag{1.2}$$

y viceversa. Si x es solución a (1.2), es solución también al problema de valores iniciales (1.1).

La idea de la demostración es definir una sucesión de funciones con base en el hecho anterior y haciendo uso del Criterio de Convergencia Uniforme de Cauchy encontraremos una función que satisfice (1.1). Esta idea es muy importante, puesto que será usada en otras demostraciones.

Sean b, M, W_0 y K como en el Lema 1.1. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < a < \min \left\{ \frac{b}{M}, \frac{1}{K} \right\}$$

y sea también $J := [-a, a]$. Definamos una sucesión de funciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_0(t) &:= x_0 \\ u_1(t) &:= x_0 + \int_0^t f(u_0(s)) ds \\ u_{k+1}(t) &:= x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds. \end{aligned}$$

$u_k(t) \in W_0$ para todo $t \in J$ y todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En efecto: el argumento es por inducción sobre k . Para $k = 0$ es claro ya que $x_0 \in W_0$. Suponiendo para k , demostremos para $k + 1$:

$$\begin{aligned} |u_{k+1} - x_0| &= \left| \int_0^t f(u_k(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(u_k(s))| ds \\ &\leq \int_0^t M ds \\ &\leq M(t - 0) \\ &\leq Ma \\ &< b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el integrando está definido. Ahora probaremos que existe una constante $L \geq 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene:

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq (Ka)^k L.$$

Este hecho también lo demostraremos por inducción sobre k . Sea

$$L = \max\{|u_1 - u_0| \mid |t| \leq a\}.$$

Para $k = 0$ es claro que $|u_1 - u_0| \leq L$; para $k = 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned} |u_2(t) - u_1(t)| &= \left| \int_0^t f(u_1(s)) - f(u_0(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |u_1(s) - u_0(s)| ds \\ &\leq aKL. \end{aligned}$$

Suponagamos ahora para $k \geq 2$ y demostrémoslo para $k + 1$:

$$\begin{aligned}
 |u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\leq \int_0^t |f(u_k(s)) - f(u_{k-1}(s))| ds \\
 &\leq \int_0^t K |u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \\
 &\leq \int_0^t K(aK)^{k-1} L ds \\
 &\leq (aK)(aK)^{k-1} L \\
 &= (aK)^k L.
 \end{aligned}$$

Ahora bién, haciendo $\alpha = aK < \frac{1}{K}K < 1$, obtenemos que para cualesquiera $r > s > N$

$$|u_r(t) - u_s(t)| = |u_{s+p}(t) - u_s(t)| \quad \text{para algùn } p = 1, 2, \dots$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 |u_r(t) - u_s(t)| &= \left| \sum_{\eta=s}^{s+p-1} (u_{\eta+1}(t) - u_{\eta}(t)) \right| \\
 &\leq \sum_{\eta=N}^{\infty} |u_{\eta+1}(t) - u_{\eta}(t)| \\
 &\leq \sum_{\eta=N}^{\infty} \alpha^{\eta} L \\
 &< \epsilon
 \end{aligned}$$

para cualquier $\epsilon > 0$ prefijado siempre y cuando N sea lo suficientemente grande. A esta altura de la demostración, hemos probado que la sucesión u_k esta bién definida y es de Cauchy. Estamos pues, bajo las hipótesis del Lema 1.2. Por lo tanto, la sucesión u_k converge uniformemente a una función $x : J \rightarrow \mathbb{E}$. De la identidad

$$u_{k+1} = x_0 + \int_0^t f(u_k(s)) ds,$$

podemos encontrar x tomando límite a ambos lados de la igualdad anterior. Lo que implica que

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f(u_k(s)) ds && \text{por definición de } x \\
 &= x_0 + \int_0^t \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k(s)) \right) ds && \text{por continuidad uniforme} \\
 &= x_0 + \int_0^t f(x(s)) ds && \text{por continuidad de } f.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x : J \rightarrow \mathbb{E}$ satisface (1.2) y en consecuencia, x satisface (1.1). Hemos probado así la primera parte de la demostarción. La existencia. Debemos demostrar ahora la unicidad. Para esto, suponagamos $x, y : J \rightarrow W$ dos soluciones al problema de valores iniciales (1.1). Sea $Q := \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|$. Este

máximo es adquirido en algún punto $t^* \in J$. Entonces

$$\begin{aligned}
 Q &= |x(t^*) - y(t^*)| \\
 &= \left| \int_0^{t^*} (x'(s) - y'(s)) ds \right| \\
 &\leq \int_0^{t^*} |f(x(s)) - f(y(s))| ds \\
 &\leq \int_0^{t^*} |x(s) - y(s)| ds \\
 &\leq aKQ
 \end{aligned}$$

Como $aK < 1$, entonces la desigualdad $Q \leq aKQ$ es imposible a menos que Q fuera igual a cero. Es decir $x = y$. \blacksquare

Ejemplo 1.2. Retomemos el Ejemplo 1.1. Como F y W cumplen las hipótesis de Teorema 1.1, entonces, existe una única solución, $x(t) = (\theta(t), \omega(t))$, que satisface el problema de valores iniciales $x(0) = (\theta_0, \omega_0)$ y $(\theta', \omega') = F(\theta, \omega)$ con (θ_0, ω_0) prefijado en W . Una solución de la ecuación $x' = F(x)$ lucirá como en la Figura 1.4. El comportamiento independiente de θ y ω se puede ver en la Figura 1.5. En la que el eje horizontal representa el tiempo.

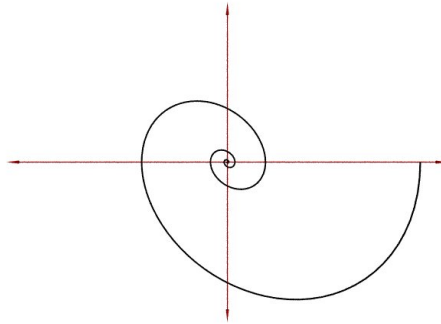


Figura 1.4: Solución a la ecuación $x' = F(x)$

1.2. PROPIEDADES POSTERIORES

Proposición 1.1. *Sea f como en el Teorema 1.1. Dos soluciones diferentes de $x' = f(x)$ no se pueden interceptar. Además, si una solución de esta ecuación se corta a sí misma, ésta debe ser periódica.*

Demostración. Sean $\phi : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\psi : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos soluciones de $x' = f(x)$ tales que $\phi(t_1) = \psi(t_2)$. Definiendo $\chi(t) := \psi(t_2 - t_1 + t)$, encontramos que:

$$\begin{aligned}
 \chi'(t) &= \psi'(t_2 - t_1 + t) \\
 &= f(\psi(t_2 - t_1 + t)) \\
 &= f(\chi(t)),
 \end{aligned}$$

es decir, χ es solución de la ecuación diferencial $x' = f(x)$. Pero $\chi(t_1) = \psi(t_2) = \phi(t_1)$. Por el Teorema 1.1, χ y ϕ coinciden cerca de t_1 ; por lo tanto $\phi = \psi$.

Supongamos ahora que una solución ϕ , del problema de valores iniciales se corta a sí misma. En otras palabras, existe $t_1 \in I$, tal que $\phi(t_1) = \phi(t_1 + \omega_0)$. Definamos $\psi(t) := \phi(t + \omega_0)$ como $\phi(t_1) = \psi(t_1)$. Entonces $\phi = \psi$, ya que ψ también satisface $x' = f(x)$. Deducimos, entonces, que si una curva se corta a sí misma, necesariamente ésta debe ser periódica. \boxtimes

El Teorema 1.1 nos dice que existe una única solución al problema de valores iniciales (1.1) en algún intervalo $(-a, a)$, pero no nos dice qué tan grande se puede tomar este intervalo. La verdad es que existe un intervalo maximal en donde la solución está definida.

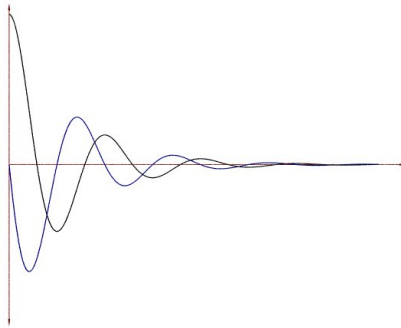


Figura 1.5: Comportamiento independiente de θ y ω

Ejemplo 1.3. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1^2 & x_1(0) &= 1 \\ x_2' &= x_2 + x_1^{-1} & x_2(0) &= 1. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Integrando la primera ecuación por variables separables obtenemos que $x_1(t) = (1 - t)^{-1}$. La segunda ecuación queda convertida en una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea así:

$$x_2'(t) - x_2(t) = 1 - t.$$

Por cualquier método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales podemos llegar a que $x_2(t) = e^t + t$, de donde

$$(x_1(t), x_2(t)) = ((1 - t)^{-1}, e^t + t)$$

La gráfica de esta solución se ve en la Figura 1.6. Es claro que para $J = [-a, a]$ si $0 < a < 1$, la solución es continuamente diferenciable. Pero esto se puede extender puesto que para $(-\infty, 1)$ la solución sigue teniendo esta propiedad en ese intervalo. Este es precisamente el intervalo maximal de esta solución para el punto $(1, 1)$.

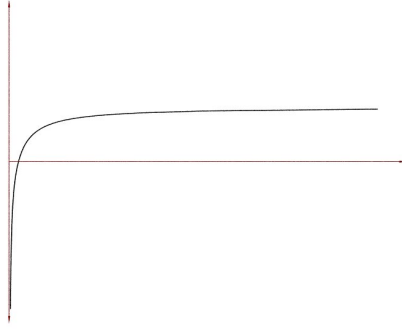


Figura 1.6: Solución maximal a la ecuación (1.3)

Lema 1.3. Sean W un subconjunto abierto de \mathbb{E} que contiene a x_0 , f una función continuamente diferenciable y $u_1 : I_1 \rightarrow W$ y $u_2 : I_2 \rightarrow W$ soluciones del problema de valores iniciales (1.1) en los intervalos I_1 e I_2 respectivamente. Bajo estas hipótesis, si $t_0 \in I = I_1 \cap I_2$, $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in I$.

Demostración. Como u_1 y u_2 son dos soluciones al problema de valores iniciales (1.1) y en virtud de la Proposición 1.1, u_1 debe coincidir con u_2 en una venciencia de t_0 .

Sea \mathcal{J} la unión de todos estos intervalos donde u_1 y u_2 coinciden. Entonces \mathcal{J} es el intervalo más grande en donde estas soluciones coinciden. Claramente $\mathcal{J} \subset I$. Vamos a probar ahora, la contención $I \subset \mathcal{J}$. En caso de que esta contención no se tuviera, \mathcal{J} sería un subconjunto propio de I . Haciendo uso de este hecho y de que I e \mathcal{J} son intervalos, existe un $t_1 \in \partial(\mathcal{J})$ que está en I . Por la continuidad de u_1 y u_2 , los siguientes límites existen y son iguales:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} u_2(t) = u_0$$

Aplicando nuevamente el Teorema 1.1, encontramos que u_1 y u_2 deben coincidir en algún intervalo $I_0 = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ que a su vez debe estar contenido en I . Entonces, u_1 y u_2 deben coincidir en el intervalo $\mathcal{J} \cup I_0 \subset I$. Esto es una contradicción gracias a la maximalidad de \mathcal{J} . Por lo tanto, $I = \mathcal{J}$, y u_1 y u_2 coinciden en $I = I_1 \cap I_2$. \blacksquare

Teorema 1.2. Sea W un subconjunto abierto de un espacio de Banach \mathbb{E} y supongamos que $f \in C^1(W)$. Entonces para cada punto x_0 de W existe un intervalo abierto maximal $I(x_0)$ en el que el problema de valores iniciales (1.1) tiene una única solución x .

Demostración. Por el Teorema 1.1 el problema de valores iniciales 1.1 tiene una única solución en algún intervalo abierto $(-a, a)$. Definamos (α, β) como la unión de todos los intervalos abiertos I , tales que el problema de valores iniciales 1.1 tiene una solución en I . Definimos la función $x(t)$ en (α, β) del siguiente modo: Dado un $t \in (\alpha, \beta)$ existe un I que contiene a este t tal que el problema de valores iniciales (1.1) tiene una solución $u(t)$ en este I . Para este $t \in (\alpha, \beta)$ definimos $x(t) = u(t)$.

Esta x está bien definida. En efecto, si $t \in I_1 \cap I_2$ donde las I_1 e I_2 son dos intervalos abiertos tales que el problema de valores iniciales (1.1) tiene soluciones u_1 y u_2 en I_1 e I_2 , respectivamente. Por el Lema 1.3, u_1 y u_2 coinciden en $I_1 \cap I_2$.

Esta x así definida, es una solución del problema de valores iniciales (1.1) en (α, β) . (α, β) es claramente abierto ya que él es unión de intervalos abiertos. \blackboxtimes

Vamos a dar ahora una demostración alternativa que usa el Lema de Zorn [?].

Demostración. Sea Φ el conjunto de todas las soluciones al problema de valores iniciales (1.1). En este conjunto establecemos una relación de orden parcial de la siguiente manera: $\phi \leq \psi$ si ψ es una extensión de ϕ ; sea (ϕ_i) una cadena en Φ . Vamos a encontrar una cota superior a esta cadena de la siguiente manera: La función $\tilde{\phi}$ definida a continuación nos servirá.

$$\tilde{\phi} : \bigcup_{\phi_i \in \Phi} (\text{dom}(\phi_i)) \rightarrow W$$

$$s \mapsto \phi_i(s)$$

siempre y cuando $s \in \text{dom}(\phi_i)$ para algún i en los subíndices de la cadena. Esta función está bien definida por el Lema 1.3 y es una cota superior para esta cadena. Por el lema de Zorn este conjunto Φ tiene elementos maximales y por el Teorema 1.1 este intervalo es único. \blackboxtimes

Definición. El intervalo (α, β) del Teorema 1.2 es llamado el **intervalo maximal de existencia** del problema de valores iniciales (1.1).

Teorema 1.3. Sea W un subconjunto abierto de un espacio de Banach \mathbb{E} que contiene a x_0 ; sea $f \in C^1(W)$ y sea (α, β) el intervalo maximal de existencia del problema de valores iniciales (1.1). Supongámos además que $\beta < \infty$. Entonces dado cualquier conjunto compacto $K \subset W$, existe un $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$.

Demostración. Ya que f es una función continua en un conjunto compacto K , existe un número positivo M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in K$. Sea $x(t)$ la solución del problema de valores iniciales (1.1) en su intervalo maximal de existencia (α, β) , supongamos que $\beta < \infty$ y que $x(t) \in K$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Primero mostraremos que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} x(t)$ existe. Si $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$ entonces

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x(s))| ds \leq M|t_2 - t_1|$$

Por lo tanto, cuando t_1 y t_2 se aproximan a β por la izquierda entonces

$$|x(t_2) - x(t_1)| \rightarrow 0.$$

Como estamos en un espacio métrico completo, el límite anterior existe. Sea este x_1 . La compacidad de K nos garantiza que x_1 está en $K \subset \mathbb{E}$. Definamos ahora una función $u(t)$ en $(\alpha, \beta]$ así

$$u(t) := \begin{cases} x(t) & \text{para } t \in (\alpha, \beta) \\ x_1 & \text{para } t = \beta. \end{cases}$$

Esta $u(t)$ así definida es diferenciable en $(\alpha, \beta]$. Por otro lado

$$u(t) = x_0 + \int_0^t f(u(s)) ds$$

lo cual implica que $u'(\beta) = f(u(\beta))$, es decir, $u(t)$ es una solución al problema de valores iniciales (1.1) en (α, β) . La función $u(t)$ es llamada la continuación de la solución $x(t)$ en $(\alpha, \beta]$. Ya que $x_1 \in W$, por el Teorema 1.1, el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(\beta) &= x_1 \end{aligned}$$

tiene una única solución $x_1(t)$ en un intervalo $(\beta - a, \beta + a)$ para algún $a > 0$. Por el lema 1.3 $x_1(t) = u(t)$ en $(\beta - a, \beta)$ y $x_1(\beta) = u(\beta) = x_1$. Por lo tanto, si definimos

$$v(t) := \begin{cases} u(t) & \text{para } t \in (\alpha, \beta] \\ x_1(t) & \text{para } t \in [\beta, \beta + a), \end{cases}$$

$v(t)$ es una solución al problema de valores iniciales (1.1) en $(\alpha, \beta + a)$. Pero esto contradice la maximalidad de (α, β) . \times

El enunciado del teorema anterior se puede resumir diciendo que las soluciones “escapan” de compactos, siempre y cuando el intervalo maximal esté acotado superiormente. Un resultado similar, cuya demostración también es similar es el siguiente:

Corolario 1.1. *Sea W un subconjunto abierto de un espacio de Banach \mathbb{E} que contiene a x_0 , sea $f \in C^1(W)$ y sea (α, β) el intervalo maximal de existencia del problema de valores iniciales (1.1). Supongámonos además que $\alpha > -\infty$. Entonces, dado cualquier conjunto compacto $K \subset W$, existe un $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $x(t) \notin K$.*

Otras dos consecuencias del Teorema 1.3 se enuncian a continuación. La primera no es más que la contrarrecíproca de este teorema. La segunda nos dice que las soluciones del problema de valores iniciales (1.1) tienden a la frontera de W cuando el tiempo tiende hacia el infinito. Estos corolarios al Teorema 1.3 serán de suma importancia cuando estemos tratando campos vectoriales definidos sobre variedades compactas, como lo son la esfera o el toro.

Corolario 1.2. *Sean W un subconjunto abierto de \mathbb{E} con $x_0 \in W$, $f \in C^1(E)$ y $[0, \beta)$ el intervalo maximal semiabierto derecho de la solución $x(t)$ del problema de valores iniciales (1.1). Supongámonos además que existe un conjunto compacto $K \subset W$ tal que $x([0, \beta)) \subset K$. Entonces $\beta = \infty$.*

Claramente este corolario tiene un enunciado dual para el intervalo semiabierto izquierdo $(\alpha, 0]$

Corolario 1.3. *Bajo las hipótesis del Teorema 1.3. Si $\beta < \infty$ y si $\lim_{x \rightarrow \beta^-} x(t)$ cuando $x \rightarrow \beta^-$ existe, entonces:*

$$x_1 := \lim_{x \rightarrow \beta^-} x(t) \in \partial(W).$$

Demostración. Sea $u(t)$ la extensión de x a $[0, \beta]$ y sea $K := u([0, \beta])$. K es compacto por ser la imagen de un compacto por una función continua. Si $x_1 \in W$ entonces $K \subset W$. Por el Teorema 1.3 existe un $t_1 \in (0, \beta)$ tal que $x(t_1) \notin K$. Esto es una contradicción y por lo tanto $x_1 \notin W$. Como $x(t) \in W$ para todo $t \in [0, \beta)$. Esto quiere decir que x_1 no tiene mas opción que pertenecer a \bar{W} entonces $x_1 \in (\bar{W} - W) = \partial W$. \times

Vamos a estudiar ahora la continuidad en las condiciones iniciales. Para poder garantizar lo anterior, necesitamos unos hechos cuyas demostraciones siguen las ideas de [?].

Lema 1.4. *Sea $u : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa. Supongámonos que $C \geq 0$ y $K \geq 0$ son tales que*

$$u(t) \leq C + \int_0^t Ku(s)ds$$

para todo $t \in [0, \alpha]$. Entonces

$$u(t) \leq Ce^{Kt}$$

para todo $t \in [0, \alpha]$.

Demostración. Supongamos primero que $C > 0$, sea

$$U(t) := C + \int_0^t Ku(s)ds > 0;$$

entonces $u(t) \leq U(t)$. Diferenciado U encontramos que $U'(t) = Ku(t)$

$$\frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{Ku(t)}{U(t)} \leq \frac{KU(t)}{U(t)} = K.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(\log U(t)) \leq K,$$

integrando:

$$\log U(t) \leq \log U(0) + Kt$$

Aplicamos exponencial en ambos lados de la desigualdad anterior, obteniendo así:

$$u(t) \leq U(t) \leq Ce^{Kt}.$$

Si $C = 0$, aplicamos el argumento anterior a la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. Esta sucesión es de términos positivos y tiende a 0. Esto prueba el lema. \blacktimes

El anterior lema se conoce con el nombre de Desigualdad de Grownwall. El siguiente lema es una desigualdad que será usada para la demostración de la continuidad en las condiciones iniciales.

Aclaración. Notaremos con $x(t, y)$ la solución a la ecuación diferencial $x' = f(x)$, con la condición inicial $x(0) = y$. Y notaremos con $x^{t_0}(t, y)$ la solución a la ecuación diferencial $x' = f(x)$ con $x(t_0) = y$.

Lema 1.5. Sean $W \subset \mathbb{E}$ un subconjunto abierto, $f : W \rightarrow \mathbb{E}$ con constante de Lipschitz K . Sean $x^{t_0}(t, y)$ y $x^{t_0}(t, x_0)$ soluciones a $x' = f(x)$ en el intervalo cerrado $[t_0, t_1]$. Entonces, para todo $t \in [t_0, t_1]$:

$$|x^{t_0}(t, y) - x^{t_0}(t, x_0)| \leq |y - x_0|e^{K(t)}.$$

Demostración. Definamos

$$v(t) := |x^{t_0}(t, y) - x^{t_0}(t, x_0)|.$$

Puesto que

$$x^{t_0}(t, y) - x^{t_0}(t, x_0) = y - x_0 + \int_{t_0}^t [f(x^{t_0}(t, y)) - f(x^{t_0}(t, x_0))] ds,$$

tenemos

$$v(t) \leq v(t_0) + \int_{t_0}^t Kv(s)ds.$$

Aplicamos el Lema 1.5 a la función $u(t) := v(t_0 + t)$ para obtener:

$$v(t) \leq v(t_0)e^{K(t-t_0)},$$

lo cual es la conclusión de la proposición. \blacktimes

Lema 1.6. Sea $f : W \rightarrow E$ una función localmente Lipschitz y $K \subset W$ un conjunto compacto. Entonces $f|_K$ es Lipschitz.

Demostración. Supongamos lo contrario. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar x_n y y_n tales que

$$|f(x_n) - f(y_n)| > n|x_n - y_n|.$$

Como K es compacto, podemos escoger dos subsucesiones de $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ tales que $x_{n_k} \rightarrow x^* \in K$ y $y_{n_k} \rightarrow y^* \in K$. Ahora bien, como

$$\begin{aligned} |x^* - y^*| &< n_k^{-1}|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \\ &\leq n_k^{-1}(|f(x_{n_k})| + |f(y_{n_k})|) \\ &= n_k^{-1}2M, \end{aligned}$$

$x^* = y^*$ cuando $n_k \rightarrow \infty$. Por hipótesis, podemos escoger una vecindad de x^* lo suficientemente pequeña tal que para todo x_{n_k} y y_{n_k} en esa vecindad exista un $n_k > K > 0$ para el cual se verifica la desigualdad

$$\begin{aligned} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| &\leq K|x_{n_k} - y_{n_k}| \\ &\leq n_k^{-1}|x_{n_k} - y_{n_k}| \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. ✘

Teorema 1.4 (Continuidad en las Condiciones Iniciales). Sea f una función continuamente diferenciable y sea $x^{t_0}(t, y_0)$ definida en $[t_0, t_1]$. Entonces existe una vecindad $U \subset \mathbb{E}$ de y_0 y una constante $K > 0$ tal que si $z_0 \in U$, existe $x^{t_0}(t, z_0)$ también definida en $[t_0, t_1]$ tal que para todo $t \in [t_0, t_1]$ satisface

$$\begin{aligned} |x^{t_0}(t, y_0) - x^{t_0}(t, z_0)| &\leq K|z_0 - y_0|e^{K(t-t_0)} \quad y \\ \lim_{y \rightarrow x_0} x(t, y) &= x(t, x_0) \end{aligned}$$

uniformemente para todo $t \in [t_0, t_1]$.

Demostración. Por compacidad de $[t_0, t_1]$, existe un $\epsilon > 0$ tal que $x \in W$ siempre que $|x - x^{t_0}(t, y_0)| \leq \epsilon$. El conjunto de tales puntos es un subconjunto compacto A de W . Por lo tanto $f|_A$ es una función de Lipschitz, con constante de Lipschitz k .

Sea $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \min(\epsilon, \epsilon e^{-k|t_1-t_0|})$. Podemos afirmar que si $|z_0 - y_0| < \delta$, entonces existe $x^{t_0}(t, z_0)$ definida en $[t_0, t_1]$. En efecto: Primero que todo $z_0 \in W$ puesto que $|z_0 - y_0| < \epsilon$. Por lo tanto, existe una solución en el intervalo semiabierto máximo derecho $[t_0, \beta)$. Debemos probar que $\beta > t_1$. Para esto supongamos que $\beta \leq t_1$. En tal caso, por la Proposición 1.5, para todo $t \in [t_0, \beta)$

$$\begin{aligned} |x^{t_0}(t, z_0) - x^{t_0}(t, y_0)| &\leq |z_0 - y_0|e^{k|t_1-t_0|} \\ &\leq e^{k|t_1-t_0|} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $x^{t_0}(t, z_0)$ pertenece enteramente al conjunto compacto A . Por el Teorema 1.3 $[t_0, \beta)$ no puede ser el intervalo maximal semiabierto derecho. Por lo tanto $x^{t_0}(t, z_0)$ está definido en todo $[t_0, t_1]$. La desigualdad se sigue inmediatamente de la Proposición 1.5 y el límite se deduce de la desigualdad. ✘

Definición. Sean \mathbb{E} , f y W como en el Teorema 1.1. Dado $x \in W$, existe por el Teorema 1.2, un intervalo maximal $I(x) \subseteq \mathbb{R}$ y una única solución, ϕ , del problema de valores iniciales (1.1). Para indicar la dependencia de $\phi(t)$ en x escribiremos

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(t, x) \quad \text{con} \\ \phi(0, x) &= x.\end{aligned}$$

Sea $\Omega = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \times W / t \in I(x) \}$, la función

$$\begin{aligned}\phi &: \Omega \rightarrow W \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x)\end{aligned}$$

será el **flujo** de la ecuación diferencial $x' = f(x)$. También podemos escribir $\phi_t(x)$ en cambio de $\phi(t, x)$.

Teorema 1.5. *La función ϕ tiene la siguiente propiedad:*

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$$

en el sentido que si uno de los dos lados está definido, el otro también y son iguales.

Demostración. Como en [?]. Supongamos primero que $s, t > 0$ y que $\phi_s(\phi_t(x))$ está definido. Esto significa que $t \in I(x)$ y que $s \in I(\phi_t(x))$. Supongamos $I(x) = (\alpha, \beta)$. Entonces $\alpha < t < \beta$; primero que todo mostraremos que $\beta > s + t$. Definamos para este fin la siguiente función

$$\begin{aligned}y &: (\alpha, s + t] \rightarrow W \\ r &\mapsto y(r) = \begin{cases} \phi(r, t) & \text{si } \alpha < r \leq t \\ \phi(r - t, \phi_t(x)) & \text{si } t \leq r \leq t + s. \end{cases}\end{aligned}$$

Entonces y es una solución y $y(0) = x$. Por lo tanto $s + t \in I(x)$. Además

$$\phi_{s+t}(x) = y(s + t) = \phi_s(\phi_t(x)).$$

El resto de la demostración sigue las mismas ideas. ✠

Las demostraciones de los dos teoremas siguientes siguen las ideas de [?]

Teorema 1.6. Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R} \times W$ y $\phi : \Omega \rightarrow W$ es una función continua.

Demostración. Sea $(t_0, x_0) \in \Omega$. Podemos tomar $t \geq 0$ y $\phi(\cdot, x_0)$ definida en $[0, t_0]$ y por lo tanto en un intervalo $[-\epsilon, t_0 + \epsilon]$ con $\epsilon > 0$. Por el Teorema 1.4 existe una vecindad $U \subset W$ de x_0 , tal que la curva solución $\phi(\cdot, x)$ está definida en $[-\epsilon, t_0 + \epsilon]$ para todo $x \in U$. Por lo tanto $(-\epsilon, t_0 + \epsilon) \times U \subset \Omega$, lo que prueba que Ω es abierto.

Por el mismo teorema ϕ es continua, además diferenciable en G , donde $G = (-\epsilon, t_0 + \epsilon) \times U$. Pero (t_0, x_0) es un punto arbitrario de Ω y por lo tanto ϕ es continuamente diferenciable en Ω . ✠

Teorema 1.7. *La función ϕ_t envía U sobre un conjunto V en el que ϕ_{-t} está definida y ϕ_{-t} envía V sobre U . La función compuesta $\phi_{-t} \circ \phi_t$ es la identidad en U y la función compuesta $\phi_t \circ \phi_{-t}$ es la identidad en V .*

Demostración. Sea $x_0 \in U$ y fijemos $t_0 \in I(x_0)$ con $t_0 \geq 0$ y $y_0 = \phi_{t_0}(x_0)$. $\phi(\cdot, x_0)$ está definida en $[0, t_0]$. Supongamos que $-t_0 \leq s \leq 0$, entonces $s + t_0 \in [0, t_0]$. Definamos la siguiente función:

$$h : [-t_0, 0] \rightarrow W$$

$$s \mapsto \phi(s + t_0, x_0) = \phi_s(y_0).$$

esta función es una solución a $x' = f(x)$ tal que $h(0) = y_0$. Esto quiere decir que $-t_0 \in I(y_0)$. Por lo tanto ϕ_t está definida en $\phi_t(U) = V$. La afirmación acerca de las compuestas es obvia gracias al Teorema 1.5. Para demostrar que V es abierto, sea $V^* \supset V$ el subconjunto mas grande de W en el que ϕ_{-t} está definida. V^* es abierto por lo que Ω es abierto, y $\phi_{-t} : V^* \rightarrow W$ es continua porque ϕ también lo es. Por lo tanto, la imagen inversa del conjunto U bajo la función ϕ_{-t} es abierta. Pero esta imagen inversa es precisamente V . \times

El siguiente teorema es una recopilación del capítulo.

Proposición 1.2. *Si $\phi(\cdot, x)$ está definida en \mathbb{R} para todo $x \in W$, entonces, ϕ es un sistema dinámico. Es decir:*

1. $\phi \in C^1(W)$
2. $(\mathfrak{A}_\phi, \circ, \phi_0)$ es un grupo abeliano de difeomorfismos; donde

$$\mathfrak{A}_\phi := (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$$

y

$$\circ : \mathfrak{A}_\phi \times \mathfrak{A}_\phi \rightarrow \mathfrak{A}_\phi$$

$$(\phi_t, \phi_s) \mapsto \phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}.$$

 VARIEDADES DIFERENCIABLES

El segundo ingrediente de nuestra “comida” está expuesto en este capítulo. Las variedades diferenciales son localmente espacios de Banach y estos se manejan de manera transversal en esta monografía. Aprovechando lo anterior, lo engorroso del lenguaje de las variedades diferenciales se subsanará en el tercer y último capítulo. Por ahora usaremos el lenguaje de variedades, en el que las cartas están notadas con letras minúsculas griegas como ϕ , ψ o θ . Las definiciones y propiedades que se expondrán en este capítulo siguen las ideas de [?].

2.1. DEFINICIONES Y EJEMPLOS

2.1.1. VARIEDADES TOPOLÓGICAS

Definición. Las siguientes son unas definiciones relativas a variedades topológicas:

1. Un **encaje** de un espacio topológico X en un espacio topológico Y es una función continua y uno a uno que define un homeomorfismo de X sobre $f(X) \subset Y$.
2. Una familia \mathfrak{F} de conjuntos del espacio topológico X se dice **localmente finita** sii cada punto de X tiene una vecindad que interseca a lo mas un número finito de miembros de \mathfrak{F} .
3. Sean \mathfrak{F} y \mathfrak{G} dos cubrimientos del espacio X . Decimos que \mathfrak{F} es un **refinamiento** de \mathfrak{G} y lo notamos $\mathfrak{F} < \mathfrak{G}$, sii todo miembro de \mathfrak{F} está contenido en algún miembro de \mathfrak{G} .
4. Un espacio topológico X es **paracompacto** sii todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito para X .
5. Sea \mathbb{E} un espacio de Banach. Una **\mathbb{E} -variedad topológica** o una **variedad modelada en \mathbb{E}** es un conjunto no vacío, paracompacto y de Hausdorff X , tal que para todo $x \in X$ existe un $U \in \mathcal{V}(x)$ homeomorfa a un conjunto abierto de \mathbb{E} . Una vecindad de estas es una **vecindad coordinada** de x . Cuando el espacio $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, decimos que X es una **variedad topológica n -dimensional**.

Proposición 2.1. *Un conjunto no vacío, paracompacto y de Hausdorff, es una \mathbb{E} -variedad topológica sii todo punto $x \in X$ tiene una vecindad abierta V en X , tal que ella es homeomorfa a \mathbb{E} .*

Demostración. Ya que \mathbb{E} es un subconjunto abierto de sí mismo, la suficiencia de la proposición es obvia. Probemos entonces la necesidad.

Para esto, sea x un punto cualquiera en la \mathbb{E} -variedad topológica X . Por la definición, existe una vecindad U de x junto con una inmersión

$$i : U \rightarrow \mathbb{E}$$

tal, que $i(U)$ es un subespacio abierto de \mathbb{E} . Sea $y = i(x)$. Entonces $i(U)$ es una vecindad abierta de y en \mathbb{E} . Por lo tanto, existe un $\delta > 0$ tal que la bola abierta $B_\delta(y)$ está contenida en $i(U)$. Sea $V = i^{-1}[B_\delta(y)]$. Entonces V es una vecindad abierta de x en X que es homeomorfa a \mathbb{E} . El homeomorfismo que envía a $B_\delta(y)$ en \mathbb{E} es

$$B_\delta(y) \rightarrow \mathbb{E}$$

$$x \mapsto \frac{\delta x}{\sqrt{\delta^2 - \|x\|^2}}$$

✠

La proposición anterior nos muestra que una \mathbb{E} -variedad topológica se comporta localmente como \mathbb{E} .

Proposición 2.2. *Toda vecindad Y de un punto x de una \mathbb{E} -variedad topológica X , contiene una vecindad V de x en X , tal que ella es homeomorfa a $\bar{B}_1(0)$, donde $\bar{B}_1(0)$ es la bola cerrada de radio 1 y centro en 0 definida con la norma de \mathbb{E} .*

Demostración. Ya que X es una \mathbb{E} -variedad topológica, existe una vecindad abierta U de x en X junto con una inmersión $i : U \rightarrow \mathbb{E}$ tal que $i(U)$ es un subespacio abierto de \mathbb{E} . Sea $y = i(x)$ y

$$W = U \cap \text{int}(Y).$$

Entonces, $i(W)$ es una vecindad abierta alrededor de y en \mathbb{E} . Por lo tanto, existe un $\delta > 0$ tal que la bola cerrada

$$\bar{B}_\delta(y)$$

está contenida en $i(W)$. Sea $V = i^{-1}[\bar{B}_\delta(y)]$. Entonces V es una vecindad de x en X homeomorfa a $\bar{B}_1(0)$. ✠

Corolario 2.1. *En el caso en que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, toda variedad topológica n -dimensional es localmente compacta.*

Demostración. La demostración de este corolario se deduce inmediatamente de la proposición anterior y del hecho de que en \mathbb{R}^n , $\bar{B}_1(0)$ es compacta. ✠

Ejemplo 2.1. Los siguientes ejemplos son de \mathbb{E} -variedades topológicas:

1. *El espacio \mathbb{E} .* Para cada punto en este espacio podemos tomar como vecindad a él mismo y como homeomorfismo la función idéntica.

2. Cualquier subconjunto no vacío y abierto Y de una \mathbb{E} -variedad topológica X es una \mathbb{E} -variedad topológica. Para cada punto $x \in Y$ existe una vecindad V en X , tal que ella es homeomorfa a un subconjunto abierto de \mathbb{E} . Tomemos como vecindad para Y el conjunto $V \cap Y$. Este conjunto es claramente homeomorfo a un conjunto abierto en \mathbb{E} bajo la función inclusión.
3. El producto topológico de una \mathbb{E} -variedad topológica y una \mathbb{B} -variedad topológica es una $(\mathbb{E} \times \mathbb{B})$ -variedad topológica. Si tomamos una vecindad V para x en X y una vecindad U para y en Y , la vecindad $U \times V$ nos sirve como vecindad coordinada para (x, y) en $X \times Y$ con el producto de los homeomorfismos de $U \rightarrow \mathbb{E}$ y $V \rightarrow \mathbb{B}$ como el homeomorfismo que nos hace a $U \times V$ una $(\mathbb{E} \times \mathbb{B})$ -variedad topológica.

2.1.2. ESTRUCTURAS DIFERENCIABLES

Definición. Las siguientes definiciones son relativas a cartas locales, donde X denota una \mathbb{E} -variedad topológica.

1. Una **carta** en X es un encaje

$$\phi : U \rightarrow \mathbb{E}$$

de un subconjunto abierto no vacío U de X a \mathbb{E} , tal que $\phi(U)$ es un subconjunto abierto de \mathbb{E} .

2. El subconjunto abierto U de X es el **dominio** de la carta ϕ , en símbolos,

$$U = \text{dom}(\phi).$$

La **imagen** de ϕ se define y será notada por

$$\text{img}(\phi) = \phi(U).$$

Estos conceptos de dominio e imagen no son exclusivos de las cartas y pueden ser generalizados de manera natural a cualquier función.

3. Para todo entero $i = 1, 2, \dots$, sea

$$p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (t_1, \dots, t_n) \mapsto p_i(t_1, \dots, t_n) = t_i.$$

Esta función p_i es la **proyección natural** de la i -ésima coordenada de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, cuando $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$, $\phi_i = p_i \circ \phi$ es la i -ésima función coordenada con respecto a la carta ϕ . Por su parte $t_i = \phi_i(x)$ es la i -ésima coordenada del punto x con respecto a la carta ϕ . Los n números reales (t_1, \dots, t_n) son las coordenadas locales del punto x con respecto a ϕ . En una \mathbb{E} -variedad topológica, podemos decir que $\phi(x)$ son las coordenadas del punto x en X con respecto a ϕ .

Puede existir la posibilidad de que un punto $x \in X$ esté contenido en la intersección de los dominios de dos cartas diferentes. En este caso, es de vital importancia preguntarse cuál es la relación entre estas dos coordenadas. Para eso necesitamos una definición preliminar.

Definición. Un **atlas de clase C^k** en la \mathbb{E} -variedad topológica X es una colección α de cartas en X que satisfacen las siguientes dos propiedades.

1. El dominio de las cartas en α cubren la \mathbb{E} -variedad topológica.
2. Para cualesquiera dos cartas $\phi : U \rightarrow \mathbb{E}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{E}$ en α con $U \cap V \neq \emptyset$ la función

$$[\phi, \psi] : \phi(U \cap V) \rightarrow \mathbb{E}$$

$$t \mapsto \psi[\phi^{-1}(t)]$$

para todo $t \in \phi(U \cap V)$ es de clase C^k .

La función $[\phi, \psi]$ es la **función conectora** de las cartas ϕ y ψ . Ya que $[\phi, \psi][\phi(x)] = \psi(x)$, la función $f_{(\phi, \psi)}$ es también la transformación del cambio de coordenadas del sistema ϕ al ψ .

Puesto que la función $[\phi, \psi]$ es por lo menos continua siempre, tenemos la siguiente propiedad.

Proposición 2.3. *Toda \mathbb{E} -variedad topológica tiene un atlas de clase C^0 .*

Vamos a notar con el símbolo $\mathfrak{A}^k(X)$ al conjunto de todos los atlas de clase C^k . Si $k \neq 0$ este conjunto puede ser vacío. Definimos en este conjunto una relación de equivalencia de la siguiente manera $\alpha \sim \beta$ sii $(\alpha \cup \beta) \in \mathfrak{A}^k(X)$.

Proposición 2.4. *La relación definida anteriormente, es una relación de equivalencia.*

Demostración. La reflexividad y la simetría son evidentes; falta demostrar la transitividad. Para esto supongamos que $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$. Sean $\phi, \psi \in \alpha \cup \gamma$, queremos ver que la segunda condición de la definición de atlas se cumple, puesto que la primera es de trivial demostración. Para eso escogamos $\theta \in \beta$. Ahora bien por ser θ un encaje, podemos hacer

$$\phi \circ \psi^{-1} = (\phi \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ \psi^{-1}).$$

Por lo tanto $\phi \circ \psi$ es de clase C^k y por ende $\alpha \cup \gamma$ es un atlas. ✠

Definición. Los elementos del conjunto $\mathfrak{A}^k(X) / \sim$ son llamados **estructuras diferenciables de clase C^k** en la \mathbb{E} -variedad topológica X .

La siguiente proposición es evidente gracias a la continuidad inherente de los atlas.

Proposición 2.5. *Cualquier par de atlas de clase C^0 en una \mathbb{E} -variedad topológica son equivalentes.*

De las Proposiciones 2.3 y 2.5 se deduce el siguiente corolario

Corolario 2.2. *Existe una única estructura de clase C^0 en una \mathbb{E} -variedad topológica.*

En el caso en que $k \neq 0$, una \mathbb{E} -variedad topológica puede no tener ninguna estructura diferenciable o puede tener demasiadas. Supongamos que $\sigma \in \mathfrak{A}^k(X) / \sim$, definamos entonces

$$\mu_\sigma = \bigcup_{\alpha \in \sigma} \alpha$$

Lema 2.1. *La colección $\mu_\sigma \in \mathfrak{A}^k(X)$.*

Demostración. La primera condición de atlas es fácil de verificar. Miremos cómo se demuestra la segunda. Para esto consideremos dos cartas $\phi : U \rightarrow \mathbb{E}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{E}$ en la colección μ_σ . Por la definición de μ_σ , existen $\alpha \in \sigma$ y $\beta \in \sigma$ con

$$\phi \in \alpha \quad \psi \in \beta.$$

Ya que $\alpha \sim \beta$, el lema queda probado. ✠

Lema 2.2. Para todo $\alpha \in \sigma$, $\mu_\sigma \sim \alpha$.

Demostración. Ya que $\mu_\sigma \cup \alpha = \mu_\sigma$ y por la definición de \sim , tenemos que $\mu_\sigma \sim \alpha$ ✠

Definición. μ_σ es un atlas en la estructura diferenciable σ . Ya que μ_σ contiene todo atlas α en σ , μ_σ es el **atlas maximal** en la estructura diferenciable σ . Por la unicidad de μ_σ , podemos identificar la estructura diferenciable σ con su atlas maximo μ_σ .

Una **\mathbb{E} -variedad diferenciable** de clase C^k , es una \mathbb{E} -variedad topológica junto con una estructura diferenciable σ de clase C^k en X . Cuando $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ decimos que X es una **variedad diferenciable n -dimensional** de clase C^k . Si $k = 0$, X es una \mathbb{E} -variedad topológica y si $k = \infty$, X es una **\mathbb{E} -variedad suave**.

La siguiente proposición es evidente:

Proposición 2.6. Todo atlas diferenciable de clase C^k en una \mathbb{E} -variedad difernciable X es también un atlas diferenciable de clase C^h para todo $h \leq k$.

Ejemplo 2.2. Los siguientes son ejemplos de \mathbb{E} -variedades diferenciales

1. El espacio \mathbb{E} . La función identidad es claramente una carta en la \mathbb{E} -variedad diferenciable X . La colección $\{i\}$ es un atlas de clase C^∞ . El atlas maximal definido por la estructura diferenciable definida por esa colección, es el conjunto de todas las cartas de clase C^k .
2. Cualquier subespacio abierto de una \mathbb{E} -variedad diferenciable de clase C^k es una \mathbb{E} -variedad diferenciable de clase C^k .
3. La esfera S^n en el espacio \mathbb{R}^{n+1} es una \mathbb{E} -variedad diferenciable, puesto que para todo punto $x \in S^n$, la proyección estereográfica

$$\phi_x : (S^n - x) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es una carta en S^n . La colección

$$\alpha = \{\phi_x \mid x \in S^n\}$$

es un atlas de clase C^k para todo k .

4. El producto topológico de una \mathbb{E} -variedad diferenciable con una \mathbb{B} -variedad diferenciable, ambas de clase C^k , es también una $(\mathbb{E} \times \mathbb{B})$ -variedad diferenciable de clase C^k .

2.1.3. FUNCIONES DIFERENCIABLES

Definición. Sean X una \mathbb{E} -variedad diferenciable de **clase C^k** con una estructura diferenciable ζ y sea Y una \mathbb{B} -variedad diferenciable de clase C^k con estructura diferenciable η , donde k es cualquier miembro del conjunto

$$K = \{0, 1, 2, \dots, \infty, \omega\}$$

entendiendo que $\infty < \omega$. Consideremos cualquier función arbitraria $f : X \rightarrow Y$. Sea $h \in K$ tal que $h \leq k$. La función $f : X \rightarrow Y$ se dice de clase C^k sii para toda carta $\phi \in \mu_\zeta$ y toda carta $\psi \in \mu_\eta$ con

$$W = \text{dom}(\phi) \cap f^{-1}(\text{dom}(\psi)) \neq \emptyset$$

la función

$$f_{\phi\psi} : \phi(W) \rightarrow \mathbb{B}$$

$$p \mapsto f_{\phi\psi}(p) = \psi[f(\phi^{-1}(p))]$$

para todo $p \in W$ es diferenciable.

Proposición 2.7. *La función $f : X \rightarrow Y$ es de clase C^k sii ξ contiene un atlas α en X y η contiene un atlas β en Y , tal que para toda carta $\phi \in \alpha$ y toda carta $\psi \in \beta$ con*

$$W = \text{dom}(\phi) \cap f^{-1}(\text{dom}(\psi)) \neq \emptyset$$

la función $f_{\phi\psi}$ es de clase C^k .

Demostración. Supongamos que f es de clase C^h ; entonces, para toda carta ϕ en el atlas maximal μ_ξ y toda carta ψ en el atlas maximal μ_η la función $f_{\phi\psi}$ es de clase C^h . Por lo tanto, podemos tomar $\alpha = \mu_\xi$ y $\beta = \mu_\eta$. La necesidad de la proposición esta demostrada. Solo falta la suficiencia.

Para tal fin, sea ρ una carta cualquiera en μ_ξ y sea θ una carta cualquiera en μ_η . Debemos ver que la función $f_{\rho\theta}$ es de clase C^h . Entonces

$$\theta \circ f \circ \rho^{-1} = \theta \circ \psi^{-1} \circ f_{\phi\psi} \circ \phi \circ \rho^{-1}.$$

Las funciones $\theta \circ \psi^{-1}$ y $\phi \circ \rho^{-1}$ son de clase C^h , pues ellas pertenecen a μ_ξ y μ_η respectivamente. Por lo tanto, la función $f_{\rho\theta}$ es de clase C^h puesto que ella es una composición de funciones de clase C^h . \times

El conjunto $C^k(X, Y)$ es, como era de esperarse, el de todas las funciones $f : X \rightarrow Y$ de clase C^k . Cuando $Y = \mathbb{R}$ notaremos a este conjunto por $C^k(X)$ o $F^k(X)$. Es claro que el conjunto $C^k(X)$ es un álgebra de clase sobre el cuerpo de los números reales.

Definición. Podemos generalizar la noción de diferenciabilidad a subconjuntos abiertos no vacíos de X . Simplemente se toma como estructura diferenciable a la estructura diferenciable de X pero restringida a este subespacio. Más generalmente podemos decir que una función f es de clase C^k en un subconjunto cualquiera sii existe una extensión de esta función a un subconjunto abierto de X de clase C^k . Cuando una función es C^∞ , decimos que ella es **suave**. Cuando es C^ω , decimos que es **analítica**.

La siguiente proposición es evidente

Proposición 2.8. *Si $f \in C^k(A, Y)$, $f \in C^h(A, Y)$ para todo $h \leq k$.*

Corolario 2.3. *Toda función de clase C^h es por lo menos continua.*

Proposición 2.9. *La función idéntica en una variedad de clase C^k es de clase C^k .*

Demostración. Sea ξ una estructura diferenciable para la variedad X , la identidad

$$\phi \circ \psi^{-1} = \phi \circ \iota \circ \psi^{-1}$$

se mantiene para cualesquiera $\phi, \psi \in \mu_\xi$. Esta identidad garantiza que $\iota \in C^k(X, X)$ \times

Proposición 2.10. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ dos funciones de clase C^h , la función $g \circ f : X \rightarrow Z$ es de clase C^h .

Demostración. Utilizamos para esta demostración la identidad

$$\psi \circ f \circ g \circ \phi^{-1} = \psi \circ f \circ \theta^{-1} \circ \theta \circ g \circ \phi^{-1}.$$

donde ϕ, ψ y θ son cartas de los atlas maximales de las estructuras diferenciables de X, Z y Y , respectivamente. \boxtimes

Definición. Si una función $f : X \rightarrow Y$ es de clase C^k , y si $f^{-1} : Y \rightarrow X$ existe y es de clase C^k , entonces se dice que f es un **difeomorfismo de clase C^k** y que los espacios X y Y son difeomorfos. Definimos ahora el conjunto

$$\text{dif}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es difeomorfismo de } X \text{ en } X\}.$$

Proposición 2.11. $\langle \text{dif}(X), \circ, \iota \rangle$ tiene estructura de grupo.

Demostración. Esta demostración se sigue inmediatamente de las Proposiciones 2.10 y 2.9 \boxtimes

Vamos ahora a ver dos proposiciones que usaremos cuando estemos encontrando la base del espacio cotangente en dimensión finita.

Proposición 2.12. Para cualesquiera dos números reales a y b con $0 \leq a < b$, existe una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq a \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq b \end{cases}$$

y $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{E}$.

Demostración. Sean $\alpha = a^2$ y $\beta = b^2$. Consideremos la función suave definida por:

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \phi(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-\beta} - \frac{1}{t-\alpha}\right) & \text{si } t \in (\alpha, \beta) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definamos ahora la función $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\Phi(x) = \frac{\int_x^\beta \phi(t) dt}{\int_\alpha^\beta \phi(t) dt},$$

esta función tiene la propiedad que

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \alpha = a^2 \\ 0 & \text{si } x \geq \beta = b^2, \end{cases}$$

además, $0 \leq \Phi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, la función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \Phi(\|x\|^2)$$

satisface las condiciones de la proposición. \boxtimes

Proposición 2.13. Si V es una vecindad de un subconjunto compacto A de una \mathbb{E} -variedad diferenciable X de clase C^h , entonces para todo $h \leq \min\{k, \infty\}$ existe una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k , que satisface las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$, $0 \leq f(x) \leq 1$.
2. Para todo $x \in A$, $f(x) = 1$.
3. $S(f) = \text{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset V$.

Demostración. Sea $p \in A$ un punto cualquiera. Seleccionemos una carta ϕ_p en el atlas maximal de la estructura diferenciable ξ de X . Podemos asumir que $\phi_p(p) = 0$. Ya que el conjunto abierto $\phi_p(\text{dom}(\phi_p) \cap V)$ contiene al origen de \mathbb{E} , podemos escoger un $b_p > 0$, tal que $B_{b_p}(0) \subset \phi_p(\text{dom}(\phi_p) \cap V)$. Sea $a_p = b_p/2$. De acuerdo con la Proposición 2.12, existe una función de clase C^h

$$f_p : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq a_p \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq b_p \end{cases}$$

y $0 \leq f_p(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{E}$. Definamos la función g_p de la siguiente manera

$$g_p : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g_p(x) = \begin{cases} f_p(\phi_p(x)) & \text{si } x \in \text{dom}(\phi_p) \\ 0 & \text{si } x \in \text{dom}(\phi_p)^c. \end{cases}$$

Entonces, es claro que g_p es de clase C^h . Hágase esto para todo $p \in A$. Dado $p \in A$, definimos

$$W_p = \{x \in \text{dom}(\phi_p) \mid \|\phi_p(x)\| \leq a_p\}.$$

Puesto que A es compacto, existe un conjunto finito de puntos $F = \{p_1, \dots, p_m\}$ de A tal que

$$A \subset \bigcup_{p \in F} W_p.$$

Definimos una función f de la siguiente manera:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 1 - \prod_{i=1}^m (1 - g_{p_i}(x)),$$

esta f así definida, cumple todas las hipótesis de la proposición. ✠

Las siguientes tres proposiciones son de fácil demostración

Proposición 2.14. Sea X una \mathbb{E} -variedad de clase C^k con ξ como su estructura diferenciable. Toda carta ϕ en el atlas maximal μ_ξ es de clase C^k . El espacio \mathbb{E} es tratado como una \mathbb{E} -variedad. Por lo tanto, en dimensión finita las i -ésimas funciones coordenadas de la carta ϕ también son de clase C^k .

Demostración. Sea ψ una carta en el atlas maximal μ_ξ . La diferenciabilidad de ϕ está garantizada por la siguiente identidad

$$\iota \circ \phi \circ \psi^{-1} = \phi \circ \psi^{-1}$$

✠

Proposición 2.15. Sean X y Y variedades finito-dimensionales. Una función $f : X \rightarrow Y$ es de clase C^k sii para toda función $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k en cualquier vecindad abierta y no vacía V de Y , la función $\kappa = \lambda \circ f$ es de clase C^k .

Demostración. La necesidad de la proposición es evidente por la Pro- 2.10. Pasemos ahora a demostrar la suficiencia.

Si la función κ es C^k para toda función λ , en particular lo será para las funciones coordenadas de $f_{\phi\psi}$. Esto equivale a decir que la función f es diferenciable. ✠

Proposición 2.16. Cualesquiera dos estructuras diferenciables ξ y η en una \mathbb{E} -variedad X de clase C^k son iguales sii la función idéntica en X es un difeomorfismo de clase C^k de (X, ξ) sobre (X, η) .

Demostración. Si las dos estructuras diferenciables son iguales, es claro que la función idéntica es un difeomorfismo de (X, ξ) en (X, η) . Ahora bien, si la idéntica es un difeomorfismo de (X, ξ) en (X, η) , sea $\phi \in \mu_\xi$ entonces la función

$$\psi \circ \phi^{-1} = \psi \circ \iota \circ \phi^{-1}$$

es de clase C^k ; por lo tanto, $\phi \in \mu_\eta$. La demostración de la otra contención sigue las mismas ideas. ✠

2.1.4. ESPACIOS TANGENTES Y COTANGENTES

Definición. Sea X una variedad n -dimensional de clase C^k . Sea $x \in X$. Una **función localmente C^k** en el punto x de X es una función de clase C^k

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

definida en una vecindad abierta $U \in \mathcal{V}(x)$ en X . Con

$$L_x(X)$$

notamos el conjunto de todas las funciones localmente C^k en una vecindad de x . En $L_x(X)$ podemos definir una suma y un producto de manera natural punto por punto.

$L_x(X)$ con la suma y el producto así definidos, no es un álgebra. Aún más, no alcanza a ser un espacio lineal, puesto que la suma no está bien definida. Es decir si $f, g, h \in L_x(X)$ con

$$f + g = 0$$

no necesariamente implica que $f = -g$. Para solucionar este problema, definimos una relación de equivalencia \sim_L en $L_x(X)$ de la siguiente manera:

Definición. Sean $f, g \in L_x(X)$. Decimos que f es equivalente bajo L a g , y notamos $f \sim_L g$ sii f coincide con g en una vecindad abierta de x contenida en la intersección de sus dominios. La clase de equivalencia de una función f será notada con su correspondiente letra mayúscula F o por $[f]_L$. Estas clases de equivalencia son los gérmenes de las funciones localmente C^k . El conjunto de todos los gérmenes será notado así:

$$G_x(X) = L_x(X) / \sim_L .$$

Lema 2.3. Si $f_1 \sim_L f_2$ y $g_1 \sim g_2$ in $L_x(X)$, entonces

$$af_1 + bg_1 \sim_L af_2 + bg_2 \quad f_1g_1 \sim_L f_2g_2$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $W_f \subset \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$ el abierto donde coinciden f_1 y f_2 . De manera análoga, definamos W_g para g_1 y g_2 . Entonces, es claro que en el conjunto abierto $W = W_f \cap W_g$ las funciones f_1g_1 y f_2g_2 coinciden. Lo mismo sucederá para las funciones $af_1 + bg_1$ y $af_2 + bg_2$ \square

Gracias al Lema 2.3 podemos definir en $G_x(X)$ producto escalar, suma y producto, de la siguiente manera

Definición. Dados cualesquiera $F, G \in G_x(X)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in F$ y $g \in G$ definimos

$$\begin{aligned} aF + bG &= [af + bg]_L \\ FG &= [fg]_L. \end{aligned}$$

La demostración de la siguiente proposición sólo hace uso de la definición de álgebra, de $G_x(X)$ y del lema 2.3

Proposición 2.17. $G_x(X)$ es un álgebra asociativa y conmutativa. Además, ella tiene una única unidad $\mathbf{1} = [\mathbf{1}]_L$, donde $\mathbf{1}$ es la función de valores reales definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{1} : X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathbf{1}(x) = 1. \end{aligned}$$

El siguiente lema es evidente de la definición de $L_x(X)$

Lema 2.4. Si $f \sim_L g$, entonces $f(x) = g(x)$, por tal razón tiene sentido la igualdad

$$F(x) = f(x),$$

donde $f \in F$ y $F \in G_x(X)$.

Definición. Un **vector tangente** de X en el punto x , es una función

$$v : G_x(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes condiciones

1. v es un funcional lineal en el espacio $G_x(X)$; es decir, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ y $F, G \in G_x(X)$

$$v(aF + bG) = av(F) + bv(G)$$

2. v es una **derivada**; es decir, para cualesquiera $F, G \in G_x(X)$

$$v(FG) = v(F)G(x) + F(x)v(G)$$

Usaremos el símbolo

$$T_x(X)$$

para denotar el conjunto de todos los vectores tangentes a X en el punto x . Este conjunto, con la suma y el producto por escalar definidos de manera natural, es un espacio vectorial, llamado el **espacio tangente** a X en el punto x . Vamos a definir ahora el espacio vectorial de los vectores cotangentes de la siguiente manera. Sea

$$\begin{aligned} K_x(X) &= \{F \in G_x(X) \mid \text{para todo } v \in T_x(X), v(F) = 0\} \\ &= \bigcap_{v \in T_x(X)} \ker(v) \end{aligned}$$

El espacio **espacio cotangente** a X en el punto x , es el espacio vectorial definido por

$$T_x^*(X) = G_x(X)/K_x(X).$$

La clase de equivalencia del germen F la notaremos con su respectiva letra cursiva \mathcal{F} , de la misma manera para los demás letras.

A continuación supondremos que X es una variedad n -dimensional y vamos a determinar la estructura de los espacios tangentes y cotangentes. Para tal proposito, vamos a considerar un carta arbitraria $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de X con $x \in U$

Definición. Vamos ahora a definir un conjunto de n vectores tangentes de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi_i} : G_x(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ F &\mapsto \frac{\partial}{\partial \phi_i}(F) = D_i[f \circ \phi^{-1}](\phi(x)). \end{aligned}$$

Por las propiedades de las derivadas parciales, podemos deducir inmediatamente:

Proposición 2.18.

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} \in T_x(X).$$

Lema 2.5. La unidad ι del álgebra $G_x(X)$ pertenece al subespacio $K_x(X)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} v(\iota) &= v(u) \\ &= \mathbf{1}(x)v(\iota) + \mathbf{1}(x)v(\iota), \end{aligned}$$

esto quiere decir que $\iota \in K_x(X)$ ✠

De acuerdo con la Proposición 2.14 las i -ésimas funciones coordenadas de la carta ϕ son funciones de clase C^k en $L_x(X)$.

Lema 2.6. Para toda función $f \in L_x(X)$, existe un abierto

$$W \subset \text{dom}(f) \cap \text{dom}(\phi)$$

de x junto con n funciones de clase C^k

$$f_i : W \rightarrow \mathbb{R}$$

tales que

$$f_i(x) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(F)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ y para todo $y \in W$

$$f(y) = f(x) + \sum_{\eta=1}^n (\phi_\eta(y) - \phi_\eta(x)) f_\eta(y).$$

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} g : \phi(W') &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto (f \circ \phi^{-1})(t), \end{aligned}$$

con $W' = \text{dom}(\phi) \cap \text{dom}(f)$. Sea $a = \phi(x) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Gracias a que $\text{dom}(g)$ es abierto en \mathbb{R}^n , existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset \text{dom}(g)$. Por lo tanto, las derivadas parciales $D_i(g)$ son de clase C^k . Definimos ahora una función

$$\begin{aligned} g_i : B_\delta(a) &\rightarrow \mathbb{R} \\ b &\mapsto g_i(b) = \int_0^1 [D_i(g)](b_1, \dots, b_{i-1}, a_i + \lambda(b_i - a_i), a_{i+1}, \dots, a_n) d\lambda. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema fundamental del calculo en \mathbb{R} , obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) g_i(b) \\ &= \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \int_0^1 [D_i(g)](b_1, \dots, b_{i-1}, a_i + \lambda(b_i - a_i), a_{i+1}, \dots, a_n) d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n [g(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - g(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_n)] \\ &= g(b) - g(a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$g(b) = g(a) + \sum_{\eta=1}^n (b_\eta - a_\eta) g_\eta(b).$$

Sea $W = \phi^{-1}[B_\delta(a)] \subset \text{dom}(\phi) \cap \text{dom}(f)$ y sea

$$\begin{aligned} f_i &: W \rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto g_i(\phi(y)). \end{aligned}$$

✠

Es claro por la definición de $\frac{\partial}{\partial \phi_i}$ que $f_i(x) = \frac{\partial}{\partial \phi_i}(F)$. Por otro lado, si y es un punto arbitrario de W , entonces $b = \phi(y) \in \mathbb{B}_\delta(a)$. Obtenemos así lo siguiente

$$\begin{aligned} f(y) &= f(\phi^{-1}(b)) \\ &= g(a) + \sum_{\eta=1}^n (b_\eta - a_\eta) g_\eta(b) \\ &= f(x) + \sum_{\eta=1}^n (\phi_\eta(y) - \phi_\eta(x)) f_\eta(y) \end{aligned}$$

Lema 2.7. Para todo $v \in T_x(X)$, tenemos

$$v = \sum_{i=1}^n v[\phi_i]_L \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Demostración. Sean $v \in T_x(X)$ y $F \in G_x(X)$. De acuerdo con el Lema 2.6 y con la definición de las operaciones en $G_x(X)$, tenemos que

$$F = f(x) + \sum_{i=1}^n [v[\phi_i]_L - \phi_i(x)] [f_i]_L$$

Por el Lema 2.5 y la definición de vector tangente, obtenemos

$$v(F) = \sum_{i=1}^n v[\phi_i]_L f_i(x) = \sum_{i=1}^n v[\phi_i]_L \frac{\partial}{\partial \phi_i}(F).$$

Puesto que la igualdad anterior es válida para todo $F \in G_x(X)$, el teorema queda demostrado. ✠

Lema 2.8. Los vectores tangentes

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n}$$

son linealmente independientes.

Demostración. Observemos primero que de la definición de $\frac{\partial}{\partial \phi_i}$ obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} [\phi_j]_L = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Sea $v \in T_x(X)$ con la siguiente combinación lineal:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

Si $v = 0$, entonces para todo $j = 1, \dots, n$, tenemos que

$$0 = v[\phi_j]_L = v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i} [\phi_i]_L = a_j$$

Esto quiere decir que los vectores $\frac{\partial}{\partial \phi_i}$ son linealmente independientes ✠

Teorema 2.1. *El espacio tangente $T_x(X)$ de cualquier variedad n -dimensional X en un punto arbitrario x , es un espacio lineal n -dimensional sobre el cuerpo de los números reales. Para cada carta de clase C^k , los n vectores tangentes*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right)_{i=1}^n$$

constituyen una base para de $T_x(X)$.

Ahora vamos a determinar la estructura del espacio $T_x^*(X)$. Para tal fin definamos la siguiente función

Definición.

$$\begin{aligned} d_x : L_x(X) &\rightarrow T_x^*(X) \\ f &\mapsto d_x(f) = [[f]_L]_* = \mathcal{F}, \end{aligned}$$

donde $[F]_* = F + K_x(X)$ es la clase de equivalencia del germen F . El vector cotangente $d_x(f)$ es la **diferencial de la función localmente de clase C^k f** .

Lema 2.9. *El álgebra $F^k(X)$ está contenida en $L_x(X)$ y $[F^k(X)]_L = G_x(X)$.*

Demostración. Para la primera parte del lema, simplemente escogamos una $f \in F^k(X)$. Esta f es una función localmente C^k , gracias a que podemos tomar como vecindad a toda la variedad X . Es decir, $\text{dom}(f) = X$.

La segunda parte del lema requiere un poco más de trabajo. La primera afirmación del lema nos garantiza la contención $[F]_L \subset G_x(X)$. Para la segunda contención, sea $F \in G_x(X)$. Por el Corolario 2.1, X es localmente compacto. Es decir, existe una vecindad compacta A de x contenida en $\text{dom}(f)$. Por ser X un espacio paracompacto y Hausdorff, es regular y por ser paracompacto y regular, es normal. [?]. Por lo tanto, existe una vecindad V de A tal que $\text{cl}(V) \subset U$. De acuerdo con la Proposición 2.13, existe una función localmente C^k , $g \in L_x(X)$, tal que

$$g(A) = 1 \quad g(V^c) = 0$$

Definamos una función $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ tomando

$$h(y) = \begin{cases} f(y)g(y) & \text{si } y \in U \\ 0 & \text{si } y \in (\text{cl}(V))^c \end{cases}$$

Entonces, $h \in F^k(X)$ y como $f = h$ en A , entonces $[h]_L = [f]_L = F$. ✠

La siguiente proposición es evidente, gracias a que $[]_*$ es sobreyectiva.

Proposición 2.19. *Todo vector cotangente es la diferencial de una función en $F^k(X)$. Es decir $d_x[F^k(X)] = T_x^*(X)$.*

Consideremos m funciones $f_i \in L_x(X)$. Sea $a_i = f_i(x) \in \mathbb{R}$. Sea también $\Phi \in L_a(\mathbb{R}^n)$. Entonces existe una vecindad x en X tal que

$$W \subset \bigcup \text{dom}(f_i)$$

y que $t = [f_1(w), \dots, f_n(w)] \in \text{dom}(\Phi)$, siempre que $w \in W$. Definamos la función

$$\begin{aligned} f : W &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto f(w) \end{aligned}$$

Lema 2.10. *La diferencial de f en el punto x de X está dada por*

$$d_x(f) = \sum_{i=1}^m [D_i\Phi](a) d_x(f_i).$$

Demostración. Como $f, f_1, f_2, \dots, f_n \in L_x(X)$, entonces $g \in L_x(X)$, donde

$$g = f - \sum_{i=1}^m [D_i\Phi](a) d_x(f_i).$$

Puesto que $d_x = [\]_L \circ [\]_*$, es suficiente mostrar que el germen $G \in G_x(X)$ está en $K_x(X)$. Para tal fin, debemos demostrar que $v[G] = 0$, para todo $v \in T_x(X)$.

Sea ϕ una carta arbitraria para $x \in X$, entonces obtenemos n vectores tangentes $\frac{\partial}{\partial \phi_i} \in T_x(X)$. Gracias al Lemma 2.7, es suficiente mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} [G] = 0$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Para este propósito, sean $Y = \phi(\text{dom}(\phi) \cap W)$ y

$$\begin{aligned} h_i : Y &\rightarrow \mathbb{R} & h : Y &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(\phi_i^{-1}(t)) & t &\mapsto f(\phi^{-1}(t)) \end{aligned}$$

para todo $i = 1, \dots, m$. Sea también

$$b_j = D_j(h)[\phi(x)] \quad c_{ij} = D_j(h_i)[\phi(x)].$$

De acuerdo con la definición de $\frac{\partial}{\partial \phi_j}$, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} (F) = b_j \quad \frac{\partial}{\partial \phi_j} (F_i) = c_{ij}.$$

Esto implica que

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} (G) = b_j - \sum_{i=1}^m [D_i\Phi](a) c_{ij}.$$

Ya que $h(t) = \Phi[h_1(t), \dots, h_n(t)]$ para todo $t \in \phi(\text{dom}(\phi) \cap W)$, tenemos que

$$b_j = \sum_{i=1}^m [D_i\Phi](a) c_{ij}.$$

Lo anterior implica que

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j}(G) = 0.$$

Esto demuestra el lema. ✠

Corolario 2.4. Para dos funciones $f, g \in L_x(X)$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_x(af + bg) &= ad_x(f) + bd_x(g) \\ d_x(fg) &= g(x)d_x(f) + f(x)d_x(g). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(X)$ es isomorfo a $T_x^*(X)$.

Demostración. La demostración es directa de la definición de d_x . Demostremos la primera igualdad del corolario

$$\begin{aligned} d_x(af + bg) &= (aF + bG) + K_x(X) \\ &= a(F + K_x(X)) + b(G + K_x(X)) \\ &= ad_x(f) + bd_x(g) \end{aligned}$$

Para demostrar la segunda igualdad se debe demostrar que

$$(FG - f(x)G - g(x)F) \in K_x(X).$$

Entonces sea $v \in T_x(X)$

$$\begin{aligned} v(FG - f(x)G - g(x)F) &= v(FG) - f(x)v(G) - g(x)v(F) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esto último demuestra la segunda igualdad. ✠

Corolario 2.5. Para toda $f \in L_x(X)$, tenemos que

$$d_x(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \phi_i}(F)d_x(\phi_i).$$

Demostración. Definamos la siguiente función

$$\begin{aligned} g : \phi(W) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = f(\phi^{-1}(t)), \end{aligned}$$

donde $W = \text{dom}(\phi) \cap \text{dom}(f)$. Entonces, para todo $w \in \text{dom}(\phi) \cap \text{dom}(f)$, tenemos que:

$$f(w) = g[\phi_1(w), \dots, \phi_n(w)]$$

Podemos deducir, entonces que

$$\begin{aligned} d_x(f) &= \sum_{i=1}^n [D_i g](\phi(x))d_x(\phi_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \phi_i}(F)d_x(\phi_i) \end{aligned}$$

✠

Lema 2.11. Los n vectores cotangentes $(d_x(\phi_i))_{i=1}^n$ son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos que a_1, \dots, a_n son números reales tales que

$$\sum_{i=1}^n a_i d_x(\phi_i) = 0.$$

Consideremos la función

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \in L_x(X).$$

Puesto que

$$d_x(f) = \sum_{i=1}^n a_i d_x(\phi_i) = 0.$$

Esto quiere decir que $v(F) = 0$ para todo $v \in T_x(X)$. En particular, para $v = \frac{\partial}{\partial \phi_i}$. Como

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} [\phi_i]_L = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

obtenemos entonces que

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i} [F] = a_i = 0.$$

Lo cual demuestra el lema. ✠

Resumiendo, tenemos que

Teorema 2.2. El espacio cotangente $T_x^*(X)$ de cualquier variedad n -dimensional X en un punto arbitrario x es un espacio lineal n -dimensional sobre el cuerpo de los números reales. Para cada carta ϕ , los n vectores cotangentes $(d_x(\phi_i))_{i=1}^n$ son una base para el espacio $T_x^*(X)$.

Vamos ahora a estudiar la dualidad entre $T_x(X)$ y $T_x^*(X)$. Para eso utilizaremos los siguientes lemas, el primero de ellos es de trivial demostración, y por lo tanto la omitiremos.

Lema 2.12. Para dos cualesquiera gérmenes $F, G \in G_x(X)$, tenemos que $[F]_* = [G]_*$ sii $v(F) = v(G)$.

Lema 2.13. La función κ definida por

$$\begin{aligned} \kappa : T_x^*(X) &\rightarrow (T_x(X))^* \\ \mathcal{F} &\mapsto \kappa(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \kappa(\mathcal{F}) : T_x(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(F), \end{aligned}$$

para todo $F \in \mathcal{F}$, es biyectiva y lineal.

Demostración. Demostremos primero la linealidad. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in T_x^*(X)$, $F \in \mathcal{F}$ y $G \in \mathcal{G}$. Entonces

$$\begin{aligned} [\kappa(a\mathcal{F} + b\mathcal{G})](v) &= v(aF + bG) \\ &= av(F) + bv(G) \\ &= a[\kappa(\mathcal{F})](v) + b[\kappa(\mathcal{G})](v) \\ &= [a\kappa(\mathcal{F}) + b\kappa(\mathcal{G})](v) \end{aligned}$$

Para demostrar que κ es biyectiva, supongamos que $\kappa(\mathcal{F}) = 0$. Entonces $v(F) = 0$ para toda $v \in T_x(X)$. Esto quiere decir que $F \in K_x(X)$ y por consiguiente $\mathcal{F} = 0$. Esto muestra hasta el momento que κ es una función uno a uno. Pero, por la Ecuación Dimensional [?], κ debe ser sobre. \blacktimes

Definición. Usaremos la notación

$$\langle v, \mathcal{F} \rangle = v(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(v),$$

para referirnos al número real $[\kappa(\mathcal{F})](v)$. Sea ϕ una carta arbitraria para $x \in X$. Entonces

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \phi_i}, d_x(\phi_j) \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \phi_n} \right) (d_x(\phi_1), \cdots, d_x(\phi_n))$$

Son dos bases duales. Para sintetizar lo visto en esta sección, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *El espacio tangente $T_x(X)$ y el cotangente $T_x^*(X)$ de una variedad n -dimensional de clase C^k son mutuamente duales. Es más, para cada carta ϕ de $x \in X$, las siguientes son bases duales:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \phi_n} \right) (d_x(\phi_1), \cdots, d_x(\phi_n)).$$

En lo que queda de la sección, vamos a dar una interpretación geométrica de los vectores tangentes y cotangentes, claro está, en dimensión finita.

Definición. Una curva diferenciable de clase C^k en x contenida en X , es una función de clase C^k $\alpha : I \rightarrow X$ donde I es un intervalo abierto que contiene al 0, tal que $\alpha(0) = x$. Para cualesquiera α y β en $\Gamma_x(X)$, $\alpha \sim_{\Gamma} \beta$ sii

$$(f \circ \alpha)'_0 = (f \circ \beta)'_0.$$

Para cualesquiera $f, g \in L_x(X)$ notaremos la clase de equivalencia de α con su correspondiente letra mayúscula latina A , lo mismo para β y las demás. En el conjunto $\Gamma_x(X)$, definimos la suma y el producto por escalar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A + B &= \{\gamma \mid (f \circ \gamma)'_0 = (f \circ \alpha)'_0 + (f \circ \beta)'_0\} \\ aA &= \{\gamma \mid (f \circ \gamma)'_0 = (af \circ \alpha)'_0\} \end{aligned}$$

La demostración de que este conjunto con las operaciones así definidas es un espacio lineal, es directa.

Proposición 2.20. *Los conjuntos $\Gamma_x(X) / \sim_{\Gamma}$ y $T_x(X)$ son isomorfos.*

Demostración. Definimos la función

$$\begin{aligned}\zeta : \Gamma_x(X) / \sim_\Gamma &\rightarrow T_x(X) \\ A &\mapsto \zeta(A)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\zeta(A) : G_x(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ F &\mapsto (f \circ \alpha)'_0.\end{aligned}$$

Es fácil ver que esta función está bien definida. Por lo tanto nos centraremos en la demostración de la “isomorfidad”¹. Sean entonces $A, B \in \Gamma_x(X)$ y $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}a\zeta(A)F + b\zeta(B)F &= a(f \circ \alpha)'_0 + b(f \circ \beta)'_0 \\ &= (af \circ \alpha + bf \circ \beta)'_0 \\ &= \zeta(aA + bB)\end{aligned}$$

Hemos demostrado hasta el momento que la función ζ es lineal. Para ver que ella es uno a uno, suponemos, como era de esperarse, que $\zeta(A) = 0$ lo cual quiere decir que $(f \circ \alpha)'_0 = 0$; por lo tanto $A = 0$. Tenemos, pues, una transformación uno a uno y lineal. Ella debe ser sobre y por lo tanto un isomorfismo. \boxtimes

Gracias a la proposición anterior, podemos encontrar los vectores de la base de $\Gamma_x(X)$. Simplemente observando que

$$\tilde{\alpha}_i(t) = \phi^{-1}(0, \dots, t, \dots, 0) \in \zeta^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}\right)$$

donde t ocupa la i -ésima posición

Definición. En el conjunto $L_x(X)$ definimos una relación de equivalencia de la siguiente manera: $f \sim_\mathcal{L} g$ sii

$$(f \circ \alpha)'_0 = (g \circ \alpha)'_0$$

para toda $\alpha \in \Gamma_x(X)$. Sus clases de equivalencia serán notadas con una tilde, así: $[f]_\mathcal{L} = \tilde{f}$.

Podemos ver que la siguiente proposición es análoga a la anterior y su demostración solo usa las definiciones pertinentes.

Proposición 2.21. *El conjunto $\mathfrak{F}_x(X) / \sim_\mathcal{L}$ es isomorfo al espacio $T_x^*(X)$, bajo el isomorfismo*

$$\begin{aligned}\omega : \mathfrak{F}_x(X) &\rightarrow T_x^*(X) \\ \tilde{f} &\mapsto d_x(f)\end{aligned}$$

y los vectores de la base de $\mathfrak{F}_x(X)$ están dados por $\tilde{\phi}_i$, donde ϕ es una carta para $x \in X$.

Proposición 2.22. *Sea I un intervalo abierto que contiene al 0. Consideremos una curva de clase C^k $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Entonces, el vector tangente a α en el punto $\alpha(0)$ está dado por*

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

¹Si es que esta palabra existe

Demostración. Esta curva α tiene un representante en $T_x(X)$ dado por $\zeta(A)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\zeta(A) : G_{\alpha(0)}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ F &\mapsto (f \circ \alpha)'_0.\end{aligned}$$

Puesto que $\zeta(A)[\phi_i]_L = \alpha'_i(0)$, entonces

$$\zeta(A)F = \sum_{i=1}^n \alpha'_i(0) \frac{\partial}{\partial \phi_i}(F),$$

lo cual demuestra la proposición. ✠

2.1.5. DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN DE CLASE C^k

Definición. Sean X una \mathbb{E} -variedad diferenciable de clase C^k y Y una \mathbb{B} -variedad de clase C^k . $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable de clase C^k . Definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned}L_x(f) : L_y(Y) &\rightarrow L_x(X) \\ g &\mapsto g^* = g \circ f\end{aligned}$$

donde $y = f(x)$.

El siguiente lema es evidente, ya que su demostración sólo usa las definiciones pertinentes.

Lema 2.14. Para cualesquiera $g, h \in L_y(Y)$ y $a, b \in \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

1. $L_x(f)(ag + bh) = aL_x(f)(g) + bL_x(f)(h)$
2. $L_x(f)(gh) = L_x(f)(g)L_x(f)(h)$
3. $f \sim_L g$, entonces $L_x(f)(g) \sim_L L_x(f)(h)$.

Gracias al tercer hecho de Lema 2.14, $L_x(f)$ induce una única función

$$\begin{aligned}f^\# = G_x(f) : G_y(Y) &\rightarrow G_x(X) \\ G &\mapsto [L_x(f)(g)]_L\end{aligned}$$

Lema 2.15. La función $G_x(f)$ es un homeomorfismo de $G_y(Y)$ sobre $G_x(X)$. Además, $G_x(X)$ lleva la unidad de $G_y(Y)$ en la unidad de $G_x(X)$.

Demostración. La primera parte del lema es una consecuencia inmediata del lema 2.14. Para la segunda parte del lema, sea ι_y la unidad del algebra $G_y(Y)$; entonces

$$\begin{aligned}G_x(f)(\iota_y) &= [L_x(f)(\mathbf{1}_y)]_L \\ &= [\mathbf{1}_y \circ f]_L \\ &= [\mathbf{1}_x]_L \\ &= \iota_x\end{aligned}$$

✠

Lema 2.16. Para todo germen $G \in G_y(Y)$, tenemos

$$G_x(f)(G)x = G(y)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} G_x(f)(G)x &= [L_x(f)(g)]_L(x) \\ &= [g \circ f]_L(x) \\ &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= G(y) \end{aligned}$$

✠

Definición. Definimos la siguiente función:

$$\begin{aligned} f_* = T_x(f) : T_x(X) &\rightarrow T_y(Y) \\ v &\mapsto v_* \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} v_* : G_y(Y) &\rightarrow \mathbb{R} \\ G &\mapsto v(G_x(f)(G)) \end{aligned}$$

Esta función se llama la diferencial de f en el punto $x \in X$.

Lema 2.17. v_* está bien definida.

Demostración. Para demostrar esto, solo debemos ver que $v_* \in T_y(Y)$. En efecto:

$$\begin{aligned} v_*(aG + bH) &= v(G_x(X)(aG + bH)) \\ &= v(aG_x(f)(G) + bG_x(f)(H)) \\ &= av_*(G) + bv_*(H) \\ v_*(GH) &= v(G_x(f)(FG)) \\ &= v(G_x(f)(G)G_x(f)(H)) \\ &= v(G_x(f)(G))G_x(f)(H)(x) + G_x(f)(G)(x)v(G_x(f)(H)) \\ &= v_*(G)H(y) + G(y)v_*(H) \end{aligned}$$

✠

Lema 2.18. La función f_* es lineal.

Demostración. Sean $v, w \in T_x(X)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, para toda $G \in G_y(Y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (av + bw)_*(G) &= (av + bw)(G_x(f)(G)) \\ &= av(G_x(f)(G)) + bw(G_x(f)(G)) \\ &= (av_* + bw_*)(G) \end{aligned}$$

✠

Lema 2.19. $G_x(f)$ envía la subálgebra $K_y(Y)$ de $G_y(Y)$ en la subálgebra $K_x(X)$ de $G_x(X)$.

Demostración. Sea $G \in K_y(Y)$. Debemos probar que $G_x(f)(G) \in K_x(X)$, sea $v \in T_x(X)$. De acuerdo con el Lema 2.17 $v_* \in T_y(Y)$. Puesto que $G \in K_y(Y)$, $v_*(G) = 0$. Por la definición de v_* , tenemos que

$$v(G_x(f)(G)) = v_*(G) = 0.$$

Ya que esto es cierto para todo $v \in T_x(X)$, es claro que $G_x(f)(G) \in K_x(X)$. Esto prueba el lema. \boxtimes

Definición. La función $G_x(f)$ induce una única transformación lineal

$$\begin{aligned} f^* = T_x^*(f) : T_y^*(Y) &\rightarrow T_x^*(X) \\ \mathcal{G} &\mapsto G_x(f)(G) + K_x(X). \end{aligned}$$

Esta función se llama la codiferencial de f en el punto $x \in X$.

El siguiente teorema recoge los lemas anteriores y su demostración es directa.

Teorema 2.4. Las transformaciones lineales f_* y f^* son duales. Esto es, para todo $v \in T_x(X)$ y toda $\mathcal{G} \in T_y^*(Y)$, tenemos que

$$\langle f_*(v), \mathcal{G} \rangle = \langle v, f^*(\mathcal{G}) \rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle f_*(v), \mathcal{G} \rangle &= \langle v_*, \mathcal{G} \rangle \\ &= \kappa(\mathcal{G})(v_*) \\ &= v_*(G) \\ &= v(G_x(f)(G)) \\ &= v[G_x(f)(G) + K_x(X)] \\ &= \kappa[G_x(f)(G) + K_x(X)](v) \\ &= \langle v, f^*(\mathcal{G}) \rangle \end{aligned}$$

\boxtimes

Debido a que las funciones f_* y f^* son duales entre si, una está determinada por la otra. Ahora vamos a intentar deducir información de la función f a partir de su diferencial. Para tal fin, sean ϕ una carta para $x \in X$ y ψ una carta para $y \in Y$. Suponemos a X modelada en \mathbb{R}^m , y Y modelada en \mathbb{R}^n . Sea $U = \phi[\text{dom}(\phi) \cap f^{-1}(\text{dom}(\psi))]$, la función

$$\begin{aligned} g : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \psi(f(\phi^{-1}(t))). \end{aligned}$$

Esta función es claramente de clase C^k y su dominio es abierto.

Lema 2.20. Para todo $i = 1, \dots, m$, se cumple que

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) = \sum_{j=1}^m (D_i g_j) \frac{\partial}{\partial \psi_j}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
f_* \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) (H) &= \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i} \right)_* (H) \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi_i} (G_x(f)(H)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi_i} [L_x(f)(h)]_L \\
&= \frac{\partial}{\partial \phi_i} [h \circ f]_L \\
&= D_i(h \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(x)) \\
&= D_i(h \circ \psi^{-1} \circ g)(\phi(x)) \\
&= \nabla(h \circ \psi^{-1})_{\psi(y)} D_i(g)_{\psi(y)} \\
&= \sum_{j=1}^m (D_i g_j) D_j(h \circ \psi^{-1})_{\psi(y)} \\
&= \sum_{j=1}^m (D_i g_j) \frac{\partial}{\partial \psi_j} (H)
\end{aligned}$$

✠

Por lo tanto, la matriz $m \times n$

$$\Lambda = (D_i(g_j))_{ij}$$

es la matriz de números reales que representa la transformación f_* con respecto a las bases

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_m} \right) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \psi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \psi_n} \right)$$

de $T_x(X)$ y $T_y(Y)$. Por lo tanto, el rango de la matriz Λ no depende de la escogencia de las cartas ϕ o ψ , puesto que la definición de f_* nunca las utiliza. Este rango será el **rango** de la transformación f_* . Por otro lado, es claro que la matriz Λ^t es la matriz jacobiana de la función g en el punto $\phi(x)$. Así el rango de $D(g)_{\phi(x)}$ es igual al rango de la matriz Λ [?].

Teorema 2.5. Si f_* es de rango k , entonces existen ϕ y ψ cartas de clase C^k para $x \in X$ y $y \in Y$ respectivamente, tales que

$$\phi_i(z) = \psi_i(f(z))$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$ y todo $z \in (\text{dom}(\phi) \cap f^{-1}(\text{dom}(\psi)))$.

Demostración. Sean $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ cartas arbitrarias para $x \in X$ y $y \in Y$. Sea $W = \bar{\phi}[\text{dom}(\bar{\phi}) \cap f^{-1}(\text{dom}(\bar{\psi}))]$, definamos la función

$$\begin{aligned}
\bar{g} : W &\rightarrow \mathbb{R}^n \\
t &\mapsto \psi(f(\bar{\psi}^{-1}(t))).
\end{aligned}$$

✠

Gracias a la transformación f_* es de rango k , también lo será la matriz

$$\bar{\Lambda} = (D_i(\bar{g}_j)).$$

Por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\det((D_j(g_i))_{ij}) \neq 0$$

para $i, j = 1, \dots, k$. Esto quiere decir que existe una vecindad abierta $Z \subset W$ de $\bar{\phi}(x) \in \mathbb{R}^m$ tal que la función de clase C^k

$$\begin{aligned} \xi : Z &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto [g_1(t), \dots, g_k(t), t_{k+1}, \dots, t_m] \end{aligned}$$

es un encaje. Sea $U = \bar{\phi}^{-1}(Z)$ y definamos una función

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ z &\mapsto \xi(\bar{\phi}(z)). \end{aligned}$$

Entonces ϕ es una carta de clase C^k para $x \in X$ con $\phi_i(z) = \psi(f(z))$ para $i = 1, \dots, k$. Esto completa la demostración del teorema.

Definición. Una **inmersión** de un espacio topológico X en un espacio topológico Y es una función $f : X \rightarrow Y$, tal que para todo punto $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que la restricción $f|_U$ es un encaje de U en Y .

Corolario 2.6. Si la diferencial f_* es inyectiva, f es una inmersión; si es sobre, f es una función abierta y si es biyectiva f es un difeomorfismo de clase C^k .

2.2. UN EJEMPLO CLÁSICO: EL TORO.

Definición. Sea D el subgrupo de \mathbb{R}^2 que consiste de todos los vectores (a_1, a_2) , donde $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. El **toro** T_1^2 es el grupo cociente \mathbb{R}^2/D . Si v es un vector de \mathbb{R}^2 , la clase de equivalencia $v + D$ será llamada el **retículo** en \mathbb{R}^2 definido por v .

Proposición 2.23. El conjunto T_1^2 es homeomorfo al conjunto T_2^2 , donde $T_2^2 = \sigma^*(\mathbb{R}^2)$ y

$$\sigma^*(c_1, c_2) = ([a + b \cos 2\pi c_1] \text{ sen } 2\pi c_2, [a + b \cos 2\pi c_1] \cos 2\pi c_2, b \text{ sen } 2\pi c_1),$$

Para algunos a y b prefijados en \mathbb{R} tales que $0 < b < a$, es claro que T_2^2 es una variedad diferenciable.

Demostración. Demostremos primero que $\sigma^*(u) = \sigma^*(v)$, sii, u y v están en el mismo retículo. En efecto, si

$$\begin{aligned} ([a + b \cos 2\pi u_1] \text{ sen } 2\pi u_2, [a + b \cos 2\pi u_1] \cos 2\pi u_2, b \text{ sen } 2\pi u_1) \\ = ([a + b \cos 2\pi v_1] \text{ sen } 2\pi v_2, [a + b \cos 2\pi v_1] \cos 2\pi v_2, b \text{ sen } 2\pi v_1), \end{aligned}$$

entonces $2\pi v_1 = 2\pi u_1 + 2\pi n$ y $2\pi v_2 = 2\pi u_2 + 2\pi m$ para m y n en \mathbb{Z} ; de donde $(v_1, v_2) = (u_1, u_2) + D$. Es decir, u y v pertenecen al mismo retículo.

Ahora bien, si u y v están en el mismo retículo, es fácil ver que sus imágenes bajo σ^* coinciden.

Como $\sigma^* : T_1^2 \rightarrow T_2^2$ es uno-uno, sobre y continua ella y su inversa, tenemos que T_1^2 es homeomorfo a T_2^2 . ✠



Figura 2.1: El Toro

Proposición 2.24. El conjunto T_2^2 , Figura 2.1, es difeomorfo a $S^1 \times S^1$. S^1 es la circunferencia de radio 1 en \mathbb{R}^2 .

Demostración. S^1 se cubre con las siguientes cuatro parametrizaciones:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (x, \sqrt{1-x^2}) & \varphi_2(x) &= (x, -\sqrt{1-x^2}) \\ \varphi_3(x) &= (\sqrt{1-x^2}, x) & \varphi_4(x) &= (-\sqrt{1-x^2}, x) \end{aligned}$$

donde cada φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, tiene como dominio $(-1, 1)$. Para cubrir $S^1 \times S^1$ necesitamos dieciseis parametrizaciones con dominio en $(-1, 1) \times (-1, 1)$ dadas por

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= (\varphi_1(x), \varphi_1(y)) & \psi_2(x, y) &= (\varphi_3(x), \varphi_1(y)) \\ \psi_3(x, y) &= (\varphi_1(x), \varphi_2(y)) & \psi_4(x, y) &= (\varphi_3(x), \varphi_2(y)) \\ \psi_5(x, y) &= (\varphi_1(x), \varphi_3(y)) & \psi_6(x, y) &= (\varphi_3(x), \varphi_3(y)) \\ \psi_7(x, y) &= (\varphi_1(x), \varphi_4(y)) & \psi_8(x, y) &= (\varphi_3(x), \varphi_4(y)) \\ \psi_9(x, y) &= (\varphi_2(x), \varphi_1(y)) & \psi_{10}(x, y) &= (\varphi_4(x), \varphi_1(y)) \\ \psi_{11}(x, y) &= (\varphi_2(x), \varphi_2(y)) & \psi_{12}(x, y) &= (\varphi_4(x), \varphi_2(y)) \\ \psi_{13}(x, y) &= (\varphi_2(x), \varphi_3(y)) & \psi_{14}(x, y) &= (\varphi_4(x), \varphi_3(y)) \\ \psi_{15}(x, y) &= (\varphi_2(x), \varphi_4(y)) & \psi_{16}(x, y) &= (\varphi_4(x), \varphi_4(y)) \end{aligned}$$

Las funciones inversas $\pi_i : S^1 \times S^1 \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$, están dadas por

$$\begin{aligned} \pi_1(x, y, z, w) &= (x, z), & \text{para } \psi_1, \psi_3, \psi_9 \text{ y } \psi_{11} \\ \pi_2(x, y, z, w) &= (y, w), & \text{para } \psi_6, \psi_8, \psi_{14} \text{ y } \psi_{16} \\ \pi_3(x, y, z, w) &= (x, w), & \text{para } \psi_5, \psi_7, \psi_{13} \text{ y } \psi_{15} \\ \pi_4(x, y, z, w) &= (y, z), & \text{para } \psi_2, \psi_4, \psi_{10} \text{ y } \psi_{12} \end{aligned}$$

Definamos $A := \{ (x, y) / y > 0, x^2 + y^2 > a^2 \text{ y } x^2 + y^2 < b^2 \}$,

$\chi : (1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow A$

$$(x, y) \mapsto \left(\left[\left(\frac{1-x}{2} \right) a + \left(\frac{1+x}{2} \right) b \right] \cos \left(\frac{\pi}{2} y + \frac{\pi}{2} \right), \right. \\ \left. \left[\left(\frac{1-x}{2} \right) a + \left(\frac{1+x}{2} \right) b \right] \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} y + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

y definamos también

$$\begin{aligned} \vartheta : A &\rightarrow T_2^2 \\ (x, y) &\mapsto \left(x, y, \sqrt{a^2 - \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b \right)^2} \right). \end{aligned}$$

Las funciones π_1, χ y ϑ son difeomorfismos.

Sea $\xi := \vartheta \circ \chi \circ \pi_1 : C_1 \rightarrow C_2$, donde C_1 y C_2 son subconjuntos de $S^1 \times S^1$ y T_2^2 respectivamente, tales conjuntos hacen de ξ un difeomorfismo. Los otros quince difeomorfismos se construyen de manera análoga para cubrir, de esta forma, todo $S^1 \times S^1$ y todo T_2^2 . Concluimos así que: $S^1 \times S^1$ es difeomorfo a T_2^2 . ∇

Corolario 2.7. T_1^2, T_2^2 y $T_3^2 := S^1 \times S^1$ son la misma variedad y la notaremos indistintamente como T^2 .

2.2.1. PLANOS TANGENTES, INMERSIONES Y SUBVARIETADES EN EL TORO

En el resto del capítulo, vamos solamente a considerar variedades finito dimensionales.

Lema 2.21. [?]

1. Si $f : X \rightarrow X'$ y $g : Y \rightarrow Y'$ son inmersiones. Entonces, $f \times g$ también lo es. $f \times g$ es la función definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f \times g : X \times Y &\rightarrow X' \times Y' \\ (x, y) &\mapsto (f(x), g(y)). \end{aligned}$$

2. Si f es una inmersión, su restricción a cualquier subvariedad de su dominio es una inmersión.
3. Cuando $\dim X = \dim Y$, $f : X \rightarrow Y$ es un difeomorfismo local.

Demostración. 1. Como

$$T_{(x,y)}(f \times g) = \begin{bmatrix} T_x(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_y(g) \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_x(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_y(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_x(f) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_y(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\ T_x(f)(z_1) &= T_x(f)(w_1) \\ T_y(g)(z_2) &= T_y(g)(w_2), \end{aligned}$$

como f y g son inmersiones, tenemos

$$z_1 = w_1 \text{ y } z_2 = w_2.$$

De lo anterior, deducimos que $T_{(x,y)}(f \times g)$ es uno-uno y, por lo tanto, $f \times g$ es una inmersión.

2. Supongamos que $f : Y \rightarrow X$ es una inmersión y sea $Q \subseteq Y$ una subvariedad de Y . Designemos con $\iota : Q \rightarrow Y$ la inclusión canónica $\iota(x) = x$.

$$\begin{aligned} f|_Q(x) &= f \circ \iota(x) \\ &= f(\iota(x)), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} T_x((f|_Q)) &= T_x((f \circ \iota)) \\ &= T_{\iota(x)}(f) \cdot T_x(\iota) \\ &= T_x(f) \cdot \iota \\ &= T_x(f), \end{aligned}$$

entonces $f|_Q$ es una inmersión, ya que f también lo es.

3. Sea $x \in Y$, por ser f una inmersión, $T_x(f) : T_x(Y) \rightarrow T_{f(x)}(X)$ es uno-uno. Por la Ecuación Dimensional [?] $T_x(f)$ es también sobre. Por el Teorema de la Función Inversa [?] f es un difeomorfismo local.

✠

2.2.2. LA CURVA DE KRONECKER

Proposición 2.25. [?]

1. La función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^1 &\rightarrow S^1 \\ g(t) &\mapsto (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo local.

2. $G := g \times g$ es un difeomorfismo local de \mathbb{R}^2 en T^2 . Si L es una línea de \mathbb{R}^2 , $G|_L$ es una inmersión. Si L tiene pendiente irracional, G es uno-uno y L es denso en T^2 .

Demostración. 1. Como

$$\begin{aligned} T_t(g) &= (-2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2\pi \cos 2\pi t) \\ \text{entonces } T_t(g)(x) &= T_t(g)(y) \text{ implica} \\ (-2\pi x \operatorname{sen} 2\pi t, 2\pi x \cos 2\pi t) &= (-2\pi y \operatorname{sen} 2\pi t, 2\pi y \cos 2\pi t) \\ x \operatorname{sen} 2\pi t &= y \operatorname{sen} 2\pi t \text{ y } x \cos 2\pi t = y \cos 2\pi t \\ \operatorname{sen} 2\pi t(x - y) &= 0 \text{ y } \cos 2\pi t(x - y) = 0, \\ \text{encontrando que: } &x = y; \end{aligned}$$

ya que si $\operatorname{sen} 2\pi t = 0$, entonces $\cos 2\pi t \neq 0$ y recíprocamente. Por lo tanto, $T_t(g)$ es uno-uno y por ende sobre. Por el lema anterior, G es difeomorfismo local.

2. Ya que g es inmersión, por el lema anterior, G también lo es. Pero como \mathbb{R}^2 y $S^1 \times S^1$ tienen la misma dimensión, nuevamente por el lema, G es un difeomorfismo local. Como L es una subvariedad de \mathbb{R}^2 , $G|_L$ es una inmersión. Supongamos ahora que L tiene pendiente irracional m . Definamos

$$f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t, mt).$$

Supongamos que

$$G(f(t)) = G(f(s)), \text{ entonces,} \\ G(t, mt) = G(s, ms) \text{ en otras palabras} \\ \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\pi t = \cos 2\pi s \\ \sen 2\pi t = \cos 2\pi s \\ \cos 2\pi mt = \cos 2\pi ms \\ \sen 2\pi mt = \sen 2\pi ms \end{array} \right. \quad \text{lo que implica} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2\pi t = 2\pi s + 2\pi n, \text{ es decir, } t - s = n \\ 2\pi mt = 2\pi ms + 2k\pi, \text{ es decir, } m = \frac{k}{t-s}. \end{array} \right.$$

Cuando k y $t - s = n$ son enteros distintos de cero, la función no es uno-a-uno. Pero como la pendiente es irracional, la igualdad $m = \frac{k}{t-s}$ nunca sería válida. Esto quiere decir que, necesariamente, $t = s$ y, por tanto, $G|_L$ es uno a uno. Veamos ahora que L es densa en T^2 [?]. En efecto. Llamemos S a la imagen inversa de L por G . Una recta con pendiente irracional la podemos ver como el conjunto de todas las parejas $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x_2 - mx_1 = 0$. El conjunto

$$G^{-1}(S) = \{(t + p, mt + q) \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } t \in \mathbb{R}\}.$$

Este conjunto es el de todas las líneas rectas en \mathbb{R}^2 cuya ecuación es de la forma

$$x_2 - q - m(x_1 - p) = 0$$

donde p y q son enteros. Si probamos que $G^{-1}(S)$ es denso en \mathbb{R}^2 , habremos probado que L es denso en T^2 .

Ya que las líneas descritas anteriormente son paralelas la una de la otra, será suficiente mostrar que su intersección con el eje y es densa en dicho eje. Estas intersecciones con dicho eje tienen la forma $(0, q - mp)$. Debemos probar que si y es cualquier número real y ϵ cualquier número real positivo, existen enteros p y q tales que $|q - mp - y| < \epsilon$.

Vamos a suponer que el caso $y = 0$ es válido. Demostremos el caso general. Supongamos que podemos encontrar enteros q_1 y p_1 tales que $|q_1 - mp_1| < \epsilon$. Entonces, $c_1 = q_1 - mp_1$ es un número irracional y por tanto, c_1 no es nulo.

Sea k el más grande entero que no excede a y/c_1 . Entonces haciendo $q = kq_1$ y $p = kp_1$, se sigue que

$$|q - mp - y| = |kc_1 - y| = |c_1| \left| k - \frac{y}{c_1} \right| < |c_1| < \epsilon,$$

de esta forma, nuestra afirmación está demostrada.

El caso $y = 0$ se deduce fácilmente de un teorema concerniente a la aproximación de números irracionales por números racionales, teorema debido a Kronecker: Teorema 2.6.[?].

✠

Teorema 2.6. *Sea m un número irracional. Entonces existe una sucesión de enteros p_1, p_2, \dots y q_1, q_2, \dots tales que $q_i \geq i - 2$ y*

$$\left| m - \frac{p_i}{q_i} \right| \leq \frac{1}{q_i^2}$$

para $i = 2, 3, 4, \dots$

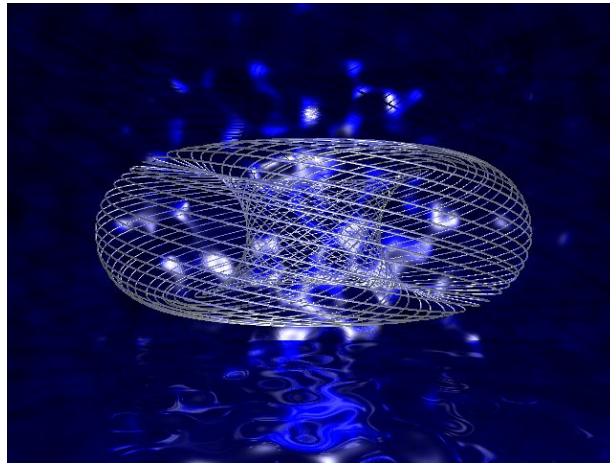


Figura 2.2: La curva de Kronecker

Demostración. Definamos la sucesión de números irracionales m_0, m_1, \dots y la sucesión de enteros l_1, l_2, \dots de la siguiente forma: $m_0 = m$, l_i es el entero más grande que no excede a m_{i-1} , y

$$m_i = \frac{1}{m_{i-1} - l_i}.$$

Ya que $0 < m_{i-1} - l_i < 1$, se sigue que $m_i > 1$ y, por tanto, $l_{i+1} \geq 1$ para $i = 1, 2, 3, \dots$. Definamos entonces dos sucesiones de enteros p_1, p_2, \dots y q_1, q_2, \dots como sigue: $m_1 = 1$, $m_2 = l_1$, $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, y

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= l_i p_i + p_{i-1} \\ q_{i+1} &= l_i q_i + q_{i-1} \end{aligned}$$

para $i = 2, 3, \dots$. Se pueden probar, por inducción, los siguientes hechos:

1.

$$q_i \geq i - 2 \quad \text{para todo } i$$

2.

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_{i-1} q_i} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots$$

3.

$$m - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_i(q_i m_{i-1} + q_{i-1})} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots$$

Habiendo probado lo anterior y de las desigualdades $m_{i-1} \geq 1$ y $q_{i-1} \geq 0$ para $i = 2, 3, \dots$ se sigue que

$$q_i(q_i m_{i-1} + q_{i-1}) \geq n_i^2$$

Por lo tanto

$$\left| m - \frac{p_i}{q_i} \right| \leq \frac{1}{q_i^2}$$

✠

Definición. La subvariedad L anterior, se conoce con el nombre de **Curva de Kronecker**. ¡Es una subvariedad de dimensión menor que el toro, pero densa en éste!. Esta subvariedad puede ser apreciada en la Figura 2.2.

En este capítulo mezclaremos nuestros dos ingredientes. Esta mezcla debe ser cuidadosa. Se hará de la siguiente manera: gracias a que las ecuaciones diferenciales están definidas en espacios de Banach y las variedades son localmente espacios de Banach, lo natural es definir estas ecuaciones localmente. Esto quiere decir que los posibles hechos globales que se tengan en EDOS no necesaria o inmediatamente se tendrán en variedades.

Un punto x en una variedad, tiene una vecindad coordinada y una carta ϕ que lo identifica difeomorfamente con un único punto en el espacio de Banach, en el que la variedad está modelada. Por eso, podemos atrevernos a decir que x es un punto del espacio de Banach y que cuando este espacio es de dimensión finita, x tiene unas coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Por esta razón, en este capítulo vamos a cambiar nuestro lenguaje. En este orden de ideas notaremos, en algunos casos, las cartas igual que los puntos de la variedad. A pesar de ser un aparente error, técnicamente es correcto y su extrema formalización no es difícil

3.1. CAMPOS EN VARIEDADES

3.1.1. PRIMEROS EJEMPLOS

Ejemplo 3.1. Consideremos una partícula de masa $m = 1\text{g}$, atada a un hilo de longitud 1. Se hace girar con movimiento circular uniforme. Suponiendo ausencia de rozamiento, cosa que no es posible en la realidad, sobre la partícula actuará una fuerza total dirigida hacia el centro de la circunferencia (fuerza centrípeta). De lo anterior, y por la ley fundamental de la dinámica, encontramos que:

$$F = \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2}$$

pero, por la condición de ser F una fuerza centrípeta, tenemos también que

$$F = -x_j \quad \text{de donde}$$

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2} + x_j = 0.$$

Para $i = 1, 2, \dots, n$ estas ecuaciones diferenciales representan a los n osciladores armónicos, los cuales se pueden escribir como $2n$ ecuaciones de orden uno al hacer el cambio de variable

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -x_j,$$

para $j = 1, 2, \dots, n$. La ecuación diferencial anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde $\mathbf{0}_n$ y \mathbf{I}_n son la matriz nula y la matriz idéntica de orden n respectivamente. Obtenemos así un campo de vectores definidos en \mathbb{R}^{2n} .

Si deseamos estudiar trayectorias que presenten un valor fijo para la energía, por ejemplo 1 Ergio, vemos que

$$\begin{aligned} E_c &= mv^2 \\ &= \left(\sqrt{\sum \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 + \sum \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2} \right)^2 \\ &= \sum u_i^2 + \sum x_i^2 \\ &= \|(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Las trayectorias pertenecen, entonces, a S^{2n-1} .

Si $\sum a_i = 1$, donde los $a_i > 0$, entonces el toro T^n está definido por

$$x_j^2 + u_j^2 = a_j \quad \text{para } j = 1, \dots, n,$$

este toro está contenido por trayectorias contenidas en S^{2n-1} . Por lo tanto, la ecuación (3.1) induce un campo de vectores en el toro T^n .

Ejemplo 3.2.

El problema de los dos cuerpos está modelado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_j}{\partial t} &= u_j \\ \frac{\partial u_j}{\partial t} &= -\frac{x_j}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \quad \text{para } j = 1, 2.\end{aligned}$$

En este caso, se pretende estudiar el campo de vectores anterior en la variedad

$$X^4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 \neq 0 \text{ o } x_2 \neq 0 \right\}$$

la cual es homeomorfa a $\mathbb{R}^3 \times S^1$. En efecto, el conjunto X^2 definido por $\{(x, y) / x \neq 0 \text{ o } y \neq 0\}$ es homeomorfo al cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ a través del homeomorfismo

$$\begin{aligned}h(x, y) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) \right) \\ \text{y } h^{-1}(x, y, z) &= (xe^z, ye^z).\end{aligned}$$

A continuación daremos algunas definiciones básicas de flujos en una variedad y estudiaremos el comportamiento local de las trayectorias. Dicho comportamiento local mostrará que debemos restringirnos a situaciones "genéricas", siguiendo la formulación del teorema fundamental de la teoría cualitativa genérica de los flujos. Al hacer esto, estamos inclinados a mirar el concepto de estabilidad estructural que desarrolla el papel más importante en la teoría cualitativa.

Definición. Un **fibrado vectorial** de clase C^k sobre una variedad diferenciable X es una función

$$\pi : \tilde{X} \rightarrow X$$

de una \mathbb{F} -variedad \tilde{X} diferenciable de clase C^k sobre X , que cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$, la imagen inversa $\pi^{-1}(x) = \mathbb{F}_x$ es un espacio de Banach. Si y es otro punto de X , \mathbb{F}_y es un espacio de Banach isomorfo a \mathbb{F}_x .
2. Para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta U de $x \in X$, junto con un difeomorfismo

$$\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{F}_x$$

tal que la relación conmutativa

$$p \circ \tau = \pi_U$$

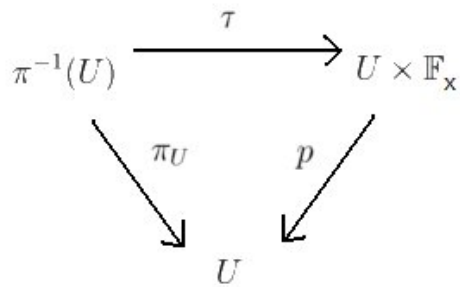
se mantiene en el diagrama y que la función

$$\begin{aligned}\tau_x : \pi^{-1}(x) &\rightarrow \mathbb{F}_x \\ e &\mapsto \tau_x(e) = q(\tau(e))\end{aligned}$$

es una transformación lineal biyectiva.

En la definición anterior, π_U es la función definida por π en $\pi^{-1}(U)$ y

$$p : U \times \mathbb{F} \rightarrow U \quad q : U \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$$



son las proyecciones naturales.

Si π es un fibrado vectorial de clase C^k sobre la variedad diferenciable X , el espacio \mathbb{F} se llama el **espacio total** de π . Para cada $x \in X$ el espacio $\pi^{-1}(x)$ es la **fibra** en el punto x . La vecindad U es la **vecindad descomponedora** de x y el difeomorfismo τ es la **función descomponedora**.

Ejemplo 3.3. Los siguientes ejemplos corresponden a fibrados vectoriales

1. *El fibrado producto* $X \times \mathbb{B}$. Consideremos el producto topológico $X \times \mathbb{B}$ y la proyección natural

$$\pi : X \times \mathbb{B} \rightarrow X,$$

donde \mathbb{B} es un espacio de Banach. Es claro que $X \times \mathbb{B}$ es una variedad diferenciable modelada en el espacio $\mathbb{E} \times \mathbb{B}$. En este ejemplo, \mathbb{E} es el espacio de Banach donde la variedad está modelada. Esto quiere decir que la primera condición de fibrado vectorial se satisface. En efecto: π es una función de clase C^k y para cada $x \in X$ la imagen inversa

$$\pi^{-1}(x) = x \times \mathbb{B}$$

adquiere la estructura lineal de \mathbb{B} .

Para ver que la segunda condición también se satisface, tomemos $U = X$. El difeomorfismo identidad

$$\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{B}$$

es la función descomponedora. Por lo tanto, π es un fibrado vectorial de clase C^k .

2. *El fibrado tangente* $T(X)$. Consideremos el conjunto

$$T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x(X)$$

de todos los vectores tangentes en X . Definamos una función

$$\begin{aligned}
 \pi : T(X) &\rightarrow X \\
 v &\mapsto \pi(v) = x
 \end{aligned}$$

siempre y cuando $v \in T_x(X)$. Para cada $x \in X$, la imagen inversa

$$\pi^{-1}(x) = T_x(X)$$

es un espacio lineal isomorfo a \mathbb{E} .

Sea ϕ una carta para X y supongamos a X una variedad de dimensión finita. Entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n} \right)$$

es una base para $T_x(X)$, con $x \in \text{dom}(\phi)$. Por lo tanto, cada vector tangente $v \in \pi^{-1}(\text{dom}(\phi))$ puede ser expresado por

$$v = \sum_{i=1}^n \xi_i(v) \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Definamos una función

$$\begin{aligned} \tau_\phi : \pi^{-1}(\text{dom}(\phi)) &\rightarrow \text{dom}(\phi) \times \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto \pi(v) \times [\xi_1(v), \dots, \xi_n(v)]. \end{aligned}$$

τ_ϕ es claramente biyectiva, y por lo tanto, induce una topología en $\pi^{-1}(\text{dom}(\phi))$ de la siguiente manera: Un subconjunto W de $\pi^{-1}(\text{dom}(\phi))$ es abierto sii $\tau_\phi(W)$ es abierto en $\text{dom}(\phi) \times \mathbb{R}^n$. Ya que

$$T(X) = \bigcup_{\phi \in \mu_\sigma} \pi^{-1}(\text{dom}(\phi))$$

donde μ_σ es el atlas maximal de X . Por esta razón, podemos definir en $T(X)$ una topología de la siguiente manera: W en $T(X)$ es abierto sii $W \cap \pi^{-1}(\text{dom}(\phi))$ es abierto en $\pi^{-1}(\text{dom}(\phi))$ para toda $\phi \in \mu_\sigma$. En este orden de ideas, $T(X)$ se convierte en una variedad topológica y τ_ϕ en un homeomorfismo. Cada carta $\phi \in \mu_\sigma$ define una función

$$\begin{aligned} \phi^* : \pi^{-1}(\text{dom}(\phi)) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto \phi(\pi(v)) \times [\xi_1(v), \dots, \xi_n(v)]. \end{aligned}$$

Esta ϕ^* es una carta para $T(X)$ y la colección

$$\alpha = \{\phi^* \mid \phi \in \mu_\sigma\}$$

es un atlas en $T(X)$. Este atlas hace de $T(X)$ una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Es fácil verificar que

$$\pi : T(X) \rightarrow X$$

es un fibrado vectorial para X con τ_ϕ como la función descomponedora para cada carta $\phi \in \mu_\sigma$.

3. *El fibrado cotangente $T^*(X)$.* Si en la construcción del fibrado tangente, reemplazamos $T_x(X)$ por $T_x^*(X)$ y $\frac{\partial}{\partial \phi_i}$ por $d(\phi_i)$, obtenemos un fibrado vectorial π sobre X con $T^*(X)$ como variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Definición. Sea π un fibrado vectorial de clase C^k sobre una variedad diferenciable X . Una **sección transversal** de π de clase C^k es una función de clase C^k

$$\gamma : X \rightarrow \mathbb{F}$$

tal que $\pi \circ \gamma$ es la función idéntica en X . Sea $\Gamma(\pi)$ el conjunto de todas las secciones transversales de π , ya que $\pi^{-1}(x)$ es un espacio lineal sobre el cuerpo de los números reales para todo $x \in X$, podemos definir en $\Gamma(\pi)$ las siguientes operaciones: Sean $\alpha, \beta \in \Gamma(\pi)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces la función

$$\begin{aligned} (a\alpha + b\beta) : X &\rightarrow \mathbb{F} \\ x &\mapsto a[\alpha(x)] + b[\beta(x)] \end{aligned}$$

es claramente una sección transversal de π .

De la definición anterior, obtenemos la siguiente proposición

Proposición 3.1. $\Gamma(\pi)$ es un espacio lineal sobre el cuerpo de los números reales.

3.1.2. FLUJOS, TRAYECTORIAS Y SINGULARIDADES

Definición. Las siguientes son las definiciones de flujo y trayectoria:

1. Sea X un \mathbb{E} -variedad de clase C^k . Un **Flujo** o **campo vectorial** es una aplicación

$$\begin{aligned} V : X &\rightarrow T(X) \\ x &\mapsto V(x) \in T_x(X), \end{aligned}$$

tal que la composición $\pi \circ V$ es la función idéntica en X .

Para cualquier $v \in T_x(X)$ y cualquier $f \in L_x(X)$ usaremos la notación abreviada

$$v(f) = v[f]_L$$

Un campo vectorial V es de clase C^k sii para cada función $f \in F^k(X)$,

$$\begin{aligned} f_V : X &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto V(x)(f) \end{aligned}$$

es de clase C^k .

2. Una **curva integral** del flujo V en X es una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow X$, tal que en cada punto $\gamma(t)$, $t \in (a, b)$, su vector tangente es igual al flujo en ese punto, es decir,

$$\frac{\partial \gamma(t)}{\partial t} = V(\gamma(t)). \quad (3.2)$$

3. Una trayectoria de V es un subconjunto de X constituido por los puntos de una curva integral de X . Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ para algún $c \in (a, b]$, se dice que la **trayectoria es cerrada** o también **órbita cerrada**.

Se dice que la Ecuación (3.2) define en coordenadas locales una **ecuación diferencial** en X y el **parámetro** t , llamado como es usual, "tiempo". Vemos, por lo tanto, que localmente estamos en la misma situación que en el caso de ecuaciones diferenciales definidas en espacios euclideos.

La demostración de la siguiente proposición es inmediata.

Proposición 3.2. Las secciones transversales de π son precisamente los campos vectoriales definidos en X .

Aclaración. Sea ϕ una carta para $x \in X$. Es claro que $U = \text{dom}(\phi)$ es una variedad diferenciable y $T_x(U)$ puede ser claramente identificada con $T_x(X)$ para todo $x \in U$. Tenemos entonces que

$$T(U) = \pi^{-1}(U) = \{T_x(X) \mid x \in U\}.$$

Definición. Un punto ordinario o punto regular de un flujo V es un punto tal que $V(x) \neq 0$; si $V(x) = 0$ se dice punto singular.

En el caso en el que el espacio \mathbb{B} es de dimensión finita, tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.3. Para toda carta ϕ de clase C^k en una variedad n -dimensional X , los n vectores tangentes

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n}$$

son campos vectoriales de clase C^k .

Demostración. Debido a que los vectores $\frac{\partial}{\partial \phi_i}$ pertenecen al espacio $T_x(X)$, sólo nos falta demostrar que ellos son de clase C^k . En efecto, notemos con f_i a la función

$$f_i = f \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

La demostración quedará completa cuando comprobemos que la función f_i es de clase C^k . Para tal fin definamos la función

$$\begin{aligned} g : \text{img}(\phi) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g(t) = f(\phi^{-1}(t)). \end{aligned}$$

Claramente g es una función de clase C^k . Como

$$f_i(x) = D_i(g)(\phi(x)) = (D_i(g) \circ \phi)(x),$$

f_i es la composición de dos funciones de clase C^k . Esto quiere decir que la función f_i es de clase C^k . \spadesuit

Ahora, sea V un campo de vectores de clase C^k definido en una vecindad coordenada U para una determinada carta ϕ . Fijemos un punto $x \in U$. Ya que los vectores

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n}$$

son una base para el espacio tangente $T_x(X)$, entonces existen n números reales $a_1(x), \dots, a_n(x)$ tales que

$$V(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial \phi_i}.$$

Gracias a que esto se cumple para todo $x \in U$, la asignación $x \mapsto a_j(x)$ define una función a_j en la vecindad coordenada U para todo $j = 1, \dots, n$.

Proposición 3.4. Para todo $j = 1, \dots, n$, la función a_j es una función de clase C^k .

Demostración. Por la Proposición 2.14, la función coordenada ϕ_j es de clase C^k . Ya que

$$\frac{\partial}{\partial \phi_i}(\phi_j) = \delta_{ij}$$

es cierta para todo $x \in U$, tenemos que

$$v(\phi_j) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}(\phi_j) = a_j.$$

Puesto que v es un campo de vectores de clase C^k , esto implica que cada a_i es de clase C^k . ✠

Por ejemplo, si x es un punto singular de X , la curva $\gamma(t) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ es una trayectoria C^∞ y el punto x es una trayectoria de X , la única que pasa por ese punto.

Discutiremos a continuación la siguiente pregunta: ¿Cuál es el comportamiento de curvas integrales de X en una vecindad de $x \in X$?

Se considerará primero el caso en el que x es un punto regular. Tenemos la intuición que las trayectorias son como "paralelas", pues no se interceptan, formando así un "tubo". Se trata de formular en una variedad el teorema clásico de existencia, unicidad y diferenciabilidad de las soluciones de una EDO respecto a sus datos iniciales.

3.1.3. TEOREMA DEL FLUJO TUBULAR

Definición. Sean: X una variedad C^∞ de dimensión m , $x \in X$,

$$V : X \rightarrow T(X)$$

un flujo o campo en X y sea $Q = \{(y_1, \dots, y_n) \mid |y^j| \leq 1, j = 1, \dots, m\}$ cubo en \mathbb{R}^m . Un flujo **flujo tubular** (F, γ) en x es una vecindad F de x en X , junto con un difeomorfismo $\gamma : U \supset F \rightarrow \mathbb{R}^m$, U vecindad coordenada, el cual aplica F sobre Q y la derivada γ_* lleva V sobre el flujo $(1, 0, \dots, 0)$ en Q . El conjunto F se llama a menudo **tubo**.

Teorema 3.1 (Teorema del Flujo Tubular). *En todo punto regular $x \in X$ de un flujo V de X , existe un flujo tubular.*

Demostración. Sea $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ un sistema de coordenadas de x con dominio, de tal manera que de acuerdo con la Ecuación (3.2), X está representado por las coordenadas locales por

$$\dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} = V^i(x^1, \dots, x^m) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

Supongamos $\phi(x) = 0 \in \mathbb{R}^m$ y consideremos la ecuación anterior en el conjunto $x(D) \subset \mathbb{R}^m$. Como x es regular de V , podemos suponer, por ejemplo, que

$$V^1(0, \dots, 0) > 0$$

En la Ecuación (3.3) cambiamos el parametro t por τ de tal manera que

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = X^1,$$

por lo tanto la Ecuación (3.3) se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial \tau} &= 1 \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tau} &= \frac{V^2}{V^1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial x^m}{\partial \tau} &= \frac{V^m}{V^1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

estas ecuaciones son válidas en una vecindad $N \subset x(D)$ del origen, donde

$$V^1(x^1, \dots, x^m) > 0.$$

La primera ecuación en (3.4) muestra que x^1 desempeñará el papel del tiempo t .

Consideramos ahora la solución a (3.4):

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1 \\ x^2 &= x^2(x^1; x_0^1, \dots, x_0^m) \\ &\vdots \\ x^m &= x^m(x^1; x_0^1, \dots, x_0^m), \end{aligned} \tag{3.5}$$

esta solución pasa por $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in N$ cuando $x^1 = x_0^1$.

Por continuidad podemos hallar un real $\alpha > 0$ y una vecindad del origen $N_1 \subset N$ pequeña, para los cuales $|x^1 - x_0^1| < \alpha$, $x_0 \in N_1$ y $(x^1, \dots, x^m) \in N$. Usamos ahora el hecho de que la transformación

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^{m-1} &\rightarrow \mathbb{R}^{m-1} \\ (x_0^2, \dots, x_0^m) &\mapsto (x^2, \dots, x^m) \end{aligned}$$

definida para todo $|x^1 - x_0^1| < \alpha$ por (3.5) es un difeomorfismo debido al Teorema 1.2, es decir

$$\frac{\partial g}{\partial x_0} \neq 0.$$

En (3.5) las x^j son funciones de clase igual a la del flujo V , que es también la clase del difeomorfismo anterior. Por el teorema de la función inversa, obtenemos que para x_0 en una vecindad $N_2 \subset N_1$ del origen podemos invertir g y obtenemos

$$x_0 = f^j(x^1, \dots, x^m) \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, m$$

de manera que las f^j son funciones diferenciables, constantes a lo largo de las trayectorias de V y no constantes en ningún abierto. Tales funciones se llaman **integrales primeras** de V . Hacemos el siguiente cambio de variable para $(x^1, \dots, x^m) \in N_2$

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (x^1, \dots, x^m) \mapsto (y^1, \dots, y^m).$$

El origen es punto fijo para f en una pequeña vecindad G de x debido a que $y^1 = x^1 = 0$ y a que el flujo (3.5) en este punto es la identidad por Teorema 1.2.

En una pequeña vecindad G de x en X tenemos entonces el sistema de coordenadas

$$y : G \rightarrow \mathbb{R}^m \\ q \mapsto y(q) = f(x(q))$$

y cambiando escalas en las coordenadas de tal manera que $y(G) \supset Q$, el flujo tubular buscado es entonces $F = y^{-1}(Q)$.

En coordenadas y^j la Ecuación (3.3) se convierten en:

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial x^1}{\partial \tau} = 1 \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{\partial f^2(x^2, \dots, x^m)}{\partial x^1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial y^m}{\partial x^1} = \frac{\partial f^m(x^2, \dots, x^m)}{\partial x^1} = 0,$$

es decir, y_* transforma V en $Y = (1, 0, \dots, 0)$. ✠

El tubo así obtenido puede ser muy pequeño a lo largo de las trayectorias. Este problema tiene solución en este caso particular.

Teorema 3.2 (Teorema del Flujo Tubular Grande). *Sea $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 1$, un arco no cerrado de una trayectoria de un flujo V en X , $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ si $t \neq t'$, entonces existe un flujo tubular (F, y) con $\gamma \subset F$.*

Demostración. Del Teorema 3.1 y del hecho de que $\gamma = (\gamma(t))_{0 \leq t \leq 1}$ es un compacto, por ser imagen de un compacto por una aplicación continua, todo punto de γ está contenido en el interior de un flujo que interseca a γ en un conexo, es decir, en un arco.

Escojamos una colección finita \mathcal{C} de esos tubos, de tal manera que sus interiores cubran γ ; podemos suponer también que los tubos de \mathcal{C} después de ser afinados si es necesario, son tales que si dos de ellos se intersecan, su intersección sea conexa y contenga un arco de γ .

Sean F_1, \dots, F_k los tubos de \mathcal{C} y denotemos con $[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_k, \beta_k]$ los intervalos cerrados de $[0, 1]$ correspondientes. Por la hipótesis hecha sobre γ podemos admitir que sacando los elementos superfluos de \mathcal{C} , los intervalos $([\alpha_i, \beta_i])_{i=1}^k$ están ordenados, es decir, $[\alpha_i, \beta_i]$ interseca a $[\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}]$ y a $[\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}]$ si $1 < i < k$; con $\alpha_1 = 0$ y $\beta_k = 1$.

Sea y , el sistema de coordenadas asociado a F_1 y para $\epsilon > 0$ sea $Q_1(\epsilon)$ el subconjunto del cubo correspondiente Q_1 definido por $|y_1^j| < \epsilon$ $j = 2, \dots, m$. Entonces, para ϵ pequeño toda trayectoria de V por $y_1^{-1}Q_1(\epsilon)$ atravesará los tubos F_i . Designemos por $\sigma(y_1^{-1}Q_1(\epsilon))$ el natural de $y_1^{-1}Q_1(\epsilon)$, es decir, la unión de todas las trayectorias que pasan por un punto de $y_1^{-1}Q_1(\epsilon)$. Escribamos

$$F = \sigma(y_1^{-1}Q_1(\epsilon)) \cap (\bigcup F_i).$$

$F \supset \gamma$ y para demostrar el teorema, falta ver que F es un flujo tubular. Sea $Q = Q_1(\epsilon) \times [0, 1]$ y definamos una aplicación $y : F \rightarrow Q$ así: $x \in F$ está caracterizado por $x(0)$ donde la trayectoria de V por él, alcanza la base $y_1^{-1}Q_1(\epsilon)$ y por el tiempo t que lleva ir de $x(0)$ a x . Si T es el tiempo que la trayectoria permanece en F , definimos

$$y : F \rightarrow Q$$

$$x \mapsto y(x) = (y_1 x(0), \frac{t}{T}),$$

es claro que (F, y) es un flujo tubular ✠

El teorema anterior aclara el comportamiento de las trayectorias de X en vecindades de un arco de trayectoria. Aunque el arco sea largo, si el no es cerrado y sin singularidades podemos aclarar su comportamiento.

3.1.4. GRUPO DE DIFEOMORFISMOS GENERADOS POR UN FLUJO

Sea V un flujo en X y $V_t(x)$ la trayectoria pasando por x para $t = 0$, donde t está en cierto intervalo abierto.

Proposición 3.5. *Si X es compacto, el anterior intervalo es \mathbb{R} .*

Demostración. Por la contrarrecíproca del Teorema 1.3. ✠

Corolario 3.1. *Para todo t en \mathbb{R} , la aplicación $x \rightarrow V_t(x)$ es difeomorfismo de X sobre X . Estos difeomorfismos, al igual que en el Teorema 1.2, constituyen un grupo abeliano. Denotamos con $(V_t)_{t \in \mathbb{R}}$ al **grupo de difeomorfismos generados por X** .*

Se dice entonces que un flujo es equivalente a la "acción" del grupo abeliano \mathbb{R} sobre X . Esto implica generalizaciones, de manera que podemos hablar de la acción de \mathbb{R}^2 sobre X ; en general de la acción de un grupo de Lie G sobre X .¹ No haremos esto en general; veremos esto en el caso $G = \mathbb{R}$, El caso general está lejos de nuestro alcance.

3.1.5. EQUIVALENCIA LOCAL DE TRAYECTORIAS

El teorema del flujo tubular implica que las trayectorias de un flujo tengan estructura de variedad en una vecindad de un punto regular, de manera que dos de estos puntos se consideran como equivalentes desde el punto de vista geométrico. Precisemos esta noción de equivalencia local.

¹Un grupo de Lie es un grupo que a su vez es una variedad. En un grupo de Lie la operación y la inversión son compatibles con la estructura de variedad

Definición. Sean V_1 y V_2 flujos en X , $x, y \in X$. V_1 y V_2 se dicen localmente equivalentes en x e y respectivamente sii existe U una vecindad de x , W una vecindad de y y $H : U \rightarrow W$ homeomorfismo de U sobre W , el cual lleva trayectorias de V_1 sobre trayectorias de V_2 . Esto quiere decir que con $y = H(x)$ y $x' = V_1(x)$, entonces $y' = V_2(y)$. Si el homeomorfismo preserva la parametrización, se dice que los sistemas $x' = V_1(x)$ y $y' = V_2(y)$ son conjugados. Vamos a estudiar el caso en el que el campo V_2 es igual a la derivada del primero en la vecindad de un punto singular.

Proposición 3.6. *Dos puntos regulares son localmente equivalentes*

Demostración. Sean p y q dos puntos regulares de un flujo V . Para p existe un flujo tubular (F, y) y para q existe un flujo tubular (G, z) . Haciendo $h = y \circ z^{-1}$ definida en un conjunto adecuado, tenemos el homeomorfismo deseado. \square

Para puntos singulares, la situación se complica. En el caso de dimensión dos, tenemos los cuatro casos que se ven en la Figura 3.1; los casos (c) y (d) son equivalentes.

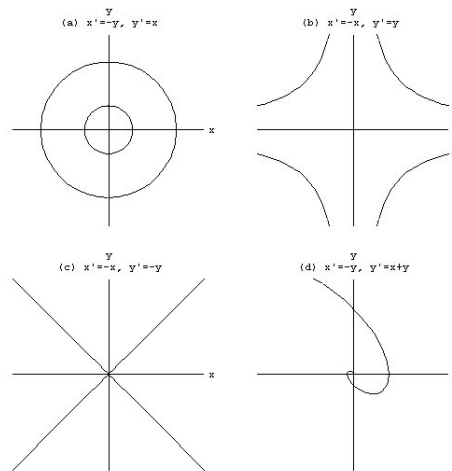


Figura 3.1: Flujos en \mathbb{R}^2

Exigir en la definición difeomorfismo y no homeomorfismo complica las cosas, aumentaría el número de tipos posibles.

Veamos que la variedad de comportamientos posibles en una vecindad de una singularidad es inmensa: el caso más simple es cuando X es de dimensión 1, $X = \mathbb{R}$. Un flujo en \mathbb{R} , es caracterizado entonces por una función diferenciable $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Una singularidad es entonces un punto donde X se anula.

Pero se sabe que dado un compacto $K \subset \mathbb{R}$ existe una función diferenciable, la cual tiene como conjunto de ceros K , luego a esta función le podemos asignar un flujo teniendo a K como conjunto de singularidades. Como la estructura de K en la vecindad de uno de sus puntos puede ser muy complicada, así será el comportamiento de las trayectorias en la vecindad de una singularidad.

En dimensión $m > 1$, admitiendo inclusive que la singularidad es aislada las posibilidades son numerosas. Por ello, se deben hacer restricciones sobre los flujos que vamos a considerar.

3.2. PUNTOS SINGULARES

En esta monografía solamente trabajaremos puntos singulares hiper- bólicos.

3.2.1. LINEALIZACIÓN

Definición. Sean X una variedad modelada en un espacio de Banach y V un campo vectorial definido sobre la variedad X . Un punto $x_0 \in X$ es un punto de **equilibrio** o **punto crítico** de $x' = f(x)$ sii $V(x_0) = 0$.

En el caso en el que X es una variedad de dimensión finita y x un sistema de coordenadas definida sobre un abierto que contiene al 0 , podemos definir punto hiperbólico. Un punto de equilibrio es un punto **hiperbólico** sii ninguno de los valores propios de la matriz $A = DV(x_0)$ tiene parte real igual a 0 . El sistema lineal $x' = Ax$ es la **linealización** de la ecuación $x' = V(x)$ en x_0 .

Aclaración. Si $x_0 = 0$ es un punto de equilibrio de $x' = V(x)$, entonces $V(0) = 0$ y por el Teorema de Taylor [?]

$$V(x) = DV(0)x + \frac{1}{2}D^2V(0)(x, x) + \dots$$

Se sigue que la función lineal $DV(0)$ es una primera buena aproximación a la función $V(x)$ cerca de 0 . Si x_0 es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial $x' = V(x)$ y V_t es su flujo, entonces tenemos que $V_t(x_0) = x_0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, x_0 es un punto fijo del flujo ϕ_t .

Daremos una clasificación de los puntos de equilibrio, de acuerdo con los signos de las partes reales de la matriz $DV(0)$.

Definición. Sea x_0 un punto de equilibrio de la ecuación $x' = V(x)$ es un **sifón** o **atractor** sii todos los valores propios de la matriz $DV(x_0)$ tienen parte real negativa; este punto es una **fuentes** sii todos los valores propios de la matriz $DV(x_0)$ tienen parte real positiva y es una **silla** sii es un punto de equilibrio hiperbólico y además la matriz $DV(x_0)$ tiene por lo menos un valor propio con parte real negativa y por lo menos un valor propio con parte real positiva.

Ejemplo 3.4. Retomando el Ejemplo 1.1 del Capítulo 1 en el que teníamos

$$\begin{bmatrix} \theta' \\ \omega' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ -\frac{1}{r} \sin \theta - \frac{k}{m} \omega \end{bmatrix}.$$

La segunda parte de la igualdad anterior la notaremos como $V(\theta, \omega)$. La derivada de esta función en el punto $(0, 0)$ tiene sus valores propios con la parte real negativa. Por lo tanto en el punto $(0, 0)$ tenemos un sifón.

3.2.2. TEOREMA DE HARTMAN-GROBMAN

Ejemplo 3.5. Consideremos la función continua $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$H(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + x_1^2 \\ x_3 + \frac{x_1^2}{3} \end{bmatrix}$$

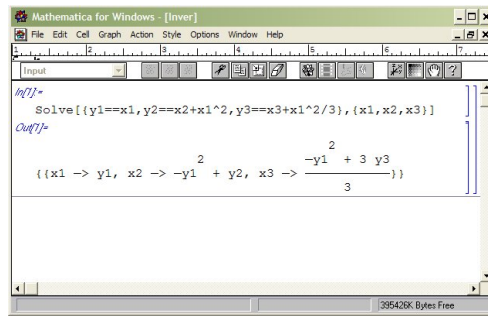


Figura 3.2: Programa Mathematica for Windows

Haciendo uso del programa Mathematica for Windows, (ver Figura 3.5) podemos encontrar la función inversa es decir

$$H^{-1}(y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1^2 \\ y_3 - \frac{1}{3}y_1^2 \end{bmatrix}$$

Ahora, haciendo uso del mismo programa, demostraremos que la función H anteriormente definida, envía el sistema no lineal

$$V(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1^2 \\ x_3 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

en el sistema lineal $x' = DV(0)x$. Esto quiere decir que si $y = H(x)$, entonces $y' = DV(0)y$. En efecto, con algunos cálculos vemos que

$$DV(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

también tenemos que

$$y' = \begin{bmatrix} x_1' \\ 2x_1x_1' + x_2' \\ \frac{2}{3}x_1x_1' + x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_1^2 - x_2 \\ \frac{1}{3}x_1^2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

En el ejemplo anterior, no explicamos cómo se consiguió el homeomorfismo H . Tampoco sabemos si ese homeomorfismo existe para todos los casos. Para resolver estos problemas, vamos a utilizar un resultado que se conoce con el nombre de Teorema de Hartman-Grobman. Para la demostración de este teorema necesitamos un teorema que usaremos como lema y cuya demostración se encuentra en [?].

Lema 3.1. Sean e^{tA} un flujo hiperbólico lineal, A un operador lineal de \mathbb{R}^n en sí mismo. Entonces \mathbb{R}^n tiene una descomposición en suma directa

$$E = E^s \oplus E^u$$

donde cada uno de los sumandos es invariante bajo el operador A . El flujo inducido sobre E^s es una contracción y el flujo inducido sobre E^u es una expansión. Esta descomposición es única.

Aclaración. Recordemos que en los flujos lineales es lo mismo tener los autovalores con parte real siempre negativa, que ser una contracción. Del mismo modo, en estos flujos da igual tener todos los valores con parte real siempre positiva que ser una expansión. Los espacios E^s y E^u son llamados los subespacios estable e inestable del flujo lineal hiperbólico e^{tA} .

Teorema 3.3 (Teorema de Hartman-Grobman). *Sea W un subconjunto abierto de una variedad X modelada en \mathbb{R}^n . Sea $x : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas en W tal que $p \in W$ es un punto de X cuyas coordenadas son $(0, \dots, 0)$. Sea también $V \in C^1(W)$, con V_t notaremos el flujo del sistema no lineal $x' = V(x)$. Supongamos que el punto 0 es un punto de equilibrio y que la matriz $A = DV(0)$ tiene todos sus valores propios con parte real diferente de cero. Entonces existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U_1 de 0 sobre un subconjunto abierto U_2 que también contiene al cero tal que para todo $x_0 \in U_1$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al 0 tal que para todo $t \in I_0$*

$$H \circ V_t(x_0) = e^{At}H(x_0);$$

H envía trayectorias de V cerca del origen en trayectorias de A cerca del origen. Es mas H preserva la parametrización.

Demostración. Vamos a dar sólomente una idea de la demostración. Consideremos el sistema $x' = V(x)$ con $V \in C^1(W)$, $V(0) = 0$ y $A = DV(0)$. Primero que todo vamos a suponer que la matriz A está escrita en la forma

$$\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Q \end{bmatrix}$$

donde los valores propios de P tienen parte real negativa y los valores propios de la matriz Q tienen parte real positiva. Sea V_t el flujo del sistema $x' = V(x)$ y escribimos la solución

$$x(t, x_0) = V_t(x_0) = \begin{bmatrix} y(t, y_0, z_0) \\ z(t, y_0, z_0) \end{bmatrix}$$

donde

$$x_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

$y_0 \in E^s$ y $z_0 \in E^u$. Definimos ahora las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(y_0, z_0) &= y(1, y_0, z_0) - e^P y_0 \\ \tilde{Z}(y_0, z_0) &= z(1, y_0, z_0) - e^Q z_0. \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{Y}(0) = \tilde{Z}(0) = D\tilde{Y}(0) = D\tilde{Z}(0) = 0$. Y como V es de clase C^1 , \tilde{Y} y \tilde{Z} son funciones continuamente diferenciables. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|D\tilde{Y}(y_0, z_0)\| &\leq a \\ \|D\tilde{Z}(y_0, z_0)\| &\leq a \end{aligned}$$

en el conjunto compacto $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq s_0^2$. La constante a puede ser escogida tan pequeña como queramos, escogiendo el s_0 lo suficientemente pequeño. Hacemos $Y(y_0, z_0)$ y $Z(y_0, z_0)$ dos funciones infinitamente diferenciables que son iguales a $\tilde{Y}(y_0, z_0)$ y $\tilde{Z}(y_0, z_0)$ para $|y_0|^2 + |z_0|^2 \leq (\frac{s_0}{2})^2$ y cero para

$|y_0|^2 + |z_0|^2 \geq s_0^2$. Unas funciones así, existen por el Teorema 2.13. Entonces por el Teorema del Valor Medio tenemos que

$$\begin{aligned} |Y(y_0, z_0)| &\leq a\sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq a(|y_0| + |z_0|) \quad y \\ |Z(y_0, z_0)| &\leq a\sqrt{|y_0|^2 + |z_0|^2} \leq a(|y_0| + |z_0|) \end{aligned}$$

para todo $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^n$. Ahora hacemos $B = e^P$ y $C = e^Q$. Se puede asumir sin dificultad que

$$b = \|B\| < 1 \quad y \quad c = \|C^{-1}\| < 1.$$

Para

$$x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

definamos la transformación

$$L(y, z) = \begin{bmatrix} By \\ Cz \end{bmatrix}$$

y

$$T(y, z) = \begin{bmatrix} By + Y(y, z) \\ Cz + Z(y, z) \end{bmatrix}$$

es decir $L(x) = e^A x$ y localmente $T(x) = V(x)$.

Para continuar con la demostración, necesitamos el siguiente hecho: *existe un homeomorfismo H_0 de un conjunto abierto U_1 sobre un conjunto que contiene al origen U_2 tal que*

$$H_0 \circ T = L \circ H_0.$$

Vamos a probar esta afirmación haciendo uso de las aproximaciones sucesivas. Para $x \in \mathbb{R}^n$, sea

$$H_0(x) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix}.$$

Entonces $H \circ T = L \circ H$ es equivalente al par de ecuaciones

$$\begin{aligned} B\Phi(y, z) &= \Phi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\ C\Psi(y, z) &= \Psi(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Primero que todo, definamos las aproximaciones sucesivas para la segunda ecuación por

$$\begin{aligned} \Psi_0(y, z) &= z \\ \Psi_{k+1}(y, z) &= C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Se sigue entonces, por un argumento de inducción, que las funciones Ψ_k son continuas y satisfacen $\Psi_k(y, z) = z$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$. Ahora, probaremos por inducción sobre $j = 1, 2, \dots$

$$|\Psi_j(y, z) - \Psi_{j-1}(y, z)| \leq Mr^j(|y| + |z|)^\delta$$

donde $r = c[2 \max(a, b, c)]^\delta$ con $\delta \in (0, 1)$ escogido lo suficientemente pequeño para que $r < 1$, es posible gracias a que $c < 1$, y $M = ac(2s_0)^{1-\delta}/r$. Primero que todo para $j = 1$

$$\begin{aligned}
|\Psi_1(y, z) - \Psi_0(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_0(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) - z| \\
&= |C^{-1}(Cz + Z(y, z)) - z| \\
&= |C^{-1}Z(y, z)| \\
&\leq \|C^{-1}\| |Z(y, z)| \\
&\leq ca(|y| + |z|) \\
&\leq Mr(|y| + |z|)^\delta.
\end{aligned}$$

Gracias a que $Z(y, z) = 0$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$. Y asumiendo que la hipótesis de inducción se mantiene para $j = 1, 2, \dots$ tenemos pues

$$\begin{aligned}
|\Psi_{k+1}(y, z) - \Psi_k(y, z)| &= |C^{-1}\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\
&\quad - C^{-1}\Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))| \\
&\leq \|c^{-1}\| |\Psi_k(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z)) \\
&\quad - \Psi_{k-1}(By + Y(y, z), Cz + Z(y, z))| \\
&\leq cMr^k[|By + Y(y, z)| + |Cz + Z(y, z)|]^\delta \\
&\leq cMr^k[b|y| + 2a(|y| + |z|) + c|z|]^\delta \\
&\leq cMr^k[2 \max(a, b, c)]^\delta (|y| + |z|)^\delta \\
&= cMr^k(|y| + |z|)^\delta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión Ψ_k es una sucesión de Cauchy de funciones continuas y, entonces, converge uniformemente a una función continua Ψ . También tenemos que $\Psi(y, z) = z$ para $|y| + |z| \geq 2s_0$. Tomando límites en la Ecuación (3.7) encontramos que Ψ satisface la segunda ecuación de (3.6). La primera ecuación de (3.7) la podemos escribir de la siguiente manera:

$$B^{-1}\Phi(B^{-1}y + Y_1(y, z), C^{-1}z + Z_1(y, z))$$

donde las funciones Y_1 y Z_1 están definidas por la inversa de T , quien existe si la constante a es lo suficientemente pequeña y está definida de la siguiente manera:

$$T^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} B^{-1}y + Y_1(y, z) \\ C^{-1}z + Z_1(y, z) \end{bmatrix}$$

entonces, la ecuación (3.2.2) puede ser solucionada para $\Phi(y, z)$ por el método de aproximaciones sucesivas, exactamente como lo hicimos antes con $\Phi_0(y, z) = y$ gracias a que $b = \|B\| < 1$. Obtenemos así la función continua

$$H_0(y, z) = \begin{bmatrix} \Phi(y, z) \\ \Psi(y, z) \end{bmatrix}.$$

Entonces se sigue como en [?] que H_0 es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}^n .

Definamos ahora una familia uniparamétrica de funciones L^t y T^t definidas por

$$L^t(x_0) = e^{At}x_0 \quad T^t(x_0) = V_t(x_0).$$

Definamos

$$H = \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds.$$

Se sigue, entonces, que existe una vecindad del origen para la cual

$$\begin{aligned} L^t H &= \int_0^1 L^{t-s} H_0 T^{s-t} ds T^t \\ &= \int_{-t}^{1-t} L^{-s} H_0 T^s ds T^t \\ &= \left[\int_{-t}^0 L^{-s} H_0 T^s ds + \int_0^{1-t} L^{-s} H_0 T^s ds \right] T^t \\ &= \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds T^t \\ &= H T^t \end{aligned}$$

y puesto que $H_0 = L^{-1} H_0 T$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-t}^0 L^{-s} H_0 T^s ds &= \int_{-t}^0 L^{-s-1} H_0 T^{s+1} ds \\ &= \int_{1-t}^1 L^{-s} H_0 T^s ds \end{aligned}$$

por lo que $H \circ T^t = L^t H$ o lo que es equivalente

$$H \circ V_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

y se puede mostrar como en [?] que la función H así definida es un homeomorfismo en \mathbb{R}^n . Esto termina con la idea de la demostración del teorema. \blackboxtimes

Ejemplo 3.6. Retomemos el Ejemplo 3.5, en el que se definió el campo V . Este campo lo podemos reescribir de la siguiente manera:

$$V(y_1, y_2, z) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 + y_1^2 \\ z + \frac{y_1^2}{3} \end{bmatrix}.$$

El homeomorfismo H en el Ejemplo 3.5 salió como por arte de magia. La demostración del Teorema 3.3 nos brinda una forma de llegar a este homeomorfismo. Para esto volveremos a usar el paquete Mathematica for Windows, puesto que los cálculos son bastantes dispendiosos. La solución que pasa por el punto (y_1, y_2, z) para $t = 0$ está dada por

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{y_1}{e^t} \\ y_2(t) &= \frac{-y_1^2 + e^t y_1^2 + e^t y_2}{e^{2t}} \\ z(t) &= \frac{-y_1^2 + e^{3t} y_1^2 + e^{3t} z}{3e^{2t}}. \end{aligned}$$

Entonces, en el contexto de la prueba tenemos que

$$B = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \quad C = e$$

además tenemos

$$Y(y_1, y_2, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(-1+e)y_1^2}{e^2} \end{bmatrix}$$

$$Z(y_1, y_2, z) = \frac{(-1+e)(1+e+e^2)y_1^2}{3e^2}.$$

Las aproximaciones sucesivas, como en la demostración del Teorema 3.3 nos brindan

$$\begin{aligned} \Psi_0(y_1, y_2, z) &= z \\ \Psi_1(y_1, y_2, z) &= \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{3e^3} + z \\ \Psi_2(y_1, y_2, z) &= \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{3e^6} + z \\ \Psi_3(y_1, y_2, z) &= \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{3e^9} + z \\ \Psi_4(y_1, y_2, z) &= \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{3e^{12}} + z \\ &\vdots \\ \Psi_n(y_1, y_2, z) &= \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_1^2}{3e^{3n}} + z \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que cuando $n \rightarrow \infty$

$$\Psi_n(y_1, y_2, z) \rightarrow \Psi(y_1, y_2, z) = \frac{y_1^2}{3} + z.$$

Ahora vamos a encontrar la función Φ . Los primeros términos de sus aproximaciones sucesivas están dados por

$$\begin{aligned} \Phi_0(y_1, y_2, z) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ \Phi_1(y_1, y_2, z) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^2 - \frac{y_1^2}{e} + y_2 \end{bmatrix} \\ \Phi_2(y_1, y_2, z) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^2 - \frac{y_1^2}{e^2} + y_2 \end{bmatrix} \\ \Phi_3(y_1, y_2, z) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^2 - \frac{y_1^2}{e^3} + y_2 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \Phi_n(y_1, y_2, z) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^2 - \frac{y_1^2}{e^n} + y_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

entonces, cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos

$$\Phi_n(y_1, y_2, z) \rightarrow \Phi(y_1, y_2, z) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^2 + y_2 \\ \frac{y_1^2}{3} + z \end{bmatrix}.$$

De lo anterior, encontramos que

$$H_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^2 + y_2 \\ \frac{y_1^2}{3} + z \end{bmatrix}.$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} H &= \int_0^1 L^{-s} H_0 T^s ds \\ &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1^2 + y_2 \\ \frac{y_1^2}{3} + z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.7. Es pertinente traer a colación nuevamente el Ejemplo 1.1. En este ejemplo el sistema asociado a la matriz jacobiana en el sifón $(0,0)$ es, por el Teorema 3.3, localmente equivalente al sistema no lineal $x' = F(x)$. Por lo tanto todas las soluciones cercanas al $(0,0)$ tienden a este punto pero nunca lo son gracias al Teorema 1.1. Nos encontramos así con la Paradoja del Péndulo [?]: La realidad nos dice que el péndulo se detiene en algún momento y la teoría nos dice que este nunca se va a detener a menos que siempre haya estado en esta posición. Esta paradoja es un buen contraste entre el mundo de las ideas y la realidad.

Otro resultado importante es el Teorema de la Variedad Estable que estudiaremos en la siguiente sección.

3.2.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE

El teorema de la variedad estable básicamente establece que existe una subvariedad S inmersa en la variedad original, tal que, todas las soluciones de un flujo V , que pasan por los puntos de esta variedad, tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Del mismo modo, existe una subvariedad U , tal que todas las soluciones que pasan por los puntos de U tienden a 0 cuando el tiempo tiende a $-\infty$

Vamos a retomar el ejemplo que estudiamos en la sección anterior

Ejemplo 3.8. En el Ejemplo 3.5 se definió un campo de vectores V , cuyas soluciones están expuestas en el mismo ejemplo. Sean S y U las variedades definidas por las parametrizaciones

$$\begin{aligned} \phi_S(x, y) &= (x, y, -x^2/3) \\ \phi_U(x) &= (0, 0, x). \end{aligned}$$

No es difícil ver que estas variedades así definidas cumplen las condiciones que enunciamos al principio de este capítulo. Lo interesante es preguntarse: ¿De dónde salieron estas parametrizaciones?. Para dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta, debemos observar la demostración del teorema que tiene el mismo nombre que esta sección.

Teorema 3.4 (Teorema de la Variedad Estable). Sea W un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen; sea V un campo definido sobre W y sea V_t el flujo del campo V . Supongamos que $V(0) = 0$ y que $DV(0)$ tiene k valores propios con parte real negativa y $n - k$ valores propios con parte real positiva. Entonces, existe una variedad diferenciable S de dimensión k tangente al subespacio estable E^s en 0 , tal que para todo $t \geq 0$, $V_t(S) \subset S$ y para todo $c \in S$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_t(c) = 0;$$

y también existe una variedad diferenciable U de dimensión $n - k$ tangente al subespacio inestable E^u en 0 , tal que para todo $t \leq 0$, $V_t(U) \subset U$ y para todo $c \in U$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} V_t(c) = 0.$$

Demostración. Solo daremos una idea de la demostración. Sean $A = DV(0)$ y $\tilde{V}(x) = V(x) - Ax$. Además, existe una matriz C invertible tal que

$$B = C^{-1}AC = \text{diag}(P, Q),$$

donde los valores propios de la matriz P , $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, tienen parte real negativa y los valores propios de la matriz Q , $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ tienen parte real positiva. Consideremos ahora la función G definida por $G(y) = By - C^{-1}\tilde{V}(Cy)$ y consideremos el sistema

$$y' = By + G(y).$$

Sean ahora

$$\alpha(t) = \text{diag}(e^{Pt}, 0) \qquad \beta(t) = \text{diag}(0, e^{Qt}).$$

Entonces, $\alpha' = B\alpha$, $\beta' = B\beta$ y $e^{Bt} = \alpha(t) + \beta(t)$.

La demostración de este teorema también hace uso de las aproximaciones sucesivas. Para esto se define la sucesión de funciones

$$\begin{aligned} u_0(t, a) &= 0 \\ u_{n+1}(t, a) &= \alpha(t)a + \int_0^t \alpha(t-s)G(u_n(s, a))ds \\ &\quad - \int_t^\infty \beta(t-s)G(u_n(s, a))ds. \end{aligned}$$

Una vez definida esta sucesión, se debe demostrar que ella está bien definida y que es de Cauchy. Así, esta sucesión convergerá uniformemente a una función $u(t, a)$ para todo $t \geq 0$ y todo a lo suficientemente pequeño. La parametrización de la variedad S es dada por

$$\phi_S(x_1, \dots, x_k) = (u_i(0, x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0))_{i=1}^n.$$

La demostración de que S es tangente al subespacio estable en 0 , se encuentra en [?]. Para la demostración de los hechos respectivos a la variedad inestable, se siguen las mismas ideas pero con el sistema

$$y' = -By - G(y),$$

la variedad estable para este problema será la variedad inestable U que buscamos para el problema original. ✠

Vamos a retomar el ejemplo del inicio de esta sección.

Ejemplo 3.9. En este ejemplo

$$\begin{aligned} A = B &= \text{diag}(-1, -1, 1) \\ U(t) &= \text{diag}(e^{-t}, e^{-t}, 0) \quad \text{y} \\ V(t) &= \text{diag}(0, 0, e^t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} u_0(0, a_1, a_2, 0) &= (0, 0, 0) \\ u_1(0, a_1, a_2, 0) &= (a_1, a_2, 0) \\ u_3(0, a_1, a_2, 0) &= (a_1, a_2, \frac{-a^2}{3}) \\ u_4(0, a_1, a_2, 0) &= (a_1, a_2, \frac{-a^2}{3}) \\ &\vdots \\ u_n(0, a_1, a_2, 0) &= (a_1, a_2, \frac{-a^2}{3}). \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que la primera parametrización del Ejemplo 3.8 es correcta. Lo mismo sucede para la parametrización de la variedad inestable.

Definición. Sea V_t el flujo del sistema no lineal $x' = V(x)$. Las variedades estables e inestables globales en 0 están definidas por

$$\begin{aligned} W^s(0) &= \bigcup_{t \leq 0} V_t(S) \\ W^u(0) &= \bigcup_{t \geq 0} V_t(U) \end{aligned}$$

respectivamente. Se puede demostrar que estas variedades son únicas y que son invariantes bajo el flujo V_t .

Aclaración. Si originalmente estábamos trabajando bajo una variedad X , las variedades definidas anteriormente no son necesariamente subvariedades de la variedad original.

Vamos a terminar esta monografía con un resultado sobre campos de- finidos en en la esfera S^2 . Se trata del Teroema de Poincaré-Bendixon.

3.3. TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXON

En esta sección vamos a seguir las ideas de [?]

Definición. Sea X una variedad diferenciable e clase C^k . Sea también $p \in X$. El conjunto $\omega(p)$ es el conjunto ω -límite de p de los puntos $q \in X$, tales que existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ con $V_{t_n}(p) \rightarrow q$. Análogamente definimos el conjunto α -límite de p como el conjunto de todos los $q \in X$ tales que existe una sucesión $t_n \rightarrow -\infty$ con $V_{t_n}(p) \rightarrow q$.

Aclaración. Observemos que el α -límite del campo V , es el ω -límite del campo $-V$ y viceversa. Si \tilde{p} está en la misma órbita de p , es claro que $\omega(p) = \omega(\tilde{p})$. Definimos, entonces el ω -límite de la órbita de p como el ω -límite de p . Intuitivamente $\alpha(p)$ es donde la órbita de p nace y $\omega(p)$ es donde la órbita muere.

Ejemplo 3.10. En nuestro ejemplo del final del segundo capítulo sobre las curvas de Kronecker, que eran subvariedades densas del Toro, tenemos que estas subvariedades son las trayectorias de los campos definidos por

$$X(u, v) = (1, m)$$

donde m es un número irracional. En este ejemplo es claro que si tomamos un punto en una de estas trayectorias, el conjunto ω -límite de él será todo el toro.

Vamos a estudiar ahora las propiedades de los conjuntos ω -límites. Las propiedades de los conjuntos α -límites serán totalmente análogas gracias a la aclaración de arriba.

Proposición 3.7. *Sea V un campo de una variedad compacta X y sea $p \in X$. Entonces*

1. $\omega(p) \neq \emptyset$
2. $\omega(p)$ es cerrado
3. $\omega(p)$ es invariante por el flujo de V , es decir $\omega(p)$ es una unión de órbitas de V .
4. $\omega(p)$ es conexo.

Demostración. Sea $t_n \rightarrow \infty$ y $p_n = V_{t_n}(p)$. Como X es compacta, p_n posee una subsucesión convergente, cuyo límite pertenece a $\omega(p)$, entonces, $\omega(p) \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $q \notin \omega(p)$. Entonces, existe una vecindad $U(q)$ disyunta de $\{V_t(p) \mid t \geq T\}$ para algún $T > 0$. Esto implica que los puntos de $U(q)$ no pertenecen a $\omega(p)$ y, por lo tanto, $\omega(p)$ es cerrado. Sea ahora $q \in \omega(p)$ y $\tilde{q} = V_s(q)$. Tomemos $t_n \rightarrow \infty$ con $V_{t_n}(p) \rightarrow q$. Entonces, $V_{t_n+s}(p) = V_s V_{t_n}(p)$ converge a $V_s(q) = \tilde{q}$ y, por lo tanto, $\tilde{q} \in \omega(p)$. Esto muestra que $\omega(p)$ es invariante por el flujo. Supongamos que $\omega(p)$ no sea conexo. Podemos entonces escoger abiertos U_1 y U_2 tales que $\omega(p) \subset U_1 \cup U_2$, $\omega(p) \cap U_1 \neq \emptyset$, $\omega(p) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $\text{cl}(U_1) \cap \text{cl}(U_2) = \emptyset$. Como la órbita de p se acumula en los puntos de U_1 y U_2 , dado $T > 0$, existe $t > T$ tal que

$$V_t(p) \in X - (U_1 \cup U_2) = K.$$

Luego existe una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ con $V_{t_n}(p) \in K$. Pasando a una subsucesión, si es necesario, tenemos que $V_{t_n}(p) \rightarrow q$ para algún $q \in K$. Esto implica que

$$q \in \omega(p) \subset U_1 \cup U_2,$$

lo cual es absurdo. ✠

Lema 3.2. *Consideremos un segmento $\Sigma \subset S^2$ transversal a V . La órbita positiva por un punto $p \in S^2$, $\mathcal{O}_+(p)$, intersepta a Σ en una sucesión monótona: esto es, si p_i es la i -ésima intersección de $\mathcal{O}_+(p)$ con Σ , entonces $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}] \subset \Sigma$.*

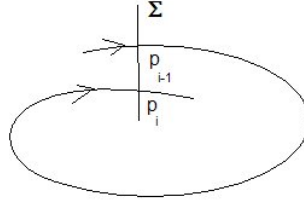


Figura 3.3: Para el Lema 3.2

Demostración. Consideremos la trayectoria p_{i-1}, p_i y el segmento $[p_{i-1}, p_i] \subset \Sigma$. Esa curva limita un disco D y como Σ es transversal al campo, el cual apunta al interior de D , la órbita positiva de p_i está contenida en D . De este modo $p_i \in [p_{i-1}, p_{i+1}]$.

✠

Corolario 3.2. *El ω -límite de una trayectoria γ intersecta a Σ máximo en un punto.*

Demostración. Supongamos que $\omega(\gamma)$ contiene dos puntos q_1 y q_2 en Σ . Sea p_n una sucesión de intersecciones de γ con Σ . Entonces, existen subsucesiones de p_n convergiendo a q_1 y q_2 , lo que contradice la monotonía de p_n

✠

Lema 3.3. *Si el ω -límite de una trayectoria γ no contiene singularidades, entonces $\omega(\gamma)$ es una órbita cerrada. Si $p \in \gamma$, las órbitas por puntos próximos a p tienen esta misma órbita cerrada como ω -límite.*

Demostración. Sea $q \in \omega(\gamma)$. Mostraremos que la órbita de q es cerrada. Tomemos $x \in \omega(q)$, x no es una singularidad. Consideremos una sección transversal Σ que contiene a x . Por el lema anterior, la órbita positiva de q intersepta a Σ seguido de una sucesión monótona $q_n \rightarrow x$. Como $q_n \in \omega(\gamma)$, se sigue del corolario de arriba que $q_n = x$ para todo n . Por lo que la órbita de q es cerrada. Tomando ahora un segmento transversal que contenga a q concluimos que $\omega(\gamma)$ se reduce a la órbita de q . La segunda parte de la afirmación es inmediata.

✠

Lema 3.4. *Sean p_1 y p_2 singularidades distintas del campo contenidas en el conjunto ω -límite de un punto $p \in S^2$. Existe en él máximo una órbita $\gamma \subset \omega(p)$ con la propiedad de que $\alpha(\gamma) = p_1$ y $\omega(\gamma) = p_2$.*

Demostración. Vamos a hacer la demostración por absurdo. Siendo así, existen dos órbitas $\gamma_1, \gamma_2 \subset \omega(p)$ tales que $\alpha(\gamma_i) = p_1$ y $\omega(\gamma_i) = p_2, i = 1, 2$.

La curva C_1 formada por las órbitas γ_1, γ_2 y por los puntos p_1, p_2 , separa a S^2 en dos discos. Uno de ellos contiene al punto p como se muestra en la figura 1. Sean Σ_1 y Σ_2 segmentos transversales a V por los puntos $q_1 \in \gamma_1$ y $q_2 \in \gamma_2$ respectivamente. Como $\gamma_1, \gamma_2 \subset \omega(p)$, la órbita positiva de p intersepta a Σ_1 en un punto a y en seguida intersepta Σ_2 en un punto b . Consideremos la curva C_2 determinada por los arcos $\text{arc}(ab) \subset \mathcal{O}(p), \text{arc}(bq_2) \subset \Sigma_2, \text{arc}(q_2p_2) \subset \gamma_2, \text{arc}(p_2q_1) \subset \gamma_1, \text{arc}(q_1a) \subset \Sigma_1$ y por el punto p_2 . Tenemos que C_2 separa S^2 en dos discos A y B . La órbita positiva del punto b está completamente contenida en el disco A , lo que es una contradicción pues $\gamma_1, \gamma_2 \subset \omega(p)$.

✠

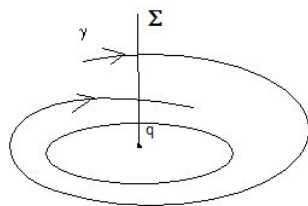


Figura 3.4: Para el Lema 3.3

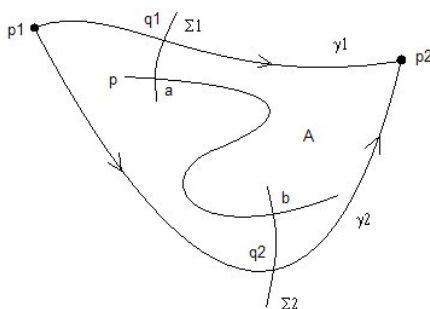


Figura 3.5: Para el Lema 3.4

Teorema 3.5 (Teorema de Poincaré-Bendixon). Sea V un campo de- definido sobre la esfera S^2 con un número finito de singularidades. Sea $\omega(p)$ el conjunto ω -límite de $p \in S^2$. Entonces ocurre una de las siguientes opciones:

1. $\omega(p)$ es una singularidad.
2. $\omega(p)$ es una órbita cerrada.
3. $\omega(p)$ está constituido por un número finito de singularidades p_1, \dots, p_n y órbitas regulares tales que, si $\gamma \subset \omega(p)$, entonces $\alpha(\gamma) = p_i$ y $\omega(\gamma) = p_j$.

Demostración. Si $\omega(p)$ no contiene singularidades, entonces, por el Lema 3.3 $\omega(p)$ es una órbita cerrada. Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una única singularidad, pues V tiene un número finito de singularidades y $\omega(p)$ es conexo.

Supongamos, entonces, que $\omega(p)$ contiene puntos regulares y singulares. Sea γ una trayectoria regular contenida en $\omega(p)$. Afirmamos que $\omega(\gamma)$ es una singularidad. Si $\omega(\gamma)$ posee algún punto regular q tomemos el segmento transversal a V que pasa por el punto q . Como $\gamma \subset \omega(p)$, tenemos, por el Corolario 3.2 que γ intersepta a Σ en apenas un punto. Por el Lema 3.3 γ es una trayectoria cerrada y $\omega(p) = \gamma$. Esto

es un absurdo, pues $\omega(p)$ posee singularidades. Por lo tanto, $\omega(\gamma)$ es una singularidad. Análogamente, $\alpha(\gamma)$ es una singularidad

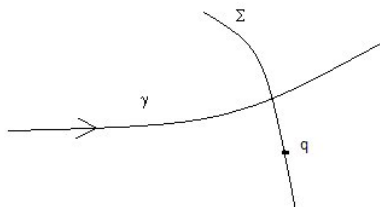


Figura 3.6: Para el Teorema 3.5



Ejemplo 3.11. Sea V un campo en S^2 como la Figura 3.11. Los polos norte y sur son singularidades y el Ecuador es una órbita cerrada. Las otras órbitas nacen en el polo y mueren en el Ecuador

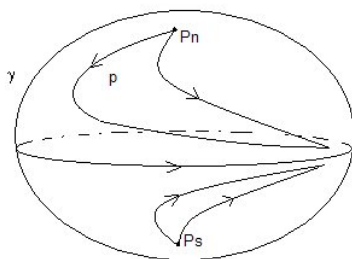


Figura 3.7: Para el ejemplo 3.11