

Notas en Problemas Elípticos Superlineales

Arturo Sanjuán

Bogotá 2009

Introducción	v
1. Preliminares	1
1.1. Notación	1
1.1.1. Condiciones sobre los Exponentes	1
1.1.2. La Energía de los Problemas	2
1.1.3. La Variedad de Nehari	6
1.1.4. Género y Cogénero	7
1.1.5. Índice de Morse Generalizado	10
1.2. Cotas de $\sigma(u)$	13
1.2.1. Cotas Superiores	13
1.2.2. Cotas Inferiores	13
2. Inf. Soluciones	19
2.1. Crec. Valores Críticos	19
2.2. Inf. Sol. del Impar	21
2.3. Inf. Sol. del Pert.	21

Introducción

Este escrito se presenta como notas del Seminario de Investigación del Doctorado en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional, dirigido por los profesores Alfonso Castro y Francisco Caicedo. En este seminario se estudian algunos métodos de la Teoría de Puntos Críticos y de la Teoría de Morse que se presentan en Bahri & Lions [3], Bahri & Berestycki [2] y Castro & Clapp [6]. La articulación de la lectura del texto escrito viene dada por [3] realizando algunos cálculos, representaciones e interpretaciones de los detalles y los implícitos.

La temática principal concierne con la existencia y multiplicidad de resultados para las ecuaciones lineales elípticas no lineales. En [2] se propone un método de perturbación usando el lema de deformación. En [3] se utiliza la Teoría de Morse para ampliar estos resultados.

1.1. Notación

El problema que estudiaremos es la existencia de múltiples soluciones del siguiente problema con valores en la frontera. También conocido como problema perturbado

$$(p) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= |u|^{p-1}u - f(x, u) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Donde Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$, $u \in H_0^1(\Omega)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u_i$, y la $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Caratheodory. Es decir, f es medible en la primera variable y continua en la segunda. La función f y su potencial $F(x, s) = \int_0^s f(x, s) ds$ deben cumplir las siguientes acotaciones

$$|f(x, t)| \leq g(x) + C|t|^q \text{ en c.t.p. de } \Omega$$

para algunos $C \geq 0$ y $g \in L_+^r(\Omega)$, además

$$|F(x, t)| \leq a(x) + b(x)|t|^\alpha \text{ en c.t.p. de } \Omega$$

para algunos $0 \leq \alpha < 2$, $a \in L_+^1(\Omega)$ y $b \in L_+^\beta(\Omega)$.

Sobre los exponentes, p, q, α, β , y su conjugado β' recaen algunas condiciones que mostraremos a continuación.

1.1.1. Condiciones sobre los Exponentes

Uno de los resultados de este documento, es que si

$$1 < p < \frac{n+2(1-\alpha)}{n-2},$$

el problema (p) tiene infinitas soluciones. Esta condición se puede apreciar ver en el archivo Hipótesis sobre el p. Cuando el valor de α es 0, se puede observar que a medida que la dimensión n aumenta los posibles valores para p disminuyen. De hecho, cuando n es mayor que 6, los posibles valores de p están restringidos al intervalo (1,2). En este caso ($\alpha = 0$), un resultado de multiplicidad está expuesto en [2]. Si $n = 2$, es claro que p puede ser cualquier valor más grande que 1. A medida que α aumenta su valor los valores posibles para p son cada vez más reducidos. En el caso límite ($\alpha = 2$) no hay valores admisibles para p .

El exponente q está definido como $q := \frac{n+2}{n-2}$. Notemos que, como se dijo arriba, a medida que la dimensión crece, el exponente tiende asintóticamente a 1. En el caso en que $n = 2$, $q = \infty$ y si $n > 2$, entonces $q < \infty^1$.

El exponente r viene dado por $r := \frac{2n}{n+2}$. A diferencia de q , a medida que la dimensión aumenta, el valor de r también aumenta, pero de manera asintótica hacia 2. Si $n > 2$, $r > 1^2$ y a partir de $n = 9$, $r > q$ pero siempre $r < 2$. Podemos observar también que el r coincide con el conjugado del exponente crítico del teorema de inmersión de Sobolev para L^2 [9].

Sobre el β recae una condición más general. Si tomamos a β' como su exponente conjugado, debemos garantizar que

$$1 < \beta' < \frac{2n}{(n-2)\alpha}.$$

Que en el caso $\alpha = 1$ coincide con el exponente crítico del teorema de inmersión de Sobolev para L^2 . Para $\alpha = 0$ o $n = 2$, $\beta' = \infty$. Una cuenta sencilla muestra que si β' está en el intervalo de arriba, entonces

$$\begin{aligned} \beta &> \frac{2n}{n(2-\alpha) + 2\alpha} \\ &= \frac{2n}{2n - \alpha(n-2)} \\ &> \frac{2n}{2n} = 1 \end{aligned}$$

Este último hecho establece las relaciones entre β y β' .

1.1.2. La Energía de los Problemas

Con respecto al problema (p), existe el problema impar asociado (i), llamado así por la parte no lineal impar $|u|^{p-1}u$.

$$(i) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= |u|^{p-1}u \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

y por su puesto el problema homogéneo (h)

$$(h) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

¹Erratum en [3, p. 1028, l. 15]

²Erratum en [3, p. 1028, l. 16]

Estudiar las soluciones de (i) y (h) brindará información sobre las soluciones de (p).

Informalmente hablando, en los métodos variacionales se suele encontrar la energía total del problema o el funcional asociado al mismo. Por la Ley de la Conservación de la Energía, se sabe que la Energía es constante en un sistema. Por esta razón al derivar la energía, en dónde hay solución, la derivada de la energía debe ser cero. La interpretación matemática consiste en que cuando el funcional asociado alcance un valor extremo, entonces su derivada se va anular en ese punto y el cuando se anula, la derivada coincide débilmente con la ecuación original.

Nota 1 ((i) tiene buena energía). El funcional asociado a (i) está bien definido. Es de clase C^2 , satisface PS³ y viene dado por

$$\mathcal{I}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mu - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} d\mu.$$

Demostración. Vamos a verificar primero que el funcional \mathcal{I} está bien definido. Para esto basta ver que la norma en $H_0^1(\Omega)$ de u se puede identificar con la norma de ∇u en $L^2(\Omega)$ [4, ch. IX]. Además, el segundo término en la definición de \mathcal{I} corresponde a la norma de $u \in L^{p+1}(\Omega)$, que por ser Ω acotado, por el Teorema de Inmersión de Sobolev y por las restricciones hechas sobre p tenemos que

$$p < p+1 < 2^* := \frac{2n}{n-2},$$

lo que implica que

$$H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

En otras palabras si $u \in H_0^1(\Omega)$ la integral correspondiente al segundo término de la definición del funcional existe. Es más, el funcional \mathcal{I} se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(u) &= \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned}$$

Tomemos $\phi \in H_0^1(\Omega)$, primero calcularemos la derivada del primer término del lado derecho de la ecuación que define \mathcal{I} y lo llamaremos \mathcal{I}_1 . Luego calcularemos la derivada del segundo término a través de la derivada de Gâteaux. A este segundo término lo llamaremos \mathcal{I}_2 . Para \mathcal{I}_1 tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1(u + \phi) - \mathcal{I}_1(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla(u + \phi)\|^2 d\mu - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mu \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi d\mu + o(\phi) \end{aligned}$$

De donde $\langle \mathcal{I}'_1(u), \phi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \phi \nabla u d\mu$. Para el segundo término, realizamos la siguiente cuenta

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{I}_2(u + t\phi)|_{t=0} &= \partial_t \left[\frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u + t\phi|^{p+1} d\mu \right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} \partial_t \left[|u + t\phi|^{p+1} \right]_{t=0} d\mu \quad \text{¿TCD?} \\ &= \int_{\Omega} \left[|u + t\phi|^{p-1} (u + t\phi) \phi \right]_{t=0} d\mu \\ &= \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \phi d\mu. \end{aligned}$$

³PENDIENTE

En vista de que \mathcal{I}_2 es C^1 -Gâteaux, es C^1 [1, p. 77]. Esto quiere decir que

$$\langle \mathcal{I}'(u), \phi \rangle = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla u \, d\mu - \int_{\Omega} |u|^{p-1} u \phi \, d\mu.$$

Ahora, cuando $\langle \mathcal{I}'(u), \phi \rangle = 0$ para toda $\phi \in H_0^1(\Omega)$, tenemos la igualdad en distribuciones dada (i).

Para calcular la segunda derivada realizamos el cálculo según las indicaciones de [5, p. 107]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}'_1(u + \phi), \psi \rangle - \langle \mathcal{I}'_1(u + \phi), \psi \rangle &= - \int_{\Omega} \psi \Delta \phi \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mu. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$\mathcal{I}''_1(u)(\phi)(\psi) = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mu.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \mathcal{I}'_2(u + t\phi), \psi \rangle |_{t=0} &= \int_{\Omega} \partial_t \left[|u + t\phi|^{p-1} (u + t\phi) \psi \right]_{t=0} \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} \left[p |u + t\phi|^{p-1} \phi \psi \right]_{t=0} \, d\mu \\ &= p \int_{\Omega} |u|^{p-1} \phi \psi \, d\mu. \end{aligned}$$

Es decir, que la segunda derivada de \mathcal{I} viene dada por

$$\mathcal{I}''(u)(\phi)(\psi) = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mu - p \int_{\Omega} |u|^{p-1} \phi \psi \, d\mu$$

y la forma cuadrática asociada es

$$(1.1) \quad \mathcal{I}''(u)\phi^{(2)} = \int_{\Omega} \|\nabla \phi\|^2 \, d\mu - p \int_{\Omega} |u|^{p-1} \phi^2 \, d\mu.$$

Es necesario comprobar además que \mathcal{I}'' está bien definida⁴. De este modo queda probado que el funcional \mathcal{I} es el funcional asociado al problema (i) y que $\mathcal{I} \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. ✓

Nota 2. 0 es un mínimo de \mathcal{I}

Demostración. Basta notar que

$$\mathcal{I}''(0)\phi^{(2)} = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, d\mu > 0$$

y que

$$\langle \mathcal{I}'(0), \phi \rangle = 0. \quad \checkmark$$

Parte de la idea para encontrar las soluciones al problema (i) es definir un funcional sobre la bola unitaria

$$S = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = 1\}$$

⁴PENDIENTE

y encontrar sus puntos críticos, que como veremos más adelante, coinciden con los puntos críticos del funcional \mathcal{I} . Dicho lo anterior, sea

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : S &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \max_{\lambda \geq 0} \mathcal{I}(\lambda v). \end{aligned}$$

Nota 3 (\mathcal{J} también es muy bueno). El funcional \mathcal{J} está bien definido. De hecho el λ está determinado de manera única. Al igual que \mathcal{I} , es de clase C^2 , satisface PS⁵ y los valores críticos positivos de \mathcal{J} y de \mathcal{I} coinciden.

Demostración. Para demostrar que \mathcal{J} está bien definido vamos a realizar directamente el cálculo de \mathcal{J} . Para esto es necesario que calculemos primero $\mathcal{I}(\lambda u)$, con $u \in S$.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\lambda u) &= \frac{\lambda^2}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mu - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} d\mu \\ &= \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \\ &= \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned}$$

y definimos para $u \in S$ fijo

$$\begin{aligned} f_u : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\mapsto \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} N_u \end{aligned}$$

donde $N_u = \|u\|_{p+1}^{p+1} \neq 0$ por estar en S . Ahora por un argumento de cálculo elemental [13, ch 11] vemos que la función f_u es infinitamente derivable y que su primera derivada es estrictamente positiva, es decir f_u es estrictamente creciente, en el intervalo $(0, N_u^{\frac{1}{1-p}})$; y f_u' es negativa, f_u estrictamente creciente, en el intervalo $(N_u^{\frac{1}{1-p}}, 0)$. Este hecho describe el comportamiento de la f_u en su dominio, de tal modo que si

$$\lambda_u := N_u^{\frac{1}{1-p}},$$

en λ_u , f_u adquiere un único máximo absoluto y por lo tanto el funcional \mathcal{J} está bien definido. Notemos que la función Λ definida por

$$\begin{aligned} \Lambda : S &\rightarrow H_0^1(\Omega) \\ u &\mapsto \Lambda u = \lambda_u u \end{aligned}$$

es de clase C^2 (por lo menos) y que $\mathcal{J} = \mathcal{I} \circ \Lambda$, lo que hace de \mathcal{J} un funcional de la misma clase. Es importante tener presente que $\mathcal{J}'(u)$ está definida sobre el espacio tangente a S en u notado por $T_u(S)$ [1, ch. 2].

Ahora vamos a demostrar que los valores críticos de los dos funcionales son los mismos. Para eso vamos a realizar el cálculo de $\mathcal{J}'(u)$. Sea

⁵PENDIENTE

$\phi \in T_u(S)$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}'(u), \phi \rangle &= \langle \mathcal{I}'(\Lambda u), \langle \Lambda' u, \phi \rangle \rangle \\ &= \langle \mathcal{I}'(\Lambda u), \langle \lambda'_u, \phi \rangle u + \lambda_u \phi \rangle \\ &= \langle \lambda'_u, \phi \rangle \langle \mathcal{I}'(\Lambda u), u \rangle + \lambda_u \langle \mathcal{I}'(\Lambda u), \phi \rangle. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{I}'(\Lambda u) \equiv 0$ en $\mathbb{R}u$, por que I adquiere un máximo en Λu a lo largo del rayo generado por u , se tiene que

$$\langle \mathcal{J}'(u), \phi \rangle = \lambda_u \langle \mathcal{I}'(\Lambda u), \phi \rangle.$$

Supongamos ahora que $u_0 \in S$ es tal que $c_0 := \mathcal{J}(u_0) > 0$ y que $\mathcal{J}'(u_0) = 0$. Porque $\lambda_{u_0} > 0$, tiene que ser $\mathcal{I}'(\Lambda u_0) = 0$. La última igualdad también es válida en $\{u_0\}^\perp$, pues el lugar donde está definido $\mathcal{J}(u_0)$ es todo $T_{u_0}(S)$. Es decir, si c_0 es valor crítico positivo de \mathcal{J} también lo es de \mathcal{I} .

Recíprocamente, supongamos que existe un $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que $c_0 = \mathcal{I}(u_0) > 0$ y $\mathcal{I}'(u_0) \equiv 0$, haciendo

$$v_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}} \in S$$

Como u_0 es punto crítico, entonces $c_0 = \mathcal{J}(v_0) = \mathcal{I}(u_0)$ y por la relación de las derivadas entre \mathcal{J} y \mathcal{I} se tiene que $\langle \mathcal{J}'(v_0), \phi \rangle = \lambda_{u_0} \langle \mathcal{I}'(\Lambda u_0), \phi \rangle = 0$. Es decir, que si c_0 es valor crítico positivo de \mathcal{J} también lo será de \mathcal{I} . Por lo tanto, \mathcal{I} y \mathcal{J} comparten los valores críticos positivos. ✓

De manera analoga a los procedimientos anteriores se definen los funcionales $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ y $J : S \rightarrow \mathbb{R}$ asociados al problema perturbado (p) mediante

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mu - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} d\mu - \int_{\Omega} F(x, u(x)) d\mu \\ J(u) &= \max_{\lambda \geq 0} I(\lambda v). \end{aligned}$$

Nota 4 ((p) también tiene buena energía). ⁶ ¿C²? ¿PS?

Nota 5 (J también es un buen funcional). ⁷

1.1.3. La Variedad de Nehari

El hecho que la asignación $u \rightarrow \lambda_u$ se dé de manera única define una variedad que asociada al problema (i) o al problema (p). Esta variedad la llamaremos la variedad de Nehari y la denotaremos con \mathcal{N}_i y \mathcal{N}_p asociada a los problemas (i) y (p) respectivamente.

Sobre la variedad de Nehari podemos realizar una interpretación en el caso de dimensión finita para el problema impar. Basta tomar la medida de conteo en \mathbb{R}^2 . En la Figura 1 se pueden ver distintas variedades de Nehari para distintos valores de p .

Nota 6. \mathcal{N}_p y \mathcal{N}_i son en efecto variedades de Hilbert.

Demostración. La esfera es una variedad de Hilbert en inmersa en el espacio $H_0^1(\Omega)$. Para ver esto demostraremos primero que S es una variedad. Esto es cierto porque al aplicar el Teorema de la Submersión [1,

⁶PENDIENTE

⁷PENDIENTE

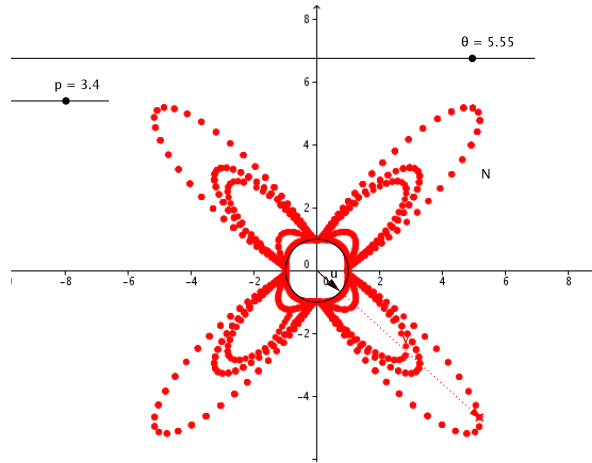


Figura 1: Variedades de Nehari en \mathbb{R}^2

p. 173] a la función $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ y notar que 1 es valor regular tenemos que S es variedad modelada en un subespacio Hilbert de $H_0^1(\Omega)$.

Recordemos ahora que la función $\Lambda : S \rightarrow \mathcal{N}_1$ definida arriba es un difeomorfismo entre la bola y la variedad de Nehari. Este difeomorfismo genera las cartas que se requieren para modelar la variedad. ✓

1.1.4. Género y Cogénero

Sea S^k la esfera estándar k -dimensional en el espacio euclideo. Definamos

$$\text{OddC}(A, B) = \{f : A \rightarrow B \mid f \in C(A, B) \text{ y } f(-x) + f(x) = 0\}$$

provisto que $A = -A$ y $B = -B$. De manera similar definimos

$$\text{Symm}(S) = \{A \subset S \mid A \text{ es compacto y simétrico}\}.$$

Si $A \in \text{Symm}(S)$, denotamos con

$$\begin{aligned} \gamma^-(A) &= \inf\{k \in \mathbb{N} \mid \exists h \in \text{OddC}(A, S^k)\} \text{ y} \\ \gamma^+(A) &= \sup\{k \in \mathbb{N} \mid \exists h \in \text{OddC}(S^k, A)\}. \end{aligned}$$

A los números $\gamma^-(A)$ y $\gamma^+(A)$ le llamaremos el cogénero y el género de A respectivamente.

Nota 7. Cualquier entero más grande que el cogénero pertenece al conjunto donde se toma el inf. De manera análoga ocurre para el género.

Demostración. Sea $A \in \text{Symm}(S)$ y $\alpha^- = \gamma^-(A)$. Supongamos que $m \geq \alpha^-$. Por el Principio de Buena Ordenación [13, ch. 1], existe $h \in \text{OddC}(A, S^{\alpha^-})$. Existe una aplicación

$$\iota : S^{\alpha^-} \rightarrow S^m$$

definida por $\iota(x_1, \dots, x_\alpha^-) = (x_1, \dots, x_\alpha^-, 0, \dots, 0)$, la conmutatividad del siguiente diagrama nos demuestra el resultado.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & S^{\alpha^-} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & S^m \end{array}$$

✓

Nota 8. El género siempre es menor o igual que el cogénero

Demostración. Denotemos con $\alpha^- = \gamma^-(A)$ y con $\alpha^+ = \gamma^+(A)$. Supongamos que $\gamma^+(A) > \gamma^-(A)$. Entonces existen

$$\begin{aligned} h_0 &\in \text{OddC}(S^{\alpha^+}, A) \\ h_1 &\in \text{OddC}(A, S^{\alpha^-}). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^{\alpha^+} & \longrightarrow & A \\ & \searrow & \downarrow \\ & & S^{\alpha^-} \end{array}$$

conmuta preservando continuidad e imparidad. Pero por el Teorema de Borsuk-Ulam [10, p. 105], esto es imposible. ✓

Por otro lado definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= \{A \subset \text{Symm}(S) \mid \gamma^+(A) \geq k\} \quad \text{y} \\ \Gamma_k^* &= \{A \subset \text{Symm}(S) \mid \gamma^-(A) \geq k\}. \end{aligned}$$

Por último, definimos

$$\begin{aligned} c_k &= \inf_{A \in \Gamma_k} \max_{v \in A} \mathcal{J}(v) \quad \text{y} \\ b_k &= \inf_{A \in \Gamma_k^*} \max_{v \in A} \mathcal{J}(v). \end{aligned}$$

Nota 9.

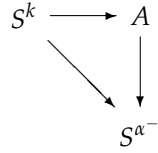
$$\Gamma_k \subset \Gamma_k^*$$

y por ende

$$b_k \leq c_k$$

Demostración. Sea $A \in \Gamma_k$ y supongamos que $A \notin \Gamma_k^*$. Entonces $\alpha^+ \geq k$ y $\alpha^- < k$. Por las notas realizadas arriba sobre el cogénero y el género, tenemos que existe una función $h_1 \in \text{OddC}(A, S^{\alpha^-})$ y existe una

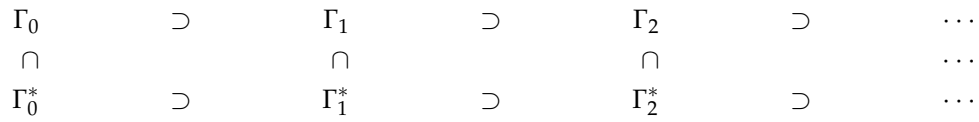
función $h_0 \in \text{OddC}(S^k, A)$, de tal modo que el diagrama



conmute preservando la imparidad y la continuidad, pero esto es imposible nuevamente por Borsuk-Ulam. La última desigualdad es consecuencia inmediata de la contención. ✓

De hecho, se tiene la siguiente red de contencencias que es muy fácil de demostrar

Nota 10.



A continuación enunciamos una versión del Lema de Deformación que usaremos como herramienta principal para demostrar que los valores singulares de \mathcal{I} y \mathcal{J} son los mismos

Teorema 1 (Teorema del Intervalo No-Singular). [12, p. 320] Supongamos $f \in C^1(M, \mathbb{R})$, (con M variedad de Banach-Finsler) satisface la condición de Palais-Smale $(PS)_c$ para todo $c \in [a, b]$ y si $K \cap f^{-1}[a, b] = \emptyset$ (K el conjunto de valores críticos). Entonces f_a es un retracto de deformación fuerte de f_b .

Una interpretación del Lema de Deformación puede ser como la que se vé en la Figura 2. En esta figura el funcional corresponde al funcional \mathcal{J} definido en \mathbb{R}^2 y la integral se toma con la medida de conteo. En este caso se toma un conjunto de nivel \mathcal{J}_a con a ligeramente por debajo de un valor crítico (Figura 2 derecha) y \mathcal{J}_b ligeramente por encima de un valor crítico (Figura 2 izquierda). Es claro que no es posible deformar fuertemente \mathcal{J}_b en \mathcal{J}_a por cuanto la topología de los dos conjuntos son distintos en tanto difieren en género, cogénero, homotopía, homología, conexidad, etc.

Por último en esta sección vamos a comprobar que

Nota 11. Los números b_k y c_k son valores críticos de \mathcal{J} y \mathcal{I} .

Demostración. Basta demostrar que son valores críticos de \mathcal{J} porque los comparten según la nota correspondiente a \mathcal{J} arriba. Para ello vamos a usar una versión no cuantitativa del Lema de Deformación [12, p. 305]. Supongamos que b_k no es valor crítico de \mathcal{J} . Entonces por el Lema de Deformación, existe $\epsilon > 0$ tal que se puede deformar el conjunto de nivel $\mathcal{J}_{c_k+\epsilon}$ en el conjunto de nivel $\mathcal{J}_{c_k-\epsilon}$.

Cuando se trata de puntos críticos esto no se puede hacer. En la Figura 2 se ve una interpretación del Lema de Deformación en dimensión infinita. Lo que se encuentra en verde en el lado izquierdo corresponde al conjunto de nivel $\mathcal{J}_{c_k+\epsilon}$ y lo que se encuentra en verde a la derecha corresponde al conjunto de nivel $\mathcal{J}_{c_k-\epsilon}$. Es claro que, en este caso, $\mathcal{J}_{c_k+\epsilon}$ no se puede deformar en $\mathcal{J}_{c_k-\epsilon}$. Lo que se encuentra en rojo es la variedad de Nehari.

Retomando. Como c_k es un inf, entonces dado $\epsilon > 0$, existe un $A \in \Gamma_k$ tal que

$$c_k \leq \max_{v \in A} \mathcal{J}(v) < c_k + \epsilon.$$

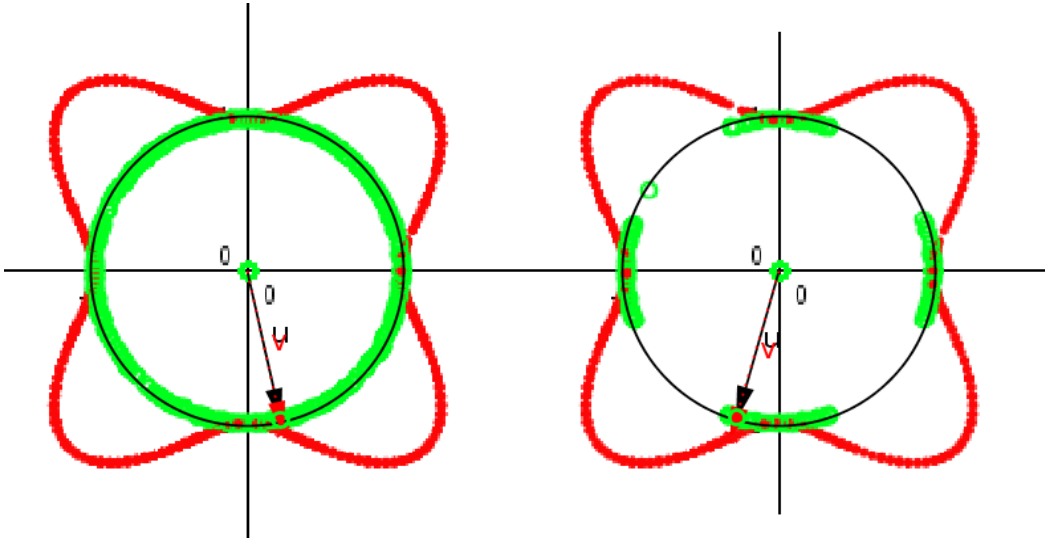


Figura 2: Interpretación del Lema de Deformación en \mathbb{R}^2

Esto implica que

$$\mathcal{J}(v) \leq c_k + \epsilon$$

para todo $v \in A$ y por lo tanto, $A \subseteq \mathcal{J}_{c_k + \epsilon}$. Sea ahora

$$\eta : \mathcal{J}_{c_k + \epsilon} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{J}_{c_k + \epsilon}$$

el retracto. Esto quiere decir que

- $\eta(\mathcal{J}_{c_k + \epsilon}, 1) = \mathcal{J}_{c_k - \epsilon}$
- $\eta(\cdot, t) = \mathbf{1}_{\mathcal{J}_{c_k - \epsilon}}$
- $\eta(0, t) = \mathcal{J}_{c_k + \epsilon}$.

Entonces $\eta(A, 1)$ queda inmerso en $\mathcal{J}_{c_k - \epsilon}$. Pero, como η es una deformación fuerte, el género no permanece invariante⁸. De ahí que

$$\gamma^+(\eta(A, 1)) = \gamma^+(A) \geq k.$$

Es decir, $\eta(A, 1) \in \Gamma_k$. Lo anterior implica que

$$\max_{v \in \eta(A, 1)} \mathcal{J}(v) \leq c_k - \epsilon$$

pero esto es absurdo porque c_k es un inf sobre estos máximos. ✓

1.1.5. Índice de Morse Generalizado

Sea u una solución de

$$\Delta u + |u|^{p-1}u = 0u \quad |_{\partial\Omega} = 0$$

⁸PENDIENTE

Definimos el *índice de Morse generalizado* de \mathcal{I} como la dimensión del espacio negativo y nulo del operador

$$-(\Delta + p|u|^{p-1}) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega).$$

Denotaremos este número entero y finito por $\sigma(u)$.

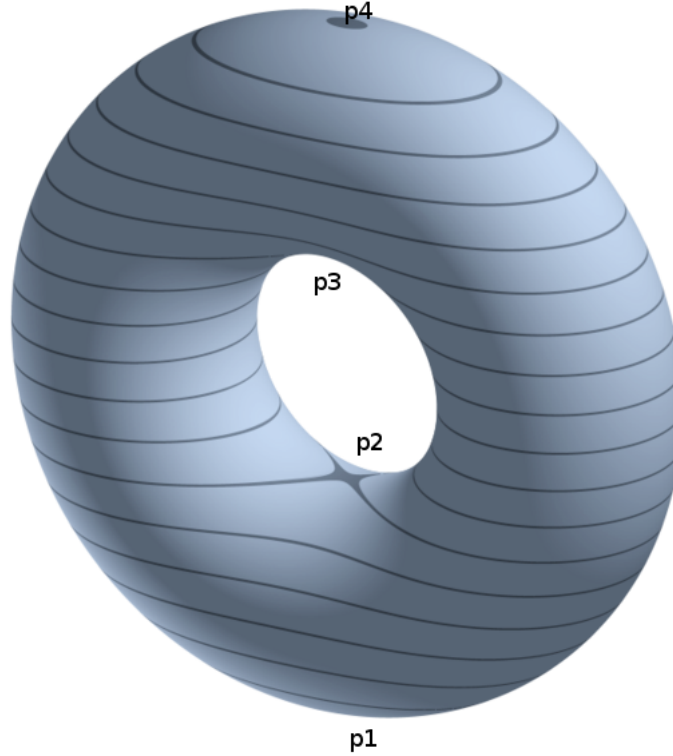


Figura 3: Índice de Morse de la función altura en T^2

Intuitivamente podemos pensar en el índice de Morse como el número de direcciones linealmente independientes de decrecimiento en el punto crítico. A manera de ejemplo tomemos la función que representa la altura definida sobre los puntos de un toro como el de la Figura 3. En esta misma figura podemos apreciar que el índice de Morse del punto p_1 no tiene direcciones de decrecimiento y por tanto $\sigma(p_1) = 0$. De manera similar nos podemos dar cuenta que $\sigma(p_2) = 1$, $\sigma(p_3) = 1$ e $\sigma(p_4) = 2$.

Nota 12. El índice generalizado de Morse está bien definido.

Demostración. Definimos T_1 actuando en $H_0^1(\Omega)$ por

$$\langle T_1\phi, \psi \rangle = \int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\psi \, d\mu$$

y definimos T_2 actuando en $H_0^1(\Omega)$ por

$$\langle T_2\phi, \psi \rangle = p \int_{\Omega} |u|^{p+1} \phi\psi \, d\mu.$$

Es claro que $-(\Delta + p|u|^{p-1}) = T_1 - T_2$ y vamos a realizar el análisis de estos operadores por separado. Es bien conocido el comportamiento espectral del operador auto-adjunto T_1 en $H_0^1(\Omega)$ [8, p. 234]. Recordemos por ahora que los valores propios de T_1 se pueden poner en una sucesión de la siguiente manera

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \leq \dots,$$

donde además podemos expresar al primer valor propio a través de la siguiente fórmula

$$\lambda_1 = \inf_{\|u\|_{L^2(\Omega)}=1} \left[\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\mu \right]$$

y que

$$\lim \lambda_n = +\infty.$$

Ahora, en lo que respecta al operador auto-adjunto T_2 en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, vemos que se trata de un operador compacto. En efecto, sea $\{\phi_n\}$ una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$. Como $p+1 < 2^*$ y $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, existe una subsucesión convergente de $\{\phi_n\}$ en $L^{p+1}(\Omega)$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que la subsucesión convergente es la misma $\{\phi_n\}$. Necesitamos acotar adecuadamente la cantidad $\langle T_2\phi_n - T_2\phi_m, \psi \rangle$ usando la desigualdad de Hölder.

$$\begin{aligned} \langle T_2\phi_n - T_2\phi_m, \psi \rangle &= \langle T_2(\phi_n - \phi_m), \psi \rangle \\ &= p \int_{\Omega} |u|^{p+1}(\phi_n - \phi_m)\psi d\mu. \\ &\leq p \left[\int_{\Omega} |u|^{(p-1)r'} |\psi|^{r'} d\mu \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int_{\Omega} |\phi_n - \phi_m|^r d\mu \right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leq p \left[\int_{\Omega} |u|^{(p-1)r's'} d\mu \right]^{\frac{1}{r's'}} \left[\int_{\Omega} |\psi|^{r's} d\mu \right]^{\frac{1}{r's}} \left[\int_{\Omega} |\phi_n - \phi_m|^r d\mu \right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

Donde $1 < r, s < \infty$ y r' y s' los exponentes conjugados de r y s respectivamente. En principio sería suficiente con encontrar r y s que satisfagan el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{aligned} (p-1)r's' &\leq 2^* \\ r's &\leq 2^* \\ r &< 2^*. \end{aligned}$$

Sin embargo, el único lugar donde esto es posible es cuando r es $p+1$ (por eso la hipótesis de que $\phi_n \in L^{p+1}(\Omega)$), entre otras razones, porque $p+1$ es el único exponente conocido más cercano a 2^* . Los demás pueden tomarse en la igualdad. En otras palabras

$$r' = \frac{p+1}{p}$$

y

$$s = 2^* r' = \left(\frac{2n}{n-2} \right) \left(\frac{p}{p+1} \right)$$

realizando algunos cálculos elementales vemos que

$$s' = \frac{2np}{np - n + 2p + 2}.$$

y que $(p-1)r's' < 2^*$. Por el Teorema de Inmersión de Sobolev [8, p. 192]

$$\langle T_2\phi_n - T_2\phi_m, \psi \rangle \leq p \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi_n - \phi_m\|_{L^{p+1}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Es decir, $\{T_2\phi_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $H_0^1(\Omega)$ y por tanto converge en $H_0^1(\Omega)$ y como $\{\phi_n\}$ se tomó inicialmente acotada en $H_0^1(\Omega)$, T_2 es compacto.

En resumen, T_2 es un operador auto-adjunto y compacto en un espacio de Hilbert real por tanto sus valores propios vienen dados por una sucesión $\{\mu_n\}$, tal que

$$\lim \mu_n = 0.$$

El análisis espectral realizado sobre T_1 y T_2 nos dá la siguiente desigualdad sobre la forma cuadrática asociada a $-(\Delta + p|u|^{p-1})$ evaluada en una función propia ϕ_k de T_2

$$\begin{aligned} -(\Delta + p|u|^{p-1})\phi_k^{(2)} &= T_1\phi_k^{(2)} - T_2\phi_k^{(2)} \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla\phi_k\|^2 d\mu - p \int_{\Omega} |u|^{p-1}\phi_k^2 d\mu \\ &\geq \lambda_1 \int_{\Omega} \phi_k^2 d\mu - \mu_k \int_{\Omega} \phi_k^2 d\mu \\ &> 0 \quad \text{para casi todos los valores de } k. \end{aligned}$$

Por lo tanto $-(\Delta + p|u|^{p-1})$ solo tiene un número finito de valores propios negativos, Δ no tiene valores propios negativos y T_2 por ser compacto, tiene núcleo finito-dimensional. Es decir, el índice de Morse generalizado de $u, \sigma(u)$, está bien definido. . ✓

1.2. Cotas de $\sigma(u)$

1.2.1. Cotas Superiores

Proposición 1. *Para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $c_k < c_{k+1}$, existe un punto crítico u de \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(u) \geq k$ y $\sigma(u) \leq k+1$.*

Demostración. ⁹ ✓

1.2.2. Cotas Inferiores

Dado I un funcional de clase C^1 en $H_0^1(\Omega)$, definimos

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^I &= \{u \in H_0^1(\Omega) \mid I'(u) = 0\} \\ \mathbb{K}_a^I &= \{u \in H_0^1(\Omega) \mid I'(u) = 0 \text{ y } I(u) = a\} = \mathbb{K}^I \cap I^{-1}(a) \end{aligned}$$

Se puede suponer que todos los puntos críticos de \mathcal{J} en el nivel de energía de b_k , son no degenerados¹⁰. Sea u_0 un punto crítico no degenerado de \mathcal{J} , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{J}(u_0) = 0$

⁹PENDIENTE

¹⁰PENDIENTE

y por el Lema de Morse [11, p. 33], podemos representar el funcional \mathcal{J} , bajo una carta de coordenadas (X, Y) alrededor de $u_0 = (0, 0)$ por

$$\mathcal{J}(u) = \|Y\|^2 - \|X\|^2$$

suponiendo que $\sigma(u_0) = m < \infty$, que $X = (x_1, \dots, x_m)$ y que $\|Y\|^2 + \|X\|^2 = \|(X, Y)\|_{H_0^1(\Omega)}^2$. Si $(e_1, \dots, e_m, f_1, \dots)$ es una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ con coordenadas (X, Y) , definimos

$$E_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle \quad \text{y} \quad E_m^\perp = \langle f_1, \dots \rangle$$

y también definimos

$$D_m = \left\{ x \in E_m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq \epsilon \right\}; \quad \partial D_m = S_{u_0}^{m-1}.$$

Es claro que $\mathcal{J}|_{D_m}(u) \leq \mathcal{J}(u_0)$. Con las notaciones anteriores tenemos la siguiente

Nota 13. Podemos deformar \mathcal{J}_ϵ en $\mathcal{J}_{-\epsilon} \amalg D_m$.

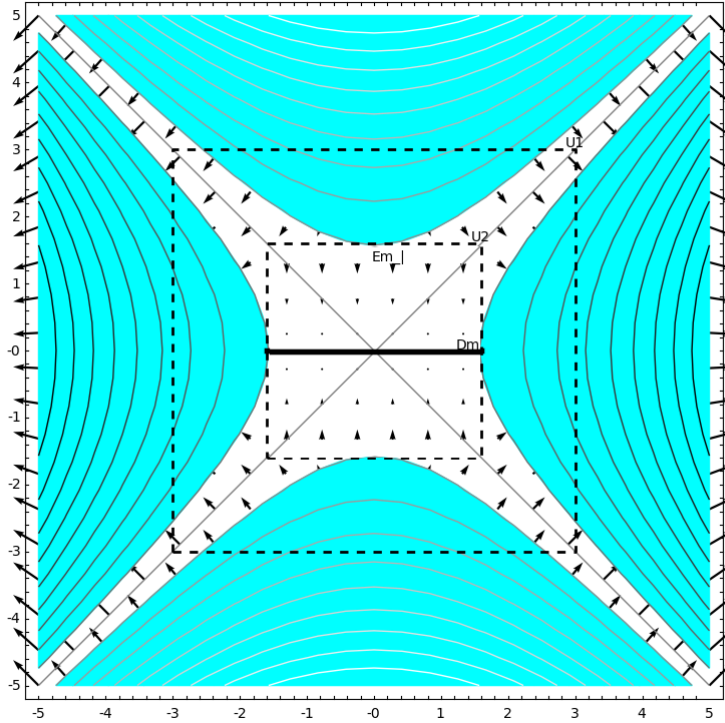


Figura 4: Deformación de \mathcal{J}_ϵ en $\mathcal{J}_{-\epsilon} \amalg D_m$ en \mathbb{R}^2

Demostración. Para construir una deformación de este estilo, escojemos dos cajas abiertas alrededor de u_0 , U_1 y U_2 , tales que $U_1 \subseteq U_2$ como se ve en la Figura 4. En U_2 deformamos sobre las líneas de flujo del campo vectorial $(0, -Y)$; en U_1^c deformamos sobre las líneas de flujo del campo vectorial $-\partial\mathcal{J}$, mientras que en $U_2 \setminus U_1$ deformamos sobre combinaciones convexas de los dos campos anteriores. En el caso en que $\mathbb{K}_{u_0}^{\mathcal{J}} = \{u_0\}$ esta deformación se puede extender globalmente por $-\partial\mathcal{J}(u)$.

Ahora, supongamos que existen más puntos en $\mathbb{K}_{u_0}^{\mathcal{J}}$. Vamos a demostrar primero que $\#(\mathbb{K}_{u_0}^{\mathcal{J}}) < \infty$. En efecto, por la representación local que tiene $\mathcal{J}(u)$ en el espacio modelo $H_0^1(\Omega)$ bajo coordenadas, tenemos que

$$\mathcal{J}''(u)(h, k)^{(2)} = \|h\|_{E_m^\perp}^2 - \|k\|_{E_m}^2$$

y por ende

$$\begin{aligned} \mathcal{J}''(u_0) |_{E_m^{\perp 2}}(h^{(2)}) &\leq \|h\|_{E_m^{\perp 2}}^2, \quad \text{y} \\ \mathcal{J}''(u_0) |_{E_m^2}(k^{(2)}) &\geq -\|k\|_{E_m}^2. \end{aligned}$$

Esto implica que en $0_{E_m^\perp}$ hay un mínimo local estricto y que en 0_{E_m} hay un máximo local estricto [5, p. 322]. Es decir, u_0 es un punto de silla aislado. En el caso en que $\#(\mathbb{K}_{u_0}^{\mathcal{J}})$ fuera infinito, tendría un punto de acumulación gracias a su compacidad dada por la condición (C). Pero esto contradice el hecho que acabamos de demostrar y es que todos sus puntos son aislados.

Por lo anterior, podemos suponer que $\mathbb{K}_{u_0}^{\mathcal{J}} = \{x_1, \dots, x_s\}$ con índices de morse $\sigma(x_i) = m_i$. Entonces existe un retracts de deformación fuerte de \mathcal{J}_ϵ en $\mathcal{J}_{-\epsilon} \amalg D_{m_1} \amalg D_{m_2} \cdots \amalg D_{m_s}$, con

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{-\epsilon} \cap D_{m_i} &= S_{x_i}^{m_i-1} \quad \text{y} \\ \mathcal{J} |_{D_{m_i}} &\leq \mathcal{J}(u_0). \end{aligned}$$

Por último observemos que, con \mathcal{J} es impar en S , los puntos críticos aparecen en pares $(u_i, -u_i)$ con índices e Morse m_i , discos inestables $(D_{m_i})^+$ y $(D_{m_i})^-$ y esferas $(S^{m_i-1})^+$ y $(S^{m_i-1})^-$. En este caso la deformación se puede tomar impar ya que el campo que define la deformación es de la forma $-\partial\mathcal{J}$ que es una función impar. En resumen, estamos bajo la siguiente situación

$$\begin{aligned} b_k &\text{ es un valor crítico con puntos críticos no-degenerados } (u_i, -u_i) \\ \mathcal{J}(u) &\leq b_k \quad \text{para todo } u \in (D_{m_i})^+ \cup (D_{m_i})^- \\ \mathcal{J}(u) &= b_k - \epsilon \quad \text{para todo } u \in (S^{m_i-1})^+ \cup (S^{m_i-1})^-. \end{aligned}$$

Es así como la deformación r necesitada cumple

$$\begin{aligned} r : [0, 1] \times \mathcal{J}_{b_k+\epsilon} &\rightarrow \mathcal{J}_{b_k+\epsilon} \quad \text{continua y tal que} \\ r(0, x) &= x, \\ r(t, -x) &= -r(t, x) \\ r(t, x) &= x \quad \text{para todo } x \in Z_k \\ r(1, x) &\in Z_k \end{aligned}$$

donde

$$x \in Z_k = \mathcal{J}_{b_k-\epsilon} \amalg \left[\prod_{i=1}^s (D_{m_i}^+ \amalg D_{m_i}^-) \right].$$

Por lo tanto, podemos deformar \mathcal{J}_ϵ en $\mathcal{J}_{-\epsilon} \amalg D_m$ y cuando $\mathbb{K}_{u_0}^{\mathcal{J}}$ tiene varios puntos críticos, podemos deformar \mathcal{J}_ϵ en Z_k . Una interpretación de esta situación se puede apreciar en el diagrama de la Figura 5. ✓

Nota 14. El argumento anterior es válido si los m_i son infinitos

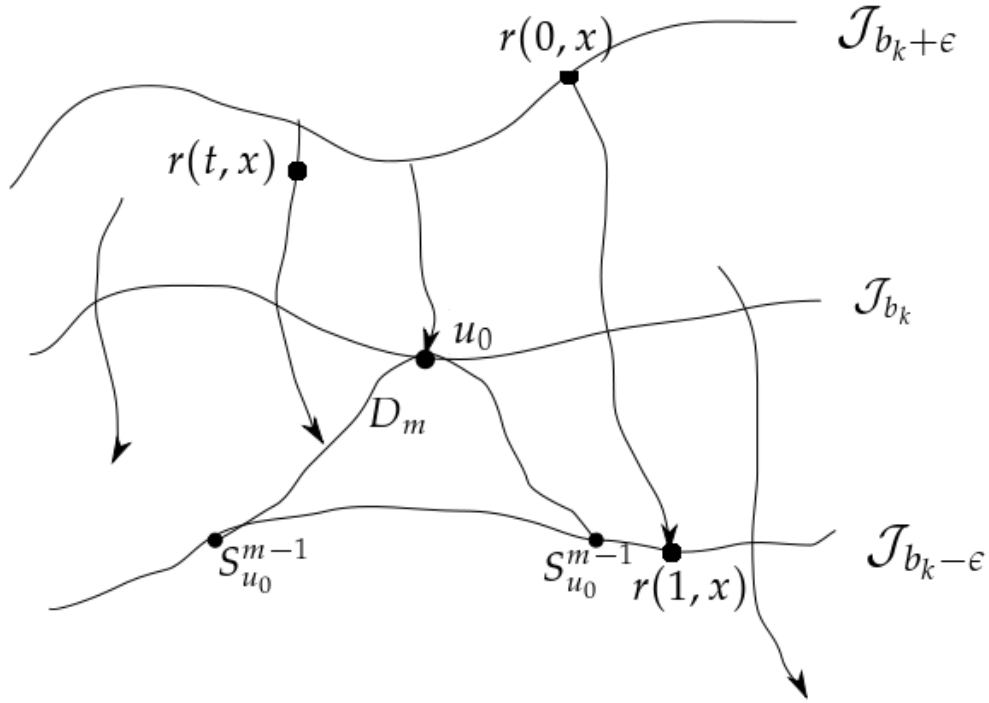


Figura 5: Diagrama que representa la deformación r

Demostración. ¹¹

✓

Nota 15. $\#(\mathbb{K}_{u_0}^{\mathcal{J}})$ se mantiene finito bajo perturbaciones

Demostración. ¹²

✓

Para la demostración de la siguiente proposición necesitamos dos resultados de la Topología Algebraica, específicamente de la Teoría de Homotopía. El primero de ellos hace referencia al n -ésimo grupo de homotopía de la esfera k -dimensional. El primero es

$$\pi_n(S^k) = 0 \quad \text{si } n < k$$

donde π_n es el n -ésimo grupo de homotopía de la esfera k -dimensional [7, p. 339]. El segundo corresponde a un lema de la Teoría de Homotopía [7, p. 348]

Lema 1 (Lema de Extensión). *Sea (X, A) un par CW y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación continua con Y arco-conexo. Si $\pi_{n-1}(Y) = 0$ para todos los n tales que $X \setminus A$ tiene células de dimensión n , entonces f se puede extender a una aplicación continua $\tilde{f} : X \rightarrow Y$.*

¹¹PENDIENTE

¹²PENDIENTE

Ahora sí procedemos a demostrar la siguiente proposición referente a las cotas mínimas del índice de Morse generalizado.

Proposición 2. *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe un punto crítico u_k de \mathcal{I} tal que $\mathcal{I}(u_k) = b_k$ y $\sigma(u) \leq k + 1$.*

Demostración. Por definición del b_k como un inf, tenemos que dado un $\epsilon > 0$, existe $A \in \Gamma_k^*$ tal que

$$\max_{u \in A} \mathcal{J}(u) < b_k + \epsilon$$

Escribimos

$$A_\infty := r(1, A).$$

Entonces como $A \subseteq \mathcal{J}_{b_k + \epsilon}$ y por la manera como construimos la deformación r en la Nota 13 tenemos que $A_\infty \subseteq Z_k$. Como vimos en esa misma nota por el Lema de morse o bien $\mathcal{J}(u) \leq b_k$ en los discos inestables, o bien $\mathcal{J}(u) \leq b_k - \epsilon$ en el nivel de energía $b_k - \epsilon$. Por la definición del Z_k tenemos entonces que

$$\max_{u \in A_\infty} \mathcal{J}(u) \leq b_k.$$

En vista de que r es impar en x , tenemos que el A_∞ es simétrico, compacto y de la misma topología que A . Por lo tanto $A_\infty \in \Gamma_k^*$.

Afirmamos que no existe ningún conjunto en Γ_k^* que esté en $\mathcal{J}_{b_k - \epsilon}$. En efecto, supongamos que existiera un tal $B \in \Gamma_k^*$ tal que $B \subseteq \mathcal{J}_{b_k - \epsilon}$. Esto implica que

$$\max_{u \in B} \mathcal{J}(u) \leq b_k - \epsilon$$

pero esto quiere decir que existe un elemento en el conjunto donde se está tomando el inf (b_k) menor que el inf menos épsilon ($b_k - \epsilon$) lo cual es imposible. Por lo tanto, no puede existir al tiempo un conjunto en Γ_k^* y en $\mathcal{J}_{b_k - \epsilon}$.

Definimos

$$B_\infty := \overline{\left\{ A_\infty \setminus \left[\prod_{i=1}^s (D_{m_i})^\pm \right] \right\}} \cap \left[\prod (S^{m_i - 1})^\pm \right] \notin \Gamma_k^*.$$

En otras palabras, B_∞ es el menor conjunto cerrado contenido en $\mathcal{J}_{b_k - \epsilon}$ que contiene a A_∞ y que no contiene a los discos inestables $(D_{m_i})^\pm$; además $\gamma^-(B_\infty) \leq k - 1$. Claramente este $B_\infty \in \text{Symm}(S)$. Pero, por la nota 7, cualquier entero más grande que el cogénero pertenece al conjunto donde se toma el inf. Es decir,

$$k - 1 \in \{m \in \mathbb{N} \mid \text{existe } h \in \text{OddC}(B_\infty, S^m)\}$$

o lo que es lo mismo, existe una aplicación impar continua

$$h : B_\infty \rightarrow S^{k-1}.$$

Definimos

$$h_i^+ := h \big|_{(S^{m_i-1})^+}.$$

Supongamos por un instante que

$$\sup_{i=1}^s m_i < k,$$

Entonces por el Lema de Extensión podemos extender las h_i^+ a todo $(D_{m_i})^+$ a través de una aplicación impar continua \tilde{h}_i^+ . Para verificar esto veremos que estamos bajo las condiciones del Lema de Extensión.

En este caso $X = (D_{m_i})^+$, $A = (S^{m_i-1})^+$, y es claro que (X, A) es una pareja CW pues las células de $(S^{m_i-1})^+$ son células de $(D_{m_i})^+$. De hecho $(D_{m_i})^+$ se puede escribir como la adjunción de las siguientes tres células

$$(D_{m_i})^+ = e^0 \amalg e^{m_i-1} \amalg (D_{m_i}^\circ)^+$$

donde e^0 y e^{m_i-1} son células de dimensión 0 y $m_i - 1$ respectivamente. S^{k-1} es obviamente arco-conexo. La única célula posible de $(D_{m_i})^+ \setminus S^{m_i-1}$ es $(D_{m_i}^\circ)^+$ y es de dimensión m_i . Además sabemos que $\pi_{m_i-1}(S^{k-1}) = 0$, por lo tanto estamos en las condiciones del Lema de Extensión y la función $\tilde{h}_i^+ \in \text{OddC}((D_{m_i})^+, S^{k-1})$ existe. Es así como podemos construir una función impar continua

$$\hat{h} : A_\infty = B_\infty \amalg \left[\prod_{i=1}^s (D_{m_i})^\pm \right] \rightarrow S^{k-1}$$

Pero la existencia de $\hat{h} \in \text{OddC}(A_\infty, S^{k-1})$ implica que

$$\gamma^-(A_\infty) \leq k - 1$$

Pero como $A_\infty \in \Gamma_k^*$

$$\gamma^-(A_\infty) \geq k$$

Pero esto es absurdo y por lo tanto

$$\sup_{i=1}^s m_i \geq k.$$

En otras palabras el índice de Morse generalizado de \mathcal{J} está acotado inferiormente por k . Ahora necesitamos una cota inferior para el índice de Morse generalizado del funcional \mathcal{I} . Para ello tomemos u_0 un punto crítico de \mathcal{I} y, tomando como restricción a $\mathcal{I}'(u_0)$ en el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange en Dimensión Infinita [5, p. 338] y como función a optimizar \mathcal{J}' . Este teorema puede ser aplicado porque los u_0 son no-degenerados, es decir $\mathcal{I}''(u_0) \neq 0$ lo que implica que $\mathcal{I}''(u_0)$ es sobre \mathbb{R} . Así, existe un multiplicador de Lagrange positivo $\rho(u_0) > 0$ tal que

$$\mathcal{J}'' \left(\frac{u_0}{\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}} \right) = \rho(u_0) \mathcal{I}''(u_0).$$

Esta ecuación implica que el índice de Morse generalizado sería el mismo para los dos funcionales si estuvieran definidos sobre el mismo espacio. No obstante, $\mathcal{J}'' \left(u_0 / \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right)$ está definido, como forma cuadrática, en $T_{u_0}(S)$. Si denotamos con $M(u_0)$ el espacio propio negativo de $\mathcal{J}'' \left(u_0 / \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right)$, entonces $\mathcal{I}''(u_0)$ tiene como espacio propio negativo a $M(u_0) \oplus \mathbb{R}u_0$. Por lo tanto

$$\sigma(u_0) \geq k + 1 \quad \checkmark$$

2.1. Crecimiento de los valores críticos

Para nuestra próxima proposición necesitamos un resultado fuerte del análisis funcional. Lo enunciamos según la notación de [10, p. 208].

Teorema 2 (Teorema de Rosenbljum-Lieb-Cwickel). *Sea $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado, $V \in L^1_{loc}$ tal que $V^- \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Designamos por $Lu = \Delta u + Vu$ un operador auto-adjunto definido sobre $L^2(\Omega)$. Con $n(V)$ designamos los valores propios negativos de L , entonces*

$$n(V) \leq C_N \int_{\Omega} \|V^-\|^{\frac{N}{2}} d\mu$$

Ahora si estamos listos para demostrar

Proposición 3. *Sea $u \in H^1_0(\Omega)$ y denotemos con $\sigma(u)$ la dimensión del espacio nulo y propio del operador $-\Delta - p|u|^{p-1}$, con dominio $H^2_0(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$. Entonces, tenemos que*

$$\sigma(u) \leq C \int_{\Omega} |u|^q d\mu$$

donde $q = \frac{1}{2}n(p-1)$ si $n \geq 3$. Si $n = 2$, q es arbitrario en $(p-1, \infty)$ y $C \geq 0$ es una constante independiente de u .

Demostración. Supongamos primero que $n \geq 3$. Vamos a verificar primero que estamos bajo las condiciones del Teorema de Rosenbljum-Lieb-Cwickel observando que $V = -p|u|^{p-1}$. Por un lado, V es localmente integrable. Esto es evidente porque Ω es abierto y acotado. Por otro lado, $V \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Esto es

equivalente a demostrar que $u \in L^{\frac{(p-1)n}{2}}(\Omega)$, lo cual es cierto pues

$$\begin{aligned} p &< \frac{n+2(1-\alpha)}{n-2} < \frac{n+2}{n-2} \quad \text{de donde} \\ p &< \frac{n+2}{n-2} = \frac{4}{n-2} + 1 \quad \text{y por tanto} \\ \frac{(p-1)n}{2} &< \frac{2n}{n-2} = 2^* \end{aligned}$$

Es decir, estamos bajo las hipótesis del Teorema de Rosenbljum-Lieb-Cwickel y en $L^2(\Omega)$ tenemos que

$$n(-\Delta + V) \leq \int_{\Omega} |u|^q d\mu,$$

pero el índice de Morse generalizado es tomado en $H_0^1(\Omega)$, por lo tanto $\sigma(u) \leq n(-\Delta - p|u|^{p-1})$ y la proposición está demostrada si $n \geq 3$. Si $n = 2$ es necesario ajustar la demostración original del Teorema de Rosenbljum-Lieb-Cwickel¹. ✓

Proposición 4. *Existe una constante positiva $C > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$(k+1)^\gamma \leq b_k \leq c_k,$$

donde $\gamma = \frac{2}{n} \frac{p+1}{p-1}$ si $n \geq 3$. γ arbitrario en $\frac{p+1}{p-1}$ si $n = 2$.

Demostración. Sea $u_k \in \mathbb{K}_{b_k}^{\mathcal{J}}$, tal que $\sigma(u_k) \geq k+1$. Entonces

$$\begin{aligned} \sigma(u_k) &\leq (k+1) \\ &\leq C \int_{\Omega} |u_k|^q d\mu \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} |u_k|^{p+1} d\mu \right)^{\frac{q}{p+1}} \quad \text{Hölder.} \end{aligned}$$

La última desigualdad es posible realizarla para $n \geq 3$ porque

$$\begin{aligned} p &< \frac{n+2}{n-2} \quad \text{por hipótesis sobre } p \\ p \left(\frac{2-n}{2} \right) &> -\frac{n+2}{2} \quad \text{lo que implica} \\ p \left(1 - \frac{n}{2} \right) &> -1 - \frac{n}{2} \quad \text{y esto a su vez} \\ p+1 &> \frac{n}{2}(p-1) = q \quad \text{por lo tanto} \\ \frac{p+1}{q} &> 1. \end{aligned}$$

En el caso $n = 2$ tomamos q suficientemente cercano a 1.

¹PENDIENTE

En vista de que u_k es un punto crítico de \mathcal{I} tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(u_k)u_k &= \int_{\Omega} \|\nabla u_k\|^2 d\mu - \int_{\Omega} |u_k|^{p-1} u_k^2 d\mu = 0 \quad \text{de donde} \\ &\int_{\Omega} \|\nabla u_k\|^2 d\mu = \int_{\Omega} |u_k|^{p+1} d\mu \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} b_k &= \mathcal{I}(u_k) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u_k\|^2 d\mu - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u_k|^{p+1} d\mu \\ &= \frac{p-1}{2(p+1)} \int_{\Omega} |u_k|^{p+1} d\mu \end{aligned}$$

Combinando la primera desigualdad de esta demostración con la anterior tenemos que

$$\begin{aligned} (k+1) &\leq C \left[b_k \left(\frac{2(p+1)}{p-1} \right) \right]^{\frac{q}{p+1}} \quad \text{de donde} \\ C(k+1)^{\frac{p+1}{q}} &\leq b_k \left(\frac{2(p+1)}{p-1} \right) \\ C(k+1)^{\gamma} &\leq b_k \end{aligned}$$

✓

Nota 16. La estimación de los valores críticos de la proposición anterior es óptima.²

2.2. Infinitas Soluciones de (i)

2.3. Infinitas Soluciones de (p)

²PENDIENTE

Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer Verlag, 2005.
- [2] A. Bahri and H. Beresticky. A perturbation method in critical point theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 267(1), 1981.
- [3] A. Bahri and P. L. Lions. Morse index of some min-max critical points. i. applications to multiplicity results. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XLI:1027–1037, 1988.
- [4] H. Brezis. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.
- [5] J. F. Caicedo. *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá., 2005.
- [6] A. Castro and M. Clapp. Upper estimates for the energy of solutions of nonhomogeneous boundary value problems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 134(1):167–175, 2005.
- [7] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] J. Jost. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2002.
- [9] J. Jost. *Postmodern Analysis*. Springer Verlag, 2005.
- [10] O. Kavian. *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [11] C. Kung-Ching. *Infinite Dimensional Morse Theory*, volume 6. Birkhäuser, Berlin, 1993.
- [12] C. Kung-Ching. *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [13] M. Spivak. *Calculus*. Editorial Reverté, 2 edition, 1992.