



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Membranas Vibrantes

Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2014

Membranas Vibrantes

Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

Tesis como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias-Matemáticas

Director:

Dr. José Francisco Caicedo Contreras

Codirector:

Dr. Alfonso Castro

Línea de Investigación:

Análisis Funcional No-lineal

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2014

A Sebastián y Carlos

Agradecimientos

Quiero agradecer a los profesores Francisco Caicedo y Alfonso Castro por el apoyo incondicional que he recibido de su parte a lo largo de mi carrera. En las condiciones más difíciles de duelo, enfermedad y calamidad por las que he atravesado estos últimos años, han sido para mí como dos robles de los que me he sostenido para poder seguir en pie.

Quiero agradecer también al grupo Mescud de la Universidad Distrital por avalar estos estudios y a la Universidad Distrital misma por financiarlos. Asimismo, quiero agradecer al Harvey Mudd College por acogerme en el tiempo que duró mi pasantía.

Resumen

En el presente trabajo demostramos bifurcación en el infinito para la ecuación de onda $\square u + \lambda u + h(u) = 0$ cuando $-\lambda$ se encuentra cercano a los valores propios de multiplicidad impar del operador de onda \square . Encontramos soluciones débiles en L^∞ al problema Dirichlet-periódico. Separamos las ecuaciones en el núcleo y en el rango de \square usando el método de Lyapunov-Schmidt. En el núcleo usamos el Principio de Contracciones y en el rango Teoría de Grado de Leray-Schauder. No asumimos monotonía en la parte no lineal.

Palabras clave: Ecuación de onda semilineal, solución débil, bifurcación en el infinito, principio de contracciones, grado de Leray-Schauder, método de Lyapunov-Schmidt.

Abstract

In this work we prove bifurcation at infinity for the semilinear wave equation $\square u + \lambda u + h(u) = 0$ when $-\lambda$ is close to odd multiplicity eigenvalues of the wave operator \square . We find weak solutions in L^∞ to the Dirichlet-periodic problem. We separate the equations in the kernel and in the range of \square using Lyapunov-Schmidt reduction method. In the kernel we use The Contraction Principle and in the range we use Leray-Schauder degree theory. We do not assume monotonicity of the nonlinear part.

Keywords: Semilinear wave equation, weak solution, bifurcation at infinity, contraction principle, Leray-Schauder degree, Lyapunov-Schmidt method.

Contenido

Agradecimientos	vii
Resumen	ix
Lista de símbolos	xiii
1. Introducción	1
2. Planteamiento del Problema	7
3. Fundamentos Teóricos de Análisis Funcional	9
3.1. El Problema Lineal Homogéneo	9
3.2. El Problema Lineal No-homogéneo	18
3.3. El Problema de Valores Propios	25
3.4. El Operador $(\square + \lambda I)^{-1}$	28
3.5. El Conjunto $\sigma(\square)$	31
3.6. El Problema No-lineal	33
3.6.1. Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt	34
3.6.2. Ecuación Integral del Núcleo	35
4. Bifurcación en Infinito para una Ecuación de Onda Semilineal	37
4.1. Valores Propios de Multiplicidad Simple	37
4.1.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones	38
4.1.2. Soluciones a la Ecuación del Núcleo	39
4.1.3. Soluciones en el Rango	41
4.2. Valores Propios de Multiplicidad Impar	43
4.2.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones y Lemmas Previos	43
4.2.2. Soluciones en el Núcleo	46
4.2.3. Soluciones en el Rango	48
4.3. Continuos de Soluciones	51
4.4. Valores Propios de Multiplicidad Finita (Par o Impar).	56
4.4.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones	57
4.4.2. Soluciones en el Núcleo	59
4.4.3. Soluciones en el Rango	60

4.5. El Valor Propio Cero	62
4.5.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones	63
4.5.2. Soluciones en el Núcleo	63
4.5.3. Soluciones en el Rango	65
5. Perspectivas	67
5.1. El Problema doble-periódico	67
5.2. Continuos de soluciones	67
5.3. Regularidad	68
5.4. Problemas sin compacidad	68
6. Conclusiones	69
Bibliografía	70

Lista de símbolos

Notación

$C_0(X)$	Espacio de funciones continuas que se anulan en infinito definidas en X
$C_0^\infty(X)$	Espacio de funciones derivables infinitas veces continua para todo k y que se anulan en infinito.
$C_0^k(X)$	Espacio de funciones derivables k -veces con derivada de orden k continua que sen anulan en infinito.
$C^{1/2}$	Espacio de Hölder de las funciones $1/2$ -continuas.
$C_c(X)$	Espacio de funciones continuas de soporte compacto definidas en X
$C_c^k(X)$	Espacio de funciones derivables k -veces con derivada de orden k continua y de soporte compacto.
$C_c^\infty(X)$	Espacio de funciones derivables infinitas continua para todo k y de soporte compacto.
$C^\infty(X)$	Espacio de funciones derivables infinitas veces derivada de orden k continua para todo k .
$C^k(X)$	Espacio de funciones derivables k -veces con derivada de orden k continua.
C_∂^k	Espacio de funciones en $C^k((0, \pi) \times (0, 2\pi))$ que se anulan en la frontera de $(0, \pi)$.
C_\times^k	Espacio de funciones en $C^k(\mathbb{T})$ de promedio nulo.
H	Espacio de las funciones $u \in L^2$ tales que $u_t, u_x \in L^2$.
$\ker(Q)$	Núcleo del operador Q
$L^2(X)$	Espacio de las funciones de cuadrado integrable en X en el sentido de Lebesgue.
$L^\infty(X)$	Espacio de las funciones esencialmente acotadas.
L_\times^2	Espacio de funciones en $L^2([0, 2\pi])$ de promedio nulo.
$\ \cdot\ _{1/2}$	Norma en el espacio $C^{1/2}$.
$\ \cdot\ $	Norma en L^2
$\ \cdot\ _\infty$	Norma en el espacio de las funciones esencialmente acotadas
$ \cdot _\infty$	Norma en el espacio de las funciones continuas
$\ \cdot\ $	Norma en el espacio H definida como $\ u_t\ + \ u_x\ $.
N	Adherencia del núcleo de \square en L^2

Notación

\mathcal{N}_k	Núcleo de \square en C^k
μ	Medida de Lebesgue
P_N	Proyección sobre N .
P_\perp	Proyección sobre el complemento ortogonal de N en L^2 .
$\text{rng}(Q)$	Rango del operador Q .
\square	Operador de onda $\square u = u_{tt} - u_{xx}$
\mathbb{T}	Toro unidimensional
\hat{p}	Transformada de Fourier de la función p .
$\sigma(\square)$	Espectro del operador \square .

1 Introducción

El problema de la cuerda vibrante se remonta al Siglo XVIII. Juan Bernoulli (1727) planteó el problema como una ecuación en diferencias. Más tarde Daniel Bernoulli con el paso al límite propuso la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1-1)$$

donde u es una función de x y de t . D'Alembert y Euler en 1747 obtuvieron soluciones de la forma

$$u(x, t) = f(x + t) + g(x - t), \quad (1-2)$$

en donde f y g son funciones arbitrarias. Este problema ha sido muy importante en la historia de las matemáticas puesto que las soluciones de Daniel Bernoulli estaban dadas en series trigonométricas y para ese entonces dichas soluciones no eran reconciliables con las soluciones de Euler y D'Alembert.

Varios años más tarde con los trabajos de de Lagrange (1759) y Fourier (1807) se lograron conciliar las dos representaciones de las soluciones [3, p. 531-533].

Con el desarrollo de la topología y el análisis funcional se fortalece el análisis funcional no-lineal. Es posible con estas nuevas herramientas estudiar problemas más complejos.

Nuestra línea de estudio está enmarcada en la búsqueda de soluciones a ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + g(\lambda, x, t, u, u_t, u_x) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \end{cases} \quad (1-3)$$

donde la función g es conocida como la no-linealidad y λ es un parámetro (o un vector de parámetros) de la ecuación (1-3). Las dos últimas ecuaciones en (1-3) se conocen como *condiciones Dirichlet-periódicas*. Es posible reemplazar la condición $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ por $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$ y muchos resultados sobre la existencia de soluciones se mantienen igualmente (ver [19] y [15] por ejemplo). En ese caso se dice que u tiene condiciones doble-periódicas. Usualmente se denota $\square u = u_{tt} - u_{xx}$ y al operador \square se le llama *operador de onda*, operador de D'Alembert o D'Alembertiano.

Breve Revisión al Problema General

En esta sección haremos un breve recorrido por los avances realizados en la búsqueda de soluciones a la ecuación (1-3) desde 1967 hasta el momento. La presentación de las contribuciones no están en estricto orden cronológico. En lo que sigue se asumirá que u satisface las condiciones Dirichlet-periodicas.

Nolinealidad Pequeña

Una de las primeras contribuciones importantes al problema (1-3) se remonta a Rabinowitz en 1967 en donde se considera el problema

$$\square u + \alpha u_t + \epsilon f(x, t, u, u_t, u_x) = 0 \quad (1-4)$$

con $f \in C^{k+1}$ en cada componente [40]. Para $|\epsilon|$ pequeño encuentra una única solución en el espacio de Sobolev $W^{k,2}$ [5, p. 271]. Las soluciones dependen continuamente del parámetro ϵ . Los métodos empleados son métodos variacionales [48], Lema de Lax-Milgram [5, p. 140] y teoremas de inmersión [5, p. 278-287].

Un año después, Lovicarová estudia el siguiente problema similar

$$\square u = \epsilon f(x, t, u, u_t, u_x) \quad (1-5)$$

donde $f \in C^{k+1}$ es 2π -periódica en t [37]. Ella encuentra soluciones $u \in C^k$ que dependen continuamente del parámetro ϵ (pequeño). Para encontrar soluciones emplea una fórmula explícita para \square^{-1} y el Principio de Contracciones de Banach [12, p. 276].

Nolinealidad Monótona

Se dice que una función g es *superlineal* si $g(x) = o(|x|)$ en $x = 0$ y si existen constantes \bar{x} y $\theta \in [0, \frac{1}{2})$ tales que

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds \leq \theta x f(x), \quad \text{para } |x| \geq \bar{x}. \quad (1-6)$$

Para el problema

$$\square u + g(u) = 0 \quad (1-7)$$

en el caso en que g es estrictamente creciente, de clase C^1 y superlineal en 0 y en ∞ se conocen soluciones clásicas no triviales gracias a Rabinowitz en 1978 [41]. Un par de años más tarde, este resultado fue extendido por Brezis, Coron y Nirenberg [7, 6] al caso en que g es no-decreciente y

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = 0. \quad (1-8)$$

En este caso encontraron soluciones débiles en L^∞ . En ambos casos se utilizó el Teorema del Paso de Montaña [30, 36]. A las soluciones de la ecuación (1-7) se le suelen llamar *vibraciones libres*.

Similar al problema anterior, Brezis y Nirenberg en 1978 [9] encontraron soluciones débiles al siguiente problema de *vibraciones forzadas* usando los métodos variacionales expuestos en [8].

$$\square u \pm f(t, x, u) = 0 \tag{1-9}$$

Nuevamente en este caso se asume que f es no-decreciente en u . Cuando se tiene ecuaciones de la forma $\square u + g(u) = f(x, t)$ a la función f se le llama *forzamiento*.

Nolinealidad No-monótona

Los precursores del estudio en el que la función g (como función de u) es no-monótona son Hofer y Willem en 1980 [27, 50]. En este caso tenemos problemas de la forma

$$\square u + g(u) = f(x, t) \tag{1-10}$$

En [27], que es el resultado más general, se demuestra que si la no linealidad g de (1-10) es globalmente Lipschitz, $\sigma(\square) \cap [\alpha, \beta] = \emptyset$ para algunos $\alpha \leq \beta \in \mathbb{R}$ y

$$-c + \frac{\alpha s^2}{2} \leq \int_0^s g(\tau) d\tau \leq c + \frac{\beta s^2}{2}$$

para alguna constante c , entonces el rango del operador \square es denso en L^2 . Aquí $\sigma(\square)$ denota el *espectro* del operador de Onda que será estudiado más adelante.

Un problema ligeramente distinto a los anteriores fue estudiado por Bates y Castro en 1980 [2]. Los autores consideraron un sistema variacional de n ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} \square u + \nabla G(u) = f(x, t) & (x, t) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(\partial\Omega) = 0. \end{cases} \tag{1-11}$$

En este trabajo se asumen ciertas estimaciones sobre las derivadas parciales mixtas de G y que dichas estimaciones no tengan intersección con el espectro. Bajo estas hipótesis encuentran una única solución débil usando métodos de reducción vía mimimax [1, 18, 23, 25, 32, 36, 43].

Coron en 1983 encuentra soluciones al problema (1-7) en el caso en que g es no-monótona. Más específicamente, si

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{g(u)}{u} = 0,$$

con $|g(u)| \leq \alpha|u|^p + \beta$ ($p > 1$) y satisfaciendo (1-6), se encuentran múltiples soluciones [21]. En este artículo Coron asume simetrías en la no-linealidad (g impar por ejemplo) y aplica argumentos del tipo minimax.

Para el caso de vibraciones forzadas, y sin asumir simetrías ni monotonía en la no-linealidad, Castro y Unsurangsie en 1988 encuentran soluciones débiles al problema

$$\square u + \lambda u = cq(x, t) + r(x, t) + h(u) \quad (1-12)$$

con $|c|$ grande, $\lambda \notin \sigma(\square)$ y $\lim_{|u| \rightarrow \infty} h'(u) = 0$ (es decir $\lambda u + h(u)$ es una no-linealidad *asintóticamente lineal*). En este trabajo se introduce el concepto de función no-plana sobre características [20].

Recientemente Caicedo, Castro, Duque y Sanjuán encontraron soluciones en el caso en el que el forzamiento f de (1-3) está en L^p [16]. Este resultado es una generalización del resultado obtenido por Castro y Preskill en el 2010 [19] en donde se encuentran soluciones débiles asumiendo $f \in L^\infty$. En estos dos artículos se usa una versión del método de Lyapunov-Schmith [36], el Principio de Contracciones y elementos de Teoría de Grado de Leray-Schauder [22, 32, 36].

Otros Problemas Relacionados

En todos los casos anteriores se asume que u es periódica en t con periodo 2π . Cuando se asume que el periodo es un múltiplo racional de π la situación es prácticamente la misma y los resultados se mantienen. No obstante, si el periodo es un múltiplo irracional de π el espectro del operador de onda puede tener puntos de acumulación distintos del cero, además de tener infinitos valores propios de multiplicidad infinita. La compacidad del operador \square^{-1} se pierde [13].

McKenna en 1985 fue el primero en encontrar soluciones débiles al problema (1-10) para el caso en donde aparece un múltiplo irracional de π . Específicamente de periodo $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ [39]. En este trabajo se hace la siguiente hipótesis sobre la no-linealidad

$$|g(x) - g(y)| \leq |x - y|. \quad (1-13)$$

Relacionado con el problema anterior, Castro y Caicedo en 1997 encontraron soluciones débiles en el caso en que la derivada de la no-linealidad atraviesa múltiples valores propios de multiplicidad infinita. En este caso se encontraron soluciones usando de nuevo la idea de función no-plana sobre características y aproximaciones e interpolaciones en espacios de Sobolev [13].

Un fenómeno interesante en relación a la ecuación de onda es que no se puede encontrar solución continua alguna al problema

$$\square u + g(u) = f(x, t) \tag{1-14}$$

para algunos formzamientos f suaves [14] .

Bifurcación de la Ecuación de Onda

En [42] se estudia el siguiente problema

$$\square u = \lambda F(x, t, u) \tag{1-15}$$

con condiciones Dirichlet-periódicas. Suponiendo que F es de buena clase y monótona. En este trabajo, Rabinowitz encuentra un par de continuos de soluciones con 0 como punto de bifurcación.

Posteriormente, Berti y Biasco en el 2006 [4] encuentran soluciones al problema de bifurcación imperfecta

$$\square u = \epsilon(\beta u^{2k} + h(t, x)) \tag{1-16}$$

con $h \in \ker(\square)^\perp$. Estos resultados fueron extendidos por Caicedo, Castro y Duque en el 2011 [15].

2 Planteamiento del Problema

En el presente trabajo estamos interesados en encontrar soluciones débiles en L^∞ al problema

$$\begin{cases} \square u + \lambda u + h(u) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \end{cases} \quad (2-1)$$

Suponemos, entre otras cosas, que h es asintóticamente lineal, $h \in C^1(\mathbb{R})$ y que h es acotada en \mathbb{R} . Suponemos también que $-\lambda \notin \sigma(\square)$. A grandes rasgos, el resultado que se sustentará en esta tesis consiste en que si $-\lambda$ está muy cerca a valores propios de multiplicidad finita, el problema tiene al menos una solución débil no-trivial. También mostraremos que si $-\lambda$ se acerca valores propios de multiplicidad finita del espectro del operador de onda, las soluciones débiles van a tender, en norma, a ∞ . En otras palabras, las soluciones se bifurcan en infinito.

Para demostrar la bifurcación usaremos el Principio de Contracciones de Banach con Parámetros [10] para encontrar soluciones en el núcleo y Teoría de Grado [22, p. 60] y el Lema de Nazarov-Turán [26, 49] para encontrar soluciones en el rango. También daremos las condiciones para encontrar un continuo de soluciones cuando las soluciones no-triviales se bifurcan desde $-\lambda_0 \in \sigma(\square)$ de multiplicidad impar.

3 Fundamentos Teóricos de Análisis Funcional

Para estudiar el problema no-lineal (2-1) es necesario revisar primero las propiedades del operador diferencial lineal (*operador de onda*) $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$. Es decir, saber en qué espacios puede estar definido, si es posible hablar de \square^{-1} y revisar la continuidad y la compacidad de estos operadores. Por ejemplo, como veremos más adelante, en determinados espacios el operador \square no está acotado, mientras que \square^{-1} es incluso compacto.

Es necesario también resolver el problema de valores propios $\square u = \nu u$. Éste también es un problema lineal y nos permitirá encontrar una base de Hilbert para los espacios que son de nuestro interés. Como nuestro objetivo es estudiar la ecuación (2-1) para valores de $-\lambda$ cercanos a los valores propios de multiplicidad impar, es pertinente hacer algunas anotaciones sobre el conjunto $\sigma(\square)$.

Estudiaremos también las propiedades del operador $(\square + \lambda I)^{-1}$ que va a ser de gran importancia en el resto del trabajo. Este operador hereda muchas de las propiedades de \square^{-1} .

Por último daremos una definición de solución débil al problema no-lineal, una representación como ecuación integral a la ecuación del núcleo y sus equivalencias con las ecuaciones que resultan del método de reducción de Lyapunov-Schmidt.

3.1. El Problema Lineal Homogéneo

Fijemos primero algo de notación. Denotemos con \mathbb{T} al espacio cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Es bien sabido que \mathbb{T} es una variedad compacta de clase C^∞ modelada sobre \mathbb{R} [28, p. 9]. Decir que una función p a valor real está definida en \mathbb{T} es equivalente a decir que p está definida en \mathbb{R} y es 2π -periódica [46, p. 88]. Para nuestros propósitos, la variedad \mathbb{T} es usada para simplificar algo de notación y para efectos prácticos se puede ver como los intervalos $[0, 2\pi]$ o $(0, 2\pi)$ dependiendo del caso. Sea ahora el cilindro $\mathcal{C} = (0, \pi) \times \mathbb{T}$ y sea $k \geq 0$ un entero. Definimos los siguientes espacios.

- (1) $C_c(\mathcal{C})$ como el conjunto de todas las $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que u es continua y $\text{supp } u$

es compacto. Aquí $\text{supp } u$ representa el soporte de u [46, p. 38]. $C_c(\mathcal{C})$ es un espacio vectorial normado con la norma

$$|u|_\infty = \sup_{(x,t) \in \mathcal{C}} |u(x,t)|. \quad (3-1)$$

No obstante, $C_c(\mathcal{C})$ no es, necesariamente, un espacio de Banach a menos que se reemplace el dominio por un conjunto compacto K , en ese caso $C_c(K) = C(K)$ y el sup en (3-1) se puede reemplazar por máx (ver [46, p. 70] y [35, p. 36]). Por ejemplo, el espacio $C(\overline{\mathcal{C}})$ es un espacio de Banach con la norma (3-1), donde $\overline{\mathcal{C}} = [0, \pi] \times \mathbb{T}$.

- (2) $C_0(\mathcal{C})$ como el completado con la norma (3-1) de $C_c(\mathcal{C})$. Es claro también que $C_0(\overline{\mathcal{C}}) = C(\overline{\mathcal{C}})$. A $C_0(\mathcal{C})$ se le suele llamar el espacio de las funciones que se anulan en infinito.
- (3) Con $C^k(\mathcal{C})$ denotamos al espacio de las funciones u tales que son k veces diferenciables y todas sus derivadas hasta de orden k son continuas y acotadas en \mathcal{C} . En C^k definimos la norma

$$|u|_k = \max_{m+n \leq k} \sup_{(x,t) \in \mathcal{C}} |\partial_{m,n}^{m+n} u(x,t)|. \quad (3-2)$$

$C^k(\mathcal{C})$ definido con esta norma es un espacio de Banach.

- (4) $C_c^k(\mathcal{C}) := C^k(\mathcal{C}) \cap C_c(\mathcal{C})$, $C_0^k(\mathcal{C}) := C^k(\mathcal{C}) \cap C_0(\mathcal{C})$, $C^\infty(\mathcal{C}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathcal{C})$. De manera similar se dan definiciones para $C_c^\infty(\mathcal{C})$ y $C_0^\infty(\mathcal{C})$. Los espacios vectoriales C^∞ no son espacios vectoriales normados [29, p. 133]. Estudiar la topología de los espacios C^∞ no es de interés para este trabajo.
- (5) $C^k(\overline{\mathcal{C}})$ es el espacio de todas las funciones $u \in C^k(\mathcal{C})$, tales que para todo $m+n \leq k$ con $m, n \geq 0$ la función $(x,t) \rightarrow \partial_{m,n}^{m+n} u(x,t)$ admite una extensión continua a $\overline{\mathcal{C}}$. Es claro que $C^k(\overline{\mathcal{C}})$ es un espacio de Banach con la norma (3-2) y que se puede cambiar el sup por máx. Además son válidas las siguientes igualdades $C^k(\overline{\mathcal{C}}) = C_c^k(\overline{\mathcal{C}}) = C_0^k(\overline{\mathcal{C}})$. De manera similar podemos definir el espacio vectorial $C^\infty(\overline{\mathcal{C}}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\overline{\mathcal{C}})$.

- (6) El espacio $C^k(\mathbb{T})$ es el espacio de todas las funciones $p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que p tiene k derivadas continuas en \mathbb{T} . Definimos la norma

$$|p|_k := \max_{j \leq k} \max_{t \in [0, 2\pi]} |p^{(j)}(t)|. \quad (3-3)$$

Con esta norma así definida, $C^k(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach. De ser necesario consideramos el espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{T}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{T})$.

- (7) Definimos el espacio $C_\times^k := \left\{ p \in C^k(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} p = 0 \right\}$. Es claro que C_\times^k es un espacio de Banach con la norma (3-3). Más adelante veremos por qué es necesario la condición $\int_0^{2\pi} p = 0$.

- (8) Por último, $C_{\partial}^k := \{u \in C^k(\overline{\mathcal{C}}) : u(0, t) = u(\pi, t) = 0\}$. Este también es un espacio de Banach con la norma (3-2). Es fácil ver que C_{∂}^k es el mismo espacio $C_0^k(\mathcal{C})$ extendiendo las funciones de manera natural a $\overline{\mathcal{C}}$.

Estamos listos formular la siguiente proposición.

Proposición 3.1 (Soluciones Clásicas al Problema Lineal Homogéneo). *Sea $k \geq 0$ entero. Las siguientes afirmaciones son válidas.*

- (1) La aplicación $\mathcal{Z} : C_{\times}^k \rightarrow C_{\partial}^k$ definida por $(\mathcal{Z}p)(x, t) := p(t + x) - p(t - x)$ es una transformación lineal, continua e inyectiva.
- (2) El operador $\square : C_{\partial}^{k+2} \rightarrow C^k(\overline{\mathcal{C}})$ es lineal continuo.
- (3) El núcleo $\mathcal{N}_{k+2} := \ker(\square) = \text{rng}(\mathcal{Z}) = \square^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado no trivial. De hecho, $\mathcal{N}_{k+2} = \mathcal{Z}(C_{\times}^{k+2})$. De manera más precisa, para cada $v \in \mathcal{N}_{k+2}$ existe una única $p \in C_{\times}^{k+2}$ tal que $v = \mathcal{Z}p$. En particular, el problema

$$\begin{cases} \square u = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, t) = u(x, t + 2\pi) \end{cases} \quad (3-4)$$

tiene soluciones clásicas no triviales. Es decir, soluciones $u \neq 0$ con $u \in C_{\partial}^{k+2}$.

Demostración. (1) Un cálculo directo, como en [37, p. 326], muestra que $\mathcal{Z} : C_{\times}^k \rightarrow C_{\partial}^k$ es lineal continuo y que

$$|\mathcal{Z}p|_k \leq 2|p|_k. \quad (3-5)$$

Para ver que \mathcal{Z} es inyectivo supongamos que $\mathcal{Z}p = 0$. Esto implica que $p(2t) = p(0)$ para todo $t \in \mathbb{T}$, o, lo que es lo mismo, $p(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{T}$, pero

$$2\pi p(0) = \int_0^{2\pi} p = 0. \quad (3-6)$$

Esto implica que $p = 0$. Por lo tanto, $\mathcal{Z} : C_{\times}^k \rightarrow C_{\partial}^k$ es lineal, continua e inyectiva.

- (2) Un cálculo directo muestra que $\square : C_{\partial}^{k+2} \rightarrow C^k(\overline{\mathcal{C}})$ es lineal continuo. De hecho

$$|\square u|_k \leq 2|u|_{k+2}. \quad (3-7)$$

- (3) Usando lo demostrado hasta el momento y técnicas que se remontan al Siglo XVIII y que están consignadas en textos modernos de ecuaciones diferenciales como [24, p. 68], [31, p. 38] o [47, p. 32], se puede demostrar que

$$\mathcal{N}_{k+2} = \{v \in C_{\partial}^{k+2} : v = \mathcal{Z}p \text{ para una única } p \in C_{\times}^{k+2}\}. \quad (3-8)$$

Las funciones que pertenecen al espacio \mathcal{N}_{k+2} son precisamente las soluciones clásicas al problema (3-4). Basta tomar $p \in C_{\times}^{k+2}$ con $p \neq 0$ para obtener soluciones clásicas no triviales $\mathcal{Z}p$. ■

Como se evidencia en la demostración de la proposición 3.1, al pedir que $\int_0^{2\pi} p = 0$ en la definición de C_{\times}^{k+2} se obtiene una única p para cada v en el núcleo \mathcal{N}_{k+2} . Este proceso es lo que se conoce como *normalización del núcleo* (ver [40, p. 150] para más detalles).

Definimos también la transformación $\mathcal{Q} : C_{\partial}^k \rightarrow C_{\times}^k$ mediante la fórmula

$$(\mathcal{Q}v)(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (v(s, r-s) - v(s, r+s)) ds. \quad (3-9)$$

Para \mathcal{Q} tenemos el siguiente resultado [37, p. 326].

Proposición 3.2. *Sea $k \geq 0$ un entero. Las siguientes afirmaciones son válidas.*

(1) $\mathcal{Q} : C_{\partial}^k \rightarrow C_{\times}^k$ es un operador lineal continuo y

$$|\mathcal{Q}u|_k \leq |u|_k. \quad (3-10)$$

(2) $\mathcal{Q}\mathcal{Z} = I$, donde $I : C_{\times}^k \rightarrow C_{\times}^k$ es la identidad.

(3) $P_N := \mathcal{Z}\mathcal{Q} : C_{\partial}^k \rightarrow \text{rng}(\mathcal{Z})$ es una proyección continua y

$$|P_N u|_k \leq 2|u|_k. \quad (3-11)$$

(4) El operador $P_{\perp} := I - P_N : C_{\partial}^k \rightarrow \ker(\mathcal{Q})$ es una proyección continua ($I : C_{\partial}^k \rightarrow C_{\partial}^k$ es la función identidad). Además

$$|P_{\perp} u|_k \leq 3|u|_k. \quad (3-12)$$

(5) $\mathcal{N}_k = \text{rng}(\mathcal{Z})$ es un subespacio cerrado de C_{∂}^k que admite un complemento ortogonal \mathcal{N}_k^{\perp} (cerrado también). Además $\mathcal{N}_k^{\perp} = \ker(\mathcal{Q})$ y $C_{\partial}^k = \mathcal{N}_k \oplus \mathcal{N}_k^{\perp}$.

Demostración. Para la demostración vamos a seguir las ideas de [37, p. 326-327].

(1) Demostrar que \mathcal{Q} es lineal es un cálculo inmediato. Queremos ver que si $v \in C_{\partial}^k$, entonces $\mathcal{Q}v \in C_{\times}^k$. Es evidente que $\mathcal{Q}v$ está definida en \mathbb{T} . Es necesario verificar además que su promedio es cero. Es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathcal{Q}v &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (v(s, r-s) - v(s, r+s)) ds dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\int_{-s}^{2\pi-s} v(r, s) dr - \int_s^{2\pi+s} v(r, s) dr \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} v(r, s) dr - \int_0^{2\pi} v(r, s) dr \right] ds \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3-13)$$

Para demostrar (3-10), que garantiza la continuidad de $C_{\partial}^k \rightarrow C_{\times}^k$, basta usar el Teorema de Diferenciación Bajo el Signo de Integral de Leibnitz [45, p. 236] para garantizar la relación conmutativa $\partial^j \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \partial^j$ con $j = 0, \dots, k$. El resto es desigualdad triangular y propiedades del sup.

(2) Sea $p \in C_{\times}^k$.

$$\begin{aligned} \mathcal{QZ}p(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (p(r) - p(r-2s) - p(r+2s) + p(r)) ds \\ &= p(r) - \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} p(r-2s) ds + \int_0^{\pi} p(r+2s) ds \right] \\ &= p(r) - \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} p(s) ds + \int_0^{2\pi} p(s) ds \right] \\ &= p(r). \end{aligned} \tag{3-14}$$

(3) Para demostrar que $P_N = \mathcal{Z}\mathcal{Q}$ es una proyección, veamos que $P_N^2 = \mathcal{Z}(\mathcal{QZ})\mathcal{Q} = \mathcal{Z}\mathcal{Q} = P_N$. Veamos que $\text{rng}(P_N) = \text{rng}(\mathcal{Z})$. Es claro que $\text{rng}(P_N) \subseteq \text{rng}(\mathcal{Z})$. Tomemos ahora $v \in \text{rng}(\mathcal{Z})$. Sabemos que existe un único $p \in C_{\times}^k$ tal que $\mathcal{Z}p = v$. Ahora bien, $P_N v = \mathcal{Z}\mathcal{QZ}p = \mathcal{Z}p = v$. Por tanto $v \in \text{rng}(P_N)$. La demostración de (3-11) es una consecuencia inmediata de la definición de P_N y del hecho de que se trata de una proyección.

(4) Por la definición de P_N y P_{\perp} se deduce que P_{\perp} también es una proyección y la desigualdad (3-12) es inmediata. Nos falta ver que $\text{rng}(P_{\perp}) = \ker(\mathcal{Q})$. Un cálculo directo nos muestra que $\mathcal{Q}P_{\perp} = 0$, es decir $\text{rng}(P_{\perp}) \subseteq \ker \mathcal{Q}$. Sea ahora $v \in \ker \mathcal{Q}$. Entonces $P_{\perp}v = v - \mathcal{Z}\mathcal{Q}v = v$. Es decir $\ker(\mathcal{Q}) \subseteq \text{rng}(P_{\perp})$.

(5) Siguiendo [5, p. 39-40], se deduce que al ser P_N y P_{\perp} proyecciones continuas, entonces

$$C_{\partial}^k = \text{rng}(P_N) \oplus \text{rng}(P_{\perp}) = \mathcal{N}_k \oplus \mathcal{N}_k^{\perp} = \text{rng}(\mathcal{Z}) \oplus \ker(\mathcal{Q}), \tag{3-15}$$

lo que demuestra la proposición. ■

Podemos formular y demostrar una proposición con las mismas propiedades de la Proposición 3.2 tomando $\mathcal{Q} : C^k(\overline{\mathcal{C}}) \rightarrow C^k(\mathbb{T})$ y $\mathcal{Z} : C^k(\mathbb{T}) \rightarrow C^k(\overline{\mathcal{C}})$. En ese caso si denotamos con $\mathcal{N}_k := \text{rng} \mathcal{Z}$, entonces, \mathcal{N}_k será un subespacio cerrado de $C^k(\overline{\mathcal{C}})$ y $\mathcal{N}_k^{\perp} = \ker \mathcal{Q}$ será su complemento de tal modo que $C^k(\overline{\mathcal{C}}) = \mathcal{N}_k \oplus \mathcal{N}_k^{\perp}$.

Queremos ahora ampliar el conjunto solución de (3-4) a espacios más generales. Específicamente queremos soluciones en L^2 . Denotamos $\Omega := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ y definimos

(1) $L^2(\Omega)$ al conjunto funciones de las funciones de cuadrado integrable (en el sentido de Lebesgue) con el producto interno definido por

$$(u | v) = \int_{\Omega} uv. \tag{3-16}$$

Es claro que podemos identificar el espacio $L^2(\mathcal{C})$ con $L^2(\Omega)$.

- (2) Definimos también el espacio $L^2_{\times} := \left\{ p \in L^2(\mathbb{T}) : \int_0^{2\pi} p = 0 \right\}$ con el producto interno definido por

$$(p | q) = \int_0^{2\pi} pq. \quad (3-17)$$

- (3) $L^\infty(\Omega)$ será el espacio de las funciones esencialmente acotadas con la norma

$$\|u\|_\infty = \inf \{ C \geq 0 : |u(x, t)| \leq C \text{ para casi todo } (x, t) \in \Omega \}. \quad (3-18)$$

De manera similar definimos L^∞_{\times} .

Es bien sabido que $L^2(\Omega)$ y L^2_{\times} son espacios de Hilbert y que $L^\infty(\Omega)$ y L^∞_{\times} son espacios de Banach. Dos funciones son iguales en estos espacios cuando son iguales en casi toda parte (o salvo un conjunto de medida cero) [46, c. III].

El operador $\square : C^{k+2}_{\partial} \rightarrow C^k(\overline{\mathcal{C}})$ es continuo y C^k_{∂} es denso en $L^2(\Omega)$ para todo k con la norma $\|\cdot\|$ [46, p. 69]. No obstante, no podemos hacer una extensión continua de \square a L^2 . Basta tomar la sucesión de funciones acotadas $u_n(x, t) = \sin(nt)$ para darnos cuenta que $\|\square u_n\| = n \|u_n\| = n\pi \rightarrow \infty$.

A pesar de que \square no es un “buen” operador, podemos ayudarnos de los operadores \mathcal{Z} y \mathcal{Q} del siguiente modo.

Proposición 3.3. *Las siguientes afirmaciones son válidas*

- (1) *La adherencia de C^∞_{\times} en la topología inducida por (3-17) es L^2_{\times} y la adherencia de C^∞_{∂} en la topología inducida por (3-16) es $L^2(\Omega)$.*

- (2) *$\mathcal{Z} : C^\infty_{\times} \rightarrow L^2(\Omega)$ se puede extender continuamente a L^2_{\times} , \mathcal{Z} es uno-uno y se tiene que*

$$\|\mathcal{Z}p\| \leq 2\sqrt{\pi} \|p\|. \quad (3-19)$$

- (3) *$\mathcal{Q} : C^\infty_{\partial} \rightarrow L^2_{\times}$ se puede extender continuamente a $L^2(\Omega)$ y se tiene que*

$$\|\mathcal{Q}u\| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|u\|. \quad (3-20)$$

- (4) *$\mathcal{Q}\mathcal{Z} = I$, donde I es la idéntica en L^2_{\times} .*

- (5) *$P_N := \mathcal{Z}\mathcal{Q}$ es una proyección continua de $L^2(\Omega)$ sobre $\text{rng}(\mathcal{Z})$ con*

$$\|P_N p\| \leq 2 \|p\|. \quad (3-21)$$

(6) $P_{\perp} := I - P_N$ es una proyección continua de $L^2(\Omega)$ sobre $\ker(\mathcal{Q})$ con

$$\|P_{\perp}u\| \leq 3\|u\|. \quad (3-22)$$

(7) $N := \text{rng}(\mathcal{Z})$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$ que admite complemento ortogonal $N^{\perp} := \ker(\mathcal{Q})$.

Demostración. (1) Es bien sabido que $C^{\infty}(\overline{\mathcal{C}})$ es denso en $L^2(\Omega)$ y que $C^{\infty}(\mathbb{T})$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$ [5, p. 109]. En el primero caso, como dos funciones son iguales sii son iguales salvo un conjunto de medida cero, es claro que C_0^{∞} es denso en $L^2(\Omega)$ en la topología inducida por el producto interno (3-16). Por su parte, $\overline{C_{\times}^{\infty}} \subseteq L^2(\mathbb{T})$. Queremos ver que $\overline{C_{\times}^{\infty}} = L_{\times}^2$. Sea entonces $p \in L_{\times}^2$, solo nos falta verificar que p tiene promedio nulo. En efecto, sea $p_n \in C_{\times}^{\infty}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe un N_{ϵ} tal que para todo $n \geq N_{\epsilon}$, $\|p_n - p\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}}$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} p \right| &= \left| \int_0^{2\pi} p_n - p \right| + \left| \int_0^{2\pi} p_n \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |p_n - p| \\ &\leq \sqrt{2\pi} \|p_n - p\| \\ &< \epsilon. \end{aligned} \quad (3-23)$$

Como $\epsilon > 0$ fue escogido de manera arbitraria, $\int_0^{2\pi} p = 0$.

(2) Es una consecuencia inmediata de (1) y del Teorema de la Extensión Continua [35, p. 100]. Para demostrar que \mathcal{Z} es uno-uno se hace como en la demostración (1) de la Proposición 3.1 teniendo en cuenta que ahora que $p(t) = 0$ para casi todo $t \in \mathbb{T}$.

(3) La demostración de que $\mathcal{Q}v$ tiene promedio nulo es idéntica a (3-13). Demostremos la desigualdad (3-20) que garantiza la continuidad del operador $\mathcal{Q} : L^2(\Omega) \rightarrow L_{\times}^2$. Sea $v \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}v\|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{\pi} (v(s, r-s) - v(s, r+s)) ds \right|^2 dr \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} |v(s, r-s) - v(s, r+s)| ds \right]^2 dr \\ &\leq \frac{\pi}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} |v(s, r-s) - v(s, r+s)|^2 ds dr \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} (v(s, r)^2 + v(s, r)^2) ds dr \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|v\|^2 \end{aligned} \quad (3-24)$$

Las demostraciones de (4)-(7) son similares a las demostraciones de la Proposición 3.2. ■

Decimos entonces que $v \in L^2(\Omega)$ es una *solución débil al problema homogéneo* (3-4) sii $v \in N$. Es decir, si existe una única $p \in L^2_{\times}$ tal que $v(t, x) = p(t+x) - p(t-x)$. Al subespacio cerrado N de $L^2(\Omega)$ se le dice el núcleo del operador de onda y se puede identificar con L^2_{\times} .

Proposición 3.4. *La siguiente familia de funciones*

$$\begin{cases} \vartheta_k(x, t) := \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kx) \cos(kt) \\ \varrho_k(x, t) := \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kx) \sin(kt), \end{cases} \quad (3-25)$$

para $k = 1, 2, \dots$, es una base de Hilbert para N .

Demostración. Denotemos con

$$\begin{cases} \varsigma_k(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kt) \\ v_k(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kt) \end{cases} \quad (3-26)$$

para $k = 1, 2, \dots$. Es claro que $\mathfrak{B}_{\times} := \{\varsigma_k, v_k : k = 1, 2, \dots\}$ es una base de Hilbert para L^2_{\times} [46, p. 89-92]. La función ς_0 se remueve de la base para que la adherencia de las funciones generadas por \mathfrak{B}_{\times} tengan promedio cero. Denotemos con

$$\omega_k(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad (3-27)$$

para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Para $p \in L^2_{\times}$ definimos para $k = 1, \dots$ las siguientes transformaciones lineales de $L^2_{\times} \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ ($l^2(\mathbb{N})$ es el espacio de todas sucesiones reales a_1, a_2, \dots tales que $\sum_{\mathbb{N}} |a_i|^2 < \infty$).

$$\begin{cases} \hat{p}_1(k) := (p \mid \varsigma_k) \\ \hat{p}_2(k) := (p \mid v_k) \end{cases} \quad (3-28)$$

Definimos también, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la transformada de Fourier de $\mathcal{F} : L^2_{\times} \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ mediante la fórmula

$$\mathcal{F}(p)(k) = \hat{p}(k) := (p \mid \overline{\omega_k}) \quad (3-29)$$

($l^2(\mathbb{Z})$ es el espacio de todas sucesiones complejas $\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$ tales que $\sum_{\mathbb{Z}} |a_i|^2 < \infty$). Es bien sabido (ver [29, 45, 46] por ejemplo) que el polinomio trigonométrico p_N definido por

$$p_N(t) := \sum_{k=1}^N \hat{p}_1(k) \varsigma_k(t) + \hat{p}_2(k) v_k(t) \quad (3-30)$$

y las transformadas $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}$ cumplen las siguientes propiedades

(I)

$$p_N(t) = \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N \hat{p}(k) \omega_k(t) \quad (3-31)$$

con

$$\hat{p}(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\hat{p}_1(k) - i\hat{p}_2(k)) & \text{para } k \geq 1 \\ \frac{1}{2} (\hat{p}_1(-k) + i\hat{p}_2(-k)) & \text{para } k \leq -1 \end{cases} \quad (3-32)$$

(II) $\|p_N - p\| \rightarrow 0$.

(III) (Identidad de Parseval)

$$\|p\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{p}(k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{p}_1(k)|^2 + |\hat{p}_2(k)|^2. \quad (3-33)$$

(IV) (Propiedad de Translación). Si $T_x : L^2_{\times} \rightarrow L^2_{\times}$ está definida por $T_x p(t) := p(t - x)$, entonces

$$\mathcal{F}(T_x p)(k) = e^{-ikx} \hat{p}(k). \quad (3-34)$$

Para demostrar que $\mathfrak{B}_0 := \{\vartheta_k, \varrho_k : k = 1 \dots\}$ es una base de Hilbert para N , lo haremos vía la Identidad de Parseval [46, p. 85]. Sea $v \in N$ arbitraria pero fija. Entonces existe una única $p \in L^2_{\times}$ tal que $\mathcal{Z}p = v$. Podemos definir las siguientes transformadas

$$\begin{cases} \hat{v}_1(k) := (v \mid \vartheta_k) \\ \hat{v}_2(k) := (v \mid \varrho_k) \end{cases} \quad (3-35)$$

para $k = 1, 2, \dots$. También podemos definir para $\varpi(x, t) := \frac{1}{\pi} \sin(kx) e^{ikt}$ la transformada de $N \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\hat{v}(k) := (v \mid \overline{\varpi_k}). \quad (3-36)$$

Las relaciones entre \hat{v} , \hat{v}_1 y \hat{v}_2 son iguales a las relaciones entre \hat{p} , \hat{p}_1 y \hat{p}_2 . Un cálculo directo

muestra que $|\hat{v}(k)|^2 = 2\pi|\hat{p}(k)|^2$. De este modo

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |v(x, t)|^2 dt dx \\
&= \int_0^\pi \left[\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\mathcal{F}v(x, \cdot)(k)|^2 \right] dx \\
&= \int_0^\pi \left[\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\mathcal{F}p(x + \cdot)(k) - \mathcal{F}p(\cdot - x)(k)|^2 \right] dx \tag{3-37} \\
&= \int_0^\pi \left[\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |e^{ikx}\hat{p}(k) - e^{-ikx}\hat{p}(k)|^2 \right] dx \\
&= 4 \int_0^\pi \left[\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sin(kx)^2 |\hat{p}(k)|^2 \right] dx \\
&= 4 \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left[\left(\int_0^\pi \sin(kx)^2 dx \right) |\hat{p}(k)|^2 \right] \\
&= 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{p}(k)|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{v}(k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (|\hat{v}_1(k)|^2 + |\hat{v}_2(k)|^2)
\end{aligned}$$

Como se mantiene la identidad de Parseval para cualquier $v \in N$ entonces, las funciones ϑ_k y ϱ_k son un conjunto ortonormal total. En otras palabras, \mathfrak{B}_0 es una base de Hilbert para N . ■

3.2. El Problema Lineal No-homogéneo

$$\begin{cases} \square u = f \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \end{cases} \tag{3-38}$$

Supongamos por el momento que $u \in C_{\partial}^2$ y que $f \in C^1(\overline{\mathcal{C}})$. Vamos a seguir las ideas de [37]. Integramos el lado izquierdo de la ecuación $\square u = f$ sobre el triángulo T (incluido su interior) de vértices $\{(x, t), (\pi, t - x + \pi), (\pi, t + x - \pi)\}$. Si escribimos con τ_1 el segmento de recta que une $(\pi, t - x + \pi)$ con $(\pi, t + x - \pi)$ (en esa dirección), con τ_2 el segmento que une

$(t+x-\pi, \pi)$ con (t, x) y con τ_3 el segmento que une (x, t) con $(\pi, t-x+\pi)$; entonces, la frontera de T , $\partial T = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$. Usando el Teorema de Green [44, p. 253-255] obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_T \square u(x, t) dx dt &= \oint_{\partial T} u_t dy + u_x ds \\
&= \int_{\tau_1} u_t dy + u_x ds + \int_{\tau_2} u_t dy + u_x ds + \int_{\tau_3} u_t dy + u_x ds \\
&= - \int_{t+x-\pi}^{t-x+\pi} u_x(\pi, s) ds - \int_{\tau_2} \nabla u \cdot d\tau_2 + \int_{\tau_3} \nabla u \cdot d\tau_3 \\
&= - \int_{t+x-\pi}^{t-x+\pi} u_x(\pi, s) ds - 2u(x, t)
\end{aligned} \tag{3-39}$$

Integrando sobre T a ambos lados de la primera ecuación $\square u = f$, obtenemos la siguiente relación

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{t+x-\pi}^{t-x+\pi} u_x(\pi, s) ds - \frac{1}{2} \int_x^\pi \int_{t+x-y}^{t-x+y} f(y, s) ds dy. \tag{3-40}$$

Reemplazando la condición $u(0, t) = 0$ en (3-40) tenemos que

$$f_\star := \int_0^\pi \int_{t-y}^{t+y} f(y, s) ds dy = - \int_{t-\pi}^{t+\pi} u_x(\pi, s) ds \tag{3-41}$$

Como $u_x(\pi, s)$ es también periódica de periodo 2π , la integral de la derecha en (3-41) se mantiene constante para todo tiempo t . Esta constante es la que estamos denotando con f_\star .

Podemos obtener, entonces, una condición sobre f para que la ecuación (3-38) tenga solución. Para ello, basta derivar con respecto a t , el lado izquierdo de (3-41) y obtenemos

$$\int_0^\pi [f(y, t+y) - f(y, t-y)] dy = 0 \tag{3-42}$$

para todo t . En otras palabras si (3-38) tiene una solución $u \in C_\partial^2$, entonces $f \in \mathcal{N}_0^\perp = \ker(\mathcal{Q})$. Como veremos a continuación, si $f \in \mathcal{N}_1^\perp$, entonces existe una única $u \in C_\partial^2$ que satisface (3-38).

Definamos el operador lineal

$$Sf(x, t) := -\frac{1}{2} \int_x^\pi \int_{t+x-y}^{t-x+y} f(y, s) ds dy \tag{3-43}$$

Demostremos que $\square Sf(x, t) = f(x, t)$. Para esto, calculemos primero

$$\partial_t [Sf(x, t)] = \frac{1}{2} \int_x^\pi [f(y, t+x-y) - f(y, t-x+y)] dy. \tag{3-44}$$

y

$$\begin{aligned}\partial_x [Sf(x, t)] &= -\frac{1}{2} \left[-\int_t^t f(x, s) ds - \int_x^\pi \left\{ \partial_x \left[\int_{t-x+y}^{t+x-y} f(y, s) ds \right] \right\} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_x^\pi [f(y, t+x-y) + f(y, t-x+y)] dy.\end{aligned}\tag{3-45}$$

Las derivadas parciales de segundo orden vienen dadas entonces por

$$\partial_t^2 [Sf(x, t)] = 0 \tag{3-46}$$

$$\partial_{tx} [Sf(x, t)] = 0 \tag{3-47}$$

$$\partial_x^2 [Sf(x, t)] = -f(x, t) \tag{3-48}$$

Por lo tanto

$$\square Sf = f. \tag{3-49}$$

Denotemos

$$R(x, t) := -\frac{1}{2} \int_{t+x-\pi}^{t-x+\pi} u_x(\pi, s) ds. \tag{3-50}$$

Sabemos por (3-41) que $R(0, t) = \frac{1}{2}f_\star$ es una constante para todo $t \in \mathbb{T}$. Esto quiere decir que la función $R(x, t)$ sólo depende de x , pero como $\square Sf(x, t) = f(x, t)$ entonces debe ocurrir que $\square R(x, t) = 0$. Esto quiere decir que $R(x, t) = ax + b$ para algunas constantes a y b por determinar. Reemplazando en las condiciones de frontera $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ obtenemos $R(x, t) = \frac{1}{2\pi}(\pi - x)f_\star$. Definimos entonces la transformación lineal

$$S'f(x, t) := \frac{(\pi - x)}{2\pi} f_\star = \frac{(\pi - x)}{2\pi} \int_0^\pi \int_{t-y}^{t+y} f(y, s) ds dy. \tag{3-51}$$

Estamos listos para formular el siguiente resultado debido a Lovicarová.

Proposición 3.5 (Soluciones Clásicas al Problema Lineal No-homogéneo). *Sea $f \in \mathcal{N}_1^\perp$, entonces existe una única solución $u \in \mathcal{N}_2^\perp$ al problema (3-38) que viene dada por la fórmula explícita*

$$u = \square^{-1}f := P_1(S + S')f. \tag{3-52}$$

Más aun, para $k = 0, 1, \dots$, el operador $\square^{-1} : \mathcal{N}_k^\perp \rightarrow \mathcal{N}_{k+1}^\perp$ es lineal, continuo con

$$|\square^{-1}f|_{k+1} \leq 3(k + \pi^2) |f|_k. \tag{3-53}$$

\square^{-1} tiene inverso por la izquierda. Es decir, $\square \square^{-1} : \mathcal{N}_{k+1}^\perp \rightarrow \mathcal{N}_{k+1}^\perp$ es la identidad.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{N}_k^\perp$. Es claro que tanto S como S' son transformaciones lineales. Veamos que son acotadas de $\mathcal{N}_k^\perp \rightarrow C^{k+1}(\overline{\mathcal{C}})$. Tomemos primero S' y recordemos que $|\cdot|_0 = |\cdot|_\infty$. Es claro que

$$\begin{aligned} |S'f(x, t)| &\leq \frac{1}{2\pi} |\pi - x| |f|_0 \int_0^\pi \int_{t-y}^{t+y} ds dy \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} |f|_0. \end{aligned} \quad (3-54)$$

Por su parte

$$\begin{aligned} |\partial_x S'f(x, t)| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{t-y}^{t+y} f(y, s) ds dy \\ &\leq \frac{\pi}{2} |f|_0 \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} |f|_0. \end{aligned} \quad (3-55)$$

y

$$\partial_t S'f(t, x) = 0. \quad (3-56)$$

De (3-54), (3-55) y (3-56) obtenemos que

$$|S'f|_1 \leq \frac{\pi^2}{2} |f|_0. \quad (3-57)$$

Obtenemos entonces la siguiente desigualdad general

$$|S'f|_{k+1} = |S'f|_1 \leq \frac{\pi^2}{2} |f|_0 \leq \frac{\pi^2}{2} |f|_k. \quad (3-58)$$

Estudiamos ahora la continuidad de $S : \mathcal{N}_k^\perp \rightarrow C^{k+1}(\overline{\mathcal{C}})$. Usando las expresiones para las derivadas parciales encontradas en las ecuaciones (3-44) y (3-45) tenemos que

$$\begin{aligned} |Sf(x, t)| &\leq \frac{1}{2} \int_x^\pi \int_{t+x-y}^{t-x+y} |f(y, s)| ds dy \\ &\leq \frac{1}{2} |f|_0 \int_x^\pi 2y dy \\ &\leq \frac{\pi^2}{2} |f|_0 \\ &\leq \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 \right) |f|_0. \end{aligned} \quad (3-59)$$

De manera similar

$$\begin{aligned} |\partial_x Sf(x, t)| &\leq \pi |f|_0 \\ &\leq \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 \right) |f|_0 \\ &\leq \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 \right) |f|_0 \end{aligned} \quad (3-60)$$

y

$$\begin{aligned}
 |\partial_t S f(x, t)| &\leq (\pi - x) |f|_0 \\
 &\leq \pi |f|_0 \\
 &\leq \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 \right) |f|_0.
 \end{aligned} \tag{3-61}$$

Juntando (3-59), (3-60) y (3-61) tenemos que

$$|S f|_1 \leq \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 \right) |f|_0. \tag{3-62}$$

Usando un argumento inductivo sobre k como en [37, p. 328] se puede demostrar la desigualdad más general

$$|S f|_{k+1} \leq \left(\frac{\pi^2}{2} + k \right) |f|_k. \tag{3-63}$$

Combinando (3-12), (3-63) y (3-58) tenemos (3-53). La unicidad de la solución viene dada porque \square es un inverso a derecha de \square^{-1} en \mathcal{N}_1^\perp gracias a (3-49). \blacksquare

En resumen, si $f \in \mathcal{N}_1^\perp$ el problema (3-38) tiene soluciones clásicas de la forma

$$u = \mathcal{Z}p + \square^{-1}f \in \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{N}_2^\perp \tag{3-64}$$

para cualquier $p \in C_\times^2$.

Definamos ahora el espacio de Hölder $C^{1/2}$ de las funciones $u \in C(\overline{\mathcal{C}})$

$$H_{1/2}(u) := \sup_{x \neq y \in \overline{\mathcal{C}}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1/2}} < \infty. \tag{3-65}$$

Definamos también la norma

$$\|u\|_{1/2} := |u|_\infty + H_{1/2}(u). \tag{3-66}$$

Se sabe que $C^{1/2}$ con la norma (3-66) es un espacio de Banach [32, p. 6-8]. Definimos de manera similar $C^{1/2}(\mathbb{T})$ y si no hay lugar a confusión notamos su norma igual. Es posible extender continuamente \square^{-1} a todo N^\perp . Basta con notar que \mathcal{N}_k^\perp es denso en N^\perp con la topología de $L^2(\Omega)$ y que, mediante un cálculo directo, podemos demostrar que

$$\|\square^{-1}f\| \leq 6\pi^2 \|f\| \tag{3-67}$$

Es decir $\square^{-1} : N^\perp \rightarrow N^\perp$ está bien definido y es continuo. Más aún, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.6. *Sea $f \in N^\perp$, entonces existe $C_0 > 0$ tal que*

$$\|\square^{-1}f\|_{1/2} \leq C_0 \|f\|. \quad (3-68)$$

Además $\square^{-1} : N^\perp \rightarrow N^\perp$ es un operador compacto autoadjunto e inyectivo.

Demostración. Acotemos primero $\|Sf\|_{1/2}$. Para esto, tomemos $(x, t) \in \overline{\mathcal{C}}$ arbitrarios y sean h, k números reales tales que $(x+h, t+k) \in \overline{\mathcal{C}}$. Un cálculo directo a través de la desigualdad de Cauchy-Schwarz muestra que

$$|Sf|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \|f\|. \quad (3-69)$$

Tenemos que estimar ahora $H_{1/2}(Sf)$. Seguimos las ideas de [41, p. 43]. Denotemos los siguientes triángulos

$$T_1 := \{(x, t), (\pi, t+x-\pi), (\pi, t-x+\pi)\} \quad (3-70)$$

$$T_2 := \{(x+h, t+k), (\pi, t+k-x-h+\pi), (\pi, t+h+x+k-\pi)\}. \quad (3-71)$$

Notamos también $T = T_1 \triangle T_2$, donde \triangle denota la diferencia simétrica entre conjuntos. El área de T , $\mu(T)$, está acotada por $|k^2 - 2k(\pi-x)| \leq 4\pi(|k| + |h|)$. Con esta notación.

$$\begin{aligned} |Sf(x+h, t+k) - SPf(x, t)| &= \frac{1}{2} \left| \int_{T_1} f - \int_{T_2} f \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_T |f| \\ &\leq \frac{1}{2} \mu(T)^{1/2} \|f\| \\ &= \sqrt{\pi}(|h| + |k|)^{1/2} \|f\|. \end{aligned} \quad (3-72)$$

Combinando (3-69) con (3-72) tenemos que

$$\|Sf\|_{1/2} \leq \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \sqrt{\pi} \right) \|f\|. \quad (3-73)$$

Ahora estimemos $\|S'f\|_{1/2}$. Un cálculo directo nos muestra que

$$|S'f|_\infty \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \|f\|. \quad (3-74)$$

Encontremos ahora una cota superior para $H_{1/2}(S'f)$. Tomemos x, t, h, k como antes y calculemos

$$\begin{aligned} |S'f(x+h, t+k) - S'f(x, t)| &\leq \frac{1}{2\pi} |h| |f_\star| \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (|h| + |k|)^{1/2} |f_\star| \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (|h| + |k|)^{1/2} \|f\|. \end{aligned} \quad (3-75)$$

Combinando (3-74) con (3-75) obtenemos

$$\|S'f\|_{1/2} \leq \left(\frac{\pi + \sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right) \|f\|. \quad (3-76)$$

Es inmediato verificar que si $p \in C^{1/2}(\mathbb{T})$ y $f \in C^{1/2}$ entonces

$$\|\mathcal{Z}p\|_{1/2} \leq 2 \|p\|_{1/2} \quad (3-77)$$

$$\|\mathcal{Q}f\|_{1/2} \leq 2 \|f\|_{1/2}. \quad (3-78)$$

Combinando (3-73), (3-76), (3-77) y (3-78) obtenemos (3-68) con

$$C_0 := 5 \left(\frac{2\pi + (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right). \quad (3-79)$$

Para demostrar que $\square^{-1} : N^\perp \rightarrow N^\perp$ es un operador compacto, tomemos un conjunto $B \subset N^\perp$ acotado. Por (3-68) tenemos que $\square^{-1}B$ es acotado en $C^{1/2}$ y en particular, es acotado en $C(\overline{\mathcal{C}})$. Asimismo, $\square^{-1}B$ es una familia uniformemente equicontinua de funciones gracias a que

$$|\square^{-1}f(x, t) - \square^{-1}f(y, s)| \leq C_0(|x - y| + |t - s|)^{1/2}. \quad (3-80)$$

Por el teorema de Arzelà-Ascoli [5, p. 111] toda sucesión de funciones $f_n \in \square^{-1}B$ tiene una subsucesión convergente en la norma de $C(\overline{\mathcal{C}})$. Llamemos f_{n_k} esta sucesión. Pero si $f_{n_k} \rightarrow f$ para alguna $f \in C(\overline{\mathcal{C}})$ también tenemos que $f_{n_k} \rightarrow f$ en la norma de $L^2(\Omega)$. Por lo tanto \square^{-1} es compacto.

Nos resta ver que \square^{-1} es autoadjunto. Para esto, tomemos $fg \in \mathcal{N}_\infty^\perp$. Si aplicamos integración por partes obtenemos

$$(\square f \mid g) = (f \mid \square g). \quad (3-81)$$

Ahora para $f, g \in \mathcal{N}_\infty^\perp$ existe unas únicas $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{N}_\infty^\perp$ tales que $(\square^{-1}f \mid g) = (\tilde{f} \mid \square \tilde{g})$. Basta tomar $\tilde{f} = \square^{-1}f$ y $\tilde{g} = \square^{-1}g$. De este modo, y usando que $\square \square^{-1} = I$, tenemos

$$\begin{aligned} (\square^{-1}f \mid g) &= (\tilde{f} \mid \square \tilde{g}) \\ &= (\square \tilde{f} \mid \tilde{g}) \\ &= (f \mid \square^{-1}g). \end{aligned} \quad (3-82)$$

Para demostrar que es autoadjunto en todo N^\perp tomemos $f, g \in N^\perp$. Entonces, existen sucesiones de funciones $f_n, g_n \in \mathcal{N}_\infty^\perp$ tales que $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ y $\|g_n - g\| \rightarrow 0$. Usando la continuidad de $(\cdot \mid \cdot)$ y de \square^{-1} obtenemos la relación

$$(\square^{-1}f \mid g) = (f \mid \square^{-1}g). \quad (3-83)$$

Para demostrar que \square^{-1} es inyectivo en N^\perp tomemos $\varphi \in \mathcal{N}_\infty^\perp$. Recordemos que \mathcal{N}_∞^\perp es denso en N^\perp . Entonces existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{N}_\infty^\perp$ tal que $\square^{-1}\tilde{\varphi} = \varphi$. Supongamos que $\square^{-1}f = 0$, por tanto

$$\begin{aligned} (f | \varphi) &= (f | \square^{-1}\tilde{\varphi}) \\ &= (\square^{-1}f | \tilde{\varphi}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3-84}$$

Como la relación (3-84) es válida para toda $\varphi \in \mathcal{N}_\infty^\perp$, entonces $f(x, t) = 0$ para casi todo $(x, t) \in \Omega$.

De esta forma queda demostrada la proposición. ■

3.3. El Problema de Valores Propios

En esta sección vamos a encontrar soluciones no triviales al problema

$$\begin{cases} \square u = \nu u \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, t) = u(x, t + 2\pi). \end{cases} \tag{3-85}$$

Este problema se conoce como el problema de valores propios y lo vamos a formular de la siguiente manera.

Proposición 3.7. *Existe una base de Hilbert $\mathfrak{B}_\perp = \{\vartheta_{kj}, \varrho_{kj} : k = 1, \dots; j = 0, 1; k \neq j\}$ de N^\perp y una cantidad enumerable de reales $\nu_{kj} = (k^2 - j^2) \neq 0$ tal que si $u_{kj} \in \mathfrak{B}_\perp$, entonces $u_{kj} \in \mathcal{N}_\infty^\perp$ y satisface el problema (3-85) con $\nu = \nu_{kj}$. Además, todos los ν_{kj} son de multiplicidad finita.*

Demostración. Dado $f \in N^\perp$ existe una única $u \in C^{1/2}$ tal que $u = \square^{-1}f$. Por otro lado, recordemos que $\ker(\square^{-1}) = \{0\}$. Aplicando el Teorema Espectral [5, p. 167] existe una base de Hilbert conformada por las funciones propias v tales que $\square^{-1}v = \frac{1}{\nu}v$ asociada a los valores propios no-nulos $\frac{1}{\nu}$. Podemos aplicar repetidamente las proposiciones 3.5 y 3.6 para ver que $v \in \mathcal{N}_\infty^\perp$. Resolviendo el problema (3-85) en \mathcal{N}_∞^\perp llegamos a que para $k \neq j$, si

$$\begin{cases} \vartheta_{k0} = \frac{1}{\pi} \sin(kx) & \text{para } k = 1, \dots \\ \vartheta_{kj} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kx) \cos(jt) & \text{para } k, j = 1, \dots \\ \varrho_{kj} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kx) \sin(jt) & \text{para } k, j = 1, \dots \end{cases} \tag{3-86}$$

entonces \mathfrak{B}_\perp es la base deseada.

La multiplicidad finita de ν_{kj} se desprende de la compacidad de \square^{-1} . ■

Combinando las proposiciones 3.3, 3.4 y 3.7 vemos que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\perp \cup \mathfrak{B}_0$ es una base de Hilbert para todo $L^2(\Omega)$. Esto quiere decir que dada una función $u \in L^2(\Omega)$ podemos asociarle una serie de Fourier del siguiente modo

$$u(x, t) \sim \sum_{\substack{k=1 \\ j=0}}^{\infty} (\hat{u}_1(k, j) \vartheta_{kj}(x, t) + \hat{u}_2(k, j) \varrho_{kj}(x, t)). \quad (3-87)$$

En $L^2(\Omega)$ tenemos convergencia en L^2 y en casi toda parte de Ω gracias a [17], mientras que para funciones continuas, $u = \square^{-1}v$ por ejemplo, tenemos convergencia puntual para todo $(x, t) \in \bar{\mathcal{C}}$ (ver [29]). También tenemos la Identidad de Parseval

$$\|u\|^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ j=0}} (|\hat{u}_1(k, j)|^2 + |\hat{u}_2(k, j)|^2). \quad (3-88)$$

De manera análoga, se puede tomar como base de Hilbert para $L^2(\Omega)$ al conjunto

$$\mathfrak{B}' = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(kx) \cos(jt), \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(kx) \sin(jt), \frac{1}{\pi} \cos(jt), \frac{1}{\pi} \sin(jt), \frac{1}{\pi} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \quad (3-89)$$

Definimos ahora el espacio H como el conjunto de todas las funciones $u \in L^2(\Omega)$ tales que $u_t, u_x \in L^2(\Omega)$, $u(0, t) = u(\pi, t)$ y $u(x, t) = u(x, t + 2\pi)$. Aquí u_t y u_x son las derivadas en el sentido débil. Es posible ver a H como el completado de C_∂^∞ con la norma

$$\|u\|_1 = \|u\| + \|u_t\| + \|u_x\|. \quad (3-90)$$

Veamos que en H también vale la Desigualdad de Poincaré y que $\square^{-1} : N^\perp \rightarrow H$ es continuo.

Proposición 3.8. *Suponga que $u \in H$, entonces es válida la Desigualdad de Poincaré*

$$\|u\| \leq \pi \|\nabla u\|. \quad (3-91)$$

En particular $\|\cdot\|_1$ y $\|\nabla(\cdot)\|$ son normas equivalentes. Adicionalmente $\square^{-1} : N^\perp \rightarrow H$ es lineal continuo con

$$\|\square^{-1}u\|_1 \leq \|u\|. \quad (3-92)$$

Demostración. Sea $u \in H$. Demostremos primero que $\|u\| \leq \pi \|u_x\|$.

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |u(x,t)|^2 dxdt \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |u(x,t) - u(0,t)|^2 dxdt \\
&\leq \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^x |u_x(s,t)| ds \right)^2 dxdt \\
&\leq \pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^x |u_x(s,t)|^2 ds \right) dxdt \\
&\leq \pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi |u_x(s,t)|^2 ds dxdt \\
&\leq \pi^2 \|u_x\|^2.
\end{aligned} \tag{3-93}$$

Veamos que pasa con u_t . Si $j = 0$ estamos en el caso (3-93) ya que u no depende de t . Supongamos entonces que $j \neq 0$. En este caso tenemos

$$\begin{aligned}
\|u_t\|^2 &= \sum_{\substack{k=1 \\ j=0}}^{\infty} j^2 (|\hat{u}_1(k,j)|^2 + |\hat{u}_2(k,j)|^2) \\
&\geq \sum_{\substack{k=1 \\ j=0}}^{\infty} (|\hat{u}_1(k,j)|^2 + |\hat{u}_2(k,j)|^2) \\
&= \|u\|^2.
\end{aligned} \tag{3-94}$$

Combinando (3-93) y (3-94) vemos que (3-91) es válida. La equivalencia de las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\nabla \cdot\|$ es una consecuencia inmediata de (3-91).

Demostremos ahora que (3-92) se cumple. Sea $u \in N^\perp$.

$$\begin{aligned}
\|\square^{-1}u\|_1^2 &= \sum_{\substack{k \neq j \\ k=1, j=0}}^{\infty} \frac{k^2 + j^2}{(k^2 - j^2)^2} (\hat{u}_1(k,j)^2 + \hat{u}_2(k,j)^2) \\
&\leq \sum_{\substack{k \neq j \\ k=1, j=0}}^{\infty} \frac{1}{(k-j)^2} (\hat{u}_1(k,j)^2 + \hat{u}_2(k,j)^2) \\
&\leq \sum_{\substack{k \neq j \\ k=1, j=0}}^{\infty} (\hat{u}_1(k,j)^2 + \hat{u}_2(k,j)^2) \\
&\leq \|u\|^2.
\end{aligned} \tag{3-95}$$

Esto termina con la demostración de la proposición. ■

De ahora en adelante, para $u \in H$ tomaremos

$$\|u\|_1 = \|u_x\| + \|u_t\|. \quad (3-96)$$

Cabe anotar que 3-92 también implica la compacidad de $\square^{-1} : N^\perp \rightarrow N^\perp$. Basta repetir los últimos argumentos empleados en la demostración de la Proposición 3.6 usando el Teorema de Rellich-Kondrachov [5, p. 287] en vez del Teorema de Arzelà-Ascoli.

También cabe anotar que el operador \square^{-1} gana una derivada débil en espacios de Sobolev de peso mayor. No necesitamos este resultado en el trabajo pero el lector interesado puede consultar [40, p. 157].

Al conjunto N lo llamaremos, formalmente, el *núcleo* de \square y al espacio $Y = H \cap N^\perp$ lo llamaremos, formalmente, el *rango* del \square . Para concluir esta sección decimos que u es una *solución débil al problema lineal* (3-38) con $f \in N^\perp$ si

$$u = \mathcal{Z}p + \square^{-1}f \in N \oplus Y \quad (3-97)$$

para $p \in L^2_\times$.

3.4. El Operador $(\square + \lambda I)^{-1}$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $k^2 - j^2 + \lambda \neq 0$ para $k = 1, 2, \dots$ y $j = 0, 1, \dots$ y sea $\Gamma_\lambda := \min |k^2 - j^2 + \lambda| > 0$. En este trabajo estamos interesados, especialmente, en el operador $(\square + \lambda I)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definido por

$$(\square + \lambda I)^{-1}f(x, t) = \sum_{\substack{k=1 \\ j=0}}^{\infty} \frac{\hat{f}_1(k, j)\vartheta_{kj}(x, t) + \hat{f}_2(k, j)\varrho_{kj}(x, t)}{k^2 - j^2 + \lambda}. \quad (3-98)$$

La igualdad en (3-98) es válida para todo $(x, t) \in \Omega$.

Por la Proposición 3.7, es claro que el problema

$$\begin{cases} \square u + \lambda u = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) \\ u(x, t) = u(x, t + 2\pi) \end{cases} \quad (3-99)$$

tiene como única solución la solución trivial, es decir $u = 0$.

Proposición 3.9. $(\square + \lambda I)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ es un operador continuo y autoadjunto y para $u \in L^2(\Omega)$

$$\|(\square + \lambda I)^{-1}u\| \leq \frac{1}{\Gamma_\lambda} \|u\|. \quad (3-100)$$

Demostración. Basta usar la representación en series de Fourier y la Identidad de Parseval de las ecuaciones (3-87) y (3-88). \blacksquare

Proposición 3.10. *Si $k^2 - j^2 \neq 0$ para todo $j = 0, 1, \dots$ y todo $k = 1, 2, \dots$, existen constantes $A_\lambda > 0$ y $B_\lambda > 0$, que sólo dependen de λ , tales que*

$$A_\lambda \leq \left| \frac{k^2 - j^2}{k^2 - j^2 + \lambda} \right| \leq B_\lambda. \quad (3-101)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + |\lambda|} &\leq \frac{1}{1 + \frac{|\lambda|}{|k^2 - j^2|}} \\ &\leq \frac{1}{\left| 1 + \frac{\lambda}{k^2 - j^2} \right|} \\ &= \left| \frac{k^2 - j^2}{k^2 - j^2 + \lambda} \right| \\ &= \left| 1 - \frac{\lambda}{k^2 - j^2 + \lambda} \right| \\ &\leq 1 + \frac{|\lambda|}{|k^2 - j^2 + \lambda|} \\ &\leq 1 + \frac{|\lambda|}{\Gamma_\lambda}. \end{aligned} \quad (3-102)$$

Tomando $A_\lambda := \frac{1}{1 + |\lambda|}$ y $B_\lambda := 1 + \frac{|\lambda|}{\Gamma_\lambda}$ el lema queda demostrado. \blacksquare

Proposición 3.11. *El operador $(\square + \lambda I)^{-1}$ definido en N^\perp satisface, para cualquier $f \in N^\perp$, la siguiente relación*

$$\|(\square + \lambda I)^{-1} f\|_1 + \|(\square + \lambda I)^{-1} f\|_{1/2} \leq 5B_\lambda \|f\| \quad (3-103)$$

Además, el operador $(\square + \lambda I)^{-1} : N^\perp \rightarrow L^q(\Omega)$, con $q \geq 2$, es un operador compacto.

Demostración. Escribimos $f = \sum_{k \neq j} (\hat{f}_1(k, j) \vartheta_{kj} + \hat{f}_2(k, j) \varrho_{kj})$. Entonces

$$\begin{aligned} \|(\square + \lambda)^{-1} f\|_1^2 &= \sum_{k \neq j} \frac{(k^2 + j^2)(\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2)}{(k^2 - j^2 + \lambda)^2} \\ &\leq B_\lambda^2 \sum_{k \neq j} \frac{(k^2 + j^2)(\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2)}{(k^2 - j^2)^2} \\ &\leq B_\lambda^2 \sum_{k \neq j} \frac{(k^2 + j^2)(\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2)}{(k - j)^2 (k + j)^2} \\ &\leq B_\lambda^2 \sum_{k \neq j} (\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2) \\ &\leq B_\lambda^2 \|f\|^2. \end{aligned} \quad (3-104)$$

Notemos por el momento $u = (\square + \lambda)^{-1}f$. Para $x \in [0, \pi]$ fijo, calculamos $\|u(x, \cdot)\|_{H^1[0, 2\pi]}^2$

$$\begin{aligned}
\|u(x, \cdot)\|_{H^1[0, 2\pi]}^2 &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\hat{f}_1(k, j)^2 \sin(kx)}{k^2 - j^2 + \lambda} \right) \sin(jt) + \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\hat{f}_2(k, j)^2 \sin(kx)}{k^2 - j^2 + \lambda} \right) \cos(jt) \right] \right\|_{H^1[0, 2\pi]}^2 \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left[j^2 \left(\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\hat{f}_1(k, j)^2 \sin(kx)}{k^2 - j^2 + \lambda} \right)^2 + \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\hat{f}_2(k, j)^2 \sin(kx)}{k^2 - j^2 + \lambda} \right)^2 \right) \right] \\
&\leq B_\lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} (\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2) \right) \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{j^2}{(k^2 - j^2)^2} \right) \right] \quad (3-105) \\
&\leq B_\lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} (\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2) \right) \left(\sum_{k < j}^{\infty} \frac{1}{(k - j)^2} + \sum_{k > j}^{\infty} \frac{1}{(k - j)^2} \right) \right] \\
&\leq B_\lambda^2 \frac{\pi^2}{3} \|f\|^2.
\end{aligned}$$

De manera similar se demuestra que $\|u(\cdot, t)\|_{H^1[0, \pi]} \leq B_\lambda \frac{\pi^2}{3} \|f\|$. Estimemos ahora

$$\begin{aligned}
|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| &\leq |u(x_1, t_1) - u(x_1, t_2)| + |u(x_1, t_2) - u(x_2, t_2)| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} |\partial_t u(x_1, s)| ds + \int_{x_1}^{x_2} |\partial_x u(s, t_2)| ds \quad (3-106) \\
&\leq \left(\int_{t_1}^{t_2} |\partial_t u(x_1, s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{x_1}^{x_2} |\partial_x u(s, t_2)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_1}^{x_2} ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|u(x_1, \cdot)\|_{H^1[0, 2\pi]} \sqrt{|t_1 - t_2|} + \|u(\cdot, t_2)\|_{H^1[0, \pi]} \sqrt{|x_1 - x_2|} \\
&\leq B_\lambda \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|p\| (\sqrt{|t_1 - t_2|} + \sqrt{|x_1 - x_2|}).
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
|u(x, t)| &\leq \sum_{k \neq j} \frac{|\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2|}{|k^2 + j^2 + \lambda|} \\
&\leq B_\lambda \left(\sum_{k \neq j} (\hat{f}_1(k, j)^2 + \hat{f}_2(k, j)^2) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \neq j} \frac{1}{(k^2 - j^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3-107) \\
&\leq 2B_\lambda \|p\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|(\square + \lambda)^{-1}p\|_{1/2} &= \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{(x_1, t_1) \neq (x_2, t_2) \\ (x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \bar{\Omega}}} \frac{|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)|}{\sqrt{|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|}} \\ &\leq 4B_\lambda \|p\|. \end{aligned} \quad (3-108)$$

Juntando las desigualdades (3-104) y (3-108) obtenemos (3-103) que es la desigualdad deseada.

Veamos ahora que el operador $(\square + \lambda I)^{-1}$ es compacto. Para tal fin, tomamos una sucesión acotada de funciones $p_n \in L^2(\Omega)$. Entonces $(\square + \lambda I)^{-1}p_n$ es acotada en H . Por el Teorema de Rellich-Kondrachov $(\square + \lambda I)^{-1}p_n$ tiene una subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$ para $q \geq 2$. ■

Cabe anotar que $(\square + \lambda I)^{-1}$ no es compacto de N^\perp en H . Para comprobar esto, tomemos la sucesión acotada en $L^2(\Omega)$ dada por $p_n(x, t) = \sin(nx) \sin((n+1)t)$. Tomamos $u_n = (\square + \lambda I)^{-1}p_n$ y calculamos la siguiente norma

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_1^2 &\geq \|(u_n)_x - (u_m)_x\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{n \cos(nx) \sin((n+1)t)}{2n+1+\lambda} - \frac{m \cos(mx) \sin((m+1)t)}{2m+1+\lambda} \right)^2 dx dt \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{n^2 \cos^2(nx) \sin^2((n+1)t)}{(2n+1+\lambda)^2} + \frac{m \cos^2(mx) \sin^2((m+1)t)}{(2m+1+\lambda)^2} \right) dx dt \\ &= \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{n^2}{(2n+1+\lambda)^2} + \frac{m^2}{(2m+1+\lambda)^2} \right) \\ &\rightarrow \frac{\pi^2}{4} \neq 0. \end{aligned} \quad (3-109)$$

3.5. El Conjunto $\sigma(\square)$

Con base en la Proposición 3.7 definimos el espectro de \square como el conjunto

$$\sigma(\square) := \{k^2 - j^2 : k = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots\}. \quad (3-110)$$

Proposición 3.12. $\sigma(\square)$ está conformado sólo por valores propios. La multiplicidad geométrica de cada valor propio y la multiplicidad algebraica coinciden. Salvo el valor propio 0, todos los demás valores propios tienen multiplicidad finita.

Demostración. Dado que \square^{-1} es un operador compacto en N^\perp se puede decir que el conjunto de valores propios no-nulos es $\sigma(\square^{-1}) \setminus \{0\}$ [5, p. 164]. Si tomamos como $\ker(\square) = N$, entonces 0 también es un valor propio. En los operadores autoadjuntos la multiplicidad geométrica y algebraica, de un valor propio ν , coinciden y es igual a $\dim \ker(\square - \nu I)$ [5, p. 169].

Es claro que 0 es un valor propio de multiplicidad infinita. Basta tomar $k = j$. Para demostrar, directamente de la definición del espectro, que los demás valores propios tienen multiplicidad finita supongamos, sin pérdida de generalidad, que el valor propio $\nu = k^2 - j^2 > 0$. Esto quiere decir que podemos escribir $k = j + n$ para algún n que depende de k . Entonces

$$\nu = n(2j + n) \tag{3-111}$$

Supongamos que la ecuación (3-111) tiene infinitas soluciones. Entonces (3-111) es válida para infinitos valores de n o para infinitos valores de j . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que es válida para infinitos valores de n . Entonces existe una sucesión $n_m \rightarrow \infty$ tal que $\nu = n_m(2j + n_m)$, pero para m suficientemente grande, $n_m(2j + n_m) > \nu$, lo cual es absurdo. ■

Proposición 3.13. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

- (1) *1 y 4 son los únicos valores propios simples.*
- (2) *Todos los cuadrados perfectos positivos están en el espectro y son los únicos valores propios de multiplicidad impar.*
- (3) *Los números primos (positivos o negativos) están en el espectro y tienen multiplicidad dos.*
- (4) *Los números primos no son los únicos valores propios de multiplicidad dos.*
- (5) *Cualquier número en el espectro que no sea cuadrado perfecto positivo, tiene multiplicidad par.*

Demostración. (1) 1 y 4 son valores propios del operador de onda \square . Basta tomar $k = 1$ y $k = 2$ con $j = 0$ en ambos casos. Si existieran otros números k y j , j debería ser no nulo. Es decir 1 y 4 se deberían poder escribir como diferencia de dos cuadrados. Pero esto es imposible porque querría decir que 1 y 2 son los catetos de algún triángulo rectángulo cuyos lados forman una terna pitagórica.

Para ver que son los únicos valores propios simples, veamos que cualquier otro cuadrado sí se puede escribir como diferencia de dos cuadrados. Sea m un entero positivo. Supongamos primero que es par, entonces existe algún entero $m_0 > 1$ tal que $m = 2m_0$ y $m^2 = (m_0^2 + 1)^2 - (m_0^2 - 1)^2$. Supongamos ahora que m es impar, entonces m^2 también es impar. Por lo tanto, existe m_1 tal que $m^2 = (m_1 + 1)^2 - m_1^2$.

- (2) Es claro que todo cuadrado perfecto positivo está en el espectro. Basta tomar $j = 0$. Esto corresponde a una función propia. Ahora falta ver que si $j \neq 0$ y $\nu = k^2 - j^2$ tiene más soluciones, estas vienen en parejas (k_m, j_m) donde $k_i \neq k_m$ y $j_i \neq j_m$ para $i \neq m$. Supongamos que (k_1, j_1) y (k_2, j_2) son soluciones. Entonces $k_1^2 - j_1^2 = k_2^2 - j_2^2$, de donde $j_1 = j_2$. Hacemos un razonamiento similar cuando varía k_i . Esto quiere decir que las

soluciones a $\nu = k^2 - j^2$ con $j \neq 0$ es un conjunto de parejas únicas y cada pareja tiene asociada una pareja de funciones propias. Por lo tanto, los cuadrados perfectos positivos están en el espectro y son los únicos valores propios de multiplicidad impar.

- (3) Sea p un número primo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p > 0$. Escribamos entonces $k = j + n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Queremos resolver para n y j la ecuación $p = n(2j + n)$. Como p es primo sólo hay dos opciones, o $n = 1$ o $2j + n = 1$. El segundo caso es imposible. Nos resta el primer caso en donde tenemos $k = \frac{p+1}{2} \in \mathbb{N}$ y $j = \frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}$ como única solución. Es decir, los primos están en el espectro y tienen multiplicidad dos.
- (4) No todos números de multiplicidad dos que están en el espectro son primos. Un cálculo para k y j específicos muestra que $8 = k^2 - j^2$ tiene como única solución $(3, 1)$.
- (5) Inmediato de lo anterior. ■

3.6. El Problema No-lineal

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $-\lambda \notin \sigma(\square)$. En este trabajo estamos interesados en encontrar soluciones débiles no-triviales al problema

$$\begin{cases} \square u + \lambda u + h(u) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \end{cases} \quad (3-112)$$

Por *soluciones débiles al problema no lineal* (3-112) entendemos una función $u = v + y \in N \oplus Y$ tal que

$$\int_{\Omega} y_t \xi_t - y_x \xi_x - (\lambda(v + y) + h(v + y))(\eta + \xi) = 0 \quad (3-113)$$

para toda $\eta \in N$ y toda $\xi \in Y$.

Si suponemos que $u = y + v \in C_{\partial}^2$ y suponemos también que u satisface (3-113), entonces u también es solución clásica al problema (3-112). Para ver esto basta con integrar por partes en (3-113) y usar las condiciones Dirichlet-periódicas.

Para poder solucionar la ecuación (3-112) debemos recurrir a una versión modificada del Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt (ver [22, p. 176-183] o [36, p. 33-43]). Nuestra versión es la siguiente

3.6.1. Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt

Proposición 3.14. $u = v + y \in N \oplus Y$ es una solución débil al problema (3-112) si v y y satisfacen el sistema de ecuaciones

$$v = -\frac{1}{\lambda} P_N h(v + y) \quad (3-114)$$

$$y = -(\square + \lambda I)^{-1} P_\perp h(v + y). \quad (3-115)$$

Demostración. Supongamos primero que $u = v + y \in N \oplus Y$ es una solución débil del problema (3-112). Tomando $\xi = 0$ en (3-113) vemos que

$$(v | \eta) = -\frac{1}{\lambda} (h(y + v) | \eta) \quad (3-116)$$

para todo $\eta \in N$. La ecuación (3-116) es equivalente a (3-114).

Para demostrar (3-115) tomemos $\eta = 0$ y $\xi = \vartheta_{kj}$ con $k \neq j$ en (3-113). Denotemos $g(x, t) = h(u(x, t))$. Entonces la ecuación (3-113) se transforma en

$$\hat{y}_1(k, j) = \frac{-1}{(k^2 - j^2 + \lambda)} \hat{g}_1(k, j). \quad (3-117)$$

Haciendo el mismo proceso para $\xi = \varrho_{kj}$ y asociando las correspondientes series de Fourier obtenemos

$$\sum_{\substack{k \neq j \\ k=1 \\ j=0}}^{\infty} \hat{y}_1(k, j) \vartheta_{kj} + \hat{y}_2(k, j) \varrho_{kj} = \sum_{\substack{k \neq j \\ k=1 \\ j=0}}^{\infty} \frac{-1}{k^2 - j^2 + \lambda} (\hat{g}_1(k, j) \vartheta_{kj} + \hat{g}_2(k, j) \varrho_{kj}). \quad (3-118)$$

La ecuación (3-118) es equivalente a la ecuación (3-115).

Supongamos ahora que son válidas las ecuaciones (3-115) y (3-114). Es decir, son válidas las ecuaciones (3-116) y (3-118). Si tomamos $\xi \in Y$ arbitrario, la ecuación (3-118) implica

$$\int_{\Omega} y_t \xi_t - y_x \xi_x - \lambda y \xi = \int_{\Omega} h(v + y) \xi. \quad (3-119)$$

Sumando (3-119) con (3-116) obtenemos (3-113). ■

Nos referimos a la ecuación (3-114) como la *ecuación del núcleo* y a la ecuación (3-115) como la *ecuación del rango*.

Sea Z un subespacio cerrado de N^\perp y W su complemento ortogonal en N^\perp sean también P_Z y P_W las proyección sobre Z y W . Siguiendo las ideas de la la Proposición 3.14 podemos partir la ecuación del rango en dos ecuaciones simultaneas también

$$z = -(\square + \lambda I)^{-1} P_Z h(v + z + w) \quad (3-120)$$

$$w = -(\square + \lambda I)^{-1} P_W h(v + z + w). \quad (3-121)$$

Como $z, w \in Y$ podemos ver a $Y = (Z \cap H) \oplus (W \cap H)$. Las soluciones débiles las podemos escribir entonces como funciones de la forma $u = v + y = v + z + w$.

Para demostrar los teoremas de los siguientes capítulos vamos a encontrar, para $y \in Y$ fijo, soluciones $v(y)$ a la ecuación (3-114) vía el Principio de Contracciones y luego encontraremos solución para y en la ecuación (3-115) usando Teoría de Grado de Leray-Schauder.

3.6.2. Ecuación Integral del Núcleo

La ecuación del núcleo (3-114) tiene una ecuación integral equivalente dada por

$$p(r) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\pi [h(u(x, r+x)) - h(u(x, r-x))] dx. \quad (3-122)$$

donde $v = \mathcal{Z}p$ y $p \in L_\times^2$ es único para $v \in N$.

Proposición 3.15. *La ecuación (3-114) es equivalente a la ecuación integral (3-122).*

Demostración. Sea $u = v + y \in N \oplus Y$. Supongamos que (3-114) es cierta. Entonces $v = -\frac{1}{\lambda}\mathcal{Z}Qh(u)$. Esto quiere decir que existe una única $p \in L_\times^2$ tal que $v = \mathcal{Z}p$. Como \mathcal{Z} es inyectiva, tenemos que

$$p = -\frac{1}{\lambda}\mathcal{Q}h(u). \quad (3-123)$$

Es claro que (3-123) es equivalente a (3-122). Del mismo modo se demuestra que si (3-122) es válida, también lo es (3-114). ■

4 Bifurcación en Infinito para una Ecuación de Onda Semilineal

En este capítulo demostraremos que existe bifurcación en el infinito en los valores propios de multiplicidad finita del espectro $\sigma(\square)$. Para $-\lambda \notin \sigma(\square)$ consideremos el problema

$$\begin{cases} \square u + \lambda u + h(u) = 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t). \end{cases} \quad (4-1)$$

Supondremos a lo largo del trabajo que $h \in C^1(\mathbb{R})$ está acotada y que $h'(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$. Dependiendo del resultado, agregamos diferentes hipótesis sobre la no-linealidad h .

Primero daremos una condición para garantizar bifurcación en los valores propios simples. Luego daremos una condición para encontrar bifurcación en los valores propios de multiplicidad impar en general. Estos resultados nos dirán además de cuál “lado” se da la bifurcación. Por último demostraremos que las soluciones vienen dadas por un continuo de soluciones usando el Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz. Con hipótesis adicionales sobre h , encontraremos bifurcación en infinito en todos los valores propios de multiplicidad finita. Para concluir, encontramos bifurcación en infinito al único valor propio de multiplicidad infinita a un problema modificado (el problema doble-periódico).

4.1. Valores Propios de Multiplicidad Simple

Sea $l^2 \in \sigma(\square)$ un valor propio simple. Esto quiere decir, por la Proposición 3.13, que $l^2 = 1, 4$ (es decir $k = l = 1, 2$ y $j = 0$). Para λ muy cercano a $-l^2$ queremos encontrar soluciones débiles no-triviales al problema (4-1).

Sobre h hacemos las siguientes hipótesis adicionales:

- 1) Existen $\gamma > 1$ y $h_0 > 0$ tales que si $|x| > h_0$ entonces

$$|h'(x)| \leq \frac{1}{|x|^\gamma}. \quad (4-2)$$

2) El límite L definido a continuación es no-nulo.

$$L := \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_0^\pi h(\zeta \sin(lx)) \sin(lx) dx \neq 0. \quad (4-3)$$

De las hipótesis sobre h y h' , es inmediato que $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ también es una función acotada. Un ejemplo de una h con estas características es la función

$$\arctan(x) + \frac{\sin(x)^2}{x^2}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\gamma \in (1, 2)$. Podemos suponer también que $L > 0$. En el caso en que $L < 0$ los cálculos son los mismos con la bifurcación proveniente del lado contrario. Es decir, si $L > 0$ suponemos que $\lambda < -l^2$ y si $L < 0$ suponemos que $\lambda > -l^2$. Sólo estamos interesados en valores de λ muy cercanos a $-l^2$. Es decir, suponemos que $|\lambda + l^2| < \delta_0$ para algún $\delta_0 \in (0, \frac{1}{2})$ por determinar.

Teorema 4.1. *Existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo λ con $|\lambda + l^2| < \delta_0$ el problema (4-1) tiene una solución débil*

$$u_\lambda = v_\lambda + y_\lambda \in (L^\infty(\Omega) \cap N) \oplus (L^\infty(\Omega) \cap Y).$$

Más aún, si $\lambda \uparrow -l^2$, $\|v_\lambda\| + \|y_\lambda\|_1 \rightarrow \infty$.

4.1.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones

En esta sección aplicaremos el método de reducción de Lyapunov-Schmidt para encontrar un sistema de tres ecuaciones. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sea $M_0 > 0$ tal que si $\zeta \geq M_0$, entonces*

$$\left| \int_0^\pi h(\zeta \sin(lx)) \sin(lx) dx - L \right| < \frac{L}{4}. \quad (4-4)$$

Supongamos que $|\lambda + l^2| < \frac{L}{\pi M_0}$. Entonces existe $c = c_\lambda \in \left[\frac{L}{|\lambda + l^2| \pi}, \frac{3L}{|\lambda + l^2| \pi} \right]$ ($c > 0$) tal que

$$c(l^2 + \lambda) \int_\Omega \sin^2(lx) dx + \int_\Omega h(c \sin(lx)) \sin(lx) dx = 0. \quad (4-5)$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema de Bolzano a la función

$$f(\zeta) := \zeta(l^2 + \lambda)\pi + 2 \int_0^\pi h(\zeta \sin(lx)) \sin(lx) dx$$

en los puntos $\frac{L}{|\lambda + l^2| \pi}$ y $\frac{3L}{|\lambda + l^2| \pi}$. ■

Fijemos λ (admisibile). Por el Lema 4.1, existe $c = c_\lambda$ que satisface (4-5). Postulamos soluciones de la forma $u = c \sin(lx) + z$ con $z = y + v \in Y \oplus N$. Eso nos lleva a la ecuación modificada

$$\square z + \lambda z + h(c \sin(lx) + z) = -c(\lambda + l^2) \sin(lx). \quad (4-6)$$

Sea $Z \subset N^\perp$ el subespacio uno-dimensional generado por la función propia $\sin(lx)$ y sea $W \subset L^2(\Omega)$ el complemento ortogonal de Z en N^\perp . Entonces $y = d \sin(lx) + w \in Z \oplus W = Y$ ($d \in \mathbb{R}$). El Método de Reducción de Lyapunov-Schmidt expuesto en la Sección 3.6.1 se convierte en

$$v = -\frac{1}{\lambda} P_N h(c \sin(lx) + y + v) \quad (4-7)$$

$$y = -(\square + \lambda I)^{-1} P_\perp h(c \sin(lx) + y + v). \quad (4-8)$$

La ecuación (4-7) es la ecuación del núcleo y la ecuación (4-8) es la ecuación del rango que, gracias al Lema 4.1, se puede separar en las dos ecuaciones siguientes

$$w = -(\square + \lambda I)^{-1} P_W h(c \sin(lx) + d \sin x + w + v) \quad (4-9)$$

$$d = \pi^{-2} |l^2 + \lambda|^{-1} \int_\Omega [h(c \sin(lx) + d \sin x + w + v) \sin x - h(c \sin(lx)) \sin(lx)] dx dt. \quad (4-10)$$

4.1.2. Soluciones a la Ecuación del Núcleo

Por la Proposición 3.15, la ecuación (4-7) es equivalente a

$$p(r) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\pi [h(u(x, r+x)) - h(u(x, r-x))] dx \quad (4-11)$$

donde $u(x, t) = c \sin(lx) + y(x, t) + p(t+x) - p(t-x)$ y $\mathcal{Z}p = v \in N$.

Para $\gamma \in (1, 2)$, existe $\theta \in \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}, \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)$ tal que $1 + \theta > \beta > 1 + 2\theta > 0$ con $\beta = \gamma(1 + \theta) + 2\theta$. Es claro que $\theta \in (-1, 0)$ y $\beta \in (0, 1)$. Por ejemplo $\gamma = 1,5$, $\theta = -0,3$ y $\beta = 0,45$.

Sean

$$B_1 = \left\{ p \in L_\times^2 : \|p\|_\infty \leq \frac{c^\beta}{2} \right\}$$

e $y \in Y$ con $\|y\|_\infty \leq c^\beta$ arbitrario pero fijo. Definimos la función $F_y : B_1 \rightarrow B_1$ por

$$F(p)(r) = F_y(p)(r) := \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\pi [h(u(x, r+x)) - h(u(x, r-x))] dx. \quad (4-12)$$

Sea $h_1 > 0$ tal que $|h'(x)| \leq \frac{1}{32}$ para $|x| \geq h_1$. Sea también $\epsilon_0 \in \left(0, \frac{1}{128|h'|_\infty}\right)$ arbitrario pero fijo. Definamos

$$E_0 = \begin{cases} [0, \epsilon_0] \cup [\pi - \epsilon_0, \pi] & \text{para } l = 1 \\ [0, \epsilon_0] \cup [\frac{\pi}{2} - \epsilon_0, \frac{\pi}{2} + \epsilon_0] \cup [\pi - \epsilon_0, \pi] & \text{para } l = 2. \end{cases} \quad (4-13)$$

Lema 4.2. *La función F_y es una contracción de B_1 en B_1 .*

Demostración. Veamos primero que $F(B_1) \subseteq B_1$. Para esto basta tomar λ cercano a $-l^2$ para que

$$|F(p)(r)| \leq \frac{|h|_\infty}{|\lambda|} < \frac{c^\beta}{2}. \quad (4-14)$$

Definimos

$$F_1(p)(r) = F_{y,1}(p)(r) := \int_0^\pi h(u(x, r+x)) dx \quad y \quad (4-15)$$

$$F_2(p)(r) = F_{y,2}(p)(r) := \int_0^\pi h(u(x, r-x)) dx. \quad (4-16)$$

Denotemos con

$$a(x, r, s) := c \sin(lx) + y(x, r+x) + v_1(x, r+x) + s(v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x))$$

donde $v_i = \mathcal{Z}p_i$ y $u_i = c \sin(lx) + y + v_i$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\begin{aligned} |F_1(p_1)(r) - F_1(p_2)(r)| &\leq \int_0^\pi |h(u_1(x, r+x)) - h(u_2(x, r+x))| dx \\ &\leq \int_0^\pi \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |v_1(x, r+x) - v_2(x, r+x)| ds dx \\ &\leq \int_0^\pi \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |p_1(r) - p_2(r)| ds dx \\ &\quad + \int_0^\pi \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |p_1(r+2x) - p_2(r+2x)| ds dx \end{aligned} \quad (4-17)$$

Para r y s fijos, definimos el conjunto

$$E_1 := \{x \in E_0^c : |a(x, r, s)| \geq h_1\}. \quad (4-18)$$

Afirmamos que $\mu(E_1^c) = 0$. En efecto, sea $x \notin E_1$, entonces

$$\begin{aligned} |a(x, r, s)| &\geq |c| |\sin(lx)| - \|y\|_\infty - 2 \|v_1\|_\infty - \|v_2\|_\infty \\ &\geq |c| |\sin(lx)| - 4c^\beta \\ &\geq \frac{3}{2} |c| \epsilon_0 - 4c^\beta \\ &> h_1. \end{aligned} \quad (4-19)$$

Tomemos la primera integral en el lado derecho de (4-17),

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |p_1(r) - p_2(r)| ds dr \\
& \leq \int_{E_0} \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |p_1(r) - p_2(r)| ds dr + \int_{E_1} \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |p_1(r) - p_2(r)| ds dr \\
& \leq \left(|h'|_\infty 4\epsilon_0 \pi + \frac{\pi}{32} \right) \|p_1 - p_2\|_\infty \\
& < \frac{\pi}{16} \|p_1 - p_2\|_\infty.
\end{aligned} \tag{4-20}$$

Aplicando argumentos similares al segundo término de (4-17). Y repitiendo la demostración para F_2 , la afirmación de que F es una contracción queda demostrada. ■

Como B_1 es un espacio cerrado en N , podemos aplicar el principio de contracciones para $y \in Y$ fijo con $\|y\|_\infty \leq c^\beta$, entonces existe un único $v(y) \in N$ que satisface (4-7) y $\|v\|_\infty \leq c^\beta$. Más aún, la función $y \rightarrow v(y)$ depende continuamente de y . La demostración de esto último será desarrollada con detalle más adelante.

4.1.3. Soluciones en el Rango

Definamos

$$B_2 := \{y \in Y : \|y\|_\infty \leq c^\beta\}.$$

B_2 es un convexo cerrado en Y . Definimos la aplicación $G : B_2 \rightarrow B_2$ por $G(y) = G_1(y) + G_2(y) \in W \oplus Z$ donde

$$G_1(y)(x, t) := -K_\lambda P_W h(c \sin(lx) + y(x, t) + v(y(x, t))) \tag{4-21}$$

$$G_2(y)(x, t) := |l^2 + \lambda|^{-1} \pi^{-2} \left\{ \int_\Omega [h(c \sin(lx) + y + v(y)) - h(c \sin(lx))] \sin x dx dt \right\} \sin(lx). \tag{4-22}$$

Lema 4.3. G tiene un punto fijo en B_1 .

Demostración. Por la Proposición 3.11 tenemos que G es compacta. Para aplicar el Teorema

de Punto Fijo de Schauder necesitamos demostrar que $G(B_2) \subset B_2$. Tomemos $y \in B_2$

$$\begin{aligned}
|G_1(y)(x, t)| &\leq \sqrt{2} \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0, l^2} \frac{1}{|k^2 - j^2 + \lambda|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|h(c \sin(lx) + y + v(y))\| \\
&\leq \sqrt{2} (1 + 2|\lambda|) \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0, l^2} \frac{1}{(k^2 - j^2)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \|h(c \sin(lx) + y + v(y))\| \\
&\leq 5\sqrt{2}(6\sqrt{2}\pi^3) \|h(c \sin(lx) + y + v(y))\| \\
&\leq 60\pi^3 |h|_\infty \\
&\leq c^\beta.
\end{aligned} \tag{4-23}$$

Denotemos con

$$E_2 = \begin{cases} ([0, c^\theta] \cup [\pi - c^\theta, \pi]) \times [0, 2\pi] & \text{para } l = 1 \\ ([0, c^\theta] \cup [\frac{\pi}{2} - c^\theta, \frac{\pi}{2} + c^\theta] \cup [\pi - c^\theta, \pi]) \times [0, 2\pi] & \text{para } l = 2. \end{cases} \tag{4-24}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
|G_2(y)(x, t)| &\leq \pi^{-2} |l^2 + \lambda|^{-1} \int_{\Omega} |h(c \sin(lx) + y + v(y)) - h(c \sin(lx))| |\sin(lx)| dx dt \\
&\leq \pi^{-2} |l^2 + \lambda|^{-1} \left[\int_{E_2} |h(c \sin(lx) + y + v(y)) - h(c \sin(lx))| |\sin(lx)| dx dt + \right. \\
&\quad \left. + \int_{E_2^c} |h(c \sin(lx) + y + v(y)) - h(c \sin(lx))| dx dt \right] \\
&\leq \frac{c}{L\pi^2} \left[16\pi |h|_\infty c^\theta \left(\frac{5}{2} c^\theta \right) + \int_{E_2^c} |h'(c \sin(lx) + \tilde{x}(x, t))| |y + v(y)| dx dt \right],
\end{aligned} \tag{4-25}$$

Donde $\tilde{x}(x, t)$ es tal que $|\tilde{x}(x, t)| \leq 2c^\beta$ y

$$\begin{aligned}
|c \sin(lx) + \tilde{x}(x, t)| &\geq c |\sin(lc^\theta)| - 2c^\beta \\
&\geq \frac{3}{2} c^{1+\theta} - 2c^\beta \\
&\geq \frac{1}{2} c^{1+\theta}
\end{aligned} \tag{4-26}$$

Teniendo en cuenta lo anterior

$$\begin{aligned}
|G_2(y)(x, t)| &\leq \frac{c}{\pi^2 L} (40\pi |h|_\infty c^{2\theta} + 2\pi^2 c^{\beta-\gamma(1+\theta)}) \\
&\leq \frac{2}{\pi L} (20|h|_\infty + \pi) c^{1+2\theta} \\
&\leq c^\beta
\end{aligned} \tag{4-27}$$

Luego $G : B_2 \rightarrow B_2$ y por el Teorema de Punto Fijo de Schauder tiene un punto fijo. ■

Por el lema (4.2), dado $y \in Y$ con $\|y\|_\infty \leq c^\beta$, existe un único $v(y) \in N$ que satisface la ecuación del núcleo (4-7). Si tomamos a y como el punto fijo de G cuya existencia está garantizada por 4.3, entonces tenemos soluciones al rango. Esto demuestra el Teorema 4.1.

4.2. Valores Propios de Multiplicidad Impar

Consideremos nuevamente el problema (4-1) y supongamos que $\lambda := \lambda_0 - \epsilon$, donde $-\lambda_0 = k_0^2$ es un valor propio de multiplicidad impar y $\epsilon > 0$ pequeño, arbitrario pero fijo.

Esta vez asumimos sobre h que

$$L := \lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x)x > 0. \quad (4-28)$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $L > 0$. En el caso en que $L < 0$ la bifurcación ocurre del lado contrario al valor propio cercano a $-\lambda$. Las hipótesis sobre h implican que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |h(x)| = 0. \quad (4-29)$$

Por ejemplo, una h con estas condiciones puede ser

$$h(x) = \frac{x}{1+x^2} + \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Bajo las hipótesis sobre h y λ tenemos el siguiente resultado que vamos a demostrar en este capítulo

Teorema 4.2. *Existe $\epsilon_0 > 0$ (que sólo depende de h y de λ_0) tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ el problema tiene una familia de soluciones débiles $u_\epsilon = v_\epsilon + y_\epsilon \in (N \cap L^\infty(\Omega)) \oplus (Y \cap L^\infty(\Omega))$. Además, si $\epsilon \rightarrow 0$, entonces $\|y_\epsilon\|_1 + \|v_\epsilon\| \rightarrow \infty$.*

4.2.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones y Lemas Previos

Si proyectamos la ecuación sobre el núcleo N y el rango Y , obtenemos las siguientes ecuaciones.

$$v = -\frac{1}{\lambda} P_N h(v + y) \quad (4-30)$$

$$y = -(\square + \lambda I)^{-1} P_\perp h(v + y). \quad (4-31)$$

Denotamos con $u = y + v$. Denotamos con W el subespacio de Y generado por los valores propios distintos de 0 y de $-\lambda_0$. Denotamos también con Z al subespacio propio generado por el valor propio de multiplicidad impar $-\lambda_0$. Para $\varphi \in Z$ y $w \in W$, la ecuación del rango la partimos en dos ecuaciones a saber

$$0 = -\epsilon\varphi + P_Z h(\varphi + v + w) \quad (4-32)$$

$$w = -(\square + \lambda I)^{-1} P_W h(\varphi + v + w). \quad (4-33)$$

El siguiente resultado del análisis nos será de utilidad.

Lema 4.4. *Sea $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ un polinomio trigonométrico que satisfice las condiciones Dirichlet-periódicas, entonces φ se anula en un conjunto de medida cero.*

Demostración. Escribimos $u = \cos(x)$, $v = \cos(t)$ y notamos con T_n y U_n los polinomios de Chebyshev de grado n de primera y segunda especie respectivamente [35, p. 348].

Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m (a_{kj} \sin(kx) \cos(jt) + b_{kj} \sin(kx) \sin(jt)) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^m [a_{kj} \sin x U_{k-1}(\cos x) T_j(\cos t) + b_{kj} \sin x \sin t U_{k-1}(\cos x) U_{j-1}(\cos t)] \quad (4-34) \\ &= \pm \sqrt{1-u^2} p_1(u, v) \pm \sqrt{1-u^2} \sqrt{1-v^2} p_2(u, v), \end{aligned}$$

donde p_1 y p_2 son polinomios de dos variables de grado $n + m - 1$ y $n + m - 2$ respectivamente con coeficientes en los reales. El conjunto donde φ se anula está contenido en el conjunto donde se anula $p_0 := p_1^2 - (1-v^2)^2 p_2^2$, que también es un polinomio en dos variables. Para $v \in [-1, 1]$ fijo, podemos ver al polinomio $p_0(u, v)$ como un polinomio en la variable u . Por el Teorema Fundamental del Álgebra, existe un número finito de funciones algebraicas $u_i : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $p_0(u_i(v), v) = 0$.

Sea $K_i = [-1, 1] \cap u_i^{-1}[-1, 1]$ y $f_i : K_i \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_i(v) := \arccos u_i(v)$ envía conjuntos de medida cero en conjuntos de medida cero. Claramente f_i es uniformemente continua en K_i . Queremos ver que el grafo $G_i = \{(v, u_i(v)) : v \in K\}$ tiene medida cero. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario pero fijo. Existe un $\delta \in (0, 1)$ que sólo depende del ϵ tal que para todos $s, s' \in [-1, 1]$ con $|s - s'| < \delta$, $|u_i(s) - u_i(s')| < \epsilon$. Sea ahora n el entero más pequeño tal que $n\delta > 1$. Entonces existe una partición de $[-1, 1]$, $-1 = s_0 < \dots < s_n = 1$ tal que para todo $i = 1, \dots, n$, $|s_j - s_{j-1}| < \delta$. Si $K_i \cap [s_{j-1}, s_j] \neq \emptyset$, tomamos $s_j^* \in K_i \cap [s_{j-1}, s_j]$ y definimos $z_j = u_i(s_j^*)$ para $j = 1, \dots, n$. Si tomamos $s \in [s_{j-1}, s_j] \cap K_i$, entonces $u_i(s) \in [z_j - \epsilon, z_j + \epsilon]$. Así $G \subseteq \bigcup_{j=1}^n ([s_{j-1}, s_j] \cap K_i) \times [z_j - \epsilon, z_j + \epsilon]$. Si μ representa la medida de Lebesgue vemos que

$$\begin{aligned} \mu(G_i) &\leq \sum_{i=1}^n \mu([s_{j-1}, s_j] \cap K_i \times [z_j - \epsilon, z_j + \epsilon]) \quad (4-35) \\ &< 2\delta\epsilon n < 2\epsilon. \end{aligned}$$

Entonces $\mu(G_i) = 0$ para todo i . Por lo tanto φ se anula sobre la unión finita $G = \bigcup G_i$ de conjuntos de medida cero. En otras palabras $\mu(\varphi^{-1}(0)) = 0$. ■

Lema 4.5. *Existen $B_0, B_1, B_2 > 0$, tal que para toda $\varphi \in Z$ con $\|\varphi\| \geq B_0$ se cumple que*

$$B_1 < \int_{\Omega} h(\varphi + sz)\varphi < B_2. \quad (4-36)$$

para todo $s \in [0, 1]$ y toda $z \in L^\infty(\Omega)$ con $\|z\|_\infty \leq M_1$ para algún $M_1 > 0$. En otras palabras, B_1 y B_2 son estimadores uniformes con respecto a s y z para (4-36).

Demostración. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función arbitraria pero fija tal que $|g(x)| \leq M_1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Existe $M_0 > 0$ tal que si $|x| > M_0$, entonces $\frac{L}{2} < h(x + g(x))x < \frac{3L}{2}$. Sean $\psi \in Z$ tal que $\|\psi\| = 1$, $s > 0$ tal que $\varphi = s\psi$ y

$$0 < \delta < \min \left\{ 2\pi^2, \frac{\pi^2}{L(\frac{L}{2} + |h|_\infty M_0)} \right\}. \quad (4-37)$$

Entonces existe $\eta > 0$ que depende únicamente de δ , tal que

$$\mu(\{(x, t) \in \Omega : |\psi(x, t)| < \eta\}) < \delta, \quad (4-38)$$

uniformemente para ψ . Veamos que en efecto (4-38) se cumple uniformemente para ψ . De no ser así, existiría $\delta_0 > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ una ψ_n con $\|\psi_n\| = 1$ tal que

$$\mu \left(\left\{ (x, t) \in \Omega : |\psi_n(x, t)| < \frac{1}{n} \right\} \right) \geq \delta_0. \quad (4-39)$$

Como $S = \{\psi \in Z : \|\psi\| = 1\}$ es compacto, existe una subsucesión convergente de ψ_n . Sin pérdida de generalidad supongamos que la subsucesión convergente es la misma ψ_n . Sea $\psi_\star \in S$ tal que $\psi_n \rightarrow \psi_\star$. Dado que ψ_\star se anula en un conjunto de medida cero, para $\delta_0/2$ existe η_0 tal que si

$$\Omega_\star = \{(x, t) \in \Omega : |\psi_\star(x, t)| < \eta_0\},$$

entonces $\mu(\Omega_\star) < \delta_0/2$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2/n_0 < \eta_0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $\|\psi_n - \psi_\star\| < 1/n_0$. Tomemos $n_\star := \max\{N, n_0\}$. Entonces existe $\psi_{n_\star} \in S$ tal que si

$$\Omega_{n_\star} = \{(x, t) \in \Omega : |\psi_{n_\star}(x, t)| < 1/n_\star\},$$

entonces $\mu(\Omega_{n_\star}) \geq \delta_0$. Sea $(x, t) \in \Omega_{n_\star}$,

$$\begin{aligned} |\psi_\star(x, t)| &< \frac{1}{n_0} + |\psi_{n_\star}(x, t)| \\ &< \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_\star} \\ &< \frac{2}{n_0} < \eta_0. \end{aligned} \quad (4-40)$$

Esto implica que $\Omega_{n_\star} \subseteq \Omega_\star$ y por ende $\mu(\Omega_{n_\star}) < \delta_0/2$ lo cual es absurdo.

Sean $|s| > \frac{M_0}{\eta}$ y $\Omega_0 = \{(x, t) \in \Omega : |\varphi(x, t)| = |s\psi(x, t)| < M_0\}$, entonces $\mu(\Omega_0) < \delta$.

Tomando $B_0 := \frac{M_0}{\eta}$ y $\|\varphi\| \geq B_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h(\varphi + sz)\varphi &= \int_{\Omega_0^c} h(\varphi + sz)\varphi + \int_{\Omega_0} h(\varphi + sz)\varphi \\ &\geq (2\pi^2 - \delta)\frac{L}{2} - |h|_\infty M_0 \delta \\ &=: B_1 > 0. \end{aligned} \quad (4-41)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h(\varphi + sz)\varphi &= \int_{\Omega_0^c} h(\varphi + sz)\varphi + \int_{\Omega_0} h(\varphi + sz)\varphi \\ &\leq (2\pi^2 - \delta)\frac{3}{2}L + \delta|h|_{\infty}M_0 =: B_2. \end{aligned} \quad (4-42)$$

Lo que completa la demostración del lema. ■

4.2.2. Soluciones en el Núcleo

Para cada $v \in N$ podemos encontrar una única $p(v) = p \in L^2(0, 2\pi)$ tal que p es 2π -periódica, $\int_0^{2\pi} p = 0$ y $v(x, t) = p(t + x) - p(t - x)$. La ecuación del núcleo es equivalente a la siguiente ecuación integral

$$p(r) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{\pi} [h(u(x, r + x)) - h(u(x, r - x))] dx. \quad (4-43)$$

Tomemos $r_1 := 2|h|_{\infty}$ y $R_1 := 8\sqrt{3}\pi(1 + |\lambda_0|)|h|_{\infty}$, $\rho_1 = \left(\frac{B_1}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$ y $\rho_2 = \left(\frac{B_2}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$ donde $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño por determinar. Sean

$$\mathcal{A} := \{\varphi \in Z : \rho_1 < \|\varphi\| < \rho_2\}, \quad (4-44)$$

$$\mathcal{B} := \{w \in W : \|w\|_{\infty} < R_1\} \quad \text{y} \quad (4-45)$$

$$\mathcal{C} := \left\{ p \in L^{\infty}(0, 2\pi) : p \text{ es } 2\pi \text{ periódica } \int_0^{2\pi} p = 0 \text{ y } \|p\|_{\infty} \leq r_1 \right\}. \quad (4-46)$$

Para $\varphi \in \overline{\mathcal{A}}$ y $w \in \overline{\mathcal{B}}$ fijos, definimos $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ mediante la fórmula

$$F(p)(r) = F_{\varphi, w}(p)(r) := \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{\pi} [h(u(x, r + x)) - h(u(x, r - x))] dx, \quad (4-47)$$

Teniendo en cuenta que $u = \varphi + v + w$ y que $v = \mathcal{Z}p$. Queremos encontrar un punto fijo para F vía el principio de contracciones. Para esto hay que demostrar dos cosas (1) $F(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$ y (2) F es lipschitziana con constante de Lipschitz menor que 1. La primera es inmediata. Veamos la segunda.

Sea

$$\epsilon_1 = \frac{\pi(2|\lambda_0| - 1)}{4(|h'|_{\infty} + \pi)(1 + \pi)}. \quad (4-48)$$

Escribamos $\varphi = \|\varphi\| \psi$. Para este ϵ_1 existe un $\delta_1 > 0$ (que sólo depende de h y λ_0) tal que si $\Omega_r := \{x \in [0, \pi] : |\psi(x, r + x)| < \delta_1\}$ entonces $\mu(\Omega_r) < \epsilon_1$. Se puede demostrar usando la compacidad de $[0, 2\pi]$ y los mismos argumentos del Lema 4.5 que δ_1 no depende de r . Si denotamos con $\phi_r(x) = \psi(x, r + x)$, la aplicación definida para r fijo por $\psi \rightarrow \phi_r$ es continua,

por lo tanto envía el conjunto compacto $S = \{\psi \in Z : \|\psi\| = 1\}$ en un conjunto compacto. Esto implica, en últimas, que δ_1 tampoco depende de ψ .

Si hacemos de antemano $\epsilon_0 < \delta_1^4$, tenemos que el conjunto definido por

$$\Omega_1 := \{x \in [0, \pi] : |\psi(x, r+x)| < \epsilon_0^{1/4}\}$$

satisface $\mu(\Omega_1) < \epsilon_1$.

Al tomar $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$ se definen dos funciones $v_i(x, t) = p_i(t+x) - p_i(t-x) \in N$ y dos funciones $u_1, u_2 \in N \oplus W \oplus Z$ dadas por $u_i(x, t) = \varphi(x, t) + w(x, t) + v_i(x, t)$ con $i = 1, 2$. Definamos

$$a(x, r, s) := \varphi(x, r+x) + w(x, r+x) + s(v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)). \quad (4-49)$$

Sea $M_2 > 0$ tal que si $|\zeta| \geq M_2$ entonces $|h'(\zeta)| < \epsilon_1$. Tomemos de antemano

$$\epsilon_0 < \left(\frac{\sqrt{B_1}}{M_2 + R_1 + 4r_1} \right)^4. \quad (4-50)$$

Si $x \notin \Omega_1$, tenemos que

$$\mu(\{x \in [0, \pi] : |\varphi(x, r+x)| \geq \sqrt{B_1} \epsilon_0^{-1/4}\}) \geq \pi - \epsilon_1 \quad (4-51)$$

y $|a(x, r, s)| \geq M_2$. De este modo

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi |h(u_2(x, r+x)) - h(u_1(x, r+x))| dx \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)| dx ds \\ &= \int_{\Omega_1} \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)| dx ds \\ & \quad + \int_{\Omega_1^c} \int_0^1 |h'(a(x, r, s))| |v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)| dx ds \\ &< (\|h'\|_\infty + \pi)(1 + \pi)\epsilon_1 \|p_1 - p_2\|_\infty. \end{aligned} \quad (4-52)$$

De manera similar se demuestra para la característica $(x, r-x)$. Por tanto

$$\|F(p_1) - F(p_2)\|_\infty < \frac{1}{2} \|p_1 - p_2\|_\infty \quad (4-53)$$

Por el Principio de Contracciones, dados $\varphi \in \mathcal{A}$ y $w \in \mathcal{B}$, existe un único $v(\varphi, w) \in N$ tal que $v(\varphi, w)$ satisface la ecuación. Además la aplicación $(\varphi, w) \rightarrow v(\varphi, w)$ es continua.

4.2.3. Soluciones en el Rango

Definamos $\Theta : \bar{\mathcal{A}} \rightarrow Z$ mediante la fórmula

$$\Theta(\varphi) := -\epsilon\varphi + P_Z h(\varphi) \quad (4-54)$$

Definamos también $H_1 : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}} \times [0, 1] \rightarrow Z$ mediante la fórmula

$$H_1(\varphi, w, s) = -\epsilon\varphi + P_Z h(\varphi + s(w + v(\varphi, w))). \quad (4-55)$$

Notemos que H_1 es continua, que $H_1(\cdot, w, 0) = \Theta$ para todo $w \in W$ y que $H_1(\varphi, w, 1) = 0$ es precisamente la ecuación en el espacio Z .

Recordemos que

$$\partial(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = (\partial\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \times \partial\mathcal{B}). \quad (4-56)$$

Lema 4.6. *Sea M_0 y η como en el Lema 4.5. Tomemos $\epsilon_0 < \frac{\eta^2 B_1}{M_0^2}$ y sean \mathcal{A} , \mathcal{B} , H_1 y Θ definidos como antes. Entonces*

$$a) 0 \notin H_1(\partial\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times [0, 1])$$

$$b) \deg(\Theta, \mathcal{A}, 0) = -2.$$

Demostración. Tomemos primero $(\varphi, w) \in \partial\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Un cálculo directo nos muestra que si $\|\varphi\| = \rho_1$, entonces

$$\begin{aligned} (H_1(\varphi, w, s) | \varphi) &= -\epsilon\rho_1^2 + \int_{\Omega} h(\varphi + s(w + v(\varphi, w)))\varphi \\ &> B_1 - B_1 = 0. \end{aligned} \quad (4-57)$$

De manera similar, si $\|\varphi\| = \rho_2$

$$\begin{aligned} (H_1(\varphi, w, s) | \varphi) &= -\epsilon\rho_2^2 + \int_{\Omega} h(\varphi + s(w + v(\varphi, w)))\varphi \\ &< -B_2 + B_2 = 0. \end{aligned} \quad (4-58)$$

Las desigualdades (4-57) y (4-58) demuestran la primera parte del lema. Asimismo, estas ecuaciones sugieren que en $C_1 := \{\varphi \in Z : \|\varphi\| \leq \rho_1\}$ la función Θ es homótopa a la identidad I y que en $C_2 := \{\varphi \in Z : \|\varphi\|_{\infty} \leq \rho_2\}$ la función Θ es homótopa a $-I$. En efecto. Para el primer caso definamos la homotopía $H_{\Theta, I} : C_1 \times [0, 1] \rightarrow Z$ por

$$H_{\Theta, I}(\varphi, s) = (1 - s)\varphi + s\Theta(\varphi). \quad (4-59)$$

Necesitamos ver que $0 \notin H_{\Theta, I}(\partial C_1 \times [0, 1])$. Supongamos que existen $\varphi_1 \in \partial B_1$ y $s_1 \in [0, 1]$ tales

$H_{\Theta, I}(\varphi_1, s_1) = 0$. De ser así $(H_{\Theta, I}(\varphi_1, s_1) \mid \varphi_1) = 0$, pero esto implica que se debe satisfacer

$$s_1 = \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2(1 + \epsilon_0) - \int_{\Omega} h(\varphi_1)\varphi_1}. \quad (4-60)$$

Si el denominador en (4-60) es no-positivo s_0 no existiría. En el caso en que el denominador en (4-60) sea positivo se debe cumplir que el denominador debe ser mayor o igual al numerador, pero esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho_1^2\epsilon - \int_{\Omega} h(\varphi_0)\varphi_0 \\ &< \rho_1^2\epsilon - B_1 \\ &= B_1 - B_1 = 0 \end{aligned} \quad (4-61)$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $0 \notin H_{\Theta, I}(\partial C_1 \times [0, 1])$ y $\deg(\Theta, C_1, 0) = 1$.

De manera similar, definamos $H_{\Theta, -I} : C_2 \times [0, 1] \rightarrow Z$ por

$$H_{\Theta, -I}(\varphi, s) = (1 - s)(-\varphi) + s\Theta(\varphi). \quad (4-62)$$

Necesitamos ver ahora que $0 \notin H_2(\partial C_2 \times [0, 1])$. Supongamos que existen $\varphi_2 \in \partial C_2$ y $s_2 \in [0, 1]$ tales que $H_{\Theta, -I}(\varphi_2, s_2) = 0$. De ser así $(H_{\Theta, -I}(\varphi_2, s_2) \mid \varphi_2) = 0$, pero esto implica que se debe satisfacer

$$s_2 = \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2(1 - \epsilon_0) + \int_{\Omega} h(\varphi_2)\varphi_2}. \quad (4-63)$$

s_2 es claramente no-negativo. De manera similar, para que s_2 tenga sentido se requiere que el denominador en (4-63) sea mayor o igual al numerador, pero esto implica que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\rho_2^2\epsilon + \int_{\Omega} h(\varphi_0)\varphi_0 \\ &< -B_2 + B_2 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4-64)$$

lo cual es absurdo. Por lo tanto $0 \notin H_{\Theta, -I}(\partial B_2 \times [0, 1])$ y $\deg(\Theta, B_{\rho_2}(0), 0) = -1$ dado que $\dim Z$ es impar.

Por la propiedad de aditividad del grado $\deg(\Theta, \mathcal{A}, 0) = -2$, lo que demuestra el lema. \blacksquare

Definimos ahora $\Xi : \overline{B} \rightarrow W$ mediante la fórmula

$$\Xi(w) := w + (\square + \lambda I)^{-1} P_W h(w). \quad (4-65)$$

Definimos también $H_2 : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}} \times [0, 1] \rightarrow W$ por

$$H_2(\varphi, w, s) = w + (\square + \lambda I)^{-1} P_W h(w + s(\varphi + v(\varphi, w))) \quad (4-66)$$

Es claro que $H_2(\varphi, \cdot, 0) = \Xi$ para todo $\varphi \in \mathcal{A}$, H_2 es continua y $H_2(\varphi, w, 1) = 0$ es la ecuación en el espacio W .

Lema 4.7. *Con las notaciones establecidas hasta el momento, tenemos que*

a) $0 \notin H_2(\mathcal{A} \times \partial\mathcal{B} \times [0, 1])$.

b) $\deg(\Xi, \mathcal{B}, 0) = 1$.

Demostración. Para demostrar la primera parte, tomemos $(\varphi, w) \in \mathcal{A} \times \partial\mathcal{B}$ y $s \in [0, 1]$. Sean $a_{kj}, b_{kj} \in \mathbb{R}$ tales que

$$P_W h(w + s(\varphi + v(\varphi, w))) = \sum_{k^2 - j^2 \neq -\lambda_0, 0} (a_{kj} \sin(kx) \sin(jt) + b_{kj} \sin(kx) \cos(jt)). \quad (4-67)$$

Entonces

$$\begin{aligned} & |(\square + \lambda I)^{-1} P_W h(w + s(\varphi + v(\varphi, w)))| \\ & \leq \sum_{k^2 - j^2 \neq -\lambda_0, 0} \frac{|a_{kj}| + |b_{kj}|}{|k^2 - j^2 + \lambda|} \\ & \leq B_\lambda \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0} \frac{1}{|k^2 - j^2|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0} (a_{kj} + b_{kj})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2\sqrt{2}(1 + |\lambda_0|) \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0} \frac{1}{|k^2 - j^2|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0} (a_{kj}^2 + b_{kj}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-68) \\ & \leq 2\sqrt{6}(1 + |\lambda_0|) \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0} (a_{kj}^2 + b_{kj}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2\sqrt{6}(1 + |\lambda_0|) \left(\int_{\Omega} h^2(w + s(\varphi + v(\varphi, w))) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 4\sqrt{3}(1 + |\lambda_0|)\pi|h|_{\infty} = \frac{R_1}{2}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \|H_2(\varphi, w, s)\|_{\infty} & \geq \|w\|_{\infty} - \|(\square + \lambda I)^{-1} P_W h(w + s(\varphi + v(\varphi, w)))\|_{\infty} \\ & \geq \frac{R_1}{2} > 0 \end{aligned} \quad (4-69)$$

y la primera parte queda demostrada.

Para demostrar la segunda parte, definimos la homotopía $H_{\Xi} : \bar{\mathcal{B}} \times [0, 1] \rightarrow W$ mediante la fórmula

$$H_{\Xi}(w, s) = w + s(\square + \lambda I)^{-1} P_W h(w). \quad (4-70)$$

Usando el mismo argumento empleado para demostrar (a), vemos que

$$0 \notin H_{\Xi}(\bar{\mathcal{B}} \times [0, 1]). \quad (4-71)$$

Como $\deg(I, \mathcal{B}, 0) = 1$, por invariancia bajo homotopía, $\deg(\Xi, \mathcal{B}, 0) = 1$. ■

Definamos $H : \bar{\mathcal{A}} \times \bar{\mathcal{B}} \times [0, 1] \rightarrow Z \times W$ mediante la fórmula

$$H(\varphi, w, s) = (H_1(\varphi, w, s), H_2(\varphi, w, s)). \quad (4-72)$$

Es claro que H es una homotopía y combinando los lemas 4.6 y 4.7 tenemos que

$$(0, 0) \notin H(\partial(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \times [0, 1]).$$

Entonces, por la propiedad del producto de los grados, ver [11, p. 64], tenemos que

$$\deg(H, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, 0) = \deg(\Theta, \mathcal{A}, 0) \deg(\Xi, \mathcal{B}, 0) = -2 \quad (4-73)$$

En otras palabras, la ecuación del rango tiene solución. Llamemosla $y_{\epsilon} = (\varphi_{\epsilon}, w_{\epsilon})$. La existencia de $v_{\epsilon} = v(\varphi_{\epsilon}, w_{\epsilon})$ se tiene por la contracción definida en la ecuación del núcleo.

4.3. Continuos de Soluciones

En esta sección expondremos la topología de las soluciones encontradas hasta el momento. Suponemos nuevamente que λ está cercano al valor propio $-\lambda_0$ de multiplicidad impar. Seguimos estudiando las soluciones débiles al problema (4-1). No son necesarias hipótesis adicionales, suponemos como antes, que $h \in C^1(\mathbb{R})$ es acotada y que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |h'(x)| = 0$.

Comenzaremos con algunos lemas que relacionan los espacios N , Z y W . Recordemos que Z es el espacio propio generado por las funciones propias asociadas al valor propio $-\lambda_0$. Definimos la función $\tilde{\cdot} : Z \setminus \{0\} \rightarrow Z \setminus \{0\}$ por

$$\tilde{\varphi} := \frac{\varphi}{\|\varphi\|^2}. \quad (4-74)$$

Claramente $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi$ y $\tilde{\cdot}$ es un difeomorfismo de $Z \setminus \{0\}$ en sí mismo. Adicionalmente envía compactos en compactos y cerrados en cerrados.

Fijemos de antemano $\underline{\lambda}, \bar{\lambda} < 0$ tales que $0 < -\underline{\lambda} < -\lambda_0 < -\bar{\lambda}$. Tenemos entonces el siguiente lema.

Lema 4.8. *Existen $\varepsilon_1 > 0$, $\bar{R}_1 > 0$ y $\bar{r}_1 > 0$ tales que si $\|\tilde{\varphi}\| \leq \varepsilon_1$, $w \in L^\infty(\Omega) \cap W$ con $\|w\|_\infty \leq R_1$ y $\lambda \in [\bar{\lambda}, \underline{\lambda}]$, entonces la ecuación*

$$v = -\frac{1}{\lambda} P_N h(v + w + \varphi) \quad (4-75)$$

tiene una única solución $v(\lambda, \tilde{\varphi}, w)$ en $N \cap L^\infty(\Omega)$ con $\|v\|_\infty \leq 2\bar{r}_1$.

Demostración. Tomemos $\bar{r}_1 = r_1$,

$$\bar{R}_1 = 8\sqrt{3}(|\bar{\lambda}| + 1)\pi|h|_\infty, \quad (4-76)$$

$$\varepsilon_1 < \frac{\pi|\underline{\lambda}|}{2(|h'|_\infty + \pi)(1 + \pi)}, \quad (4-77)$$

y

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{M_2 + R_1 + 4r_1} \right)^2 \quad (4-78)$$

Con estos elementos, basta repetir la demostración de la Sección 4.2.2 y el lema queda demostrado. ■

Lema 4.9. *Sea $\lambda \in [\bar{\lambda}, \underline{\lambda}]$. Entonces existe ε_2 tal que si $\tilde{\varphi} \in Z \setminus \{0\}$ con $\|\tilde{\varphi}\| \leq \varepsilon_2$, entonces existe una única solución $w(\lambda, \tilde{\varphi}) \in L^\infty(\Omega) \cap W$, con $\|w(\lambda, \tilde{\varphi})\|_\infty \leq \bar{R}_1$, a la ecuación*

$$w + (\square + \lambda I)^{-1} P_W h(w + \varphi + v(\lambda, \tilde{\varphi}, w)) = 0. \quad (4-79)$$

Demostración. Para demostrar la existencia basta repetir el argumento del Lema 4.7. Para demostrar la unicidad necesitamos algo de trabajo adicional. Supongamos que para todo $\varepsilon_2 > 0$, existe un $\lambda \in [\bar{\lambda}, \underline{\lambda}]$ y un $\tilde{\varphi}$ con $\|\tilde{\varphi}\| \leq \varepsilon_2$ tales que w_1 y w_2 (λ y $\tilde{\varphi}$) satisfacen la ecuación (4-79) con $w_1 \neq w_2$.

Notemos a v_i la solución $v(\lambda, \tilde{\varphi}, w_i) \in N$ para $i = 1, 2$. Queremos ver que

$$\|v_1 - v_2\| \leq \|w_1 - w_2\| \quad (4-80)$$

para algún ε_2 . En efecto. Repitamos la demostración de la Sección 4.2.2 tomando

$$\varepsilon_1 := \frac{\pi|\underline{\lambda}|}{4(|h'|_\infty + \pi)} \quad (4-81)$$

hacemos nuevamente $M_2 > 0$ tal que $|h'(x)| < \varepsilon_1$ para $|x| \geq M_2$. De este modo si tomamos

$$\varepsilon'_2 := \left(\frac{1}{M_2 + 3\bar{R}_1 + 6r_1} \right)^2, \quad (4-82)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |h((\varphi + w_1 + v_1)(x, r + x)) - h((\varphi + w_2 + v_2)(x, r + x))| dx \\ \leq (|h'|_\infty + \pi)\epsilon_1(\|w_1 - w_2\|_\infty + \|v_1 - v_2\|_\infty). \end{aligned} \quad (4-83)$$

De ahí que $\|v_1 - v_2\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_\infty + \frac{1}{2} \|w_1 - w_2\|_\infty$ como queríamos probar.

Supongamos ahora que para $(\lambda, \tilde{\varphi})$ existen dos soluciones w_1 y w_2 con v_1 y v_2 como sus correspondientes funciones en el núcleo. Tomemos

$$\epsilon_2 = \left(\frac{1}{8\sqrt{6}(\sqrt{2}\pi + |h'|_\infty)} \right)^2 \quad (4-84)$$

y sea $M_3 > 0$ tal que $|h'(x)| < \epsilon_2$ para $|x| \geq M_3$. Definimos entonces $\epsilon_2 = \min\{\epsilon'_2, \epsilon''_2\}$ donde

$$\epsilon''_2 := \left(\frac{1}{M_3 + 3\bar{R}_1 + 6r_1} \right)^2. \quad (4-85)$$

Si tomamos $\Omega_2 := \{(x, t) \in \Omega : |\psi(x, t)| < \epsilon_2^{1/2}\}$ para $\|\psi\| = 1$ y

$$b(x, t, s) = \varphi(x, t) + w_1(x, t) + v_1(x, t) + s(w_2(x, t) - w_1(x, t) + v_2(x, t) - v_1(x, t)), \quad (4-86)$$

entonces $\mu(\Omega_2) < \epsilon_2$ y

$$\begin{aligned} |w_1(x, t) - w_2(x, t)| &\leq 2\sqrt{6}(1 + |\bar{\lambda}|) \left(\int_\Omega |h(\varphi + w_1 + v_1) - h(\varphi + w_2 + v_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 4\sqrt{6}(1 + |\bar{\lambda}|) \|w_1 - w_2\|_\infty \left(\int_{\Omega_2} \int_0^1 |h'(b)|^2 + \int_{\Omega_2^c} \int_0^1 |h'(b)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 4\sqrt{6}(1 + |\bar{\lambda}|) \sqrt{\epsilon_2} (\sqrt{2}\pi + |h'|_\infty) \|w_1 - w_2\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{2} \|w_1 - w_2\|_\infty \end{aligned} \quad (4-87)$$

lo cual es absurdo y el lema queda demostrado. ■

Lema 4.10. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $B_0 = \{\tilde{\varphi} \in Z : \|\tilde{\varphi}\| \leq \epsilon_0\}$, entonces las funciones $v : [\bar{\lambda}, \underline{\lambda}] \times B_0 \rightarrow N$ y $w : [\bar{\lambda}, \underline{\lambda}] \times B_0 \rightarrow W$ definidas por $(\lambda, \tilde{\varphi}) \mapsto w(\lambda, \tilde{\varphi})$ y $(\lambda, \tilde{\varphi}) \mapsto v(\lambda, \tilde{\varphi}) = v(\lambda, \tilde{\varphi}, w(\lambda, \tilde{\varphi}))$ para $\tilde{\varphi} \neq 0$ y $w(\lambda, 0) = v(\lambda, 0) = 0$ son uniformemente continuas y abiertas.*

Demostración. Tomemos

$$\epsilon_4 := \frac{\pi|\underline{\lambda}|}{8(\pi + |h'|_\infty)} \quad (4-88)$$

y sea $M_4 > 0$ tal que $|h'(x)| \leq \epsilon_4$ si $|x| \geq M_4$. Sea $\eta_0 > 0$ tal que si $\Omega_4 := \{x \in [0, \pi] : |\psi(x, r)| < \eta_0\}$ para $\|\psi\| = 1$, entonces $\mu(\Omega_4) < \epsilon_4$. Escojamos

$$\epsilon'_0 = \min \left\{ \epsilon_1, \epsilon_2, \frac{1}{2}, \frac{\eta_0^2}{4}, \left(\frac{1}{6r_1 + 3\bar{R}_1 + M_4} \right)^2 \right\}. \quad (4-89)$$

Fijemos $\varphi \in Z$ con $\|\varphi\| \geq \frac{1}{\epsilon'_0}$ y $\lambda \in [\bar{\lambda}, \underline{\lambda}]$. Sea $\psi \in Z \setminus \{0\}$ con $\|\psi\| < 1$ y $\|\widetilde{\varphi + \psi}\| \leq \epsilon_2$ y tomemos $\delta \in \mathbb{R}$ con $|\delta| \leq \frac{|\underline{\lambda}|}{2}$.

Denotemos $v_2 = v(\lambda + \delta, \widetilde{\varphi + \psi})$, $v_1 = v(\lambda, \tilde{\varphi})$, $p_2 = \mathcal{Q}v_2$, $p_1 = \mathcal{Q}v_1$, $w_2 = w(\lambda + \delta, \widetilde{\varphi + \psi})$, $w_1 = w(\lambda, \tilde{\varphi})$, $u_2 = v_2 + \varphi_2 + w_2$, $u_1 = v_1 + \varphi_1 + w_1$, $\Delta v = v_2 - v_1$ y $\Delta w = w_2 - w_1$.

Para $s \in [0, 1]$, $\|(\varphi + \psi)(1 - s) + s\varphi\| \geq \frac{1}{2\epsilon'_0} \geq 1$. Si $x \notin \Omega_4$, entonces si definimos

$$a_4(x, r, s) = (1 - s)(\varphi(x, r) + \psi(x, r)) + s\varphi(x, r) \\ + v_1(x, r) + w_1(x, r) + s(v_2(x, r) + w_2(x, r) - v_1(x, r) - w_1(x, r)), \quad (4-90)$$

tenemos que $|a_4(x, r, s)| \geq 2\epsilon'_0{}^{-1/2} \geq M_4$.

Entonces

$$\left| \int_{\Omega} [h(u_2(x, r + x)) - h(u_1(x, r + x))] dx \right| \\ \leq \left(\int_{\Omega} \int_0^1 |h'(a_4(x, r, s))| ds dx \right) (\|\psi\| + \|\Delta w\|_{\infty} + \|\Delta v\|_{\infty}). \quad (4-91) \\ \leq \left(\int_{\Omega_4} \int_0^1 |h'(a_4(x, r, s))| ds dx + \int_{\Omega_4^c} \int_0^1 |h'(a_4(x, r, s))| ds dx \right) (\|\psi\| + \|\Delta w\|_{\infty} + \|\Delta v\|_{\infty}) \\ \leq (\pi + |h'|_{\infty})\epsilon_4 (\|\psi\| + \|\Delta w\|_{\infty} + \|\Delta v\|_{\infty}).$$

De (4-91) y del hecho que $|ax - by| \leq |b||x - y| + |x||b - a|$ si $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\left| \frac{1}{2\pi(\lambda + \delta)} \int_0^{\pi} h(u_2(x, r + x)) dx - \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{\pi} h(u_1(x, r + x)) dx \right| \\ \leq \frac{1}{\pi|\underline{\lambda}|} (\pi + |h'|_{\infty})\epsilon_4 (\|\psi\| + \|\Delta w\|_{\infty} + \|\Delta v\|_{\infty}) + 2\pi^2 |h|_{\infty} \delta. \quad (4-92)$$

Repetiendo el mismo procedimiento para la característica $(x, r - x)$ tenemos que

$$\|p_1 - p_2\|_{\infty} \leq \frac{2}{\pi|\underline{\lambda}|} (\pi + |h'|_{\infty})\epsilon_4 (\|\psi\| + \|\Delta w\|_{\infty} + \|\Delta v\|_{\infty}) + 4\pi^2 |h|_{\infty} \delta. \quad (4-93)$$

Usando el hecho de que $\|\mathcal{Z}p\|_{\infty} \leq 2\|p\|_{\infty}$ y la definición de ϵ_4 , tenemos que

$$\|\Delta v\|_{\infty} \leq \frac{1}{2} (\|\psi\| + \|\Delta w\|_{\infty} + \|\Delta v\|_{\infty}) + 8\pi^2 |h|_{\infty} \delta. \quad (4-94)$$

Es decir,

$$\|\Delta v\|_\infty \leq \|\psi\| + \|\Delta w\|_\infty + 16\pi^2|h|_\infty\delta. \quad (4-95)$$

Tomemos ahora

$$\epsilon_5 := \left(\frac{1}{8\sqrt{6}(1+|\bar{\lambda}|)(|h'|_\infty + \sqrt{2\pi})} \right)^2. \quad (4-96)$$

Sea también $M_5 > 0$ tal que $|h'(x)| < \epsilon_5$ para $|x| \geq M_5$. Sea $\eta_1 > 0$ tal que si

$$\Omega_5 = \{(x, t) \in \Omega : |\phi(x, t)| < \eta_1\}$$

para ϕ con $\|\phi\| = 1$, entonces $\mu(\Omega_5) < \epsilon_5$. Sea $\epsilon_0'' = \frac{\eta_1}{4}$ y $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_0', \epsilon_0''\}$.

Calculemos, por un lado,

$$\begin{aligned} & |(\square + \lambda I)^{-1}P_W h(u_2(x, t)) - (\square + \lambda I)^{-1}P_W h(u_2(x, t))| \\ & \leq 2\sqrt{6}(1+|\bar{\lambda}|) \left(\int_\Omega |h(u_1) - h(u_1)|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq 2\sqrt{6}(1+|\bar{\lambda}|) \left(\int_\Omega \int_0^1 |h'(a_4)|^2 \right)^{1/2} (\|\psi\| + \|\Delta w\|_\infty + \|\Delta v\|_\infty) \\ & \leq 2\sqrt{6}(1+|\bar{\lambda}|) \left(\int_{\Omega_5} \int_0^1 |h'(a_4)|^2 + \int_{\Omega_5^c} \int_0^1 |h'(a_4)|^2 \right)^{1/2} (2\|\psi\| + 2\|\Delta w\|_\infty + 16\pi^2|h|_\infty\delta) \\ & \leq 4\sqrt{6}(1+|\bar{\lambda}|)(|h'|_\infty + \sqrt{2\pi})\sqrt{\epsilon_5} (\|\psi\| + \|\Delta w\|_\infty + 8\pi^2|h|_\infty\delta) \end{aligned} \quad (4-97)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} & |[(\square + (\lambda + \delta))^{-1} - (\square + \lambda)^{-1}]P_W h(u_2)| \\ & \leq \sqrt{2\delta} \left(\sum_{k^2 - j^2 \neq 0, -\lambda_0} \frac{1}{(k^2 - j^2 + \lambda + \delta)^2(k^2 - j^2 + \lambda)^2} \right)^{1/2} \|h(u_2)\| \\ & \leq 2\pi\delta(1 + 2|\bar{\lambda}|)|h|_\infty. \end{aligned} \quad (4-98)$$

Combinando (4-97) con (4-98) y usando la definición de ϵ_5 obtenemos

$$\|\Delta w\| \leq \|\psi\| + C_1(\bar{\lambda})\delta|h|_\infty, \quad (4-99)$$

donde $C_1(\bar{\lambda}) > 0$ es una constante que sólo depende de $\bar{\lambda}$. Combinando, a su vez, (4-95) con (4-99) obtenemos

$$\|\Delta v\| \leq 2\|\psi\| + C_2(\bar{\lambda})\delta|h|_\infty. \quad (4-100)$$

donde $C_2(\bar{\lambda}) > 0$ es una constante que sólo depende de $\bar{\lambda}$. Las relaciones (4-99) y (4-100), junto con el hecho de que B_0 es compacto, completan la demostración del lema. \blacksquare

Tenemos entonces el siguiente teorema

Teorema 4.3. Sean $-\lambda_0$ un valor propio de multiplicidad impar y

$$O = \{(\lambda, \tilde{\varphi}) \in Z \times \mathbb{R} : \|\tilde{\varphi}\| < \varepsilon_2 \text{ y } \lambda \in (\bar{\lambda}, \underline{\lambda})\}.$$

Existe un continuo maximal de soluciones $\mathcal{C}_0 \subset \mathbb{R} \times (Z \oplus W \oplus N)$ tal que $(-\lambda_0, 0) \in \mathcal{C}_0$. Si \mathcal{C}'_0 es la proyección de \mathcal{S}_0 en $\mathbb{R} \times Z$, entonces \mathcal{C}'_0 o bien interseca ∂O o bien $(-\lambda_1, 0) \in \mathcal{C}_0 \cap O$ con $-\lambda_1 \in \sigma(\square)$ y $\lambda_0 \neq \lambda_1$.

Demostración. Basta aplicar el lema (4.10) y el Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz (ver [11, p. 102], [22, p. 401], [33, p. 191] y [42, p. 491]) a la aplicación $G : O \rightarrow Z$ definida por

$$G(\lambda, \tilde{\varphi}) = -\lambda \square^{-1} \tilde{\varphi} - \square^{-1} P_Z h(\varphi + v(\lambda, \tilde{\varphi}) + w(\lambda, \tilde{\varphi})) \|\tilde{\varphi}\|^2. \quad (4-101)$$

La aplicación G cumple claramente los requerimientos del Teorema. ■

Cabe anotar que la opción más plausible en el teorema anterior es que $\mathcal{C}'_0 \cap \partial O \neq \emptyset$ ya que λ no se puede alejar mucho de λ_0 . En efecto, sea $\tilde{\varphi}$ un punto fijo de la ecuación (4-101), entonces

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_0| &\leq \left| \int_{\Omega} h(\phi + v(\lambda, \tilde{\varphi}) + w(\lambda, \tilde{\varphi})) \tilde{\varphi} \right| \\ &\leq \sqrt{2\pi} \|h\|_{\infty} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (4-102)$$

4.4. Valores Propios de Multiplicidad Finita (Par o Impar).

Tomemos ahora $-\lambda_0 \in \sigma(\square)$ un valor propio de multiplicidad finita múltiple y $\lambda = \lambda_0 - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ cercano a cero. Queremos, nuevamente, encontrar soluciones al problema (4-1).

Sobre la no-linealidad adicionamos las siguientes hipótesis

(1) Existen $h_0 > 0$ y $\gamma > 1$ tal que si $|x| > h_0$ entonces

$$|h'(x)| \leq \frac{1}{|x|^\gamma}. \quad (4-103)$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\gamma \in (1, 2)$.

(2) Existe $A > 0$ tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} h(x) = A \operatorname{sgn} x \quad (4-104)$$

Denotamos con h_1 a la función $h - A$ sgn. Es claro que $h_1(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow +\infty$. Sea Z el espacio generado por el valor propio $-\lambda_0 \neq 0$ y sea $W \subset L^2(\Omega)$ tal que $N^\perp = Z \oplus W$. Notemos $d := \dim Z$.

El resultado que vamos a sustentar en esta sección es el siguiente

Teorema 4.4. *Si $-\lambda_0$ es un valor propio de multiplicidad finita no simple, existe $\epsilon_0 > 0$ (que sólo depende de h y de λ_0) tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ el problema tiene una familia de soluciones débiles $u_\epsilon = v_\epsilon + y_\epsilon \in (N \cap L^\infty(\Omega)) \oplus (Y \cap L^\infty(\Omega))$. Además, si $\epsilon \rightarrow 0$, entonces $\|y_\epsilon\|_1 + \|v_\epsilon\| \rightarrow \infty$.*

4.4.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones

Para formular el sistema de ecuaciones, necesitamos del siguiente lema.

Lema 4.11. *Existe $\tilde{\varphi} \in Z$ tal que*

$$-\epsilon \tilde{\varphi} + P_Z h(\tilde{\varphi}) = 0. \quad (4-105)$$

Además, existe una constante $c_0 > 0$ que sólo depende de h tal que $\|\tilde{\varphi}\| = c_0 \epsilon^{-1}$.

Demostración. Para $z \in Z$ definimos el funcional $J_\epsilon : Z \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$J_\epsilon[z] := \frac{-\epsilon}{2} \int_\Omega z^2 + \int_\Omega H(z). \quad (4-106)$$

Donde $H(x) = \int_0^x h(s) ds$. Queremos ver primero que $J = J_\epsilon$ está acotado superiormente. Sea $z \in Z$, definimos $\Omega_+ = \{(x, t) \in \Omega : |h|_\infty - \frac{\epsilon}{2}|z| \geq 0\}$ y $\Omega_- = \Omega_+^c$. Entonces

$$\begin{aligned} J[z] &\leq \frac{-\epsilon}{2} \int_\Omega z^2 + |h|_\infty \int_\Omega |z| \\ &\leq \int_{\Omega_+} |z| (|h|_\infty - \frac{\epsilon}{2}|z|) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} |h|_\infty^2. \end{aligned} \quad (4-107)$$

J es claramente un operador Frechet derivable y Z es un espacio de Banach reflexivo. Entonces por el Principio Variacional de Ekeland [1] existe una sucesión $z_n \in Z$ tal que

$$J[z_n] \rightarrow \sup J \quad \text{y} \quad \nabla J[z_n] \rightarrow 0. \quad (4-108)$$

Denotemos $\zeta_n = \nabla J[z_n] \in Z$. Entonces $\|\zeta_n\| \rightarrow 0$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|\zeta_n\| \leq 1$. De este modo

$$\begin{aligned} \epsilon \|z_n\|^2 &\leq \left| \int_\Omega (h(z_n) - \zeta_n) z_n \right| \\ &\leq |h|_\infty \sqrt{2\pi} \|z_n\| + \|z_n\| \\ &\leq |h|_\infty 2\sqrt{2\pi} \|z_n\|. \end{aligned} \quad (4-109)$$

Es decir,

$$\|z_n\| \leq \frac{2\sqrt{2}\pi}{\epsilon}. \quad (4-110)$$

Como Z es un espacio de dimensión finita, por el Teorema de Heine-Borel [46], al ser z_n una sucesión acotada que posee una subsucesión convergente. Denotemos, sin pérdida de generalidad, a esta subsucesión por z_n y al punto de convergencia por $\tilde{\varphi}$ que satisface claramente (4-105).

Tenemos un estimador por encima de $\|\tilde{\varphi}\|$ del orden de ϵ^{-1} . Para concluir la demostración del lema necesitamos encontrar ahora un estimador por debajo del mismo orden. Para ello necesitamos estimar $|\int_{\Omega} H_1|$ donde $H_1(x)$ es el potencial de h_1 . Tomemos $\varrho_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(k_0 x) \sin(j_0 t)$ con $k_0^2 - j_0^2 = -\lambda_0$ y sea $\epsilon_0 > 0$ de tal modo que

$$\epsilon_0 < \frac{4A\sqrt{2}}{\pi(4\pi(k_0 + j_0)|h_1|_{\infty} + 2\pi^2)}. \quad (4-111)$$

Sea además $M_1 > 0$ tal que si $|x| > M_1$ entonces $|h_1(s)| < \epsilon_0$. Escojamos de antemano ϵ de tal modo que

$$\epsilon < \frac{2}{M_1\pi^2} Ak_0 j_0 \epsilon_0^2, \quad (4-112)$$

Sea $Z(\varrho_0) = \varrho_0^{-1}(\{0\}) \cap \bar{\Omega}$ y sea E_0 una vecindad tubular de radio ϵ_0 de $Z(\varrho_0)$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} H_1 \left(\frac{4\sqrt{2}}{\epsilon\pi} A\varrho_0 \right) \right| &\leq \int_{E_0} \left| H_1 \left(\frac{4\sqrt{2}}{\epsilon\pi} A\varrho_0 \right) \right| + \int_{E_0^c} \left| H_1 \left(\frac{4\sqrt{2}}{\epsilon\pi} A\varrho_0 \right) \right| \\ &\leq 16\sqrt{2}(k_0 + j_0)\epsilon_0|h_1|_{\infty}A + 8\sqrt{2}A\pi\epsilon_0 \\ &\leq \frac{4\sqrt{2}A}{\pi}A. \end{aligned} \quad (4-113)$$

De este modo

$$\begin{aligned} J \left[\frac{4\sqrt{2}A}{\epsilon\pi} \varrho_0 \right] &= -\frac{32}{2\epsilon} + \int_{\Omega} A \left| \frac{4\sqrt{2}A}{\epsilon\pi} \varrho_0 \right| + \int_{\Omega} H_1 \left(\frac{4\sqrt{2}}{\epsilon\pi} A\varrho_0 \right) \\ &\geq -\frac{16}{\pi^2\epsilon}A^2 + \frac{32}{\pi^2\epsilon}A^2 \\ &= \frac{16A^2}{\pi^2\epsilon}. \end{aligned} \quad (4-114)$$

De (4-114) tenemos que $J[\tilde{\varphi}] \geq \frac{16A^2}{\pi^2\epsilon}$. Entonces

$$\begin{aligned} (A + |h_1|_{\infty}) \int_{\Omega} |\tilde{\varphi}| &\geq A|\tilde{\varphi}| + \int_{\Omega} H_1(\tilde{\varphi}) \\ &\geq \frac{16A^2}{\pi^2\epsilon} + \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} \tilde{\varphi}^2 \\ &\geq \frac{16A^2}{\pi^2\epsilon}. \end{aligned} \quad (4-115)$$

Entonces existe

$$c_0 \in \left[\frac{16A^2}{(A + |h_1|_\infty)\sqrt{2\pi^3}}, 2\sqrt{2\pi} \right] \quad (4-116)$$

tal que $\|\tilde{\varphi}\| = c_0\epsilon^{-1}$. ■

Estamos buscando soluciones de la forma $u = \tilde{\varphi} + v + y \in Z \oplus N \oplus Y$ con $y = z + w \in Z \oplus W$. Del método de descomposición de Lyapunov-Schmidt y el Lema 4.11 obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$v = -\frac{1}{\lambda} P_N h(u) \quad (4-117)$$

$$w = -(\square + \lambda I)^{-1} P_W h(u) \quad (4-118)$$

$$(z \mid \xi) = \epsilon^{-1} \int_{\Omega} [h(\tilde{\varphi}) - h(u)] \xi \quad (4-119)$$

para todo $\xi \in Z$ con $\|\xi\| = 1$.

4.4.2. Soluciones en el Núcleo

Siguiendo las ideas previas, definimos, para $z \in Z$ con $\|z\| \leq \frac{c_0}{4\epsilon}$ y $w \in W$ con $\|w\|_\infty \leq R_1$ ($R_1 = 8\sqrt{3}\pi(1 + |\lambda_0|)|h|_\infty$) la aplicación

$$F(p) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^\pi [h(u(x, r+x)) - h(u(x, r-x))] dx. \quad (4-120)$$

para $p \in \mathcal{C}$ con \mathcal{C} , como en la Sección 4.2.2, definido como el conjunto de todas las $p \in L^2_\times$ tales que $\|p\|_\infty \leq r_1$ donde $r_1 = 2|h|_\infty$.

Claramente $F(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Hace falta verificar que F es una contracción. Recordemos que para cada $v \in N$ podemos encontrar una única $p(v) = p \in L^2(0, 2\pi)$ tal que p es 2π -periódica, $\int_0^{2\pi} p = 0$ y además $v(x, t) = p(t+x) - p(t-x)$. Recordemos que $u = \tilde{\varphi} + v + z + w$.

Sea ϵ_1 definido como en (4-48). Para este ϵ_1 , existe un δ_1 que depende solamente de h tal que si

$$\Omega_r := \{x \in [0, \pi] : |\psi(x, r+x)| < \delta_1\},$$

entonces $\mu(\Omega_r) < \frac{\epsilon_1}{2}$. Tomemos $\epsilon_0 < \delta_1^2$ de antemano. Si definimos el conjuntos

$$\Omega_0 = \left\{ x \in [0, \pi] : |\psi_0(x, r+x)| < \frac{(d-1)}{4d} c_0 \epsilon^{-1/2} \right\},$$

donde ψ_0 es tal que $\|\psi_0\| = 1$ y está en la misma dirección que $\tilde{\varphi} + z$. De este modo $\mu(\Omega_0) < \epsilon_1$.

Al tomar $p_1, p_2 \in \mathcal{C}$ se definen dos funciones $v_i(x, t) = p_i(t+x) - p_i(t-x) \in N$ y dos funciones $u_1, u_2 \in N \oplus W \oplus Z$ dadas por $u_i(x, t) = \varphi(x, t) + w(x, t) + v_i(x, t)$ con $i = 1, 2$. Definamos

$$b(x, r, s) := \tilde{\varphi}(x, r+x) + w(x, r+x) + z(x, r+x) + s(v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)). \quad (4-121)$$

Sea $M_2 > 0$ tal que si $|s| \geq M_2$ entonces $|h'(s)| < \epsilon_1$. Tomemos de antemano

$$\epsilon_0 < \left(\frac{c_0(d-1)}{4d(M_2 + R_1 + 4r_1)} \right)^2. \quad (4-122)$$

Si $x \notin \Omega_2$, tenemos que $|b(x, r, s)| \geq M_2$. De este modo

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi |h(u_2(x, r+x)) - h(u_1(x, r+x))| dx + \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 |h'(b(x, r, s))| |v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)| dx ds \\ &= \int_{\Omega_0} \int_0^1 |h'(b(x, r, s))| |v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)| dx ds \\ &\quad + \int_{\Omega_0^c} \int_0^1 |h'(b(x, r, s))| |v_2(x, r+x) - v_1(x, r+x)| dx ds \\ &< (|h'|_\infty + \pi)(1 + \pi)\epsilon_1 \|p_1 - p_2\|_\infty. \end{aligned} \quad (4-123)$$

Del mismo modo se demuestra una estimación similar a (4-123) para la característica $(x, r-x)$. Por tanto

$$\|F(p_1) - F(p_2)\|_\infty < \frac{1}{2} \|p_1 - p_2\|_\infty \quad (4-124)$$

Por el Principio de Contracciones, dados $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $z \in Z$ con $\|z\| \leq \frac{c_0}{4}\epsilon^{-1}$ y $w \in W$ con $\|w\|_\infty \leq R_1$, existe un único $v(\epsilon, z, w) \in N$ tal que $v(\epsilon, z, w)$ satisface la ecuación (4-7). Además la aplicación $(\epsilon, z, w) \rightarrow v(\epsilon, z, w)$ es continua.

4.4.3. Soluciones en el Rango

Por el mismo argumento de (4-68) tenemos que $\|(\square + \lambda I)^{-1}w\|_\infty \leq R_1$. Queremos ver ahora que $\|(\square + \lambda I)^{-1}z\| \leq c_0\epsilon^{-1}/4$ siempre que $\|z\| \leq c_0\epsilon^{-1}/4$. Para esto necesitamos demostrar una propiedad de medida de polinomios trigonométrico que depende de la estimación de Nazarov-Turán (ver [26] y [49, p. 239-236])

Teorema 4.5 (Lema de Nazarov-Turán). *Sea $p : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio trigonométrico definido por*

$$p(z) = \sum_k c_k z^{r_k}.$$

El índice k del polinomio está dado por $k = (k_1, \dots, k_n)$ para $0 \leq k_i \leq m_i$ donde $m_i \in \mathbb{N}$. Los exponentes r_k están definidos por $(r_{1,k_1}, \dots, r_{n,k_n})$ donde $r_{i,0} < \dots < r_{i,m_i} \in \mathbb{Z}$. También tomamos $z^{r_k} := z_1^{r_{1,k_1}} \dots z_n^{r_{n,k_n}}$. Supongamos además que $c_k \neq 0$ para todo k . Sea $E \subset \mathbb{T}^n$ es un subconjunto medible con $\tilde{\mu}(E) > 0$, donde $\tilde{\mu}$ es la medida normalizada de Lebesgue en \mathbb{T}^n (i.e. $\tilde{\mu}(\mathbb{T}^n) = 1$). Entonces

$$\sup_{z \in \mathbb{T}^n} |p(z)| \leq \left(\frac{14n}{\tilde{\mu}(E)} \right)^{m_1 + \dots + m_n} \sup_{z \in E} |p(z)|. \quad (4-125)$$

Con en Lema de Nazarov-Turán podemos demostrar el siguiente lema

Lema 4.12. Sea $\psi \in Z$ con $\|\psi\| = 1$ y sea $\beta \in \left(0, \frac{\gamma-1}{\gamma}\right)$. Entonces existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que para todo $\epsilon \in (0, 1)$ es válida la siguiente estimación

$$\mu(\{(x, t) \in \Omega : |\psi(x, t)| < \epsilon^\beta\}) < \epsilon^\alpha. \quad (4-126)$$

Además α no depende de ψ , sólo depende de Z .

Demostración. Sea $\tilde{\psi} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la extensión periódica natural de $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Por la equivalencia de normas en espacios de dimensión finita, existe un $c_d \in \left[\frac{1}{2\pi}, d\right]$ tal que $\|\psi\|_\infty = c_d$. Definimos

$$E = \{(x, t) \in \mathbb{T}^2 : |\tilde{\psi}(x, t)| < \epsilon^\beta\}.$$

Aplicamos el Lema de Nazarov-Turán con $n = 2$ y obtenemos que

$$\mu(E) \leq 112\pi^2 \epsilon^{\frac{\beta}{(m_1+m_2)}} c_d^{\frac{-1}{m_1+m_2}}. \quad (4-127)$$

Dado que $\mu(\{(x, t) \in \Omega : |\psi(x, t)| < \epsilon^\beta\}) \leq \mu(E)$. Tomemos $\alpha > 0$ y

$$\alpha < \frac{\log\left(112\pi^2 \epsilon^{\frac{\beta}{(m_1+m_2)}} c_d^{\frac{-1}{m_1+m_2}}\right)}{\log(\epsilon)} \quad (4-128)$$

obtenemos la estimación deseada. La independencia de α con respecto a ψ se desprende de (4-127). ■

Fijemos $z, \zeta \in Z$ con $\|z\| \leq \frac{c_0}{4\epsilon}$ y $\|\zeta\| = 1$. Sea $s \in [0, 1]$ y $\psi_s := \frac{\tilde{\varphi} + sz}{\|\tilde{\varphi} + sz\|}$. Definamos el conjunto

$$\Omega'_s := \{(x, t) \in \Omega : |\psi_s(x, t)| < \epsilon^\beta\} \quad (4-129)$$

Por el lema de Nazarov-Turán, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\mu(\Omega_s) < \epsilon^\alpha$. Definamos ahora

$$\Omega_s := \left\{ (x, t) \in \Omega : |\tilde{\varphi}(x, t) + sz(x, t)| < \frac{3c_0}{4} \epsilon^{\beta-1} \right\} \quad (4-130)$$

$$(4-131)$$

Es claro que $\Omega_s \subseteq \Omega'_s$. Para $(x, t) \notin \Omega_s$ definimos el número

$$\xi(x, t, s) := \tilde{\varphi}(x, t) + s(v(x, t) + w(x, t) + z(x, t)) \quad (4-132)$$

Entonces, si $(x, t) \notin \Omega_s$ tenemos que

$$\begin{aligned} |(z \mid \zeta)| &\leq \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} |h(\tilde{\varphi}) - h(\tilde{\varphi}(x, t) + v(x, t) + w(x, t) + z(x, t))| |\zeta(x, t)| \, dxdt \\ &\leq \frac{d}{\epsilon} \left[\int_{\Omega_s^c} \int_0^1 |h'(\xi(x, t, s))| |v(x, t) + z(x, t) + w(x, t)| \, ds dxdt + \int_{\Omega_s} 2|h|_{\infty} \right] \\ &\leq \frac{d}{\epsilon} \left[\frac{2\pi^2}{c_0} \epsilon^{\gamma(1-\beta)} \left(r_1 + R_1 + \frac{c_0}{4\epsilon} \right) + 4|h|_{\infty} \epsilon^{\alpha} \right] \\ &\leq \frac{c_0}{4\epsilon}. \end{aligned} \quad (4-133)$$

Esto implica que $\|z\| \leq \frac{c_0}{4\epsilon}$. Aplicando el Teorema de Punto Fijo de Schauder al operador $(\square + \lambda I)^{-1}$ y al conjunto

$$C = \left\{ (w, z) \in W \times Z : \|w\|_{\infty} \leq R_1 \text{ y } \|z\| \leq \frac{c_0}{4\epsilon} \right\} \quad (4-134)$$

garantizamos la existencia de una solución en el rango (w, z) . Esto demuestra el Teorema 4.4.

4.5. El Valor Propio Cero

El valor propio cero presenta una gran dificultad porque tiene dimensión infinita y encontrar puntos fijos en el núcleo parece ser una tarea difícil. No obstante, en el caso doble-periódico en una dimensión podemos encontrar bifurcación desde cero. Recordemos que el cero es el único valor propio de multiplicidad infinita de $\sigma(\square)$. Consideremos para λ cercano a cero el siguiente problema doble-periódico

$$\begin{cases} \square u + \lambda u + h(u) = 0 \\ u(x, t) = u(x, t + 2\pi) = u(x + 2\pi, t). \end{cases} \quad (4-135)$$

Si $\lambda < 0$, las hipótesis sobre la parte no lineal $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son las siguientes.

- (1) h es acotada en todo su dominio, es decir $|h|_{\infty} < +\infty$.
- (2) $h \in C^1(\mathbb{R})$.
- (3) Existen $\gamma > 1$ y $M_0 > 0$ tales que si $|x| > M_0$ entonces

$$|h'(x)| \leq \frac{1}{|x|^{\gamma}}. \quad (4-136)$$

(4) $h(x) > 0$ para $x \geq 0$ y

$$h_0 := \liminf_{x \rightarrow \infty} h(x) > 0. \quad (4-137)$$

Hipótesis similares se pueden formular si $\lambda > 0$ o si $xh(x) < 0$.

A diferencia del caso Dirichlet-periódico, en el caso doble-periódico las funciones constantes están en el núcleo N . Esto es lo que permite resolver el problema de manera relativamente sencilla. Trataremos entonces de encontrar funciones de la forma $\varphi + v + y$ con $\varphi \in \mathbb{R}$, $v \in N$ y $y \in Y$.

El resultado es el siguiente.

Teorema 4.6. *Existe $\lambda_0 < 0$, tal que si $0 < -\lambda < -\lambda_0$ entonces el problema (4-135) tiene una solución débil $u_\lambda = \varphi_\lambda + v_\lambda + w_\lambda \in \mathbb{R} \oplus N \oplus Y$ con $u_\lambda \rightarrow \infty$ cuando $\lambda \uparrow 0$.*

4.5.1. Formulación del Sistema de Ecuaciones

Antes de continuar necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.13. *Para todo $\lambda < 0$ existe $\varphi_\lambda \in \left[\frac{h_0}{|\lambda|}, \frac{|h|_\infty}{|\lambda|} \right]$ tal que*

$$\lambda\varphi_\lambda + h(\varphi_\lambda) = 0. \quad (4-138)$$

Demostración. Definamos la función $f_\lambda(x) := \lambda x + h(x)$. Queremos aplicar el Teorema del Valor Intermedio. Para ello notemos que $f_\lambda(0) = h(0) > 0$. Ahora bien

$$\lambda x + h(x) \leq \lambda x + |h|_\infty < 0 \quad (4-139)$$

siempre que $x > \frac{|h|_\infty}{|\lambda|}$. Esto demuestra el lema. ■

La descomposición de Lyapunov-Schmidt nos da origen a dos ecuaciones a saber

$$v = -\frac{1}{\lambda} (h(\varphi_\lambda) - P_N h(\varphi_\lambda + v + y)) \quad (4-140)$$

$$y = -(\square + \lambda I)^{-1} P_Y h(\varphi_\lambda + v + y). \quad (4-141)$$

4.5.2. Soluciones en el Núcleo

Una función en el núcleo, para el problema doble-periódico, tiene la siguiente representación $v \in N$, si y sólo si, existe un único número real \bar{v} y dos únicas funciones $p, q \in L^2_x$ tales que

$$v(x, t) = \bar{v} + p(x + t) + q(t - x) \quad (4-142)$$

Adicionalmente, la ecuación en el núcleo (4-140) es equivalente a resolver las siguientes tres ecuaciones

$$\bar{v} = \frac{1}{4\pi^2\lambda} \int_{\Omega} (h(\varphi_\lambda) - h(u(x, t))) dx dt \quad (4-143)$$

$$p(r) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{2\pi} (h(\varphi_\lambda) - h(u(x, r+x))) dx - \bar{v} \quad (4-144)$$

$$q(r) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_0^{2\pi} (h(\varphi_\lambda) - h(u(x, r-x))) dx - \bar{v}. \quad (4-145)$$

Recordemos que estamos notando $u = \varphi_\lambda + v + y$ y aquí $\Omega = (0, 2\pi)^2$. Para una demostración de estos hechos ver [19, p. 651-653].

Restrinjamos $|\lambda| < \frac{1}{2}$. Definamos $R = 4\sqrt{6}\pi|h|_\infty$. Podemos tomar $y \in Y$ tales que $\|y\|_\infty \leq R$. Sean $B_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}$ y $B_{\times} = \{p \in L_{\times}^2 : \|p\|_\infty \leq R\}$. En $B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2$ definimos la aplicación $F_{\lambda, y}$ mediante la fórmula

$$F_{\lambda, y}(\bar{v}, p, q) = (N_1(\bar{v}, p, q), N_2(\bar{v}, p, q), N_3(\bar{v}, p, q)) \quad (4-146)$$

donde N_1 , N_2 y N_3 son el lado derecho de (4-143), (4-144) y (4-145) respectivamente. Evidentemente a $B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2$ lo dotamos con la métrica d dada por

$$d((\bar{v}_1, p_1, q_1), (\bar{v}_2, p_2, q_2)) = |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| + \|p_1 - p_2\|_\infty + \|q_1 - q_2\|_\infty. \quad (4-147)$$

Además, si $(\bar{v}, p, q) \in B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2$, entonces la función $v \in N$ asociada satisface $\|v\|_\infty \leq 3R_1$.

Tenemos entonces el siguiente lema

Lema 4.14. *Existe $\lambda_0 < 0$ tal que para todo $0 < -\lambda < -\lambda_0$ y todo $y \in Y$ con $\|y\|_\infty \leq R$, la aplicación $F_{\lambda, y} : B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2 \rightarrow B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2$ es una contracción y tiene un único punto fijo. En particular la ecuación del núcleo (4-140) tiene solución.*

Demostración. Veamos primero que $F_{\lambda, y}(B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2) \subseteq B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2$. Tomemos

$$\lambda_0 = -\min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{h_0}{2M_0}, \frac{h_0}{20R}, \left(\frac{h_0^\gamma}{8 \cdot 2^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right\}. \quad (4-148)$$

Y sea $-\lambda < -\lambda_0$. Para $s \in [0, 1]$, denotamos

$$a_0(x, r, s) = \varphi_\lambda + s(v(x, t) + y(x, t)) = \varphi_\lambda + s(\bar{v} + p(r+x) + q(r-x) + y(x, t)). \quad (4-149)$$

Para casi todo $(x, t) \in \Omega$ tenemos que

$$\begin{aligned} |a_0(x, r, s)| &\geq \frac{h_0}{|\lambda|} - |v(x, t)| - |w(x, t)| \\ &\geq \frac{h_0}{|\lambda|} - 4R \\ &\geq \frac{h_0}{2|\lambda|}. \end{aligned} \quad (4-150)$$

Realizamos entonces la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
|N_1(\bar{v}, p, q)| &\leq \frac{1}{4\pi^2|\lambda|} \int_{\Omega} |h(\varphi_{\lambda}) - h(u(x, t))| dxdt \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2|\lambda|} \int_{\Omega} \int_0^1 |h'(a_0(x, r, s))| |v(x, t) + y(x, t)| dsdxdt \\
&\leq \frac{R}{\pi^2|\lambda|} \int_{\Omega} \int_0^1 |h'(a_0(x, r, s))| dsdxdt \\
&\leq \frac{R4 \cdot 2^{\gamma}}{h_0^{\gamma}} |\lambda|^{\gamma-1} \\
&\leq \frac{1}{2}R.
\end{aligned} \tag{4-151}$$

Con un argumento similar se demuestra que $\|N_i(\bar{v}, p, q)\|_{\infty} \leq R$ para $i = 2, 3$. Es decir $F_{\lambda, y}(B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2) \subseteq B_{\mathbb{R}} \times B_{\times}^2$.

Para ver que F es una contracción se esgrime un argumento similar al de la ecuación (4-151) y se llega a que

$$d(F_{\lambda, y}(\bar{v}_1, p_1, q_1), F_{\lambda, y}(\bar{v}_2, p_2, q_2)) \leq \frac{1}{2}d((\bar{v}_1, p_1, q_1), (\bar{v}_2, p_2, q_2)). \tag{4-152}$$

Esto demuestra el lema. ■

4.5.3. Soluciones en el Rango

Con un cálculo similar al de (4-68) se puede demostrar que si $G_{\lambda}(y)$ es el lado derecho de (4-141), entonces

$$\|G_{\lambda}(y)\|_{\infty} \leq R. \tag{4-153}$$

Por el Teorema de Punto Fijo de Schauder G_{λ} tiene un punto fijo. Esto demuestra el teorema.

5 Perspectivas

A continuación presentamos una serie de problemas abiertos cuyas soluciones ampliarían el campo de conocimiento en relación con la ecuación de onda semilineal.

5.1. El Problema doble-periódico

Por trabajos previos tenemos la conjetura de que para el problema doble periódico

$$\begin{cases} \square u + \lambda u + h(u) = 0 \\ u(x, t + 2\pi) = u(x, t) = u(x + 2\pi, t) \end{cases} \quad (5-1)$$

los resultados se mantienen y son los mismos. La línea argumentativa es la misma, sólo que la ecuación del núcleo se convierte en tres integrales (ver [19])

$$\bar{v} = -\frac{1}{4\pi^2\lambda} \int_{\Omega} h(u) \quad (5-2)$$

$$v_1(r) = -\left(\bar{v} + \frac{1}{2\pi\lambda} h(u(x, r+x)) \right) \quad (5-3)$$

$$v_2(r) = -\left(\bar{v} + \frac{1}{2\pi\lambda} h(u(x, r-x)) \right) \quad (5-4)$$

donde $v = \bar{v} + v_1 + v_2$, \bar{v} es una constante, $v \in N$ y $v_1, v_2 \in L^2_{\times}$. La base de Hilbert para $L^2(\Omega)$ y $\sigma(\square)$ cambian a

$$\mathfrak{B}'' = \{\sin(kx) \cos(jt), \sin(kx) \sin(jt), \cos(kx) \sin(jt), \cos(kx) \cos(jt)\} \quad (5-5)$$

salvo las constantes de normalización y

$$\sigma(\square) = \{k^2 - j^2 : k, j = 0, 1, \dots\}. \quad (5-6)$$

5.2. Continuos de soluciones

En el capítulo de anterior se demostró que para valores propios de multiplicidad impar se puede encontrar un continuo de soluciones. Un problema natural es tratar de encontrar un continuo de soluciones para el caso de multiplicidad par.

Como antecedentes a continuos de soluciones en valores propios de multiplicidad par tenemos este trabajo de Krasnoselskii y Rachinskii [34]. En este trabajo encuentran continuos de soluciones a problemas donde el valor propio tiene multiplicidad dos. No obstante este resultado está más relacionado con operadores de ecuaciones diferenciales ordinarias que de parciales.

5.3. Regularidad

Rabinowitz en 1978 [41] encontró, para el caso monótono, regularidad de las soluciones dependiendo de la regularidad de la parte no-lineal. Más específicamente, si $f \in C^k$ las soluciones son de clase C^{k+1} . La problema natural acá es determinar si existe o no regularidad en los problemas donde no se asume monotonía. Es difícil conjeturar una respuesta afirmativa. En un trabajo de Castro y Caicedo [14] se demostró que el problema con forzamiento puede no tener ninguna solución continua para algunos forzamientos suaves.

5.4. Problemas sin compacidad

El valor propio cero presenta una gran dificultad porque tiene dimensión infinita y falla la compacidad. La bifurcación desde infinito en el valor propio cero del caso Dirichlet-periódico sigue siendo un problema abierto. Lo mismo ocurre con el operador de onda en n -dimensiones sobre una región Ω_0 para las variables espaciales. El operador de onda así definido viene dado por la fórmula $\square u = u_{tt} - \Delta u$, donde Δ es el Laplaciano. En regiones sencillas de Ω_0 (un cuadrado por ejemplo) todos los valores propios son de multiplicidad infinita y se pierde la compacidad. Algo similar ocurre cuando se asume que el periodo es un múltiplo irracional de π . En este caso, por ejemplo, el espectro tiene incluso puntos de acumulación [13].

6 Conclusiones

Es posible encontrar bifurcación en infinito de las soluciones débiles en $L^\infty(\Omega)$ al problema (4-1) cuando el parámetro λ se acerca a $\sigma(\square) \setminus \{0\}$. En el problema (4-135) se puede encontrar bifurcación en infinito de las soluciones débiles en L^∞ cuando λ se acerca a cualquier valor de $\sigma(\square)$.

El método empleado resultó ser efectivo. Se encontró una función a la que llamamos informalmente función pivote (φ). Esta una función generalmente es un punto fijo a una ecuación modificada más sencilla en el espacio singular o en el espacio donde se espera se bifurquen las soluciones (Z). La función pivote siempre resultó ser una función grande (en norma). Este hecho, junto con el Teorema del Valor Medio y la hipótesis sobre h de que fuese asintóticamente lineal, permitieron encontrar soluciones en el núcleo. Las soluciones en el espacio regular (W) se encontraron siempre acudiendo a la Teoría de Grado. Estudiar las soluciones en este espacio no presentó mayor dificultad. La dificultad siempre estuvo en encontrar soluciones en el espacio singular Z . Esto último depende de estimaciones cuidadosas ya que las soluciones tienden a infinito casi del orden de $1/\epsilon$ ($\epsilon = |\lambda_0 - \lambda|$).

Hasta el momento este método ha mostrado cierta limitación para encontrar bifurcación en infinito para el valor propio de multiplicidad infinita (el cero) al problema Dirichlet-periódico (4-1). Lo anterior se debe a la dificultad de encontrar puntos fijos a la ecuación del núcleo modificada en el espacio singular Z que en este caso es el mismo N .

Bibliografía

- [1] AUBIN, J.P. ; EKELAND, I.: *Applied nonlinear analysis*. J. Wiley, 1984 (Pure and applied mathematics). – ISBN 9780471059981
- [2] BATES, P. ; CASTRO, A.: Existence and Uniequeness for a Variational Hyperbolic System without Resonance. En: *Nonlinear Analysis Theory, Methos and Applications* 4 (1980), Nr. 6, p. 1151–1156
- [3] BELL, E. T.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica de México, 2004
- [4] BERTI, M. ; BIASCO, L.: Forced Vibrations of Wave Equations with non-Monotone Nonlinearity. En: *Annales del Institute Henry Poincaré. Analyse Nonlinéaire* 23 (2006), p. 439–474
- [5] BREZIS, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2010
- [6] BRÉZIS, H. ; CORON, J. M.: Periodic Solutions of a Wave Equation and Hamiltonian Systems. En: *American Journal of Mathematics* 103 (1981), Juni, Nr. 3, p. 559–570
- [7] BRÉZIS, H. ; CORON, J. M. ; NIRENBERG, L.: Free Vibrations for a Nonlinear Wave Equation and a Theorem of P. Rabinowitz. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* XXXIII (1980), p. 667–689
- [8] BRÉZIS, H. ; NIRENBERG, L.: Characterizations of the Ranges of Some Nonlinear Operator and Applications to Boundary Value Problems. En: *Annali della Scoula Normale Superiore di Pisa* 5 (1978), Nr. 2
- [9] BRÉZIS, H. ; NIRENBERG, L.: Forced Vibrations for a Nonlinear Wave Equation. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* XXXI (1978), p. 1–30
- [10] BROOKS, R.M. ; SCHMITT, K.: *The Contraction Mapping Principle and Some Applications*. Electronic journal of differential equations: Monograph, 2009
- [11] BROWN, R.F.: *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*. Birkhäuser Boston, 2004. – ISBN 9780817632588

-
- [12] CAICEDO, J. F.: *Calculo Avanzado. Introducci3n*. Bogot3. : Universidad Nacional de Colombia, 2005
- [13] CAICEDO, J. F. ; CASTRO, A.: A Semilinear Wave Equation with Derivative of Nonlinearity Containing Multiple Eigenvalues of Infinite Multiplicity. En: *Contemporary Mathematics* (1997), Nr. 208
- [14] CAICEDO, J. F. ; CASTRO, A.: A Semilinear Wave Equation with Smooth Data and no Resonance Having no Continuous Solution. En: *Continuous and Discrete Dynamical Systems* 24 (2009), Nr. 3, p. 653–658
- [15] CAICEDO, J. F. ; CASTRO, A. ; DUQUE, R.: Existence of Solutions for a wave equation with non-monotone nonlinearity. En: *Milan J. Math* 79 (2011), Nr. 1, p. 207–222
- [16] CAICEDO, J. F. ; CASTRO, A. ; DUQUE, R. ; SANJU3N, A.: Existence of L^p -solutions for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 7 (2014), Nr. 69, p. 1193–1202
- [17] CARLESON, Lennart: On convergence and growth of partial sums of Fourier series. En: *Acta Mathematica* 116 (1966), Nr. 1, p. 135–157
- [18] CASTRO, A.: *M3todos de Reduccion via Minimax*. Centro de Investigacion del IPN, 1981
- [19] CASTRO, A. ; PRESKILL, B.: Existence of Solutions for a Wave Equation with Non-monotone Nonlinearity. En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 28 (2010), Nr. 2, p. 549–658
- [20] CASTRO, A. ; UNSURANGSIE, S.: A Semilinear Wave Equation with Nonmonotone Nonlinearity. En: *Pacific Journal of Mathematics* 132 (1988), Nr. 2, p. 215–225
- [21] CORON, J. M.: Periodic Solutions of a Nonlinear Wave Equation Without Assumption of Monotonicity. En: *Mathematical Annalen* 262 (1983), p. 273–285
- [22] DEIMLING, K.: *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, 1985. – ISBN 9783540139287
- [23] EKELAND, I. ; T3MAM, R.: *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM, 1994
- [24] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997
- [25] FIGUEREDO, D. G. D.: *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Springer Verlag, 1989
- [26] FONTES-MERZ, Natacha: A multidimensional version of Tur3n’s lemma. En: *Journal of Approximation Theory* 140 (2006), Nr. 1, p. 27–30. – ISSN 0021–9045

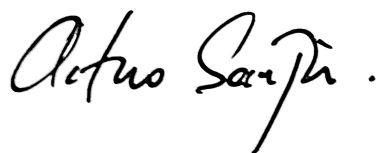
-
- [27] HOFER, H.: On the range of a wave operator with nonmonotone nonlinearity. En: *Math. Nachr.* (1982), Nr. 106, p. 327–340
- [28] HU, S.T.: *Differentiable manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, 1969
- [29] IORIO, R. ; MAGALHÃES, V.: *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2001
- [30] JABRI, Y.: *The Mountain Pass Theorem*. Cambridge University Press, 2003
- [31] JOHN, F.: *Partial Differential Equations*. 4. Springer Verlag, 1981
- [32] KAVIAN, O.: *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. Berlin : Springer Verlag, 1993
- [33] KRASNOSELSKII: *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*
- [34] KRASNOSELSKII, A.M. ; RACHINSKII, D.I.: On the Number of Unbounded Solution Branches in a Neighborhood of an Asymptotic Bifurcation Point. En: *Functional Analysis and Its Applications* 39, Nr. 3, p. 194–206. – ISSN 0016–2663
- [35] KREYSZIG, E.: *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, 1989
- [36] KUNG-CHING, C.: *Methods in Nonlinear Analysis*. Berlin : Springer Verlag, 2005
- [37] LOVICAROVÁ, H.: Periodic Solutions of a Weakly Nonlinear Wave Equation in one Dimension. En: *Czechoslovak Mathematical Journal* 19 (1968), Nr. 94, p. 324–343
- [38] MAWHIN, J.: Periodic Solutions of some Semilinear Wave Equation and System: a Survey. En: *Chaos Solitons & Fractals* 5 (1995), Nr. 9, p. 1653–1669
- [39] MCKENNA, P. J.: On Solutions of a Nonlinear Wave Question when the Ratio of the Period to the Length of the Interval is Irrational. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 93 (1985), Nr. 1, p. 59–64
- [40] RABINOWITZ, P.: Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* XX (1967), p. 145–205
- [41] RABINOWITZ, P.: Free Vibrations for a Semilinear Wave Equation. En: *Communications on Pure and Applied Mathematics* XXXI (1978), p. 31–68
- [42] RABINOWITZ, Paul H.: Some global results for nonlinear eigenvalue problems. En: *Journal of Functional Analysis* 7 (1971), Nr. 3, p. 487–513. – ISSN 0022–1236

-
- [43] RABINOWITZ, Paul H.: *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1986 (Conference Board of the Mathematical Science n.º 65). – ISBN 9780821807156
- [44] RUDIN, W.: *Funcitonal Analisis*. Mc Graw-Hill Book Company, 1973
- [45] RUDIN, W.: *Principles of Mathematical Analysis*. 3. Mc Graw-Hill International Editions, 1976
- [46] RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis*. 3. Mc Graw-Hill International Editions, 1981
- [47] STRAUSS, W.: *Partial Differential Equations. An Introduction*. John Wiley and Sons, 1992
- [48] STRUWE, M.: *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*. 2. Berlin : Springer Verlag, 2000 (A Series of Modern Surveys in Mathematics)
- [49] VINOGRADOV, S.A. ; KHAVIN, V.P. ; NIKOL'SKIJ, N.K.: *Complex Analysis, Operators, and Related Topics: The S.A. Vinogradov Memorial Volume*. Springer, 2000 (Operator theory). – ISBN 9783764362140
- [50] WILLEM, M.: Density of the Range of Potential Operators. En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 83 (1981), Nr. 2, p. 341–344

Declaración

Me permito afirmar que he realizado la presente tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en la propia tesis. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo. Ninguna parte del presente trabajo se ha empleado en ningún otro tipo de tesis.

Bogotá, D.C., 02.10.2014



Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar