EXISTENCIA DE SOLUCIONES DOBLE-PERIÓDICAS DE UNA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL CON NO-LINEALIDAD NO MONÓTONA Y FORZAMIENTO EN L^p

Arturo Sanjuán

Bogotá 2012

Resumen

En el presente trabajo demostramos que existe una solución periódica en L^p ($p \geq 2$) al problema doble-periódico de la ecuación de onda semilineal. Asumimos que la no-linealidad es asintóticamente lienal (no necesariamente monótona) y que el forzamiento también está en L^p. Se emplea el concepto de función no-plana sobre características.

1. Introducción, notación y resultado

Notamos con $\Box u := u_{tt} - u_{xx}$. Estamos intersados en las soluciones débiles al problema

$$\Box u + g(u) = f, \quad x, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

sujeto a las condición de doble periodicidad

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t) = u(x + 2\pi, t), \quad x, t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Asumimos que g es asintóticamente lineal, continuamente diferenciable, pero no necesariamente monótona. De manera más precisa, asumimos que

$$g(t) = \tau t + h(t) \quad \text{con } \tau > 0, \tag{3}$$

y para algún $\beta < 0$ y algún $A > 0$, con $h \in C^1(\mathbb{R})$

$$|h'(s)| \leq |s|^\beta \quad \text{para } |s| \geq A. \tag{4}$$

Se puede suponer sin pérdida de generalidad, que $\beta \in (-1, 0)$. Es fácil demostrar [4, p. 28-29] que existen constantes positivas M, M_1 y que dado $\epsilon > 0$ existe M_ϵ de tal modo que las siguientes acotaciones sobre h y h' son válidas para todo $s \in \mathbb{R}$

$$|h'(s)| \leq M, \tag{5}$$
$$|h(s)| \leq M_\epsilon + \epsilon |s| \tag{6}$$
$$|h(s)| \leq M_1 + \frac{|s|^{\beta+1}}{\beta + 1}. \tag{7}$$

El espectro de $\Box$ sujeto a las condiciones (2) viende dado por

$$\sigma(\Box) = \left\{ k^2 - j^2 \,:\, k = 1, 2, 3, ..., \; j = 0, 1, 2, ... \right\} \tag{8}$$

En [2] se demuestra, bajo las mismas hipótesis para f y g la existencia de soluciones al problema Dirichlet-periódico. En [3] se encuentran soluciones débiles para el caso en el que $f \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Imitaremos algunos argumentos de [2] para el problema doble-periódico. En los dos resultados mencionados, y en este trabajo, se emplea el siguiente concepto

Definición. $\varphi : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}$ se dice *no plana sobre características* si

$$\mu \{x \in [0, 2\pi] \, : \, \varphi(x, r \pm x) = 0\} = 0 \tag{9}$$

para todo $r \in \mathbb{R}$.

La definición anterior es equivalente si tomamos la siguiente: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu \{x \in [0, 2\pi] \, : \, \varphi(x, r \pm x) < \delta\} < \epsilon$$

uniformemente para r.

Nuestro resultado principal es el siguiente

Teorema 1. *Sea $\tau \notin \sigma(\Box)$, $f = cq \in L^p(\Omega)$ para $p \geq 2$. Sea $\varphi : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi = (\Box + \tau)^{-1} q$. Si φ no es plana sobre características, existe $c_0 > 0$ tal que si $|c| > c_0$, el problema* (1)-(2) *tiene una solución débil en $L^p(\Omega)$.*

El núcleo del operador de onda, sujeto a las condición (2) es la clausura en $L^2(\Omega)$ del espacio generado por las funciones

$$\{\cos(kx)\cos(kt), \sin(kx)\sin(kt), \sin(kx)\cos(kt)\}_{k=0,1,\ldots} .$$

A este espacio lo denotamos con N. Con H denotamos el espacio de las funciones u que son 2π-periódicas tanto en x como en t y tal que las derivadas parciales $u_x, u_t \in L^2(\Omega)$. La norma en H la denotamos con $\| \cdot \|_{1,2}$. Por su parte, la norma en $L^2(\Omega)$ la denotamos con $\| \cdot \|_2$. Sea Y el espacio de funciones en H tales que

$$\int_\Omega yv = 0 \quad \text{para todo } v \in N. \tag{10}$$

Es decir, $Y = N^\perp \cap H$. Dedcimos que $u = y + v \in Y \oplus N$ es una solución débil al problema (1)-(2) si

$$\int_\Omega \left[(y_t w_t - y_x w_x) - (g(u) - f) \right] (w + z) = 0 \tag{11}$$

para todas $w + z \in Y \oplus N$. Si g es lineal, es decir, si $h \equiv 0$ y $q \in N^\perp$, es conocido o fácil demostrar que

$$\left\| (\Box + \tau)^{-1} q \right\|_{1,2} + \left\| (\Box + \tau)^{-1} q \right\|_{C^{1/2}(\Omega)} \leq \kappa \, \|q\|_2 \, , \tag{12}$$

donde $C^{1/2}(\Omega)$ es el espacio de las funciones Hölder continauas con exponente $1/2$.

Sean γ_1, γ_2 reales positivos tales que $\gamma_1 < \tau < \gamma_2$ y $\sigma(\Box) \cap [\gamma_1, \gamma_2] = \emptyset$. Se puede demostrar [4, p. 29] que

$$-c + \frac{\gamma_1}{2} s^2 \leq \int_0^s (\tau t + g(t)) \, dt \leq c + \frac{\gamma_2}{2} s^2. \tag{13}$$

De esta manera, estamos bajo las hipótesis de [5] y por lo tanto, existen sucesiones $\{u_n\}$ y $\{\rho_n\}$ de $L^2(\Omega)$ tales que

$$\Box u_n + \tau u_n + h(u_n) = f + \rho_n \tag{14}$$

con $u_n(x, t + 2\pi) = u_n(x, t) = u_n(x + 2\pi, t)$, $\rho_n(x, t + 2\pi) = \rho_n(x, t) = \rho_n(x + 2\pi, t)$ y $\|\rho_n\|_2 \to 0$.

De (1) y (14), obtenemos que

$$\Box(u_n - c\varphi) + \tau(u_n - c\varphi) + h(u_n) = \rho_n. \tag{15}$$

Haciendo $\xi_n = u_n - c\varphi$

$$\Box \xi_n + \tau \xi_n + h(u_n) = \rho_n. \tag{16}$$

Podemos escribir $\xi_n = z_n + w_n \in N \oplus Y$. Donde $N = \ker(\Box) \subset L^2([0,2\pi]^2)$, $Y = N^\perp \cap H^1$ y H^1 es el espacio de Sobolev de las funciones doble-periódicas con una derivada generalizada en cada variable. La norma en H^1 la representamos con $\|\cdot\|_{1,2}$

Notamos con P y Q las proyecciones ortogonales de $L^2([0,2\pi]^2)$ sobre $N^\perp$ y N respectivamente. Aplicamos el método de reducción de Lyapunov-Schmidt en (16) y obtenemos las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{cases} w_n = (\Box + \tau)^{-1} P(\rho_n - h(u_n)) & \text{(ecuación del rango)} \\ \tau z_n = Q(\rho_n - h(u_n)) & \text{(ecuación del núcleo).} \end{cases} \tag{17}$$

El argumento consiste en demostrar que las sucesiones w_n y z_n convergen en Y y N respectivamente. Los límites serán precisamente soluciones débiles al problema (16) y con estas soluciones, el teorema quedará demostrado.

Recordemos que z_n se puede escribir de manera única como

$$z_n(x,t) = \bar{z}_n + z_{1,n}(t+x) - z_{2,n}(t-x) \tag{18}$$

con $z_{1,n}$ y $z_{2,n}$ definidas en $[0,2\pi]$ a valor real y de promedio nulo. Con esta notación y realizando el mismo procedimiento empleado en [3, p. 651-563], se pueede demostrar que la ecuación del núcleo de (17) se satisface, si y sólamente si se satisfacen las siguientes tres ecuaciones integrales

$$\bar{z}_n = \frac{1}{4\pi^2\tau}\int_\Omega (\rho_n - h(u_n)) \tag{19}$$

$$2\pi\tau(z_{1,n}(r) + \bar{z}_n) + \int_0^{2\pi} h(u_n(x, r-x))\,dx = \int_0^{2\pi} \rho(x, r-x)\,dx \tag{20}$$

$$2\pi\tau(z_{2,n}(r) + \bar{z}_n) + \int_0^{2\pi} h(u_n(x, r+x))\,dx = \int_0^{2\pi} \rho(x, r+x)\,dx \tag{21}$$

2. Caso $p = 2$

El siguiente lema acota las sucesiones w_n y z_n en H y $L^2(\Omega)$ respectivamente. Por el Teorema de Rellich-Kondrakov [1, p. 194], para la sucesión w_n exise una subsucesión que converge puntualmente y en $L^2(\Omega)$. Sin pérdida de generalidad podremos suponer que la subsucesión es ella misma. De este modo, el siguiente lema garantiza la convergencia de las w_n en $L^2(\Omega)$.

Lema 1. *Existen $c_1 > 0$ y $M_2 > 0$ tales que si $|c| > c_1$, entonces*

$$\|w_n\|_{1,2}\,, \|z_n\|_2\,, \|\varphi\|_2 \le M_2 |c|^{\beta+1}$$

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. De (7) y usando la desigualdad de Hölder con los exponentes $-1/\beta$ y $1/(\beta+1)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|h(u_n)\|_2^2 &\le 2\int_\Omega M_1^2 + \frac{2}{(\beta+1)^2}\int_\Omega |u_n|^{2(\beta+1)} \\ &\le 8\pi^2 M_1^2 + \frac{2^{1-2\beta}}{\pi^{2\beta}(\beta+1)^2}\,\|u_n\|_2^{2(\beta+1)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Esto implica que

$$\|h(u_n)\|_2 \le 2\sqrt{2}\pi M_1 + \frac{2^{1/2-\beta}}{\pi^\beta(\beta+1)}\,\|u_n\|_2^{\beta+1}. \tag{23}$$

Sea $M_\rho > 0$ tal que $\|\rho_n\|_2 \le M_\rho$ y sean $M_h := M_\rho + 2\sqrt{2}\pi M_1$ y $C_h := \dfrac{2^{1/2-\beta}}{\pi^\beta(\beta+1)}$. Usando (17) y (23) obtenemos las siguientes acotaciones para w_n y z_n

$$\|w_n\|_{1,2} \le \kappa\left[M_h + C_h\left(\|w_n\|_2 + \|z_n\|_2 + |c|\,\|\varphi\|_2\right)^{\beta+1}\right] \tag{24}$$

$$\|z_n\|_2 \le \tau^{-1}\left[M_h + C_h\left(\|w_n\|_2 + \|z_n\|_2 + |c|\,\|\varphi\|_2\right)^{\beta+1}\right]. \tag{25}$$

Sean

$$
\begin{aligned}
c_1 := \text{máx}\Bigg\{ & \|\phi\|^{\frac{1}{\beta+1}}, e^{\frac{\ln(M_h)}{\tau(\beta+1)}}, e^{\frac{\ln(\kappa M_h)}{(\beta+1)}}, \left[\left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{\frac{-1}{\beta}} - \beta^{-1}\kappa M_h\right]^{\frac{1}{\beta+1}}, \\
& \left[\left(\tau^{-1} C_h 3^{\beta+1}\right)^{\frac{-1}{\beta}} - \beta^{-1}\tau^{-1} M_h\right]^{\frac{1}{\beta+1}}, \\
& \left[\kappa M_h + C_h 3^{\beta+1}\kappa\left(\left(\tau^{-1} C_h 3^{\beta+1}\right)^{\frac{-1}{\beta}} - \beta^{-1}\tau^{-1} M_h\right)^{\beta+1}\right]^{\frac{1}{\beta+1}} \Bigg\}
\end{aligned} \tag{26}
$$

y

$$
M_2 := \text{máx}\left\{1,\, \kappa C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|_2^{\beta+1} + 1,\, \tau^{-1} C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|_2^{\beta+1} + 1\right\}. \tag{27}
$$

Tomemos $|c| > c_1$. Supongamos en primer lugar que $|c|\,\|\phi\|$ es el $\text{máx}\{\|w_n\|_2, \|z_n\|_2, |c|\,\|\varphi\|_2\}$. Entonces (24) y (25) se transforman en

$$
\begin{aligned}
\|w_n\|_2 &\leq \|w_n\|_{1,2} \\
&\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|_2^{\beta+1}|c|^{\beta+1} \\
&\leq \left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|_2^{\beta+1} + 1\right)|c|^{\beta+1} \\
&\leq M_2|c|^{\beta+1}
\end{aligned}
$$

y en

$$
\begin{aligned}
\|z_n\|_2 &\leq \tau^{-1} M_h + \tau^{-1} C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|_2^{\beta+1}|c|^{\beta+1} \\
&\leq \left(\tau^{-1} C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|_2^{\beta+1} + 1\right)|c|^{\beta+1} \\
&\leq M_2|c|^{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

Supongamos ahora que $\|w_n\|_2 = \text{máx}\{\|w_n\|_2, \|z_n\|_2, |c|\,\|\varphi\|_2\}$. Entonces, usando la desigualdad de Young con los exponentes $-1/\beta$ y $1/(\beta+1)$, (24) y (25) se transforman en

$$
\begin{aligned}
\|w_n\|_2 &\leq \|w_n\|_{1,2} \\
&\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1}\|w_n\|_2^{\beta+1} \\
&\leq \kappa M_h - \beta\left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{-\frac{1}{\beta}} + (\beta+1)\|w_n\|_2 \\
&\leq \kappa M_h - \beta\left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{-\frac{1}{\beta}} + (\beta+1)\|w_n\|_{1,2}.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\begin{aligned}
\|z_n\|_2, \|w_n\|_2 &\leq \|w_n\|_{1,2} \\
&\leq \left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{-\frac{1}{\beta}} - \beta^{-1}\kappa M_h \\
&\leq |c|^{\beta+1} \\
&\leq M_2|c|^{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

Por último supongamos que $\|z_n\|_2 = \text{máx}\{\|w_n\|_2, \|z_n\|_2, |c|\,\|\varphi\|_2\}$. Procediendo de la misma manera que en el caso anterior tenemos que

$$
\|w_n\|_2 \leq \|z_n\|_2 \leq M_2|c|^{\beta+1}.
$$

Usando el último en la lista en la definición (26), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|w_n\|_{1,2} &\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1} \|z_n\|^{\beta+1} \\
&\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1} \left[\left(\tau^{-1} C_h 3^{\beta+1} \right)^{-1/\beta} - \beta^{-1} \tau^{-1} M_h \right]^{\beta+1} \\
&\leq M_2 |c|^{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

La desigualdad para $\|\varphi\|_2$ se verifica inmediatamente. □

Lema 2. *Existe $c_2 > 0$, tal que si $|c| > c_2$, z_n es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ arbitario pero fijo. El argumento consiste en demostrar que cada una de las suceciones $\|\bar{z}_n - \bar{z}_m\|_2$, $\|z_{1,n} - z_{1,m}\|_2$, $\|z_{2,n} - z_{2,m}\|_2$ definidas en (18) están acotadas adecuadamente por $\|z_n - z_m\|_2$. Denotamos con $\zeta_{r,x}$ a la linea caracterísica $(x, r - x)$.

Sea ϵ_0 cualquier número fijo con la condición

$$0 < \epsilon_0 < \text{mín}\left\{ 1, \frac{\epsilon^2}{1568\pi^2}, \frac{1}{32\pi^2 (C_1 + 2C_2)^2} \right\}, \tag{28}$$

donde

$$C_1 := \frac{\sqrt{6}M}{4\tau\pi^{3/2}} \tag{29}$$

$$C_2 := 2\sqrt{\pi} C_1 + \frac{\sqrt{3}M}{\tau\pi}. \tag{30}$$

Sea N_{ϵ_0} un entero positivo tal que si $n, m \geq N_{\epsilon_0}$

$$\|\rho_n - \rho_m\|_2 < \text{mín}\left\{ \tau\sqrt{\pi\epsilon_0}, \frac{\pi\tau\sqrt{\epsilon_0}}{2\sqrt{2}} \right\} \text{ y} \tag{31}$$

$$\|w_n - w_m\|_2 < \text{mín}\left\{ \frac{1}{2C_1}, \frac{\pi^{3/2}\tau}{2\sqrt{3}} M \right\} \tag{32}$$

Suponemos de ahora en adelante que $n, m \geq N_{\epsilon_0}$.

Ahora, para ϵ_0, existe $\delta := \delta(\epsilon_0) > 0$ tal que $\mu(B^c) < \epsilon_0$, donde

$$A = \{ x \in [0, 2\pi] : |\xi_m + s(\xi_n - \xi_m)|(\zeta_{r,x}) < |c|\delta/2 \} \tag{33}$$

$$B = \{ x \in [0, 2\pi] : |\varphi(\zeta_{r,x})| \geq \delta \} \tag{34}$$

Sea

$$c_2 := \text{máx}\left\{ \frac{2}{\delta}\left(\frac{\epsilon_0 M^2}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2\beta}}, \left(\frac{\delta}{M_2}\sqrt{\frac{9}{\pi}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\}, \tag{35}$$

y escojamos $|c| > c_2$ arbitrario pero fijo.

Definimos

$$\sigma = (c\varphi + \xi_m + s(\xi_n - \xi_m))(\zeta_{r,x}) \tag{36}$$

con $s \in [0, 1]$.

Para $x \in A \cap B$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
|\sigma|^{2\beta} &= |\left(c\varphi + \xi_m + s(\xi_n - \xi_m)\right)(\zeta_{r,x})|^{2\beta} \\
&\leq |c|^{2\beta} \left[|\varphi(\zeta_{r,x})| - |\left(\xi_m + s(\xi_n - \xi_m)\right)(\zeta_{r,x})| \right]^{2\beta} \\
&= |c|^{2\beta} (\delta/2)^{2\beta}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Tomemos $M_0 := \sqrt{2} M_2 |c|^{\beta+1}$. Es claro que $\|\xi_n\|_2$ y $\|\varphi\|_2$ están acotadas por M_0.

$$
\begin{aligned}
9M_0^2 &\geq \int_\Omega |\xi_m + s(\xi_n - \xi_m)|^2 \\
&\geq \int_0^{2\pi} \int_{A^c} |\xi_m + s(\xi_n - \xi_m)|^2 \\
&\geq 2\pi\mu(A^c)c^2(\delta/2)^2.
\end{aligned}
$$

De ahí que

$$
\mu(A^c) \leq \frac{18M_0^2}{\pi c^2 \delta^2}. \tag{38}
$$

De esta manera podemos acotar

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |h'(\sigma)|^2 \, dx &= \int\limits_{A\cap B} |h'(\sigma)|^2 \, dx + \int\limits_{A^c \cup B^c} |h'(\sigma)|^2 \, dx \\
&\leq 2\pi |c|^{2\beta} (\delta/2)^{2\beta} + \mu(A^c) M^2 + \mu(B^c) M^2 \\
&\leq 2\pi |c|^{2\beta} (\delta/2)^{2\beta} + \frac{18 M_0^2 M^2}{\pi c^2 \delta^2} + \epsilon_0 M^2 \\
&\leq 3\epsilon_0 M^2.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Usando lo anterior obtenemos la siguiente desigualdad

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |h(u_n) - h(u_m)| &\leq \int_\Omega |h'(\sigma)||\xi_n - \xi_m| \\
&\leq \left(\int_0^{2\pi} 3\epsilon_0 M^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\xi_n - \xi_m\|_2 \\
&\leq \sqrt{6\pi\epsilon_0} M \, \|\xi_n - \xi_m\|_2
\end{aligned} \tag{40}
$$

Usando (19) (40), (29)-(32)

$$
\begin{aligned}
|\bar{z}_n - \bar{z}_m| &\leq \frac{1}{4\pi^2\tau} \left[\int_\Omega |\rho_n - \rho_m| + \int_\Omega |h(u_n) - h(u_m)| \right] \\
&\leq \frac{1}{2\pi\tau} \|\rho_n - \rho_m\|_2 + C_1 \sqrt{\epsilon_0} \, \|\xi_n - \xi_m\|_2 \\
&\leq \sqrt{\epsilon_0} + C_1 \sqrt{\epsilon_0} \, \|z_n - z_m\|_2
\end{aligned} \tag{41}
$$

Gracias a (20) y (41)

$$
\begin{aligned}
&\|z_{1,n} - z_{1,m}\|^2_{L^2([0,2\pi])} \\
&= \int_0^{2\pi} \left| \bar{z}_m - \bar{z}_n + \frac{1}{2\pi\tau} \left[\int_0^{2\pi} (\rho_n - \rho_m + h(u_n) - h(u_m)) \, (\zeta_{rx}) \, dx \right] \right|^2 dr \\
&\leq 4\pi |\bar{z}_n - \bar{z}_m|^2 + \frac{2}{\pi\tau^2} \|\rho_n - \rho_m\|_2^2 + \frac{1}{\pi^2\tau^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |h'(\sigma)||\xi_n - \xi_m| \right]^2 \\
&\leq 4\pi |\bar{z}_n - \bar{z}_m|^2 + \frac{2}{\pi\tau^2} \|\rho_n - \rho_m\|_2^2 + \frac{3\epsilon_0 M^2}{\pi^2\tau^2} \|\xi_n - \xi_m\|_2^2
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\begin{aligned}
&\|z_{1,n} - z_{1,m}\|_{L^2([0,2\pi])} \\
&\quad \leq 2\sqrt{\pi} |z_n - z_m| + \frac{2}{\sqrt{\pi}\tau} \|\rho_n - \rho_m\|_2 + \frac{\sqrt{3\epsilon_0} M}{\pi\tau} \|\xi_n - \xi_m\|_2 \\
&\quad \leq 3\sqrt{\pi}\sqrt{\epsilon_0} + C_2 \sqrt{\epsilon_0} \, \|z_n - z_m\|_2 \, .
\end{aligned} \tag{42}
$$

Del mismo modo, reptiendo todo el procedimiento sobre características $(x, r+x)$, tenemos que

$$\|z_{2,n} - z_{2,m}\|_{L^2([0,2\pi])} \leq 3\sqrt{\pi}\sqrt{\epsilon_0} + C_2\sqrt{\epsilon_0}\,\|z_n - z_m\|_2 \,. \tag{43}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\|z_n - z_m\|_2 \\
&\quad \leq 2\sqrt{2}\Big[\pi|z_n - z_m|^2 + \sqrt{\pi}\,\|z_{1,n} - z_{1,m}\|^2_{L^2([0,2\pi])} \\
&\qquad\qquad + \sqrt{\pi}\,\|z_{2,n} - z_{2,m}\|^2_{L^2([0,2\pi])}\Big] \\
&\quad \leq 14\sqrt{2}\pi\sqrt{\epsilon_0} + 2\sqrt{2}\pi(C_1 + 2C_2)\,\|z_n - z_m\|_2 \\
&\quad \leq 14\sqrt{2}\pi\sqrt{\epsilon_0} + \frac{1}{2}\,\|z_n - z_m\|_2 \,.
\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\|z_n - z_m\|_2 \leq 28\sqrt{2}\pi\sqrt{\epsilon_0} < \epsilon.$$

En otras palabras z_n es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$. □

Basta tomar $|c| >$ máx $\{c_1, c_1\}$ y el Teorema 1 queda demostrado.

3. Caso $p > 2$

Supongamos que $f = cq \in L^p(\Omega)$. Queremos ver que existe una solución débil al problema (1) en $L^p(\Omega)$. Es claro que $q \in L^2(\Omega)$. Usando el resultado de [3, p. 652], podemos representar, para $q \in L^2(\Omega)$, la proyección ortogonal $Q : L^2(\Omega) \to N$ mediante la fórmula

$$Qq(x,t) = \bar{q} + \frac{1}{2\pi\tau}\left[\int_0^{2\pi}(q(t-s, x+s) - q(x+s, t-x)\,ds\right] \tag{44}$$

Mediante un cálculo directo, se puede demostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|Qq\|_p \leq C(1 + \|q\|_p). \tag{45}$$

De este modo, la descomposición $N \oplus N^\perp$ tiene sentido en $L^p(\Omega)$. De ahí que $p, Qp, Pp \in L^p(\Omega)$. Sea $\varphi = Q\varphi + P\varphi \in N \oplus Y$. Entonces, $P\varphi \in L^p(\Omega)$ y como $\tau Q\varphi = Qq \in L^p([0,2\pi]^2)$, entonces $\varphi \in L^p(\Omega)$.

Sea ahora u la solución de la ecuación $\Box u + \tau u + h(u + c\varphi)$ en $L^2(\Omega)$ (para c suficientemente grande). Sea $u = Qu + Pu = z + w \in N \oplus Y$. Es claro que $w \in H^1$, por tanto estará en $L^p(\Omega)$. Para garantizar entonces que $u \in L^p(\Omega)$ sólo nos hace falta ver que $z \in L^p(\Omega)$.

Recordemos que $z = \bar{z} + z_1(t+x) - z_2(t-x)$. Por ser constante, $\bar{z}$ está en $L^p(\Omega)$. Por su parte, podemos escribir

$$z_1(r) = -\bar{z} - \frac{1}{2\pi\tau}\int_0^{2\pi} g((u + c\varphi)(x, r-x))\,dx. \tag{46}$$

Tomemos

$$\epsilon = \epsilon_0 = \frac{\pi^{\frac{p-1}{p}}\tau}{2^{\frac{5p+2}{p}}}$$

en la ecuación (6). Sea $M_\epsilon > 0$ la constante correspondiente para ϵ_0. Definamos $C_p := \left(2^{p+2} + 2^{4p+3}\right)\pi^2|\bar{z}|^p + 2^{4p+3}\pi^{3-p}\tau^{-p}M_\epsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |z_1(t-x)|^p \, dx \, dt \\
&\qquad = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |z_1(r)|^p \, dr \, dt \\
&\qquad \leq 2^{p+2}\pi^2|\bar{z}|^p + \frac{2^p}{\pi^{p-1}\tau^p}\left[2^{p+2}\pi^2 M_{\epsilon_0} + 2^p\epsilon_0^p\int_\Omega |w+z+c\varphi|^p\right] \\
&\qquad \leq 2^{p+2}\pi^2|\bar{z}|^p + \frac{2^{p+2}M_{\epsilon_0}}{\pi^{p-3}\tau^p} + \\
&\qquad\qquad \frac{2^{3p}\epsilon_0^p}{\pi^{p-1}\tau^{p-1}}\int_\Omega |z_1|^p + \frac{2^{3p+1}\epsilon_0^p}{\pi^{p-1}\tau^p}\left(\|w\|_p^p + |c|^p\,\|\varphi\|_p^p\right)
\end{aligned}$$

Un calculo directo muestra que

$$\int_\Omega |z|^p \leq C_p + \frac{1}{2}\int_\Omega |z|^p + \|w\|_p^p + |c|^p\,\|\varphi\|_p^p$$

Por lo tanto, tenemos que $\|z\|_p$ es finita y $u \in L^p(\Omega)$.

Referencias

[1] H. Brezis. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.

[2] J. F. Caicedo, A. Castro, and R. Duque. Existence of Solutions for a wave equation with non-monotone nonlinearity. *Milan J. Math*, 79(1):207–222, 2011.

[3] A. Castro and B. Preskill. Existence of Solutions for a Wave Equation with Non-monotone Nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 28(2):549–658, 2010.

[4] R. Duque. *Ecuaciones de onda semilineales con parte no lineal no monótona*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[5] H. Hofer. On the range of a wave operator with nonmonotone nonlinearity. *Math. Nachr.*, (106):327–340, 1982.