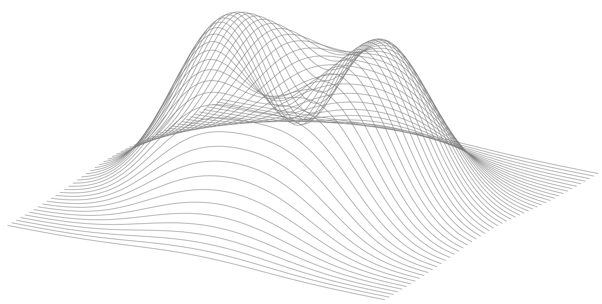
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSE DE CALDAS

Una Aplicación del Teorema del Paso de Montaña a un Problema Elíptico Superlineal[*]



ARTURO SANJUÁN[**]

BOGOTÁ MMXII

[*]Notas introductorias preparadas para el II Taller de Análisis no Lineal y Ecuaciones Diferenciales Parciales. Bogotá 26-29 de junio de 2012. Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá. Departamento de Matemáticas

[**]Profesor Asistente de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (aasanjuanc@udistrital.edu.co) y Candidato a PhD en Ciencias Matemáticas de la Univesidad Nacional de Colombia (aasanjuanc@unal.edu.co)

"La geometría es el arte de razonar correctamente sobre figuras incorrectas" H. Poincaré

Preliminares

Introducción

En el presente trabajo mostraremos, a través de un ejemplo emblemático, cómo se puede emplear el Teorema del Paso de Montaña para encontrar soluciones débiles a un problema elíptico superlineal. Enunciaremos y explicaremos el Lema de Deformación sin demostración y lo usaremos para demostrar el Teorema del Paso de Montaña.

Las notas aquí presentadas son de carácter introductorio a los métodos variacionales del análisis funcional no lineal y pretenden ser una pequeña motivación para los matemáticos que estén iniciando en el tema. Por esta razón se dejan varios ejercicios para el lector. En el texto, los ejercicios están formulados en los recuadros ovalados en dónde aparece el símbolo ✍. Para una presentación exhaustiva y rigurosa de este y otros temas afines se recomienda consultar [Figueredo, 1989], [Jabri, 2003], [Kung-Ching, 2005], [Kavian, 1993], [Struwe, 2000] o [Caicedo and Castro, 2012]. Para la lectura de estas notas se asumen conocimientos generales de análisis y topología por parte del lector. Emplearemos algunos resultados de *análisis fuerte* que enunciaremos en su momento en los recuadros sombreados con el símbolo ☞. Para una exposición de estos resultados *fuertes* se recomienda especialmente el libro de [Brezis, 2010]. Complementan la lectura los textos de [Jost, 2005], [Jost, 2002], [Rudin, 1976], [Rudin, 1973] y [Rudin, 1981].

Notación

Sea Ω un dominio abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Definimos el operador de Laplace $\triangle : C^2(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ por

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, no necesariamente lineal, de clase C^1. Modelando algunos fenómenos físicos, tenemos el siguiente problema elíptico: encontrar una función u tal que

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,u) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{$\mathfrak{P}$}$$

En [Strauss, 1992, ch. 1] se encuentran algunas motivaciones físicas cuando f no depende de u. No hemos dicho qué clase de función u queremos encontrar. Inicialmente pensaríamos en encontrar soluciones $u \in C^2(\overline{\Omega})$, pero sorprendentemente, una ecuación como ($\mathfrak{P}$) puede tener soluciones que no son derivables tantas veces (dos veces). Por esta razón se hace necesario introducir la idea de solución débil y se formula el problema ($\mathfrak{P}$) en su forma variacional.

Multiplicando a ambos lados de la primera ecuación de ($\mathfrak{P}$) por $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ obtenemos la forma integral del problema en cuestión

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega f(x,u)\varphi = 0 \tag{$\mathfrak{PI}$}$$

✍ Si no conoce la versión en dimensión n del Teorema de Integración por Partes, use el Teorema de Stokes como aparece en [Rudin, 1976, p. 272] para formular y demostrar una versión de dicho teorema. Deduzca, usando integración por partes, la ecuación ($\mathfrak{PI}$) partiendo de ($\mathfrak{P}$).

Mostraremos ahora lo que quiere decir que u sea una solución débil para el problema ($\mathfrak{P}$). Se define el *espacio de Sobolev* $H_0^1(\Omega)$ como el espacio de Banach de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ tales que $u_{x_i}, u_t \in L^2(\Omega)$ y $u = 0$ en $\partial\Omega$. $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior $(u \mid v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u \mid \nabla v)_{L^2(\Omega)}$.

✍ El espacio $H^1(\Omega)$ se define de manera igual que el espacio $H_0^1(\Omega)$ salvo por la condición "$u = 0$ en $\partial\Omega$" que se omite. En $H^1(\Omega)$ se emplea la norma

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{n} \|\partial_{x_i} u\|_2^2}.$$

Demuestre, usando la Desigualdad de Poincaré (enunciada a continuación), que $\|u\|_{H^1}$ y la norma inducida por el producto interior en $H_0^1(\Omega)$ son equivalentes.

☞ (Desigualdad de Poincaré) [Brezis, 2010, p. 290] Existe una constante C, que depende sólo de Ω, tal que

$$\|u\|_2 \leq C\,\|\nabla u\|_2 \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

Por *solución débil* entendemos una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface la ecuación integral ($\mathfrak{PI}$).

Para terminar de formular el problema ($\mathfrak{P}$) en su forma variacional, definimos el funciónal $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(x,u)\right] dx \tag{$\mathfrak{J}$}$$

Al funcional J se le conoce como *lagrangiano*, *funcional de energía* o *funcional de acción* del problema ($\mathfrak{P}$). Los lagrangianos tienen importantes interpretaciones físicas y el lector interesado puede consultar [Arnold, 1989] o [Scheck, 2005]. Se puede demostrar que cuando la derivada en el sentido de Frechet [Caicedo, 2005, ch. 2] del funcional J es igual a cero, se satisface la ecuación integral ($\mathfrak{PI}$). En otras palabras, las soluciones débiles al problema ($\mathfrak{P}$) son los puntos críticos del funcional ($\mathfrak{J}$). Interpretando físicamente la situación, esto obedece al principio de mínima acción. Un sistema físico tiene solución en los puntos en que la energía alcanza un extremo [Scheck, 2005, ch. 2].

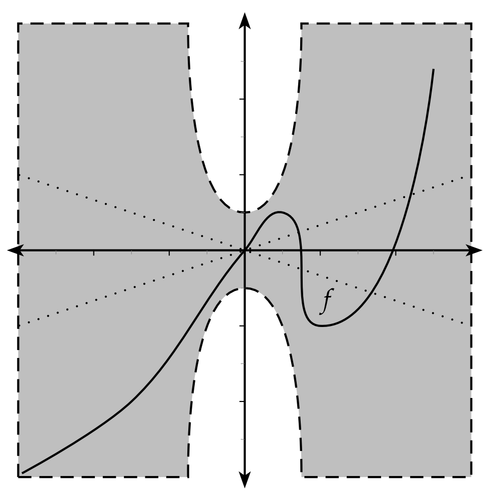


Figura 1: $|f(x,u)| \leq C_1 + C_2|u|^a$

Para poder demostrar que J es de clase C^1, necesitamos imponer sobre f la siguiente condición de superlinealidad:

(F1) Existen constantes positivas C_1, C_2 y $a \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right)$ (con $n \geq 3$) tales que

$$|f(x,t)| \leq C_1 + C_2|t|^a. \tag{1}$$

La condición (F1) quiere decir que la no linealidad f puede estar por encima de lineas rectas como se ve en la figura 1. Adicionalmente necesitamos un resultado conocido como Operador de Nemytscki (ver [Kung-Ching, 2005,

p. 7-8] o [Figueredo, 1989, ch. 2]). Enunciamos aquí una versión más débil usando la notación que tenemos hasta el momento. Notamos con

$$F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\,ds \tag{2}$$

el potencial de f.

☞ (Operador de Nemytscki) [Kung-Ching, 2005, p. 8] Supongamos (F1). El funcional

$$G(u) := \int_\Omega F(x,u(x))\,dx$$

es diferenciable en el sentido de Frechet en $H_0^1(\Omega)$ y su derivada viene dada por

$$G'(u)[v] = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\,dx.$$

✍ Demuestre que el funcional ($\mathfrak{J}$) es derivable en el sentido de Frechet y que su derivada es igual al lado izquierdo de la ecuación ($\mathfrak{PI}$). Demuestre que

$$\langle J'(u), u\rangle = \|u\|_{H^1}^2 - \int_\Omega u(x)f(x,u(x))\,dx.$$

No necesariamente los puntos críticos del funcional de energía son puntos extremos. Es decir, la

> "energía asociada al problema, cuyos puntos críticos son las soluciones débiles, es *indefinida*, en el sentido que ni está acotada inferiormente ni está acotada superiormente. En tales casos, por supuesto que no hay extremos absolutos, y los métodos variacionales del cálculo de variaciones que buscan mínimos absolutos fallan. Puede suceder que, además de estar indefinida, el funcional de energía no posea ningún mínimo o máximo local; por lo tanto, algunos de sus puntos críticos son de *naturaleza diferente*." [Jabri, 2003, p. 7]

Puede ser que los puntos de críticos del funcional de energía (soluciones al problema) sean puntos de silla o puntos minimax como ocurre cuando el funcional tiene geometría de montaña.

Lema de Deformación

Para poder formular el Lema de Deformación necesitamos entender primero la condición de Palais-Smale.

Condición de Palais-Smale

Es un hecho topológico bien sabido [Rudin, 1976, p. 89], que si un funcional está definido en un compacto adquiere su máximo y su mínimo. Los funcionales que se consideran en esta clase de problemas están definidos en espacios de dimensión infinita y también es un hecho bien sabido [Brezis, 2010, p. 160] que un espacio es de dimensión finita si y solamente si la bola cerrada es compacta. Esto quiere decir, de manera muy informal, que en espacios de dimensión infinita tenemos *menos compactos* que en espacios de dimensión finita y *menos compactos* que en la topología débil [Brezis, 2010, p. 55].

Para compensar esta carencia de compacidad se introduce sobre el funcional el siguiente concepto. Sea X un espacio de Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 se dice que satisface la condición de Palais-Smale en el nivel c (de manera abreviada, satiface $(\mathrm{PS})_c$) si, y solamente si, toda sucesión $u_n \in X$ tal que

$$J(u_n) \to c \quad \text{y} \quad J'(u_n) \to 0$$

admite una subsucesión convergente.

✍ Demuestre que si J satisface (PS)$_c$, el conjunto

$$\mathbb{K}_c := \{u \in X \,:\, J(u) = c \text{ y } J'(u) = 0\}$$

es compacto.

Por ejemplo, el funcional $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $J(u) = \sin(u)$ satisface (PS)$_c$ para todo $c \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pero, para $c = 1$, el conjunto $\mathbb{K}_1$ no es compacto (figura 2) ya que no tiene ninguna subsucesión convergente.

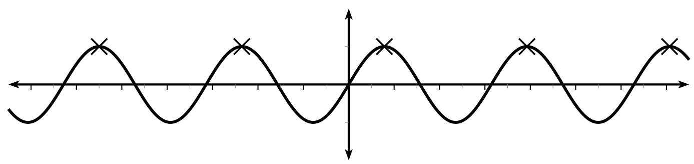


Figura 2: $\mathbb{K}_1$ para $J(u) = \sin u$

✍ Ejemplos relativos a (PS)$_c$

- ¿El funcional $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $J(x, y) = e^{-y} - x^2$ satisface (PS)$_0$?
- Sin tener una definición formal ¿Puede afirmar que J tiene alrededor de $\mathbb{K}_0$ geometría de montaña?
- Dé ejemplos de funcionales definidos en $\mathbb{R}^n$ que satifagan (PS)$_c$ para algún c,
- para todo c.
- ¿Puede dar un ejemplo de un funcional definido en un espacio de dimensión infinita que satisfaga (PS)$_c$?

J satisface (PS)$_c$

Para terminar esta sección, demostraremos que el funciónal J definido en ($\mathfrak{J}$) satisface (PS)$_c$ si sobre f imponemos, además de la condición (F1), la condición (F2) siguiente:

(F2) Existen constantes $0 < \theta < \frac{1}{2}$ y $M > 0$ tales que

$$0 < F(x, t) < \theta t f(x, t), \quad \text{para } |t| \geq M.$$

Supongamos que existe una sucesión $u_j \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J(u_j) \to c$ y $J'(u_j) \to 0$. Queremos ver que u_j tiene una subsucesión convergente. Para eso vamos a demostrar primero que u_j es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por ser $J(u_j)$ convergente en $\mathbb{R}$, es acotada. Esto implica que existe una constante positiva D_1 tal que $|J(u_j)| \leq D_1$, o lo que es lo mismo

$$-D_1 \leq \frac{1}{2} \left\|u_j\right\|_{H^1}^2 - \int_\Omega F(x, u_j(x))\, dx \leq D_1. \tag{3}$$

Para $|t| \geq M$ tenemos que

$$-\theta t f(x, t) \leq -F(x, t) \quad \text{para } |t| \geq M. \tag{4}$$

y para $|t| \leq M$ podemos aplicar (F1) así

$$\begin{aligned} |\theta t f(x, t)| &\leq \theta |t| |f(x, t)| \\ &\leq \frac{1}{2} M \left(C_1 + C_2 M^a\right) \\ &= D_2. \end{aligned}$$

Lo que implica que para $|t| \leq M$ es válida

$$-\theta t f(x,t) \leq D_2. \tag{5}$$

Combinando (4) y (5) se obtiene

$$-\theta t f(x,t) \leq -F(x,t) + D_2 \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Al integrar esto último sobre Ω, es válida la siguiente desigualdad

$$-\theta \int_\Omega u_j(x) f(x, u_j(x))\, dx \leq -\int_\Omega F(x, u_j(x)) + \mu(\Omega) D_2. \tag{6}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_j\|_{H^1}^2 + \theta \left\langle J'(u_j), u_j \right\rangle &\leq \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_j\|_{H^1}^2 + \theta \|u_j\|_{H^1}^2 - \theta \int_\Omega u_j(x) f(x, u_j(x))\, dx \\
&\leq \frac{1}{2} \|u_j\|_{H^1}^2 - \int_\Omega F(x, u_j(x))\, dx + \mu(\Omega) D_2 && \text{usando (6)} \\
&\leq D_1 + \mu(\Omega) D_2 && \text{usando (3)} \\
&= D_3.
\end{aligned}$$

✍ $J'(u_j) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo, por lo tanto habita en $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}) = H_0^1(\Omega)^*$. A este espacio dual se denota con $H^{-1}(\Omega)$. Demuestre, usando [Brezis, 2010, remark 3 p. 136], que $L^2(\Omega)$ es el espacio pivote para $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$. Es decir, que

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Representación de Riesz dado que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert?

Como $J'(u_j) \to 0$, existe un entero N_θ tal que si $j \geq N_\theta$

$$\sup_{\|v\|_{H^1} \neq 0} \left\{ \frac{|\left\langle J'(u_j), v \right\rangle|}{\|v\|_{H^1}} \right\} = \|J'(u_j)\| < \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \tag{7}$$

Juntando lo que tenemos hasta el momento, si $j \geq N_\theta$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_j\|_{H^1}^2 &\leq D_3 - \theta \left\langle J'(u_j), u_j \right\rangle \\
&\leq D_3 + \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \|u_j\|_{H^1} && \text{usando (7)}
\end{aligned}$$

Dividiendo a ambos lados por $\left(\frac{1}{2} - \theta\right)$ y dejando los términos con $\|u\|_{H^1}$ al lado izquierdo obtenemos

$$\|u_j\|_{H^1}^2 - \|u_j\|_{H^1} \leq D_4 \quad \text{con } D_4 := \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^{-1} D_3 > 0$$

Pero esto implica que $\|u_j\|_{H^1}$ está acotado por

$$D_5 := \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4D_4}\right)$$

como se ve en la figura 3.

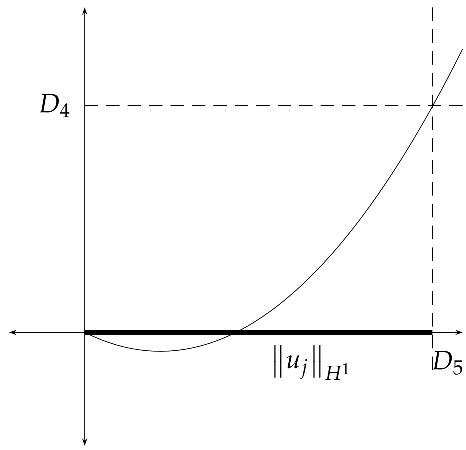


Figura 3: La desigualdad $\|u_j\|_{H^1}^2 - \|u_j\|_{H^1} \leq D_4$ implica $\|u_j\|_{H^1} \leq D_5$.

✍ Realmente demostramos que u_j está acotado en $H_0^1(\Omega)$ para $j \geq N_\theta$. ¿Puede garantizar que u_j está acotado en $H_0^1(\Omega)$ para todo j entero positivo?

Para terminar la demostración de que J satisface (PS)$_c$, necesitamos demostrar que existe una subsucesión convergente a u_j. Por el Teorema de Rellich-Kondrachov $\|u_j\|_{L^p(\Omega)}$ está acotado para $p = a + 1$.

☞ (Teorema de Rellich-Kondrachov) [Brezis, 2010, p. 285] Con la notación que tenemos, es válida la inyección compacta

$$H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \text{para todo } p \in (1, 2^*).$$

donde $2^* = \frac{2n}{n-2}$. En particular, existe una constante $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1}$.

✍ Demuestre que en efecto se puede aplicar el Teorema de Rellich-Kondrachov a nuestro caso y use esto para demostrar que $\|u_j\|_{L^p(\Omega)}$ es acotada.

✍ Use la condición (F1) y la desigualdad

$$(x+y)^q \leq 2^q x^q + 2^q y^q \quad \text{para } x, y > 0 \text{ y } 1 < q < \infty.$$

para demostrar que si $u \in L^p(\Omega)$, $f(x, u(x)) \in L^q(\Omega)$ donde p y q son exponentes conjugados. Demuestre que si u_j es una sucesión acotada en $L^p(\Omega)$, entonces $f(x, u_j(x))$ es una sucesión acotada en $L^q(\Omega)$.

Dado que $f(x, u_j(x))$ es una sucesión acotada en $L^q(\Omega)$ y que $L^q(\Omega)$ es reflexivo, por el Teorema de Eberlein-Šmulian la sucesión u_j admite una subsucesión que converge débilmente en $L^q(\Omega)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la subsucesión es la misma u_j.

☞ (Teorema de Eberlein-Šmulian) [Brezis, 2010, p. 69-70] Un espacio de Banach es reflexivo si y solamente si toda sucesión acotada admite una subsucesión que converge debilmente.

✍ Sobre el operador $(-\triangle)^{-1}$.

❄ Dada $f \in L^2(\Omega)$ defina adecuadamente
$$(-\triangle)^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega).$$

❄ ¿Por qué puede hablar de $(-\triangle)^{-1}$?

❄ Demuestre que el operador así definido es un operador compacto auto-adjunto. (Ayuda [Brezis, 2010, p. 311])

❄ Usando la notación que tenemos hasta el momento ¿Cómo, o por qué, puede definir $(-\triangle)^{-1} : L^q(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$?

❄ Demuestre que $(-\triangle)^{-1}$ así definido es un operador compacto.

❄ Demuestre que un operador compacto envía sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes.

Por la compacidad de $(-\triangle)^{-1}$, la sucesión $(-\triangle)^{-1}f(x, u_j(x))$ converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)$.

✍ Demuestre que $J'(u)$ se puede escribir como
$$J'(u) = u - (-\triangle)^{-1}f(\cdot, u)$$

Como $J'(u_j) \to 0$, entonces u_j converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. Con lo que queda demostrado que J satisface $(\mathrm{PS})_c$.

Interpretación geométrica del lema de deformación

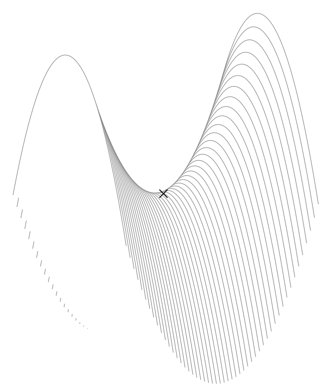
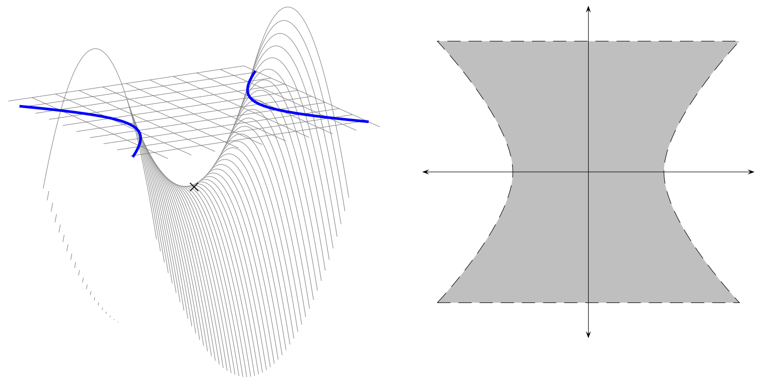


Figura 4: $J(x, y) = x^2 - y^2$ tiene como único punto crítico a $(0, 0)$

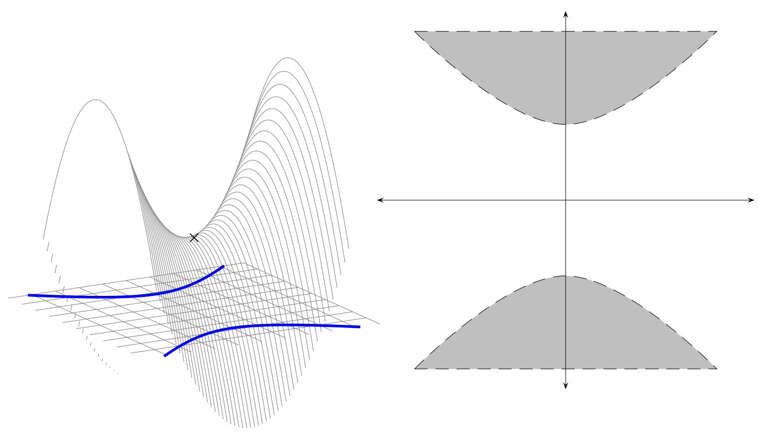
Primero revisemos algunos conceptos. Sean X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1. Si $J'(x) = 0$, x es un *punto crítico* de J y si adicionalmente $J(x) = c$, c es un *valor crítico*. c es un *valor regular* si $J^{-1}(c)$ no tiene puntos críticos. El conjunto de nivel en a se define como $J_a := \{x \in X : J(x) \leq a\}$.

De manera intuitiva el Lema de Deformación dice que cerca a valores regulares los conjuntos de nivel se pueden deformar (retraer fuertemente) de un conjunto un poco más 'alto' a uno un poco más 'bajo'. Más adelante precisaremos que quiere decir deformar. Podemos pensar en la deformación como una función que envía, a través de un parámetro (tiempo si quiere), conjuntos de nivel de 'arriba' en conjuntos de nivel de 'abajo', siempre preservando la topología de los conjuntos en cada instante de tiempo. Esto quiere decir que si la topología cambia alrededor del conjunto de nivel de un valor dado c, es porque c no puede ser un valor regular.

Veamos el siguiente ejemplo (ver figura 4). El funcional $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $J(x, y) = x^2 - y^2$ tiene un único punto crítico: $(0, 0)$ y le corresponde el valor crítico 0. En la figura 5 se ve cómo cambia la topología de los conjuntos de nivel en cercanía de un valor crítico.



J_1 es un conjunto conexo



J_{-1} no es un conjunto conexo

Figura 5: Dos conjuntos de nivel cercanos al valor crítico 0.

A continuación enunciamos el lema de deformación. Para una demostración de este hecho, el lector puede consultar [Struwe, 2000, p.81-84], [Jabri, 2003, ch. 2], [Kavian, 1993, p. 151-155], [Caicedo and Castro, 2012, p. 130-139], o también [Kung-Ching, 2005, p. 319-327] o [Evans, 1997, p. 478-480].

☞ (Lema de Deformación) [Jabri, 2003, p. 40] Sean X un espacio de Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 y $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de J. Suponga que J satisface $(PS)_c$. Entonces existe un ϵ_0 tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ (otra forma de decirlo es para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño) existe una función continua $\eta : [0,1] \times X \to X$ (η es la deformación) tal que:

- $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in X$,
- $\eta(t, u) = u$ para todo $u \notin J^{-1}[c-\epsilon, c+\epsilon]$ y todo $t \in [0,1]$,
- $\eta(1, J_{c+\epsilon}) \subset J_{c-\epsilon}$
- $\eta(t, \cdot)$ es un homeomorfismo para todo $t \in [0,1]$.

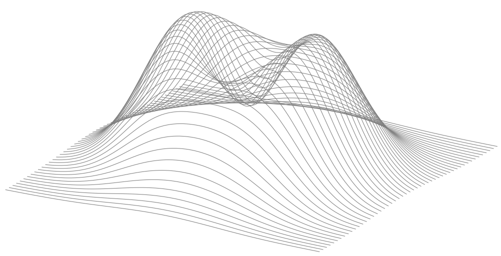
✍ Sea $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $J(x) = x^3$. ¿Alrededor del 0 cambia la topología de los conjuntos de nivel? ¿Se pueden retraer los más grandes en los más pequeños? ¿Contradice el Lema de Deformación?

Teorema del Paso de Montaña

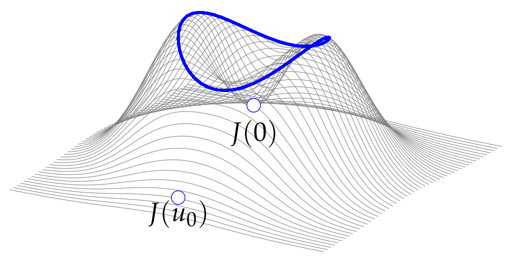
Para explicar el Teorema del paso de montaña, haremos una analogía con el recorrido de la lava de un volcán. Si es enemigo de este tipo de interpretaciones profundamente imprecisas pase directamente a la demostración.

Supongamos que la garganta del volcán (el lugar aún visible por donde sale la lava) está situado en el origen. Para salir, la lava debe subir por el crater y luego bajar a puntos que están más abajo que la garganta. Cada partícula de lava describe un camino. Todos los caminos tienen un máximo (generalmente en el filo del crater). El camino que tenga el más pequeños de esos máximos sería el un camino ideal para una partícula de lava. El Teorema del Paso de Montaña dice que el ínfimo de esos máximos es un valor crítico.

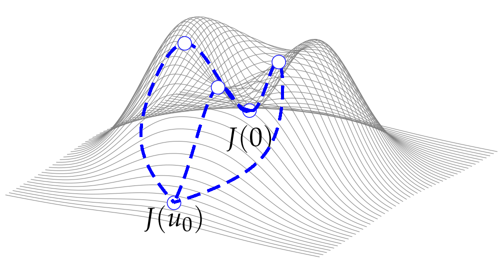
Ahora con un poco más de rigor, en la figura 6 se representan las hipótesis y la conclusión del Teorema del Paso de Montaña.



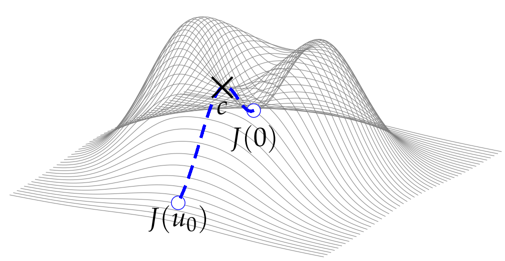
(a) Sea X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 que satisface $(\mathrm{PS})_c$.



(b) Suponga que existen un $\rho > 0$ y punto u_0 con $\|u_0\| > \rho > 0$ tal que $\max\{J(0), J(e)\} < \inf_{S_\rho(0)} J(u)$



(c) Tomamos los $\max_{\gamma[0,1]} J(u)$ donde γ es un camino continuo que une $\gamma(0) = 0$ con $\gamma(1) = u_0$



(d) $c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{\gamma[0,1]} J(u)$ es un valor crítico.

Figura 6: Interpretación geométrica del Teorema del Paso de Montaña

El Teorema del paso de montaña fue demostrado inicialmente en [Ambrosetti and Rabinowitz, 1973]. Aquí exponemos la demostración que se muestra en [Jabri, 2003, p. 66-67].

Teorema (Teorema del Paso de Montaña)**.** *Sea X un espacio de Banach y $J : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1.*

(M1) *Suponga que existe un $u_0 \in X$ y un $\rho > 0$ tales que $\|u_0\| \geq \rho > 0$ y*

$$\alpha := \max\{J(0), J(u_0)\} < \inf_{S_\rho(0)} J(u) = \beta.$$

Sea

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{\gamma[0,1]} J$$

donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) \,:\, \gamma(0) = 0$ *y* $\gamma(1) = u_0\}$.

(M2) *Suponga que* J *satisface (PS)*$_c$.

Entonces $c \geq \beta$ *es un valor crítico de* J.

Demostración. Supongamos que c es un valor regular. Como $\gamma[0,1]$ es conexo, $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = u_0$; entonces γ tiene que atravesar a $S_\rho(0)$ como se ve en la figura 7.

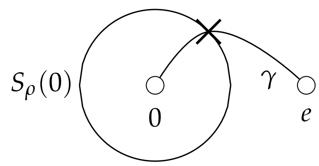


Figura 7: γ atraviesa $S_\rho(0)$

Es decir

$$\gamma[0,1] \cap S_\rho(0) \neq \emptyset.$$

✍ ¿Qué teorema del cálculo elemental le permite demostrar que esa intersección no es vacía?

Por lo tanto,

$$\max_{\gamma[0,1]} J \geq \inf_{S_\rho(0)} \geq \beta.$$

En otras palabras, β es una cota inferior de los números $\max_{\gamma[0,1]} J$, pero no es la más grande de las cotas inferiores, así que $c \geq \beta$. Por el lema de deformación, sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño (¿qué tanto?) y η una deformación tal que

$$\eta(1, J_{c+\epsilon}) \subset J_{c-\epsilon}.$$

Por la definición de c (como inf), existe una curva $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{\gamma[0,1]} J \leq c + \epsilon.$$

Definimos la curva $\gamma^*(t) = \eta(1, \gamma(t))$. Como

$$\gamma^*(0) = \eta(1, \gamma(0)) = \gamma(0) = 0 \quad \text{y}$$
$$\gamma^*(1) = \eta(1, \gamma(1)) = \gamma(1) = u_0$$

$\gamma^* \in \Gamma$. $\gamma^* \subset J_{c-\epsilon}$, lo que implica que

$$c \leq \max_{\gamma^*[0,1]} J \leq c - \epsilon,$$

lo que es una contradicción. □

El Teorema del Paso de Montaña también se puede demostrar usando el Principio Varicional de Ekeland. Para una demostraicón así ver [Jabri, 2003, p. 68] o [Figueredo, 1989, ch. 5]. Cuando un funcional satisface la hipótesis (M1) se dice que el funcional tiene geometría de montaña.

✍ Demuestre que el funcional $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definido por $J(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2$ tiene geometría de montaña alrededor del $(0,0)$. ¿Tiene este funcional otro punto crítico? ¿Se contradice el Teorema del Paso de Montaña?

✍ Se dice que el Teorema del Paso de Montaña es una generalización del Teorema de Rolle. ¿Le puede dar la razón a quienes afirman tal cosa?

J tiene geometría de montaña

Vamos a terminar esta sección, demostrando que bajo dos hipótesis adicionales, el funcional J definido en $(\mathfrak{J})$ tiene geometría de montaña alrededor del cero. Ya tenemos $J(0) = 0$. Las condiciones adicionales que vamos a imponer para que J tenga geometría de montaña son las siguientes

(F3) $\limsup_{t\to 0} \dfrac{f(x,t)}{t} < \lambda_1$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$

(F3) $\limsup_{t\to \infty} \dfrac{f(x,t)}{t} > \lambda_1$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$.

Aquí λ_1 es el primer valor propio del operador $-\triangle$ en $H_0^1(\Omega)$.

☞ (Valores propios del Laplaciano) [Brezis, 2010, p. 165] El Primer valor propio del operador $(-\triangle)^{-1}$ minimiza la energía de Dirichlet en el sentido que

$$\lambda_1 = \inf_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \tag{8}$$

Los valores propios de $(-\triangle)^{-1}$ son enumerables y cumplen que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \cdots \to \infty \text{ [Jost, 2002, p. 234].}$$

Veamos primero qué implica la condición (F3). Recordemos que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{f(x,t)}{t} = \inf_{\delta>0} \left\{ \sup_{0<|x|<\delta} \left[\frac{f(x,t)}{t} \right] \right\} \quad \text{y que}$$
$$\liminf_{t\to \infty} \frac{f(x,t)}{t} = \sup_{M>0} \left\{ \inf_{x>M} \left[\frac{f(x,t)}{t} \right] \right\}.$$

Aplicando la definición de lím sup en la condición $(F3)$ vemos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{0<|x|<\delta} \frac{f(x,t)}{t} < \lambda_1.$$

Tomando un $\epsilon > 0$ arbitrario pero fijo vemos que

$$\frac{f(x,t)}{t} \leq \lambda_1 - \epsilon \quad \text{para} \quad 0 < |t| < \delta,$$

lo que implica que

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \epsilon)t^2 \quad \text{para} \quad |t| < \delta. \tag{9}$$

Supongamos ahora que $|t| \geq \delta$ ($p = a+1$). Escojamos $C_3 \geq C_1\delta^{1-p} + C_2$. Un cálculo directo (ejercicio) muestra que $C_3|t|^p \geq C_2|x|^p + C_1|x|$. Al integrar con respecto a t en (F1) vemos que

$$\begin{aligned} F(x,t) &\leq C_1|t| + C_2|t|^p \\ &\leq C_3|t|^p. \end{aligned} \tag{10}$$

Combinando (9) con (10)

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \epsilon)t^2 + C_3|t|^p \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Integrando esta desigualdad sobre Ω

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(x,u(x))\,dx &\leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \epsilon)\,\|u\|_2^2 + C_3\,\|u\|_p^p \\ &\leq \frac{1}{2}(\lambda_1 - \epsilon)\frac{1}{\lambda_1}\,\|\nabla u\|_2^2 + C_3\,\|u\|_p^p && \text{por (8)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon}{\lambda_1}\right)\|u\|_{H^1}^2 + C_3\,\|u\|_p^p \end{aligned} \tag{11}$$

Sea

$$0 < \rho < \left(\frac{\epsilon}{2\lambda_1 C_3}\right)^{\frac{1}{p-2}}$$

arbitrario pero fijo, para $u \in S_\rho(0)$ tenemos

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\,\|u\|_{H^1}^2 - \int_\Omega F(x,u(x))\,dx \\ &\geq \frac{\epsilon}{2\lambda_1}\,\|u\|_{H^1}^2 - C_3\,\|u\|_{L^p(\Omega)}^p && \text{por (11)} \\ &\geq \frac{\epsilon}{2\lambda_1}\,\|u\|_{H^1}^2 - C_4\,\|u\|_{H^1}^p && \text{(Rellich-Kondrachov)} \\ &\geq \rho^2\left(\frac{\epsilon}{2\lambda_1} - C_4\rho^{p-2}\right) \\ &> 0 && \text{(por la escogencia de } \rho\text{)} \end{aligned}$$

Entonces

$$\beta = \inf_{S_\rho(0)} J \geq \alpha := 0.$$

Solo nos falta encontrar un u_0 tal que $J(u_0) < \alpha$ ($J(u_0) = 0$).

Para esto, tomamos $u_s = s\varphi_1$ con φ_1 la función propia normalizada correspondiente al valor propio λ_1. Definimos

$$g(s) := J(s\varphi_1) = \frac{\lambda_1}{2}s^2 - \int_\Omega F(x, s\varphi_1(x))\,dx.$$

De la condición (F4), tenemos que $g(s) \to -\infty$ cuando $s \to \infty$. Por lo tanto, existe $s_0 > 0$ tal que $g(s_0) = 0$. Haciendo $u_0 = s_0\varphi_1$ tenemos que $J(s_0) = 0 = \alpha$. Es decir

$$\alpha = 0 = \text{máx}\,\{J(0), J(u_0)\} \leq \inf_{S_\rho(0)} J = \beta.$$

O lo que es lo mismo, J tiene geometría de montaña alrededor del origen.

Comentarios Finales

Hemos demostrado que el funcional J definido en ($\mathfrak{J}$) satisface la condición de $(\text{PS})_c$. Asimismo, hemos demostrado que el funcional J tiene geometría de montaña. Es decir, comprobamos que el funcional J satisface las condiciones del Teorema del Paso de Montaña por lo tanto tiene un punto crítico distinto de 0. En definitiva hemos demostrado que el problema ($\mathfrak{P}$) tiene soluciones débiles no-triviales en $H_0^1(\Omega)$.

El Teorema del Paso de Montaña no es aplicable solamente a problemas elípticos. Por ejemplo en [Brézis et al., 1980] se encuentran soluciones débiles al problema hiperbólico

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = 0$$

usando dicho teorema.

Referencias

[Ambrosetti and Rabinowitz, 1973] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. (1973). Dual variational methods in the critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*.

[Arnold, 1989] Arnold, V. I. (1989). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag.

[Brezis, 2010] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag.

[Brézis et al., 1980] Brézis, H., Coron, J. M., and Nirenberg, L. (1980). Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of p. rabinowitz. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXIII:667–689.

[Caicedo, 2005] Caicedo, J. F. (2005). *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colobmia, Bogotá.

[Caicedo and Castro, 2012] Caicedo, J. F. and Castro, A. (2012). *Ecuaciones semilineales con espectro discreto (en prensa)*. Universidad Nacional de Colombia.

[Evans, 1997] Evans, L. C. (1997). *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.

[Figueredo, 1989] Figueredo, D. G. D. (1989). *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Springer Verlag.

[Jabri, 2003] Jabri, Y. (2003). *The Mountain Pass Theorem*. Cambridge University Press.

[Jost, 2002] Jost, J. (2002). *Partial Differential Equations*. Springer Verlag.

[Jost, 2005] Jost, J. (2005). *Postmodern Analysis*. Springer Verlag.

[Kavian, 1993] Kavian, O. (1993). *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. Springer Verlag, Berlin.

[Kung-Ching, 2005] Kung-Ching, C. (2005). *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer Verlag, Berlin.

[Rudin, 1973] Rudin, W. (1973). *Funcitonal Analisis*. Mc Graw-Hill Book Company.

[Rudin, 1976] Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions, 3 edition.

[Rudin, 1981] Rudin, W. (1981). *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions, 3 edition.

[Scheck, 2005] Scheck, F. (2005). *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Springer Verlag.

[Strauss, 1992] Strauss, W. (1992). *Partial Differential Equations. An Introducction*. John Wiley and Sons.

[Struwe, 2000] Struwe, M. (2000). *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 2 edition.