SOLUCIONES DÉBILES PARA LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL

Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

Bogotá D.C.
2005

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar al Profesor Francisco Caycedo quien es el director de este trabajo y mi maestro. En segundo lugar al Profesor Alfonso Castro quien a colaborado con el trabajo en Colombia y desde Estados Unidos. Por último quisiera agradecer al Profesor Guillermo Rodriguez quien fue un elemento formador e inspirador increible en mi maestría.

Contenido

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo pretende estudiar [13]. En dicho artículo se demuestra la existencia de soluciones débiles a la Ecuación de Onda Semilineal a través de métodos variacionales.

Marco Teórico

La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial de segundo orden e hiperbólica que modela el movimiento de una cuerda vibrante en un instante de tiempo dado. Se dice que la Ecuación de Onda es homogénea y lineal si

$$\Box u = \partial_{xx} u - \partial_{tt} u = 0$$

El operador $\Box$ es conocido como el operador de Onda o el operador de D'Alembert. Cuando la ecuación de onda tiene un término en x o en t se dice que tiene una perturbación y que estamos en una vibración forzada. Cuando esta ecuación tiene un término que depende de u se dice que es una vibración libre. Las vibraciones libres son las que trabajaremos en el presente estudio. Por soluciones débiles entendemos soluciones a la ecuación integral asociada.

Contexto Histórico

J. D'Alembert (1717-1783) encuentra una solución a la ecuación de onda homogénea lineal a través de un método conocido como el método de las imágenes.

Las ecuaciones diferenciales parciales, a diferencia de las ordinarias, no tienen una teoría general que las abarque y por ende no tienen un sólo método para ser estudiadas. Para mencionar unos pocos, tenemos el método de las características que se remonta a Cauchy, los métodos variacionales que datan de Euler o por ejemplo el método de separación de variables que tiene sus orígenes en los Bernoulli.

Todos estos métodos han evolucionado de maneras increíbles, sobre todo en el siglo pasado con el ague de la Matemática Moderna.

MétodoS

El método que trabajaremos en el presente estudio es precisamente la evolución de los métodos variacionales. Estos métodos minimizan funcionales que caen en $\mathbb{R}$ a través de derivadas generalizadas. Los exponentes más notorios de estos métodos modernos son tal vez I. Ekeland, P. Rabinowitz, L. Nieremberg, H. Brezis, A.C. Lazer, M. Schechter y A. Castro entre otros.

CAPÍTULO 1

EL TEOREMA DEL PASO DE MONTAÑA

El Teorema del Pasamontañas es un resultado muy usado en Métodos Variacionales para encontrar soluciones débiles a las Ecuaciones Diferenciales Parciales. Dicho resultado es debido a A. Ambrosetti y P. Rabinowitz [19] y tiene hoy en día diferentes formas de ser probado. Nosotros vamos a seguir una vía en la que se usará el Principio Variacional de Ekeland [11]. Dicho principio es idoneo en el estudio de puntos críticos y necesita el concepto de semicontinuidad para ser demostrado.

1.1. Semicontinuidad

El análisis matemático está atravesado por la topología y por consiguiente, por la idea de continuidad. Sin embargo en cálculo de variaciones no tenemos siquiera continuidad en funcionales. Esto es grave, ya que debemos optimizar funcionales en espacios de Banach, y sin continuidad carecemos de la herramienta básica que optimiza funcionales en compactos. No empero, podemos solucionar dicho problema introduciendo unas nociones de continuidad y compacidad más amplios. La continuidad la generalizaremos a través del concepto de semicontinuidad. Cabe aclarar que por funcional entendemos cualquier función a valor real que tenga como dominio un espacio topológico de Hausdorff.

En este orden de ideas, el concepto de semicontinuidad se generaliza con la noción de límite inferior. Esta generalización se ha dado de muchas maneras, por ejemplo en [9, vol. 2] se configura la semicontinuidad en el lenguaje de los filtros. A nuestro modo de ver, dicha configuración es muy abstracta y no necesariamente aporta comprensión al discurso, sin embargo, y a pesar de lo dicho anteriormente, presentaremos el concepto de semicontinuidad en el lenguaje de redes, esto debido a que, por un lado, si bien las redes son en extremo generales, son más intuitivas que los filtros y tienen más aplicaciones en análisis como se puede apreciar en [23] con el tema de las distribuciones. Por otro lado, en cálculo variacional tenemos que trabajar con espacios que carecen del primer axioma de numerabilidad que es el que garantiza la cerradura por sucesiones, como lo es el caso de la topología débil en dimensión infinita.

Es así como presentamos a continuación, una exposición original del autor en relación a la semicontinuidad. Dicha exposición está inspirada un poco por [12] y [18]. En cualquier caso, debemos fijar primero el lenguaje haciendo una descripción rápida de las redes.

1.1.1. Redes

Un conjunto A con una relación $\leq$ se dice *dirigido* si cumple las siguientes tres condiciones:

1. Para todo $\alpha \in A$, $\alpha \leq \alpha$.
2. Dados $\alpha, \beta, \gamma \in A$, si $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \gamma$ entonces $\alpha \leq \gamma$.
3. Dados $\alpha, \beta \in A$, existe $\gamma \in A$ tal que $\alpha, \beta \leq \gamma$

Ahora bien, sea X un espacio topológico, una función

$$\begin{aligned} x : A &\to X \\ \alpha &\mapsto x_\alpha \end{aligned}$$

es una *red* si A es un conjunto dirigido. Sea $Y \subseteq X$, x_α está *eventualmente* en Y si existe $\alpha_0 \in A$ tal que para todo $\beta \geq \alpha_0$, $x_\alpha \in Y$. Así mismo, x_α está *frecuentemente* en Y, si dado $\alpha \in A$, existe $\beta \in A$ con $x_\beta \in A$. La red x_α se dice que *converge* a $x_0 \in X$ si para toda vecindad U_{x_0} de x_0, $x_\alpha \in U_{x_0}$ eventualmente. Una red $y_\beta : B \to X$ se dice una *subred* de $x_\alpha : A \to X$ si existe una función $s : B \to A$ tal que:

1. Dado $\beta \in B$, $y_\beta = x_{s_\beta}$.
2. Dado $\alpha \in A$ existe $\beta \in B$ tal que si $\gamma \geq \beta$, entonces $s_\gamma \geq \alpha$.

En espacios topológicos de Hausdorff las redes convergen a un único punto como condición necesaria y suficiente y en tal caso escribimos $\lim x_\alpha = x_0$ En términos generales, si el espacio no satisface el primer axioma de numerabilidad los resultados que se tenían para cerradura, clausura, compacidad, etc. en términos de sucesiones se mantienen válidos pero ahora en término de las redes. Para una exposición detallada de esto véase [16] o [15].

1.1.2. Semicontinuidad Inferior por Redes

Sea $x_\alpha : A \to \mathbb{R}$ una red, decimos que a es el límite inferior de x_α y notamos $a = \varliminf x_\alpha$, si dado $\epsilon > 0$, $a - \epsilon < x_\alpha$ eventualmente y $x_\alpha < a + \epsilon$ frecuentemente.

Proposición 1.1.1. *Este número a es único.*

Demostración. supongamos que existen a y a' con tal propiedad y supongamos además sin perdida de generalidad que $a' < a$. Fijemos $\epsilon > 0$ arbitrario. Existe $\alpha_\epsilon \in A$ tal que si $\alpha \geq \alpha_\epsilon$ entonces $a - \epsilon < x_\alpha$ y para este mismo α_ϵ existe un $\alpha_\epsilon^* \geq \alpha_\epsilon$ tal que $x_{\alpha_\epsilon^*} < a' + \epsilon$. Por lo tanto

$$a - \epsilon < x_{\alpha_\epsilon^*} < a' + \epsilon$$

de donde $a < a' + 2\epsilon$, lo cual es absurdo, pues esto es cierto para todo $\epsilon > 0$. ∎

Es un ejercicio sencillo de extremo superior demostrar que está definición coincide con la dada por [18]. Es decir este número a es igual a

$$a = \sup_{\alpha \in A} \inf_{\beta \geq \alpha} x_\beta.$$

Lema 1.1.2. *$b \leq x_\alpha$ eventualmente sii $b \leq a$*

Demostración. Supongamos primero que $b > a$ y sea $\epsilon > 0$. Entonces $x_\alpha < a + \epsilon < b + \epsilon$ frecuentemente y como $b - \epsilon < b \leq x_\alpha$ eventualmente concluimos que $b = a$, lo cual es absurdo.

Para probar la suficiencia, supongamos primero que $b < a$, esto implica que $b < x_\alpha$ eventualmente. Supongamos ahora que $b = a$. Dado $\epsilon > 0$, $b - \epsilon - \epsilon < x_\alpha$. Razonando por contradicción supongamos que $b - \epsilon + \epsilon = b > x_\alpha$ frecuentemente. Entonces $b - \epsilon = a = b$, lo cual es absurdo por la Proposición 1.1.1 anterior. ∎

Sean X un espacio topológico de Hausdorff y $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional. Para evitar resultados patológicos, suponemos de ahora en adelante que este funcional no es idénticamente ∞ y notamos con $\operatorname{dom} \phi$ al conjunto $\{x \in X \mid \phi(x) < \infty\}$. Este conjunto usualmente es llamado el *dominio efectivo* .

Decimos que el funcional ϕ es *semicontinuo inferiormente* en $x_0 \in X$ si para toda red x_α en X, $\varliminf \phi(x_\alpha) \geq \phi(x_0)$. Se dice, entonces, que ϕ es semicontinua en X si es semicontinua en todo $x_0 \in X$ y lo notamos $\phi \in \operatorname{sci}(X)$. El concepto de semicontinuidad superior se define de manera similar.

Teorema 1.1.3. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff, $\phi \in \operatorname{sci}(X)$ sii $\phi^{-1}(a, +\infty]$ es abierto para todo $a \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que ϕ es semicontinua inferiormente y que dado $a \in \mathbb{R}$, $F = \phi^{-1}(-\infty, a]$ no es un conjunto cerrado. Así, podemos escoger $x_0 \in \overline{F} \setminus F$ con $\phi(x_0) > a$ y $x_\alpha \to x_0$ con $\phi(x_\alpha) \leq a$. Recordando que $\phi \in \operatorname{sci}(X)$, $\phi(x_\alpha) \geq \phi(x_0)$ eventualmente. Pero esto es absurdo ya que

$$a \geq \phi(x_\alpha) \geq \phi(x_0) > a$$

eventualmente.

Supongamos ahora que $\phi^{-1}(a, +\infty]$ es abierto. Sea $x_\alpha \to x_0$ en X, con $\phi(x_0) < \infty$. El conjunto $U_{x_0} = \{x \in X \mid \phi(x) > \phi(x_0) - \epsilon\}$, una vecindad abierta de x_0; por tal razón $x_\alpha \in U_{x_0}$ eventualmente, lo que implica que $\phi(x_\alpha) > \phi(x_0) - \epsilon$ eventualmente. Lo anterior es válido para todo $\epsilon > 0$, por el Lema 1.1.2 $\phi \in \text{sci}(X)$. El caso en el que $\phi(x_0) = \infty$ se cambia la vecindad U_{x_0} por una vecindad de infinito y se repite palabra por palabra la misma demostración. ■

Por propiedades de espacios topológicos y métricos se tiene el siguiente

Corolario 1.1.4. *Semicontinuidad implica semicontinuidad por sucesiones. Si X es un espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad, podemos cambiar la palabra red por la palabra sucesión en el Teorema 1.1.3. En el caso particular en el que X es un espacio métrico, tenemos el primer axioma de numerabilidad.*

Cuando cambiamos la palabra red por la palabra sucesión en la definición de semicontinuidad inferior, decimos que ϕ es *semicontinua inferiormente por sucesiones* y lo notamos $\phi \in \text{scis}(X)$.

Proposición 1.1.5. *ϕ es semicontinua en x_0 sii para todo $a < \phi(x_0)$, existe una vecindad abierta U_{x_0} de x_0 tal que $V \subseteq \phi^{-1}(a, +\infty]$.*

Demostración. Si $\phi \in \text{sci}(X)$, se repite el mismo argumento de la primera parte de la demostración del Teorema 1.1.3 para demostrar que $\phi^{-1}(a, +\infty]$ es la vecindad abierta deseada.

Supongamos ahora que $x_\alpha \to x_0$, y sea $\epsilon > 0$, entonces, existe un abierto U_{x_0} que contiene a x_0 tal que $U_{x_0} \subseteq \phi^{-1}(\phi(x_0) - \epsilon, +\infty]$. Por la convergencia de la red, existe un α_0 tal que para todo $\alpha \geq \alpha_0$, $\phi(x_\alpha) \in U_{x_0}$, es decir, $\phi(x_\alpha) > \phi(x_0) - \epsilon$. Por el Lema 1.1.2, $\underline{\lim}\, \phi(x_\alpha) \geq \phi(x_0)$. ■

De la anterior proposición se desprende el siguiente:

Corolario 1.1.6. *$\phi \in \text{sci}(X)$ sii para todo $x_0 \in X$ y todo $a < \phi(x_0)$ existe $U_{x_0} \subseteq \phi^{-1}(a, +\infty]$.*

Como ventaja de haber introducido el concepto de semicontinuidad por redes, tenemos el siguiente teorema que carece del lenguaje de cubrimientos

Teorema 1.1.7. *Sean X un espacio topológico compacto y $\phi \in \text{sci}(X)$. Entonces ϕ alcanza su mínimo en X*

Demostración. Vamos a demostrar primero que ϕ es acotado inferiormente, ya que sino lo fuera para cada n existe un $x_n \in X$ tal que $\phi(x_n) < -n$. Pero estos x_n son una red en X, garantizando así la existencia de una subsucesión (subred) convergente. Llames a esta nuevamente x_n. Es decir, existe un $x_0 \in X$ tal que $x_n \to x_0$. Pero ϕ es semicontinua inferiormente por lo que $\phi(x_n) \geq \phi(x_0)$ para casi todo n lo que implica que $\phi(x_n)$ es acotada inferiormente lo cual es absurdo y por lo tanto ϕ está acotada inferiormente.

En este orden de ideas $l = \text{ínf}\, \phi(X)$ existe, vamos a demostrar ahora que este es adquirido en X. Puesto que $l \in \overline{\phi(X)}$ existe una sucesión $x_n \in X$ tal que $\phi(x_n) \to l$. Como X es compacto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_n \to x_0$ y por ser ϕ semicontinua inferiormente, $\underline{\lim}\, \phi(x_n) = l \geq \phi(x_0)$. Como l es el ínf, $l = \phi(x_0)$. ■

Para concluir este parágrafo, miramos que relación existe entre semicontinuidad y continuidad. Este primer resultado es de evidente demostración

Proposición. *Un funcional $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es continuo sii es semicontinuo inferiormente y semicontinuo superiormente.*

Una función discontinua ϕ definida de un subconjunto de $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ se dice que tiene una *discontinuidad de primera especie* en x_0 si existen los límites laterales $\phi(x_0^-)$ y $\phi(x_0^+)$, pero son diferentes. Esta ϕ se dice *discontinua de segunda especie* en x_0, si en x_0 ϕ es discontinua y su discontinuidad no es de primera especie.

Proposición 1.1.8. *Una función definida en un subconjunto de $\mathbb{R}$ con una discontinuidad de primera especie en x_0 y semicontinua inferiormente en este punto es tal que $\phi(x_0) = \text{mín}\{\phi(x_0^-), \phi(x_0^+)\}$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\phi(x_0^-) < \phi(x_0^+)$ y supongamos además que $\phi(x_0) = \phi(x_0^-)$. Por la densidad de los números reales, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x_0^-) < a < \phi(x_0^+) = \phi(x_0)$. Por la Proposición 1.1.5 existe un U_{x_0} abierto que contiene a x_0 tal que $U_{x_0} \subseteq \phi^{-1}(a, \infty]$. Escojamos un $\epsilon > 0$ de tal manera que $x_0 - \epsilon \in U_{x_0}$, por lo tanto $\phi(x_0 - \epsilon) > a$. Por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \to 0} \phi(x_0 - \epsilon) = \phi(x_0^-) \geq a$$

lo cual es absurdo. ■

La proposición 1.1.8 nos da una relación entre semicontinuidad inferior y discontinuidades de primera especie. Pero, ¿qué relación hay con las discontinuidades de segunda especie? El siguiente ejemplo nos dice que una función puede ser semicontinua inferiormente en 0 y ser discontinua de segunda especie en este punto.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0,\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x > 0,\ x \in \mathbb{I} \\ 2 & \text{si } x < 0,\ x \in \mathbb{Q} \\ 3 & \text{si } x < 0,\ x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

donde $\mathbb{I}$ es el conjunto de los números irracionales.

1.2. Principio Variacional de Ekeland

El Principio Variacional de Ekeland tiene aplicaciones a diferentes ramas del Análisis, principalmente al Cálculo de Variaciones. La idea de este principio radica en buscar mínimos de funcionales regularizados en vez del funcional mismo. Sin embargo y en general, garantizar la existencia de dicho mínimo asegura la existencia de un mínimo del problema original agregando ciertas condiciones.

Lema 1.2.1. *Sean $\epsilon > 0$, $u, v \in X$ y d una métrica en X. La relación $\leq$ en X definida por $u \leq v$ si*

$$\phi(u) \leq \phi(v) - \epsilon\, d(u,v)$$

es un orden parcial.

Demostración.

1. Reflexividad: $\phi(u) \leq \phi(u) - \epsilon\, d(u,u) = \phi(u)$
2. Antisimetría: Supongamos que $u \leq v$ y que $v \leq u$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(u) &\leq \phi(v) - \epsilon\, d(u,v) \\ &\leq \phi(u) - 2\epsilon\, d(u,v). \end{aligned}$$

   De donde $0 \leq -2\epsilon d(u,v)$ y por lo tanto $u = v$.

3. Transitividad: Supongamos que $u \leq v$ y que $v \leq w$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi(u) &\leq \phi(v) - \epsilon\, d(u,v) \\ &\leq \phi(w) - \epsilon(d(u,v) + d(v,w)) \\ &\leq \phi(w) - \epsilon\, d(u,w). \end{aligned}$$

   Por lo tanto $u \leq w$.

De todo lo anterior concluimos que $\leq$ así definido en X constituye un orden parcial. ■

Teorema 1.2.2 (Principio Variacional de Ekeland)**.** *Sea X un espacio métrico completo y $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un funcional semicontinuo inferiormente y acotado inferiormente. Sean $\epsilon > 0$ y $\overline{u} \in X$ tal que*

$$\phi(\overline{u}) \leq \inf_X \phi + \frac{\epsilon}{2}.$$

Entonces, dado $\lambda > 0$, existe un único $u_\lambda \in X$ tal que

$$\phi(u_\lambda) \leq \phi(\overline{u}) \tag{1.1}$$

$$d(u_\lambda, \overline{u}) \leq \lambda \tag{1.2}$$

$$\phi(u_\lambda) < \phi(u) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda) \tag{1.3}$$

para todo $u \neq u_\lambda$.

Demostración. En aras de simplificar notación, pongamos $d_\lambda = \frac{1}{\lambda} d$. A la métrica d_λ, equivalente a d, podemos asociarle el orden parcial definido en el Lema 1.2.1. Definimos ahora una sucesión S_n de subconjuntos de X de la siguiente manera: Comenzamos con $u_1 = \overline{u}$ y definimos

$$S_1 = \{u \in X \mid u \leq \overline{u}\}.$$

Escogemos ahora u_2 de tal manera que

$$\phi(u_2) \leq \inf_{S_1} \phi + \frac{\epsilon}{2^2}.$$

Dicho u_2 existe por la definición de ínf. Procedemos, ahora, de manera inductiva y obtenemos una sucesión de conjuntos S_n y elementos $u_{n+1} \in S_n$ tales que

$$S_n = \{u \in X \mid u \leq u_n\}$$

y

$$\phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \phi + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}.$$

La existencia de los u_{n+1} es debida a la definición de ínf.

Los S_n forman una sucesión decreciente, es decir $S_1 \supset S_2 \cdots \supset S_n \ldots$. En efecto, supongamos que $u \in S_{n+1}$, Como $u_{n+1} \in S_n$, $u_{n+1} \leq u_n$. Pero $u \leq u_{n+1}$ y por ser $\leq$ transitivo, $u \leq u_n$. Demostrando así las contenencias de los S_n.

Cada S_n forma un conjunto cerrado. En efecto, sea $x_j \in S_n$ con $x_j \to x \in X$. Tenemos que $\phi(x_j) \leq \phi(u_n) - \epsilon\, d_\lambda(x_j, u_n)$. Haciendo tender $j \to \infty$ a ambos lados de la desigualdad y aplicando la semicontinuidad inferior de ϕ y la continuidad de d concluimos que $x \in S_n$; probando de esta manera que los S_n son cerrados.

Probemos ahora que los diámetros de estos conjuntos tienden a cero cuando $n \to \infty$. Para tal fin tomemos un $x \in S_n$ arbitrario. Por un lado, $x \leq u_n$ implica que

$$\phi(x) \leq \phi(u_n) - \epsilon\, d_\lambda(x, u_n).$$

Pero, por otro lado, observamos que x pertenece también a S_{n-1}, por lo que

$$\phi(u_n) \leq \phi(x) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Sumando las dos últimas desigualdades tenemos que

$$d_\lambda(x, u_n) \leq 2^{-n} \tag{1.4}$$

para todo $x \in S_n$. Lo que implica, por la desigualdad anterior y por la desigualdad triangular, que $\operatorname{diam} S_n \leq 2^{1-n}$. Demostrando así, que los diámetros de los S_n tienden a cero. Pero, por ser S_n una familia de cerrados con diámetros tendientes a cero, tenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n = \{u_\lambda\}.$$

Para demostrar (1.1) solo debemos ver que $u_\lambda \in S_1$. Escojamos ahora un $u \in X$ tal que $u \neq u_\lambda$. Es claro que $u \not\leq u_\lambda$. De no ser así, u pertenecería a todos los S_n y por tanto $u = u_\lambda$. Lo cual es una contradicción. Por esta razón, $u > u_\lambda$, es decir,

$$\phi(u) > \phi(u_\lambda) - \epsilon\, d_\lambda(u, u_\lambda).$$

Demostrando así (1.3). Usemos ahora la desigualdad y (1.4) para escribir

$$\begin{aligned} d_\lambda(\overline{u}, u_n) &\leq \sum_{j=1}^{n-1} d_\lambda(u_j, u_{j+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} 2^{-j}. \end{aligned}$$

Al tomar el límite de lo anterior cuando $n \to \infty$ vemos que (1.2) se cumple. Es así como hemos demostrado el Principio Variacional de Ekeland. ■

1.2.1. Interpretación

La idea del calculo de variaciones es, como habíamos dicho, la de minimizar funcionales. El principio variacional de Ekeland garantiza la existencia de un mínimo del *funcional regularizado*

$$\phi_\epsilon(v) = \phi(v) + \frac{\epsilon}{\lambda}\, d(u, v)$$

para u fijo en X y $\epsilon, \lambda > 0$ prefijados. Cuando existe un mínimo $v \in X$ para el funcional ϕ_ϵ decimos que es un *ϵ-casi-mínimo* de ϕ. Evidentemente cada mínimo del funcional ϕ es un mínimo para el funcional regularizado ϕ_ϵ. Permitanos el lector continuar con el siguiente juego de palabras poco riguroso: Si un funcional es diferenciable en el sentido Gâteaux [5] y tiene un mínimo, este mínimo debe ser un punto crítico, es decir, que su derivada es cero en dicho punto. En este orden de ideas, si un punto v_0 es un ϵ-casi-mínimo de un funcional ϕ Gâteaux diferenciable, es de esperar que dicho punto sea un *ϵ-casi-punto crítico* . Es decir, que $\|\phi(v_0)\|_X \leq \epsilon$. Si agregamos una condición adicional que intenta compensar la ausencia de compacidad, Condición de Palais-Smale, la cual enunciaremos luego, podemos quitar la palabra ϵ-casi y obtener de este modo mínimos y puntos críticos en el sentido usual de la palabra. Formalizando un poco estas ideas tenemos el siguiente corolario

Corolario 1.2.3. *Supongamos que el funcional $\phi : X \to \mathbb{R}$ es semicontinuo inferiormente en el espacio de Banach real X. Más aún, supongamos que la derivada Gâteaux $\phi'(u)$ existe para cada $u \in X$ y que $\phi(u) > -\infty$. Entonces para cada $\epsilon > 0$, existe un punto $u \in X$ tal que*

$$\phi(u) \leq \inf_X \phi + \epsilon \qquad y \qquad \|\phi'(u)\|_{X'} \leq \epsilon$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad asumamos que $\lambda = 1$. Aplicando el Teorema 1.2.2, existe un $u \in X$ tal que

$$\phi(u) \leq \phi(v) + \epsilon d(u, v)$$

para todo $v \in X$. Escribamos $v = u + t\,w$ con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $w \in X$. Entonces

$$t^{-1}(\phi(u + t\,w) - \phi(w)) \geq -\epsilon \,\|w\|_X \,.$$

Haciendo tender $t \to 0$, obtenemos que $\langle \phi'(u), w \rangle \geq -\epsilon \,\|w\|_X$. Cambiando w por $-w$ tenemos que $\|\phi'(u)\|_{X'} \leq \epsilon$ y nuestro corolario queda probado. ■

Cabe aclarar que un funcional Gâteaux diferenciable no necesariamente es continuo. Es más ni siquiera el hecho de poseer dicha clase de diferenciabilidad garantiza la semicontinuidad inferior. Basta tomar el ejemplo clásico de Calculo Vectorial [1, vol. 2]

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } xy \neq 0 \\ 10 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

1.3. El Teorema del Pasamontañas

El Teorema del Pasamontañas se basa en un argumento geométrico muy sencillo que fue demostrado por primera vez por A. Ambrosetti y P. Rabinowitz. Dicho Teorema tiene increíbles aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales. El teorema del pasamontañas requiere de una condición que compensa un poco la carencia de la compacidad en dimensión infinita. Se trata de la Condición de Palais-Smale: Sea X un espacio de Banach real. Se dice que un funcional, Gâteaux diferenciable, $\phi : X \to \mathbb{R}$, satisface la *Condición de Palais-Smale* (PS) si dada cualquier sucesión $u_n \in X$ tal que $\phi(u_n)$ es acotada y $\lim \|\phi'(u_n)\|_{X'} = 0$, entonces u_n tiene una subsucesión que converge en E. Se dice también que el funcional ϕ antes citado satisface la *Condición de Palais-Smale Modificada* $(\mathrm{PS})_c$ si dado $c \in \mathbb{R}$ y una sucesión $u_n \in X$ con $\phi(u_n) \to c$ y $\phi'(u_n) \to 0$, se cumple que c es un valor crítico de ϕ.

Teorema 1.3.1 (El Teorema del Pasamontañas)**.** *Sean X un espacio de Banach real y $\phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 que satisface (PS). Supongamos que existen constante positivas R y α tales que*

$$\phi(x) \geq \alpha \tag{1.5}$$

para todo $x \in X$ con $\|x\|_X = R$. Supongamos además que $\phi(0) < \alpha$ y que existe un punto $x_0 \in X$ tal que

$$\|x_0\|_X > R$$

y $\phi(x_0) < \alpha$. Denotemos con M el conjunto de todos los caminos continuos $p : [0,1] \to X$ que unen 0 con x_0. Es decir, tales que $p(0) = 0$ y $p(1) = x_0$. Más aún, definamos

$$c = \inf_{p \in M} \max_{t \in [0,1]} \phi(p(t)).$$

Entonces el funcional ϕ posee un punto crítico $x_* \in X$. Es decir,

$$\phi'(x_*) = 0.$$

Además $\phi(x_*) = c \geq \alpha$.

Demostración. Sea $N = C([0,1], X)$ con la norma del máximo. Definamos el funcional

$$\begin{aligned} \psi : N &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \max_{t \in [0,1]} \phi(p(t)). \end{aligned}$$

Este funcional tiene sentido ya que ϕ es continuo y $[0,1]$ es compacto. En vista de que

$$c = \inf_M \psi,$$

nos interesa investigar la existencia de un punto $p \in M$ que minimice ψ. Definamos también $d = \max\{\phi(0), \phi(x_0)\}$. Aseguramos que

$$c \geq \alpha > d. \tag{1.6}$$

En efecto: Sea $p \in M$. Como p atraviesa los x_R tales que $\|x_R\| = R$, podemos decir que existe un $t_{x_R} \in [0,1]$ tal que $p(t_{x_R}) = x_R$. Esto implica que

$$\sup_{t \in [0,1]} \phi(p(t)) \geq \phi(p(t_{x_R})).$$

Pero, por (1.5), $\phi(p(t_{x_R})) \geq \alpha$. Demostrando así (1.6).

En primer lugar demostraremos la existencia de un ϵ-cuasi-mínimo del funcional ψ en M usando el principio variacional de Ekeland. Escojamos $\epsilon > 0$ tal que

$$0 < \epsilon^2 < c - d.$$

Ya que c denota el ínfimo de ψ en el conjunto M, existe un $\overline{p} \in M$ tal que

$$c \leq \psi(\overline{p}) \leq c + \epsilon.$$

Haciendo $\lambda = \epsilon$, se sigue del Principio Variacional de Ekeland, Teorema 1.2.2, que existe un punto $q \in M$ tal que

$$\psi(q) \leq \psi(\overline{p}) \qquad \text{y} \qquad \|\overline{p} - q\|_N \leq \epsilon.$$

Además

$$\psi(q) < \psi(p) + \epsilon \, \|p - q\|_N \tag{1.7}$$

para todo $p \in M$ con $p \neq q$. Hemos demostrado, así, la existencia del ϵ-cuasi-mínimo requerido, q. Queremos que este ϵ-cuasi-mínimo sea precisamente el mínimo de ψ. Mínimo con el cual, probaremos el presente teorema.

Para tal fin, permitanos el lector exponer la idea de lo que sigue en la demostración. Nuestro objetivo será encontrar un ϵ-cuasi-punto crítico $q(t_\epsilon)$ tal que

$$\left\|\phi'(q(t_\epsilon))\right\|_{X'} < \epsilon \qquad \text{y} \qquad |\phi(q(t_\epsilon)) - c| < \epsilon^2. \tag{1.8}$$

Luego de esto aplicaremos (PS) para encontrar el punto crítico $x_* = q(t_*)$ que minimiza ψ y demuestra el teorema. La prueba de (1.8) la vamos a realizar por reducción al absurdo, llevándonos, así, a una contradicción del resultado obtenido por el Principio Variacional de Ekeland en (1.7).

En este orden de ideas supongamos que

$$\left\|\phi'(q(t))\right\|_{X'} > \epsilon \tag{1.9}$$

para todo $t \in T$, donde

$$T = \{t \in [0,1] \mid c - \epsilon^2 \leq \phi(q(t))\}.$$

El conjunto T tiene las siguiente propiedades: En primer lugar T es claramente un conjunto cerrado puesto que

$$T = (\phi \circ q)^{-1}[c - \epsilon^2, \infty)$$

y tanto ϕ como p son continuas. En segundo lugar T es compacto por ser aplicable el Teorema de Heine-Borel [31] al ser T cerrado y acotado. Por último $0 \notin T$, ya que

$$\begin{aligned}\phi(q(0)) &= \phi(0)\\ &\leq d\\ &< c - \epsilon^2.\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $t \in T$, existe un punto $x_t \in X$ con $\|x_t\|_X = 1$ tal que

$$\left\langle \phi'(q(t)), -x_t \right\rangle > \epsilon.$$

En vista de que ϕ' es continua tenemos que dado $t \in T$, existe un $\beta_t > 0$ y un intervalo abierto J_t en $\mathbb{R}$ tal que

$$\left\langle \phi'(q(s) + h), -x_t \right\rangle > \epsilon, \tag{1.10}$$

para todo $s \in J_t$ y todo $h \in X$ con $\|x\|_X \leq \beta_t$.

De manera obvia, la familia $(J_t)_{t \in T}$ de intervalos abiertos cubre todo el compacto T. Por lo tanto existe una subfamila finita de estos J que cubren todo T. Renombrando, sea esta familia $\{J_1, \ldots, J_m\}$. En vista de que $0 \notin T$, los conjuntos $[0,1] \setminus J_k$ son cerrados y no vacíos para $k = 1, \ldots, m$.

Por lo tanto, si $t \in \bigcup J_k$, entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{dist}(t, [0,1] \setminus J_k) > 0.$$

Definamos la función

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(q(s)) \geq c \\ 0 & \text{si } \phi(q(s)) \leq c - \epsilon^2 \end{cases}.$$

En vista de que $\phi \circ q$ es una función continua, la función f está definida en dos intervalos abiertos disjuntos de $[0,1]$. Por el Teorema de Extensión de Tietze [15], f puede ser extendida a un función continua $\overline{f} : [0,1] \to [0,1]$. Más aún, para $j = 1, \ldots, m$ definimos la función $f_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ a través de

$$f_j(s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{dist}(s, [0,1] \setminus J_k)}{\sum_{k=1}^{m} \operatorname{dist}(s, [0,1] \setminus J_k)} & \text{si } t \in \bigcup J_k \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es claro que estas funciones f_j son continuas en $[0,1]$. Además, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{m} f_j(s) \leq 1$$

para todo $s \in [0,1]$ y que $f_j(s) = 0$ si $s \notin J_j$. Por último, introducimos la función continua $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ a través de

$$u(s) = q(s) + \beta \overline{f}(s) \sum_{j=1}^{m} f_j(s) x_{t_j},$$

donde $\beta = \text{mín}\{\beta_{t_1}, \cdots, \beta_{t_m}\}$.

Investiguemos ahora las propiedades del camino especial u. Demostremos primero que $u \in M$. En efecto, ya que $\phi(0), \phi(x_0) \leq d < c - \epsilon^2$, tenemos que $f(0) = f(1) = 0$. Por lo tanto

$$u(0) = q(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad u(1) = q(1) = x_1,$$

esto es, $u \in M$.

Para $t \in [0,1]$ fijo, definamos ahora la función diferenciable

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \tau &\mapsto \phi(q(s) + \tau[u(t) - q(t)]). \end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio [1, vol. 1], existe algún $\tau_0 \in (0,1)$ tal que

$$g(1) - g(0) = g'(\tau_0).$$

Pero, esto es idéntico a decir que

$$\phi(u(s)) - \phi(q(s)) = \left\langle \phi'(q(s) + \tau_0[u(s) - q(s)]), u(s) - q(s) \right\rangle. \tag{1.11}$$

Notemos que

$$u(s) - q(s) = \beta \overline{f}(s) \sum_{j=1}^{m} f_j(s) x_{t_j}$$

para todo $s \in [0,1]$. Puesto que $\left\| x_{t_j} \right\|_X = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u(s) - q(s)\|_X &\leq \beta \sum_{j=1}^{m} f_j(s) \left\| y_{t_j} \right\|_X \\ &\leq \beta \\ &\leq \beta_{t_k}, \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \ldots, m$ y $t \in [0,1]$. En vista de que $0 < \tau_0 < 1$, tenemos que

$$\|\tau_0(u(s) - q(s))\|_X \leq \beta_{s_k}$$

para todo $k = 1, \cdots, m$ y todo $s \in [0,1]$. Sea ahora $s \in T$. Entonces, $s \in J_k$ para algún k. Así, se sigue de (1.10) y (1.11) que

$$\begin{aligned}\phi(u(s)) - \phi(q(s)) &= \beta \overline{f}(s) \sum_{j=1}^{m} f_j \left\langle \phi'(q(s) + \tau_0[u(s) - q(s)]), x_{s_j} \right\rangle \\ &\leq \beta \overline{f}(s) \sum_{j=1}^{m} f_j(s)(-\epsilon)\end{aligned} \tag{1.12}$$

Tenemos, entonces, la siguiente desigualdad:

$$\phi(u(s)) - \phi(q(s)) \leq -\epsilon\beta \overline{f}(s) \tag{1.13}$$

para todo $s \in T$. Ahora bien si $s \in [0,1] \setminus T$, entonces $\phi(s) < c - \epsilon^2$, y por lo tanto $\overline{f}(s) = 0$. Es así como $u(s) = q(s)$, lo que implica que

$$\phi(u(s)) - \phi(q(s)) = 0$$

para todo $s \in [0,1] \setminus T$. Por lo tanto

$$\phi(q(s)) \geq \phi(u(s)) \tag{1.14}$$

para todo $s \in [0,1]$. Escojamos un número $\sigma \in [0,1]$ de tal modo que

$$\phi(u(\sigma)) = \max_{s \in [0,1]} \phi(u(s)).$$

Por la definición de ψ,

$$\phi(u(\sigma)) = \psi(u).$$

Ya que $u \in M$ y $c = \inf_M \psi$, tenemos que $\psi(u) \geq c$. Por (1.14) tenemos que

$$\phi(q(\sigma)) \geq \phi(u(\sigma)) = \psi(u) \geq c. \tag{1.15}$$

Por lo tanto $\sigma \in T$. Se deduce de (1.13) con $s = \sigma$ que

$$\phi(q(\sigma)) \geq \epsilon\beta + \phi(u(\sigma)).$$

Por la definición de ψ, tenemos que $\psi(u) \geq \phi(q(\sigma))$, y por tanto

$$\phi(q(s)) \geq \epsilon\beta + \psi(u) > \psi(u), \tag{1.16}$$

lo que implica que $u \neq q$ en X. De acuerdo con (1.12),

$$\|u - q\|_N = \max_{s \in [0,1]} \|u(s) - q(s)\|_X \leq \beta. \tag{1.17}$$

Por lo tanto la desigualdad (1.16) nos dice que

$$\psi(q) \geq \epsilon \left\| u - q \right\|_N + \psi(u).$$

Esta es la desigualdad que nos contradice (1.7).

Ahora bien, tenemos garantizada la existencia de un ϵ-cuasi-punto crítico. Aplicamos la condición de Palais-Smale con $\epsilon = \frac{1}{n}$ y $y_n = q(t_n)$, obteniendo así la existencia de un punto $x_* = q(t_*)$ tal que

$$\left\| \phi'(x_*) \right\|_{X'} = 0 \text{y} \qquad\qquad \phi(x_*) = c.$$ ∎

El Teorema del Pasamontañas tiene una gran diversidad de variantes y generalizaciones. Por ejemplo, el Teorema del Punto de Silla [20] es muy empleado en problemas hiperbólicos como lo es precisamente la Ecuación de Onda. Otra generalización no usa (PS) si no que usa $(\mathrm{PS})_c$. Es en esta última en la que estamos interesados. Para tal fin debemos revisar un resultado sobre existencia de pseudogradientes en [21].

Sean X un espacio de Hilbert, $\phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional Gateaux Diferenciable y $\tilde{X} = \{x \in X \mid |\phi(x) - c| \leq \bar{\epsilon}\}$. Un *campo vectorial pseudogradiente* $V : \tilde{X} \to X$ para ϕ, es un campo vectorial Lipschitz que cumple las dos siguientes condiciones

$$\begin{gathered} \left\| V(x) \right\|_X \leq 2 \left\| \phi'(x) \right\|_{X'} \\ \left\langle \phi'(x), V(x) \right\rangle \geq \left\| \phi'(x) \right\|_{X'}^2 . \end{gathered}$$

El siguiente resultado es muy usado en cálculo variacional y es debido a P. Rabinowitz en [21]. Sin embargo, [21] asume que ϕ es de clase C^1. En [8, Lema 3.3] se demuestra un resultado más general asumiendo que ϕ es localmente Lipchitz. Es más se cambia la condición de que X sea un Hilbert por un espacio de Banach reflexivo [42]. El lector interesado en esta demostración puede consultar la bibliografía antes citada con la advertencia de que una lectura de [8] requiere de herramientas y conceptos claros del Análisis Convexo.

Lema 1.3.2. *Sean X un espacio de Banach reflexivo, $\phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional localmente Lipschitz y*

$$\tilde{X} = \{x \in X \mid |\phi(x) - c| \leq \bar{\epsilon}\}.$$

Entonces existe un campo vectorial pseudogradiente V sobre $\tilde{X}$ para ϕ

Teorema 1.3.3. *Sean X un espacio de Banach real y $\phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase Gateaux diferenciable que satisface $(PS)_c$ y que es continuo de la topología de X en la topología débil* [3] de X'. Supongamos que existen una constante positiva α y una vecindad U de 0 tales que*

$$\phi(x) \geq \alpha \tag{1.18}$$

para todo $x \in \partial U$. Supongamos además que $\phi(0) < \alpha$ y que existe un punto $x_0 \in x \setminus U$ tal que

$$\phi(x_0) < \alpha.$$

Denotemos con M el conjunto de todos los caminos continuos $p : [0,1] \to X$ que unen 0 con x_0. Es decir, tales que $p(0) = 0$ y $p(1) = x_0$. Más aún, definamos

$$c = \inf_{p \in M} \max_{t \in [0,1]} \phi(p(t)).$$

Entonces el funcional ϕ posee un punto crítico $x_* \in X$. Es decir,

$$\phi'(x_*) = 0.$$

Además $\phi(x_*) = c \geq \alpha$.

Demostración. El funcional ϕ es localmente Lipchitz. En efecto, en vista de ϕ' es continuo como en la hipótesis, tenemos que dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$ existe un δ_ϵ tal que si $\|z - x\|_X < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |\phi'(z)\xi| &< \epsilon + |\phi'(x)\xi| \\ &= c_\xi. \end{aligned}$$

Por el Teorema de la Acotación Uniforme [42]

$$\|\phi'(z)\|_{X'} \leq M$$

para alguna $M > 0$ y todo $z \in B_{\delta_\epsilon}(x)$. Es decir ϕ es localmente acotada. Ahora bien, para $x, h \in X$ y $t \in R$ definamos la función a valor real

$$g(t) = \phi(z + th).$$

Por el Teorema de Valor Medio [1] y haciendo $y = z + ty$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|\phi(y) - \phi(z)\|_X &= \|\phi(z + th) - \phi(z)\|_X \\ &= |g(t) - g(0)| \\ &= |g'(t_0)||t| \\ &= |\langle \phi'(z + t_0 h), h \rangle ||t| \\ &\leq \|\phi'(z + t_0 h)\|_{X'} \|h\|_X |t| \\ &\leq M \|z - y\|_X \end{aligned}$$

para todo $z, y \in B_{\delta_\epsilon}(x)$. Es así como hemos demostrado nuestra afirmación de que ϕ es localmente Lipchitz.

Es así como es aplicable el Lema 1.3.2 para ϕ y podemos garantizar la existencia del campo vectorial pseudogradiente V para ϕ en $\tilde{X}$.

Supongamos ahora que c no es un valor crítico. Por $(\mathrm{PS})_c$ existen $\overline{\epsilon}, b > 0$ tales que $\|\phi'(x)\|_{X'} \geq b$ en $\tilde{X}$. Podemos tomar $\overline{\epsilon} < \text{mín}\{\alpha - \phi(0), \alpha + \phi(0)\}$, para garantizar que ni 0 ni x_0 estén en $\in \tilde{X}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|\phi'(x)\|_{X'}^2 &\leq |\langle \phi'(x), v(x) \rangle| \\ &\leq \|\phi(x)\|_{X'} \|v(x)\|_X . \end{aligned}$$

Cancelando tenemos

$$\|v(x)\|_X \geq \|\phi'(x)\|_{X'} \tag{1.19}$$
$$\geq b. \tag{1.20}$$

Definamos ahora el conjunto

$$\hat{X} = \{x \in X \mid c - \frac{1}{2}\overline{\epsilon} < \phi(x) < c + \frac{1}{2}\overline{\epsilon}\},$$

y sea $0 \leq g \leq 1$ una función localmente Lipchitz en X que satisface

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \hat{X} \\ 0 & \text{si } x \notin \tilde{X}. \end{cases}$$

Definamos además el campo vectorial en X

$$\overline{v}(x) = \begin{cases} -h(x)\dfrac{v(x)}{\|v(x)\|_X^2} & \text{si } x \in \tilde{X} \\ 0 & \text{si } x \notin \tilde{X}. \end{cases}$$

Es claro que $\overline{v}$ es localmente Lipchitz y que de (1.19)

$$\|\overline{v}(x)\|_X \leq \frac{1}{b}. \tag{1.21}$$

Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \partial_t y &= \overline{v}(y(t,x)) \\ y(0,x) &= x \ x \in X. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Por el Teorema de Existencia y Unicidad [29] o [32], tenemos que existe una única solución al problema de valores iniciales (1.22). Es más por (1.21) podemos extender esta solución para $t \in [0, \infty)$. Notemos con $y(t,x)$ al flujo del PVI (1.22). Por la definición de $\overline{v}$ y la unicidad de las soluciones el flujo y cumple con que si $x \notin \tilde{X}$ entonces

$$y(t,x) = x \tag{1.23}$$

para todo t en el intervalo maximal de definición de y. Más aún, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(y(t)) &= \langle \phi'(y(t)), \overline{v}(y(t)) \rangle \\ &= \left\langle \phi'(y(t)), -h(x)\frac{v(x)}{\|v(x)\|_X^2} \right\rangle \\ &= \frac{-h(y(t)}{\|v(x)\|_X^2} \langle \phi'(y(t)), \overline{v}(y(t)) \rangle \\ &\leq \frac{-h(y(t)) \, \|\phi'(y(t))\|_{X'}^2}{\|v(x)\|_X^2} \\ &\leq -\frac{1}{4} h(y(t)). \end{aligned} \tag{1.24}$$

En vista de que $y(t+s) = y(t) + \overline{v}(y(t))s + o(s)$ y de ϕ es localmente Lipchitz tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(y(t+s)) &= \phi(y(t)) + s\overline{v}(y(t)) + o(s) \\ &= \phi(y(t)) + s\left\langle \phi'(y(t)), \overline{v}(y(t)) \right\rangle + o(s). \end{aligned} \tag{1.25}$$

Ahora por la definición de inf y de c, existe un $p \in M$ tal que

$$\phi(x) \leq \max_{t\in[0,1]} \phi(p(t)) \leq c + \frac{1}{2}\overline{\epsilon}$$

para $x \in p$. De (1.23) se sigue que $y(4\overline{\epsilon}, x)$ es un camino que une 0 con x_0. Haciendo $s = 4\overline{\epsilon}$ tenemos que para todo $\eta > 0$

$$\begin{aligned} \phi(y(4\overline{\epsilon}, x))) &= \phi(y(0,x)) + 4\overline{\epsilon}\left\langle \phi'(x), \overline{v}(x) \right\rangle + o(4\overline{\epsilon}) \\ &\leq \phi(x) - \overline{\epsilon}h(x) + \eta \\ &\leq c - \frac{1}{2}\overline{\epsilon} + \eta \\ &\leq c - \frac{1}{2}\overline{\epsilon}. \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción y nuestro teorema queda demostrado. ■

CAPÍTULO 2

VIBRACIONES LIBRES

Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no decreciente tal que $g(0) = 0$,

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\pi], t \in [0,2\pi]\}$$

y

$$\Box u = \partial_{tt} u - \partial_{xx} u.$$

Las *vibraciones libres* son soluciones débiles[23] no triviales al problema

$$\begin{aligned} \Box u + g(u) &= 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 \\ u(x,t+2\pi) &= u(x,t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Es decir, estamos buscando funciones $u \in L^\infty(\Omega)$ no nulas, tales que satisfagan (2.1). Fue Rabinowitz en 1978 [22, Teorema 1.6] quien demostró la existencia de Vibraciones Libres empleando el Teorema del Pasamontañas, herramienta de él mismo. En aquel entonces el Teorema del Pasamontañas estaba formulado solo en dimensión finita, [22, Teorema 1.10], por tal razón, Rabinowitz «se vió forzado» a demostrar en este mismo articulo un resultado parcial en dimensión finita, Lema 1.13, y luego, con gran trabajo haciendo tender la dimensión del espacio a infinito, demuestra la existencia de Vibraciones Libres en dimensión infinita.

Dos años más tarde, cuando el Teorema del Pasamontañas se formula adecuadamente en dimensión infinita compensando la carencia de compacidad con la condición de Palais Smale; Brezis, Coron y Nieremberg [13] demuestran de una manera mucho más clara la existencia de Vibraciones Libres. Es precisamente este artículo el que vamos a estudiar en detalle en la presente monografía.

2.1. Estudio de las Hipótesis

Queremos demostrar, como dijimos anteriormente, la existencia de soluciones débiles no triviales a (2.1). Para esto necesitamos asumir las siguientes hipótesis.

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(s)}{s} = \infty \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2} s g(s) - G(s) \geq \alpha |g(s)| - C, \tag{2.3}$$

para algunas constantes $\alpha > 0$ y $C \in \mathbb{R}$ y para todo $s \in \mathbb{R}$. En 2.3

$$G(s) = \int_0^s g(u)\, du.$$

Recordemos además que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua no decreciente con $g(0) = 0$. La hipótesis (2.2) geométricamente puede ser interpretada de la siguiente manera: dada cualquier recta que pasa por el origen, a partir de un cierto punto «suficientemente» a la derecha, la gráfica de g está por encima de dicha recta. Del mimo modo, a partir de un punto «suficientemente» a la izquierda, la gráfica de g está por debajo de la recta en cuestión. Todo lo anterior es debido a la definición de límite, ya que dado $M > 0$ existe $N > 0$ tal que si $|s| > N$, $|g(s)| > M|s|$. Cabe aclarar que

$$sg(s), \frac{g(s)}{s} > 0$$

y que por lo tanto

$$sg(s) = |s||g(s)|, \quad \frac{g(s)}{s} = \frac{|g(s)|}{|s|}.$$

Originalmente P. Rabinowitz en [22, Sec 1], artículo antes citado, planteó las siguientes hipótesis para g

$$g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ y } g(0) = 0 \tag{2.4}$$

$$g \text{ es estrictamente creciente} \tag{2.5}$$

$$g(s) = o(|s|) \text{ en } s = 0 \tag{2.6}$$

$$G(s) \leq \theta s g(s) \tag{2.7}$$

para $|s| \geq s_0$. Donde $s_0 > 0$ y $\theta \in [0, \frac{1}{2})$. Analicemos una a una. La hipótesis (2.4) es claramente más fuerte que la realizada por nosotros ya que ser de clase C^1 es más que simple continuidad. Sin embargo la diferenciabilidad de g no será necesaria para nosostros. La hipótesis (2.5) puede ser debilitada a no decreciente. Tampoco será necesario asumir (2.6). Por último, en cambio de (2.7) asumiremos (2.2) y (2.3), las cuales son hipótesis más débiles como lo demostraremos en la siguiente

Proposición. (2.2) *y* (2.3) *implican* (2.7)

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalida que $s > 0$. Sean $M > 0$ y $s_0 > \frac{C}{M\alpha}$ tal que si $s > s_0$, $g(s) > Ms$. Entonces

$$\begin{aligned} G(s) &\leq C + \frac{1}{2} s g(s) - \alpha g(s) \\ &\leq (C - \alpha g(s)) + \frac{1}{2} s g(s) \\ &\leq (C - s_0 \alpha M) + \frac{1}{2} s g(s) \\ &\leq \theta s g(s) \end{aligned}$$

donde $\theta \in [0, \frac{1}{2})$. ■

2.2. El caso $g(u) = |u|^{p-2}u$, $p > 2$

Permitanos el lector hacer en las siguientes lineas un cálculo formal de ncl($\Box$) en $L^1(\Omega)$ con las condiciones sobre u que aparecen en (2.1). El desarrollo lo haremos en cuatro pasos a saber:

1. Primero busquemos funciones $u \in C_0^\infty$ tales que

$$\begin{gathered} \Box u = 0, \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, t + 2\pi) = u(x,t). \end{gathered}$$

   Por el popular método de las características [33] vemos que $\Box u = u_{\eta\xi} = 0$, donde $\eta = x + y$ y $\xi = x - y$. Es así como $u = p(\eta) + q(\xi)$ para algunas funciones p y q. Por lo tanto $u(x,t) = p(x + t) + q(x - t)$. Aplicamos la condición $u(0,t) = 0$ y obtenemos que $u(x,t) = p(t + x) - p(t - x)$.

2. Aplicando ahora la condición $u(\pi, t) = 0$ vemos que la función p es periódica de periodo 2π.

3. Estas funciones p son tales que

$$[p] = \int_0^{2\pi} p = 0.$$

En efecto, asumamos la representación de p en términos de u que aparece en (2.11). Es así como:

$$\begin{aligned}
[p] &= \int_0^{2\pi} p(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[u(x,t-x)-u(x,t+x)]\,dxdt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}[u(x,t-x)-u(x,t+x)]\,dtdx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_{-x}^{2\pi-x}u(x,s)\,ds-\int_x^{2\pi+x}u(x,s)\,ds\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi}u(x,s)\,ds-\int_0^{2\pi}u(x,s)\,ds\right]dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. Sea $\mathbb{T}$ la variedad $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ con S^1 de longitud 2π [29]. Aproximamos las funciones en $L^1(\Omega)$ por funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ con el cuidado pertinente en la derivación generalizada que aparecería en $\Box u$. Como u está en términos de p y el dominio de p es $\mathbb{T}$ tenemos que $p \in L^1(\mathbb{T})$.

Del desarrollo anterior, tenemos que el núcleo del operador de D'Alembert viene dado por

$$\mathrm{ncl}(\Box) = \left\{u \in L^1(\Omega) \mid u = p(t+x)-p(t-x),\ p \in L^1(\mathbb{T}) \text{ y } [p]=0\right\}.$$

Es claro además que $\mathrm{ncl}(\Box)$ es cerrado en L^1. En efecto. Supongamos que $p_n \to p$ en $L^1(\mathbb{T})$ con $p_n \in \mathrm{ncl}(\Box)$. Tomemos $\epsilon = 1$ y $n_0 \geq N_\epsilon$ fijo tal que $\|p_{n_0}-p\|_{L^1(\Omega)} < 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}|p| &\leq \int_0^{2\pi}|p_{n_0}-p| + \int_0^{2\pi}|p_{n_0}| \\
&< 1 + \|p_{n_0}\|_{L^1(\Omega)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Enunciaremos ahora a un resultado cuya demostración se encuentra en [17] y el cual es de vital importancia para este estudio.

Teorema 2.2.1 (Lovicarová). *Sea $f \in L^1(\Omega)$ tal que $\int_\Omega f\varphi = 0$ para toda $\phi \in \mathrm{ncl}(\Box)\cap L^\infty(\Omega)$. Entonces existe una única función $u \in C(\overline{\Omega})$ tal que $\Box u = f$ y $\int_\Omega u\varphi = 0$ para toda $\varphi \in \mathrm{ncl}(\Box)$. Más aún u viene dada por la formula explicita*

$$u(x,t) = \psi(x,t) + p(t+x) - p(t-x)$$

donde

$$\psi = -\frac{1}{2}\int_x^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\xi,\tau)\,d\tau + \frac{(\pi-x)}{2\pi}\int_0^{\pi}d\xi\int_{t-\xi}^{t+\xi}f(\xi,\tau)\,d\tau, \tag{2.8}$$

$$p(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\psi(s,y-s)-\psi(s,y+s)]\,ds.$$

Del teorema anterior se desprende la existencia del operador $K = \Box^{-1}$

Proposición 2.2.2. *Las siguientes son propiedades de K*

1. *[17]*
$$\|Kf\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

2. *[39]*
$$\int_\Omega Kfg = \int_\Omega fKg$$

3. *[17]*
$$\|Kf\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|f\|_{L^q(\Omega)} \quad \textit{con } \alpha = 1 - \frac{1}{q}$$
$C^{0,\alpha}(\Omega)$ *es el espacio de Hölder de orden* α.

4. *[39] K es un operador autoadjunto en*
$$\left\{ f \in L^2 \;\middle|\; \int f\varphi = 0, \textit{ con } \varphi \in \mathrm{ncl}(\Box) \cap L^\infty \right\}.$$

5. *[7] Los valores propios de K son de la forma* $\dfrac{1}{j^2 - k^2}$ *con* $j = 1, 2, ..., k = 0, 1, 2, ...$ *y* $j \neq k$.

Consideremos el espacio
$$E = \left\{ v \in L^{p'}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega v\phi \text{ para toda } \phi \in \mathrm{ncl}(\Box) \cap L^p \right\}$$
provisto de la norma $L^{p'}(\Omega)$ y con p y p' exponentes conjugados. En virtud de (3) en la proposición 2.2.2 el operador $K : E \to L^p(\Omega)$ es un operador compacto. Definimos ahora
$$\phi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega (Kv)v + \frac{1}{p'} \int_\Omega |v|^{p'}.$$

Es claro que ϕ es de clase C^1. Vamos a calcular la derivada de ϕ de la siguiente manera. El primer término a través de la derivada de Gateaux
$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega (K(v + t\xi))(v + t\xi) - \int_\Omega (Kv)v \right] &= \frac{1}{2} \int_\Omega (Kv)\xi + \frac{1}{2} \int_\Omega (K\xi)v \\ &= \int_\Omega (Kv)\xi. \end{aligned}$$

El segundo término lo calculamos a través de la regla de la cadena, obteniendo
$$\begin{aligned} \frac{1}{p'} \left(\int_\Omega |v|^{p'} \right)' \xi &= \frac{1}{p'} \int_\Omega p' |v|^{p'-1} \frac{v}{|v|} \xi \\ &= \int_\Omega |v|^{p'-2} v\xi \end{aligned}$$

Es así como
$$\langle \phi'(v), \xi \rangle_{E',E} = \int_\Omega (Kv)\xi + \int_\Omega |v|^{p'-2} v\xi.$$
Además, podemos representar
$$Kv + |v|^{p'-2}v = \omega + \chi$$
con $\omega \in L^p(\Omega)$, $\|\omega\|_{L^p(\Omega)} = \|\phi'(v)\|_{E'}$ y $\chi \in \text{ncl}(\Box) \cap L^p(\Omega)$.

Lema 2.2.3. *El funcional ϕ cumple la condición de Palais Smale (PS).*

Demostración. Sea v_i una sucesión tal que $\phi(v_i)$ es acotada y $\|\phi'(v_i)\|_{E'} \to 0$. Escribimos $Kv_i + |v_i|^{p'-2}v_i = \omega_i + \chi_i$ con $\omega_i \in L^p(\Omega)$ y $\chi_i \in \text{ncl}(\Box) \cap L^p(\Omega)$. Pero $\|\phi'(v_i)\|_{E'} = \|w_i\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ y
$$\omega_i v_i = (Kv_i)v_i + |v_i|^{p'} - \chi_i v_i.$$
Por lo que
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\int_\Omega (Kv_i)v_i + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_i|^{p'}\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_\Omega (Kv_i)v_i + \frac{1}{2}\int_\Omega |v_i|^{p'} - \int_\Omega \chi_i v_i\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_\Omega v_i\omega_i\right| \\ &\le \frac{1}{2}\|\omega_i\|_{L^p(\Omega)} \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)},\end{aligned}$$
además
$$\begin{aligned}|\phi(v_i)| &= \left|\frac{1}{2}\int_\Omega (Kv_i)v_i + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v_i|^{p'}\right| \\ &\le M.\end{aligned}$$
Disgregando los valores absolutos tenemos que
$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\int_\Omega |v_i|^{p'} &\le \frac{1}{2}\|\omega_i\|_{L^p(\Omega)} \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_\Omega (Kv_i)v_i \\ \frac{1}{p'}\int_\Omega |v_i|^{p'} &\le M - \frac{1}{2}\int_\Omega (Kv_i)v_i.\end{aligned}$$
Sumamos estas dos desigualdades y
$$\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}\right)\int |v_i|^{p'} \le M + \frac{1}{2}\|\omega_i\|_{L^p(\Omega)} \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \tag{2.9}$$
por tanto $\|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)}$ está acotado. En efecto, si $a_i = \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)}$ no estuviera acotado podríamos extraer una subsucesión nuevamente llamada a_n que tienda a infinito y la desigualdad (2.9) tomaría la forma
$$\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}\right) a_n^{p'-1} \le \frac{M}{a_n} + \|\omega_i\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pero el lado derecho de esta desigualdad tiende a infinito mientras la otra tiende a cero, demostrando así que $\|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)}$ está acotado en $L^{p'}(\Omega)$. Siendo así, podemos extraer una subsucesión llamada también v_i, la cual converge débilmente a un $v \in E$. Definamos la función $f(v) = |v|^{p'}$. Como f es una función convexa tenemos que

$$f(v) - f(v_i) = f'(v_i)(v - v_i)$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{p'}|v|^{p'} - \frac{1}{p'}|v_i|^{p'} &\geq |v_i|^{p'-2}v_i(v - v_i)\\ &= (\omega_i + \chi_i - Kv_i)(v - v_i),\end{aligned}$$

integrando a ambos lados de la desigualdad anterior

$$\frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'} - \frac{1}{p'}\int_\Omega |v_i|^{p'} \geq \int_\Omega (\omega_i - Kv_i)(v - v_i).$$

Usando la compacidad y la convergencia débil de v_i vemos que el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero al sacar límite superior a ambos lados. Puesto que la norma es una función semicontinua superiormente [18] tenemos que

$$\overline{\lim}\, \|v_i\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \|v\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

de donde $v_j \to v$ fuertemente. ■

Lema 2.2.4. *Existen constantes $r > 0$ y $\rho > 0$ tales que $\phi(v) \geq \rho$ para todo $v \in E$ con $\|v\|_E = r$*

Demostración. Usando la propiedad (1) de la Proposición 2.2.2 y la definición de ϕ tenemos que

$$\begin{aligned}\phi(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (Kv)v + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'}\\ &\geq -\frac{1}{2}\int_\Omega |(Kv)v| + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'}\\ &\geq -\frac{1}{2}\|Kv\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |v| + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'}\\ &\geq -C\|v\|^2_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'}.\end{aligned}$$

En vista de que $p > 2$, $1 < p' < 2$, $\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq C\|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$ y por tanto

$$\begin{aligned}\phi(v) &\geq -C\|v\|^2_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'}\\ &\geq -C\|v\|^2_{L^{p'}(\Omega)} + \frac{1}{p'}\int_\Omega |v|^{p'}.\end{aligned}$$

Tomemos

$$r < \left(\frac{1}{cp'}\right)^{\frac{1}{2-p'}}$$

y

$$\rho = r^{p'} \left(\frac{1}{p'} - Cr^{2-p'} \right).$$

Siendo así, para todos los v con $\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = r$ tenemos que $\phi(v) \geq \rho$. ∎

Lema 2.2.5. *$\phi(0) < \rho$ y $\phi(v_0) < \rho$ para algún $v_0 \in E$ con $\|v_0\|_{L^{p'}(\Omega)} > r$.*

Demostración. Por un lado $\phi(0) = 0 < \rho$. Por otro lado, escojamos $v_0 = av_1$, donde v_1 es cualquier elemento en E tal que

$$\int_\Omega (Kv_1)v_1 < 0$$

y a es lo suficientemente grande para que garantice que $\phi(v_0) < r$. Este v_1 en efecto existe, basta tomar un vector propio de valor propio negativo. ∎

Teorema 2.2.6. *Supongamos que en* (2.1) *tenemos $g(u) = |u|^{p-2}$ con $p > 2$. Entonces existe una solución débil no trivial a* (2.1) *en $L^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Los Lemas 2.2.3, 2.2.4 y 2.2.5 garantizan que es aplicable el Teorema del Pasamontañas, Teorema 1.3.1, y por lo tanto existe $v \in E$ con $v \neq 0$ tal que $\phi'(v) = 0$. Así $Kv + |v|^{p-2}v = \chi$ para alguna $\chi \in \mathrm{ncl}(\Box) \cap L^p(\Omega)$. Definamos $u = \chi - Kv$. Es claro que

$$\Box u + v = 0$$

Pero $v = |u|^{p-2}u = g(u)$ Por lo tanto

$$\Box u + g(u) = 0.$$

Es decir u es una solución a (2.1). Nos falta comprobar que $u \in L^\infty(\Omega)$.

$$\chi(x,t) = p(t+x) - p(t-x), \tag{2.10}$$

donde

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\chi(x, t-x) - \chi(x, t+x)]\, dx. \tag{2.11}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\chi(x, t-x) - \chi(x, t+x)]\, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p(t) - p(t-2x) - p(t+2x) + p(t)]\ dx \\
&= p(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [p(t-2x) + p(t+2x)] \\
&= p(t) + \frac{1}{\pi} \int_{t-2\pi}^{t+2\pi} p \\
&= p(t).
\end{aligned}$$

Cabe aclarar que como $\chi \in L^p(\Omega)$, $p \in L^p(0, 2\pi)$ y como $v \in E$

$$\int_0^\pi [v(x, t-x) - v(x, t+x)]\, dx = 0.$$

Definamos $M = \|Kv\|_{L^\infty(\Omega)}$; entonces por 2.10

$$|u - \chi| \leq M$$

de donde

$$-M + \chi(x,t) \leq u(x,t) \leq M + \chi(x,t),$$

lo que implica que

$$-M + p(t+x) - p(t-x) \leq u(x,t) \leq M + p(t+x) - p(t-x).$$

Tomando g a ambos lados y aplicando la monotonía

$$g(-M + p(t+x) - p(t-x)) \leq v(x,t) \leq g(M + p(t+x) - p(t-x)).$$

Hagamos los cambios de variable $\sigma = t + x$, $s = t - x$, integramos a ambos lados de la desigualdad anterior y usamos 2.2 para obtener

$$\int_0^{2\pi} g(-M + p(\sigma) - p(s))\, ds \leq 0$$

y

$$\int_0^{2\pi} g(-M + p(\sigma) - p(s))\, ds \geq 0$$

De este modo $p \in L^\infty(0, 2\pi)$, lo que implica que $\chi \in L^\infty(\Omega)$ y como $Kv \in L^\infty(\Omega)$ entonces $u \in L^\infty(\Omega)$ como queriamos demostrar. ■

2.3. El caso de una función general g

El cálculo de variaciones está atravesado, entre otras, por el Análisis Convexo. Por ejemplo el Lema 1.3.2 es un resultado típico del Análisis Convexo. Un concepto que usaremos de esta área del análisis es el de función convexa conjugada debido a A. M. Legendre. Sea $f : \mathbb{R} \to R$ una función derivable, f^* se dice la *convexa conjugada* o *transformada de Legendre* de f si existe $(f')^{-1}$ y

$$(f^*)' = (f)^{-1}$$

y se cumple la Igualdad de Fenchel-Young

$$f^*(x) + f(y) = xy$$

Las funciones convexas conjugadas cumplen con la siguiente propiedad

Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Fenchel-Young). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y f^* su convexa conjugada. Entonces*

$$xy \leq f(x) + g(y)$$

El lector interesado en profundizar en análisis convexo puede consultar [25].

Asumamos primero que g es una función estrictamente creciente como hizo P. Rabinowitz en [22]. Definamos $h = g^{-1}$ y $H(t) = G^*(t)$. Es claro que

$$H(t) = \int_0^t h(s)\, ds.$$

Fijemos $k > 0$ y definamos

$$h_k(t) = \begin{cases} h(k) & t \geq k \\ h(t) & |t| \leq k \\ h(-k) & t \leq -k. \end{cases}$$

Definamos $H_k(t) = \int_0^t h_k(s)\, ds$.

Proposición. *Sean h y H como antes. Entoces*

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{h(s)}{s} = 0 \tag{2.12}$$

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{H(s)}{s^2} = 0 \tag{2.13}$$

Demostración. Aplicando 2.2 y haciendo $s = g(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{|s|\to\infty} \frac{h(s)}{s} &= \lim_{|t|\to\infty} \frac{t}{g(t)} \\ &= \lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{\frac{g(t)}{t}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $H(s) \to \infty$ cuando $s \to \infty$, es aplicable la regla de L'Hopital para obtener 2.13 ■

Proposición. *Sean H, h, g y G como antes. Entonces*

$$H(s) - \frac{1}{2}sh(s) \geq \alpha|s| - C \tag{2.14}$$

Para algunas constantes $\alpha > 0$ y $C \in \mathbb{R}$ y todo $s \in \mathbb{R}$.

Demostración. Recordando 2.3 y la Igualdad de Young (2.3) y haciendo $s = g(t)$ tenemos

$$\begin{aligned} H(s) - \frac{1}{2}sh(s) &= tg(t) - G(t) - \frac{1}{2}tg(t) \\ &= \frac{1}{2}tg(t) - G(t) \\ &\geq \alpha|g(t)| - C \\ &\geq \alpha|s| - C \end{aligned}$$

■

De manera parecida al resultado anterior tenemos

Proposición. *Sean H_k y h_k como antes. Entonces*

$$H_k(s) - \frac{1}{2} s h_k(s) \geq \alpha |s| - C \tag{2.15}$$

Para algunas constantes $\alpha > 0$ y $C \in \mathbb{R}$ y todo $s \in \mathbb{R}$ y $k \geq k_0$ con k_0 suficientemente grande para que $h(k_0) \geq 2\alpha$ y $|h(-k_0)| \geq 2\alpha$.[1]*. Recordemos que k está fijo.*

Demostración. Demostraremos sólo el caso en el que $s \geq k$, el caso en el que $|s| \leq k$ podemos aplicar (2.14). El caso $s \leq -k$ es similar al primero. Supongamos pues que $s \geq k$, al ser $h(k_0) \geq 2\alpha$ y $s > 0$ se mantiene el signo de $s(h(k) - 2\alpha)$. Entonces para alguna $C \in \mathbb{R}$

$$s(h(k) - 2\alpha) \geq -C + kh(k) - H_k(k),$$

de donde

$$H_k(k) + \frac{1}{2} sh(k) - kh(k) \geq \alpha s - C,$$

lo cual a su vez implica

$$H_k(k) + (s-k)h(k) - \frac{1}{2} sh(k) \geq \alpha s - C.$$

Pero los dos primero términos de la desigualdad anterior son iguales a $H_k(s)$, obteniendo así la desigualdad deseada. ■

Sea ahora

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

donde n es un entero suficientemente grande escogido después. Definamos la variedad $\mathbb{T}_n$ como $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ de longitud T. Cambiamos (2.1) por

$$\begin{aligned} \Box u + g(u) &= 0 \\ u(0,t) = u(\pi, t) &= 0 \\ u(x, t+T) &= u(x,t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Con estas nuevas restricciones el núcleo del operador $\Box$ es

$$\operatorname{ncl}(\Box) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \;\middle|\; u = p(t+x) - p(t-x),\, p \in L^1(\mathbb{T}_n),\ \text{y } [p]_n = \int_0^T p = 0 \right\}.$$

Redefinimos también $\Omega = (0, \pi) \times (0, T)$. Con este nuevo Ω el Teorema de Lovicarová es también aplicable obteniendo una nueva función f tal que $u = Kf$. Trabajaremos ahora en el espacio de Banach

$$E = \left\{ v \in L^{p'}(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega v\phi \text{ para todo } \phi \in \operatorname{ncl}(\Box) \cap L^p \right\}$$

De manera similar a 2.2.2 tenemos

[1] Esto se puede garantizar ya que h es estrictamente creciente

Proposición 2.3.2. *Las siguientes son propiedades de K*

1.
$$\|Kf\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C}{T} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

2.
$$\int_\Omega Kfg = \int_\Omega fKg$$

3.
$$\|Kf\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C_T \|f\|_{L^q(\Omega)} \quad \textit{con } \alpha = 1 - \frac{1}{q} \tag{2.17}$$

   $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *es el espacio de Hölder de orden* α.

4. *K es un operador autoadjunto en* $E \cap L^2$.

5. *Los valores propios de K son de la forma* $\dfrac{1}{j^2 - n^2k^2}$ *con* $j = 1, 2, ..., k = 0, 1, 2, ...$ *y* $j \neq nk$.

Lema 2.3.3.
$$\int_\Omega (Kf)f \geq -2 \|f\|^2_{L^1(\Omega)} \tag{2.18}$$
para toda $f \in E$.

Demostración. Por 2.8 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (kf)f &= \int_\Omega uf \\ &= \int_\Omega [\psi(x,t)f(x,t) + p(t+x)f(x,t) - p(x-t)f(x,t)]\, dA \\ &= \int_\Omega \psi f \end{aligned}$$

Definamos
$$\eta(\xi) = \int_0^T f(\xi,\tau)\, d\tau.$$

Por interpolación tenemos que

$$\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\xi,\tau)\, d\tau = \left[\frac{2(\xi - x)}{T}\right] \eta(\xi) + \text{Resto},$$

En esta ecuación $[a]$ denota la parte entera de a. Definamos también

$$\zeta(x) = -\frac{1}{2} \int_x^\pi \frac{2(\xi - x)}{T} \eta(\xi)\, d\xi + \left(\int_0^\pi \frac{\xi}{T} \eta(\xi)\, d\xi \right) \left(\frac{\pi - x}{\pi} \right).$$

Usando las definiciones anteriores podemos escribir

$$\psi(x,t) = \zeta(\xi) + R(x,t) \tag{2.19}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi f &= \int_0^\pi \zeta(x)\eta(x)\,dx + \int_\Omega Rf\,dA\\ &\geq \int_0^\pi \zeta(x)\eta(x)\,dx - 2\,\|f\|^2_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Pero

$$-\zeta_{xx}(x) = \frac{1}{T}\eta(x), \qquad\qquad \zeta(0)=\zeta(\pi)=0$$

y por integración por partes

$$\int_0^\pi \zeta\eta = T\int_0^\pi (\zeta_x)^2 \geq 0$$

lo que demuestra nuestro Lema. ■

Vamos a definir ahora el funcional con el que vamos a trabajar. Sea

$$\phi_k(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (Kv)v + \int_\Omega H_k(v).$$

A diferencia del funcional de la sección anterior, este no necesariamente es de clase C^1, por lo tanto calculamos su derivada de Gateux:

$$\langle \phi_k'(v), \xi\rangle_{E',E} = \int_\Omega (Kv)v\xi + \int_\Omega h_k(v)\xi$$

para todo $\xi \in E$, la aplicación $v \to \langle \phi_k'(v), \xi\rangle$ es obviamente continua. También podemos usar la representación

$$Kv + h_k(v) = \omega + \chi$$

con $\omega \in L^\infty(\Omega)$, $\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\phi_k'(v)\|_{E'}$ y $\chi \in \mathrm{ncl}(\Box) \cap L^\infty(\Omega)$.

En lo que resta de este capitulo aplicaremos 1.3.3 al funcional ϕ_k para así obtener un punto crítico de ϕ_k y una solución a (2.3).

Lema 2.3.4. *Existe una vecindad U de 0 y una constante $\rho > 0$ tal que $\phi_k(v) \geq \rho$ paratodo $v\partial U$.*

Demostración. Podemos tomar $\rho = \frac{1}{8}$ y

$$U = \left\{ v \in E \;\middle|\; \|v\|_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{2}\right\}.$$

Por la Desigualdad de Fenchel-Young (2.3.1) tenemos que

$$v \leq H_k(v) + G_k(1) \qquad\qquad -v \leq H_k(v) + G_k(-1)$$

donde $G_k = H_k^*$. Integrando a ambos lados de la desigualdad anterior tenemos que

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega H_k(v) + (G(1)+G(-1))|\Omega|.$$

Pero por otro lado, por (2.18),

$$\begin{aligned}\phi_k(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (Kv)v + \int_\Omega H_k(\Omega) \\ &\geq -\|v\|^2_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega H_k(\Omega) \\ &\geq -\|v\|_{L^1(\Omega)} + \|v\|_{L^1(\Omega)} - (G(1)+G(-1))|\Omega| \\ &\geq \frac{1}{8}\end{aligned}$$

donde $\|v\|_{L^1(\Omega)} = \frac{1}{2}$ y el periodo es lo suficientemente pequeño de tal modo que

$$\begin{aligned}(G(1)+G(-1))|\Omega| &= (G(1)+G(-1))\pi T \\ &\leq \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

■

Lema 2.3.5. *$\phi_k(0) < \rho$ y $\phi_k(v_0) < \rho$ para algún $v_0 \notin U$ independiente de k.*

Demostración. Fijemos $v_1 \in E \cap L^\infty(\Omega)$ de tal modo que $\int_\Omega (Kv_1)v_1 < 0$. Supongamos que $\|v_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Luego fijemos un $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \left|\int_\Omega (Kv_1)v_1\right|.$$

Em virtud de (2.12) y (2.13), tenemos que

$$H(s) \leq \epsilon s^2 + C$$

para todo s y alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Definamos $v_0 = av_1$ de tal modo que

$$\begin{aligned}\phi_k(v_0) &= \frac{1}{2}a^2\int_\Omega (Kv_1)v_1 + \int_\Omega H_k(av_1) \\ &\leq \frac{1}{2}a^2\int_\Omega (Kv_1)v_1 + \int_\Omega H(av_1) \\ &\leq a^2\left[\epsilon + \frac{1}{2}\int_\Omega (Kv_1)v_1\right] + C|\Omega| \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

provisto que a es lo suficientemente grande. Podemos asumir que $\|av\|_{L^1(\Omega)} > \frac{1}{2}$. Finalmente podemos asumir que $k \geq k_0 = \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ y por lo tanto $\phi_k(v_0) = \phi(v_0)$ ■

Lema 2.3.6. *Dada $M > 0$, existen constantes k_M y C_M tales que, para toda $k \geq k_M$, el conjunto*

$$S_k = \left\{v \in E \;\middle|\; \phi_k(v) \leq M \text{ y } \left\|\phi_k'(v)\right\|_{E'} \leq \alpha\right\}$$

es un conjunto acotado en $L^\infty(\Omega)$ y su norma es menor que C_M. α es el de 2.3 y

Demostración. Sea $v_k \in S_k$; tenemos que

$$Kv + h_k(v) = \omega + \chi \tag{2.20}$$

con $\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha$ y $\chi \in \mathrm{ncl}(\Box) \cap L^\infty(\Omega)$. Así

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2}\int_\Omega (kv)v + \frac{1}{2}\int_\Omega h_k(v)v\right| &= \frac{1}{2}\left|\int_\Omega wv\right| \\ &\leq \alpha \|v\|_{L^1(\Omega)}\end{aligned}$$

y

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (Kv)v + \int_\Omega H_k(v) \leq M.$$

De este modo,

$$\int_\Omega \left[H_k(v) - \frac{1}{2}h_k(v)v\right] \leq M + \frac{1}{\alpha}\|v\|_{L^1(\Omega)}$$

y por (2.15)

$$\frac{1}{2}\alpha \|v\|_{L^1(\Omega)}.$$

Por lo tanto

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq C_M, \tag{2.21}$$

donde C_M denota cualquier constante no negativa que depende de M. Definamos

$$u = \chi - Kv, \tag{2.22}$$

así que por (2.20)

$$h_k(v) = \omega + u. \tag{2.23}$$

Es evidente que

$$\tau_k(s) := g(h_k(s)) = \begin{cases} k & \text{si } s \geq k, \\ s & \text{si } |s| \leq k, \\ -k & \text{si } s \leq -k. \end{cases}$$

Así que, por (2.23), tenemos que

$$\tau_k(v) = g(w + v). \tag{2.24}$$

Por otro lado, en vista de que

$$\int_0^\pi [v(x, t-x) - v(x, t+x)]\, dx = 0 \quad \text{para c.t. } t \tag{2.25}$$

y ya que $\chi \in \mathrm{ncl}(\Box) \cap L^\infty(\Omega)$ podemos escribir

$$\chi(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$$

para alguna $p \in L^\infty(\mathbb{T}_n)$ que es T-periódica y que $[p]_n = 0$. Se deduce de (2.20), (2.21), (2.12) y (2.13) que

$$\|\chi\|_{L^{L^1}(\Omega)} \leq C_M \tag{2.26}$$

y por tanto

$$\|p\|_{L^1(\mathbb{T}_n)} \leq C_M. \tag{2.27}$$

Estimaremos en seguida $\|p\|_{L^\infty(\mathbb{T}_n)}$. Definamos

$$\mu = \operatorname{essup}_{\mathbb{T}_n} p.$$

Tenemos que

$$\omega + u = \omega - Kv + \chi$$

y en vista que $\|\omega - Kv\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_M$ se deduce de (2.24) que

$$g(-C_M + p(t+x) - p(t-x)) \leq \tau_k(v(x,t)) \leq g(C_M + p(t+x) - p(t-x)).$$

En particular,

$$g(-C_M + p(t) - p(t-2x)) \leq \tau_k(v(x,t-x)). \tag{2.28}$$

Escogiendo t_0 tal que $p(t_0) \geq \mu - 1$ vemos que

$$g(-C_M - 1) \leq \tau_k(v(x,t_0 - x)) \quad \text{para c.t. } x.$$

Si tomamos $k \geq |g(-C_M - 1)|$ encontramos que

$$v(x,t_0 - x) \geq -k \quad \text{para c.t. } x,$$

y en particular

$$\tau_k(v(x,t_0 - x)) \leq v(x,t_0 - x).$$

Por lo tanto, por (2.29),

$$g(-C_M + p(t_0) - p(t_0 - 2x)) \leq v(x,t_0 - x) \quad \text{para c.t. } x.$$

De manera similar, si escogemos $k \geq g(C_M + 1)$ obtenemos que

$$g(C_M + p(t_0 - 2x) - p(t_0)) \geq v(x,t_0 + x) \quad \text{para c.t. } x.$$

Deducimos ahora de (2.25) que

$$\int_0^\pi [g(-C_M + p(t_0) - p(t_0 - 2x)) - g(C_M + p(t_0 - 2x) - p(t_0))]\, dx \leq 0,$$

es decir,

$$\int_0^{2\pi} \tilde{g}(-C_M + p(t_0) - p(s))\, ds \leq 0, \tag{2.29}$$

donde $\tilde{g} = g(u) - g(-u)$. Definamos

$$\Sigma = \left\{ s \in (0, 2\pi) \ \mid \ p(s) \geq \frac{\mu}{2} \right\}.$$

Se deduce de (2.27) que

$$|\Sigma| \leq \frac{2C_M}{\mu} \quad \text{y} \quad |\Sigma^c| \geq \left(2\pi - \frac{2C_M}{\mu} \right).$$

Partiendo la integral en (2.29) en Σ y Σ^c obtenemos que

$$\left(2\pi - \frac{2C_M}{\mu} \right) \tilde{g}(-C_M - 1 + \frac{\mu}{2}) \leq 2\pi \tilde{g}(C_M + 1)$$

lo cual provee una cota para μ en términos de C_M asumiendo que

$$k \geq \text{máx} \left\{ |g(-C_M - 1)|, g(C_M + 1) \right\}.$$

Estimamos de la misma manera $\text{esinf}_{\mathbb{T}_n} p$. Así hemos demostrado que $\|\chi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_M$ y también, por (2.22), $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_M$. Finalmente, derivamos de (2.24) la cota $\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_M$ provisto que $k \geq k_M$ con k_M suficientemente grande. ■

Lema 2.3.7. *Sean E y ϕ_k como antes. Dada cualquier sucesión en v_j en E tal que $\phi_k(v_j) \to c$ y $\phi_k'(v_j) \to 0$ en E', entonces c es un valor crítico de ϕ_k. En otras palabras ϕ_k cumple $(PS)_c$.*

Demostración. Sea

$$c_k = \inf_{p \in M} \max_{x \in p} \phi_k(x)$$

donde M es el conjunto de todos los caminos continuos que unen 0 con v_0 el cual, es independiente de k. En particular

$$c_k \leq \max_{s \in [0,1]} \phi_k(sv_0) \leq \int_\Omega H(v_0).$$

Sea $M = \int_\Omega h(v_0) + 1$. Sea v_j una sucesión en E tal que $\phi_k(v_j) \to c_k$ y $\phi_k'(v_j) \to 0$en E'. Podemos asumir siempre que

$$\phi_k(v_j) \leq M \quad \text{y} \quad \left\| \phi_k'(v_j) \right\|_{E'} \leq \alpha$$

y así, por el Lema 2.3.6, los v_j son uniformemente acotados en $L^\infty(\Omega)$ provisto que $k \geq k_0$. Extrayendo una subsucesión podemos asumir que $v_j \to v$ débilmente en L^∞ y también $Kv_j \to Kv$ en $C(\overline{\Omega})$ por (2.17). Sea $\xi \in E$, tenemos que

$$\int_\Omega (h_k(v_j) - h_k(\xi))(v_j - \xi) \geq 0.$$

Por otro lado, sabemos que

$$Kv_j + h_k(v_j) = \omega_j + \chi_j$$

con $\left\| \chi_j \right\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ y $\chi_j \in \text{ncl}(\Box) \cap L^\infty(\Omega)$ Se deduce que

$$\int_\Omega (\chi_j - Kv_j - h_k(\xi))(v_j - \xi) \geq 0$$

y en el límite
$$\int_\Omega (-Kv - h_k(\xi))(v-\xi) \geq 0 \quad \text{para todo } \xi \in E.$$
Escogiendo $\xi = v + t\eta$, $\eta \in E$, $t > 0$, concluimos fácilmente que
$$\int_\Omega (Kv + h_k(v))\eta = 0 \quad \text{para todo } \xi \in E,$$
es decir, $\phi_k'(v) = 0$. Finalmente tenemos, por la convexidad de H_k,
$$\begin{aligned}\int_\Omega H_k(v) - H_k(v_j) &\geq \int_\Omega h_k(v_j)(v - v_j)\\ &= \int_\Omega (\omega_j - Kv_j)(v - v_j).\end{aligned}$$
Ya que el lado derecho tiende a cero concluimos que
$$\overline{\lim} \int_\Omega H_k(v_j) \leq \int_\Omega H_k(v),$$
y por la semicontinuidad inferior, tenemos que
$$\underline{\lim} \int_\Omega H_k(v_j) \geq \int_\Omega H_k(v).$$
Así
$$\int_\Omega H_k(v_j) \to \int_\Omega H_k(v)$$
y por lo tanto $\phi_k(v_j) \to \phi_k(v)$. Por lo tanto c_k es un valor crítico. ■

Teorema 2.3.8. *Existe una solución débil no trivial a* (2.1) *en* $L^\infty(\Omega)$.

Demostración. Por el Teorema 1.3.2 sabemos que para cada $k \geq k_0$ existe un $v_k \in E \cap L^\infty(\Omega)$ tal que
$$\phi_k(v_k) = 0 \quad \text{y} \quad \phi_k(v_k) = c_k \geq \frac{1}{16}.$$
Por otra parte, $c_k \leq \int H(v_0)$ a por lo tanto, por el Lema 2.3.6, v_k se mantiene acotado en $L^\infty(\Omega)$ Escogiendo k lo suficientemente grande tenemos que
$$Kv_k + h(v_k) = Kv_k + h_k(v_) = \chi_k \in \text{ncl}(\square) \cap L^\infty(\Omega).$$
Haciendo $u = \chi_k - Kv_k$ obtenemos una solución no trivial a (2.1). Finalmente, en el caso en el que g no es estrictamente monótona reemplazamos $g(u)$ por $g_\epsilon(u) = g(u) + \epsilon u$ y luego pasamos al límite con $\epsilon \to 0$. ■

CAPÍTULO 3

PROYECCIÓN DEL TRABAJO

En este capítulo expondremos algunas posibilidades de estudio ulterior, expansión y planteamiento de problemas abiertos de 2.1.

3.1. Regularidad

La regularidad consiste en averiguar bajo que condiciones adicionales a 2.1 sobre g podemos garantizar que las soluciones estarán en un espacio C^k de funciones. La regularidad de (2.1) fue estudiada por el mismo P. Rabinowitz en [22, Corolario 4.14] y traducida al lenguaje de nuestro trabajo se ve de la siguiente forma.

Teorema (Regularidad de las Soluciones Débiles)**.** *Si a las condiciones del TeoremaSi g es k veces diferenciable y u es solución a* (2.1) *entonces u es por lo menos de clase C^k.*

3.2. Debilitando g

El profesor A. Castro quien personalmente vino a Colombina a colaborar en este trabajo, escribió un artículo con el profesor S. Unsurangsie [36] en el que g no necesariamente es monótona. Algunos autores como [10] ya habían demostrado esto pero suponían demasiada simetría de g.

3.3. Más dimensiones

El profesor M.Schechter logró demostrar recientemente [30] que el problema tiene solución en dimensión n. Pero no solo demuestra la existencia de la solución. Da las condiciones necesarias para que esta solución sea única.

3.4. Diferentes Periodos

El profesor F. Caycedo, director del presente trabajo, demostró en su trabajo de doctorado [7] que existen soluciones cuando la solución es periódica pero de periodo múltiplo irracional de π.

3.5. Estudio Numérico

Con estos métodos sabemos que existe solución pero no sabemos cual es. Los profesores W. Craig de la Universidad de Brown y C. Wayne de la Universidad de Penssylvania enviaron tienen un artículo en revisión por Communications on Pure and Applied Mathematics [38] donde al suponen que la función g es analítica en u y en x y aplican el método de Newton para encontrar soluciones numéricas al problema (2.1).

3.6. Problemas Abiertos

Para concluir el presente trabajo, permitanos el lector formular algunos problemas abiertos que podrían ser fácilmente tratados en un trabajo de doctorado.

3.6.1. Regularidad

Problema Abierto 1. *¿Cuales son las condiciones mínimas suficientes sobre g y la región Ω para garantizar la regularidad de las soluciones de* (2.1) *sin necesidad de suponer monotonía o simetría?*

Problema Abierto 2. *¿Cuales son las condiciones mínimas suficientes sobre g y la región Ω para garantizar la regularidad de las soluciones si el periodo es un múltiplo irracional de π?*

3.6.2. Unicidad

Problema Abierto 3. *¿Cuales son las condiciones mínimas suficientes sobre g y la región Ω para garantizar la unicidad de las soluciones si el periodo es un múltiplo irracional de π?*

3.6.3. Soluciones Numéricas

Problema Abierto 4. *¿Es posible extender el método usado por [38] a más de una dimensión? ¿Bajo que hipótesis sería esto posible?*

Bibliografía

[1] T. M. Apostol. *Calculus*. Editorial Reverte, 2 edition, 1988.

[2] R. G. Bartle. *The Elements of Integrations and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, Inc., 1994.

[3] H. Brezis. *Analyse functionelle*. Masson, Paris, 1983.

[4] A. Castro. *Métodos de Reducción via Minimax*. Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 1981.

[5] F. Caycedo. *Cálculo Avanzado*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1993.

[6] F. Caycedo. *Critical Points Theory*. Sin publicar, 1994.

[7] F. Caycedo. *Soluciones para Ecuaciones Diferenciales Semilineales con Espectro Discreto*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, 1996.

[8] C. Chang. Variational methods for nondifferentiable functionals and their applications to partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications*, 80(1):102–129, 1981.

[9] G. Choquet. *Cours d'analyse*. Paris. Masson et Cie, 1973.

[10] J. M. Coron. Periodic solutions of a nonlinear wave equation without assumption of monotonicity. *Mathematical Analysis*, 262:273–285, 1983.

[11] I. Ekeland. Sur les problèmes variationnels. *CR Academic de Sciences, Paris*, 275:1057–1059, 1972.

[12] D. G. Figueiredo. *The Ekeland Variational Principle with Aplications and Detours*. Springer Verlag, 1989.

[13] Nieremberg H. Brezis, J. M. Coron. Free vibrations of a nonlinear wave equation and a theorem of p. rabinowitz. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33, 1980.

[14] P. Halmos. *Measure Theory*. Springer Verlag, 1950.

[15] S. T. Hu. *Elements of General Topology*. Holden Day, 1954.

[16] J. L. Kelley. *General Topology*. Springer Verlag, 1955.

[17] H. Lovicarová. Periodic solutions of a weakly nonlinear wave equation in one dimension. *Czech Mathematical Journal*, 19:324–342, 1969.

[18] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer Verlag, 1998.

[19] A. Ambrosetti & P. Rabinowitz. Dual variational methods in critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 14:349–381, 1973.

[20] P. Rabinowitz. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society.

[21] P. Rabinowitz. Variational method of a weakly nonlinear wave equation in eigenvalues of nonlinear problems. *CIME, ed. Cremonense Rome*, pages 141–195, 1974.

[22] P. Rabinowitz. Free vibrations for a semilinear wave equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXI:31–68, 1978.

[23] I. Rafael. *Fourier Analysis and Parial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2001.

[24] F. Riesz. *Funcitional Analysis*. Frederick Ungar Publishing, Co., 1955.

[25] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1996.

[26] G. Rubiano. *Topología General*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1997.

[27] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 3 edition, 1964.

[28] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 3 edition, 1987.

[29] A. Sanjuán. *Algunos Aspectos Geométricos de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Tesis de Grado, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas, Bogotá D.C., 2002.

[30] M. Schechter. Periodic solutions of a semilinear higher dimensional wave equations. *Chaos Solitons and Fractals*, 12:1029–1034, 2001.

[31] G. Simmons. *Introduction to Topology and Modern Analysis*. McGraw-Hill International Editions, 1963.

[32] M. Hirsch & S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.

[33] W. Strauss. *Partial Differential Equations, an Introduction*. John Wiley and Sons Inc., 1992.

[34] A. Takahashi. *Álgebra Lineal*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1993.

[35] I. Ekeland & R. Téman. *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM, 1999.

[36] A. Castro & S. Unsurangsie. A semilinear wave equation with nonmonotone nonlinearity. *Academia de Berlín*, 132(2), 1988.

[37] M. M. Vainberhg. *Variational Methods in the Study of Nonlinear Operators*. Holden Day, 1964.

[38] W. Craig & C. Wayne. Newton methods and periodic solutions of nonlinear wave equations. *A revisión Communications on Pure and Applied Mathematics*.

[39] M. Willem. Density of the range of potential operators. *Proceeding of the American Mathematical Society*, 83(2), 1981.

[40] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, 1974.

[41] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*. Springer Verlag, 1985.

[42] E. Zeidler. *Applied Funcional Analysis*. Springer Verlag, 1995.

Índice de Símbolos

Conjuntos

Espacios de Funciones

Relaciones Binarias

Convergencia

Operadores

Miscelanea

Índice Alfabético