# El dual de $\mathcal{L}_\infty$

Arturo Sanjuán


Figure 1: Dual de $\mathcal{L}_\infty$

# 1 Introducción

## 1.1 Sólidos Platónicos

Denotamos con $\{p,q\}$ el poliedro regular formado por p-ágonos q rodeando cada vértice. Los poliedros regulares son:
$\{3,3\}$ Tetraedro
$\{4,3\}$ Cubo
$\{3,4\}$ Octaedro
$\{5,3\}$ Dodecaedro
$\{3,5\}$ Icosaedro
$\{2,2\}$ Esfera

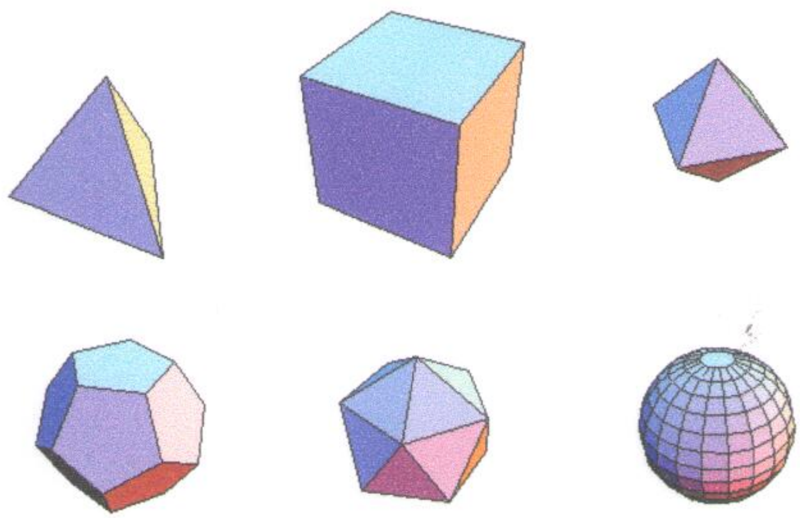

Figure 2: Sólidos Platónicos

Definimos el *dual* de $\{p,q\}$ como $\{q,p\}$. El significado del dual de un poliedro regular es el poliedro construido colocando los vértices en el medio de cada cara y las aristas perpendiculares a las aristas del poliedro original, por ejemplo el dual del cubo es el octaedro y visceversa.

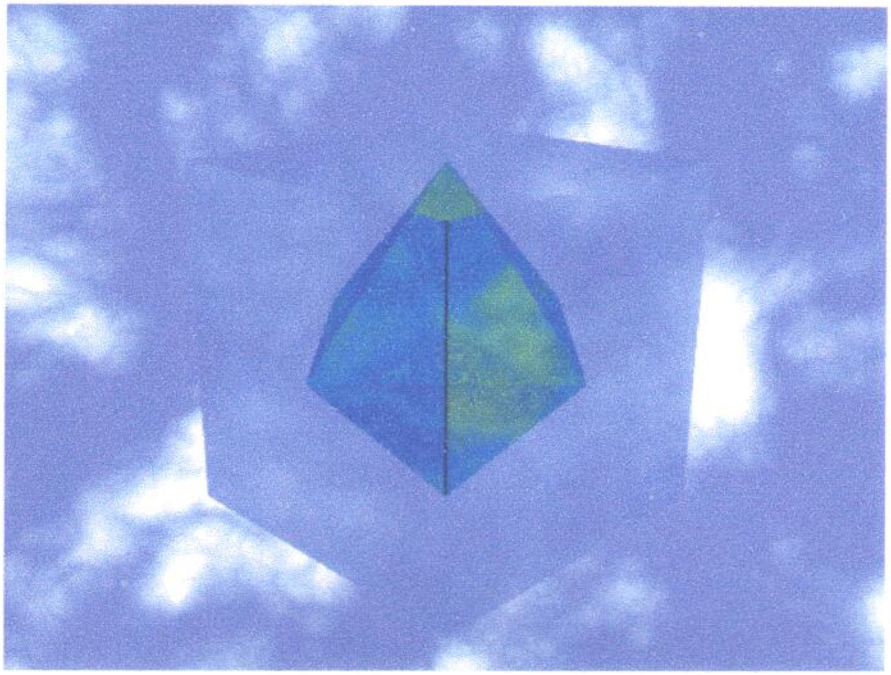

Figure 3: El dual del cubo

## 1.2 ¿Qué relación tiene lo anterior con $\mathcal{L}_\infty^*$?

Sea $X := \{a, b, c\}$, $\mathfrak{F} := \mathcal{P}(X)$ y $\mu$ la medida de conteo. Entonces existe

$$\begin{aligned} F:\ R^X &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f &\longmapsto F(f) = (f(a), f(b), f(c)) \end{aligned}$$

biyección. Es decir, podemos identificar cada función de $X$ en $\mathbb{R}$ con un punto de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} ||f||_p^p &= \int_X |f|^p d\mu \\ &= |f(a)|^p + |f(b)|^p + |f(c)|^p \end{aligned}$$

Si definimos

$$B_1^p(0) = \{f \in \mathcal{L}_p : ||f||_p = 1\}$$

Tenemos entonces, por ejemplo:

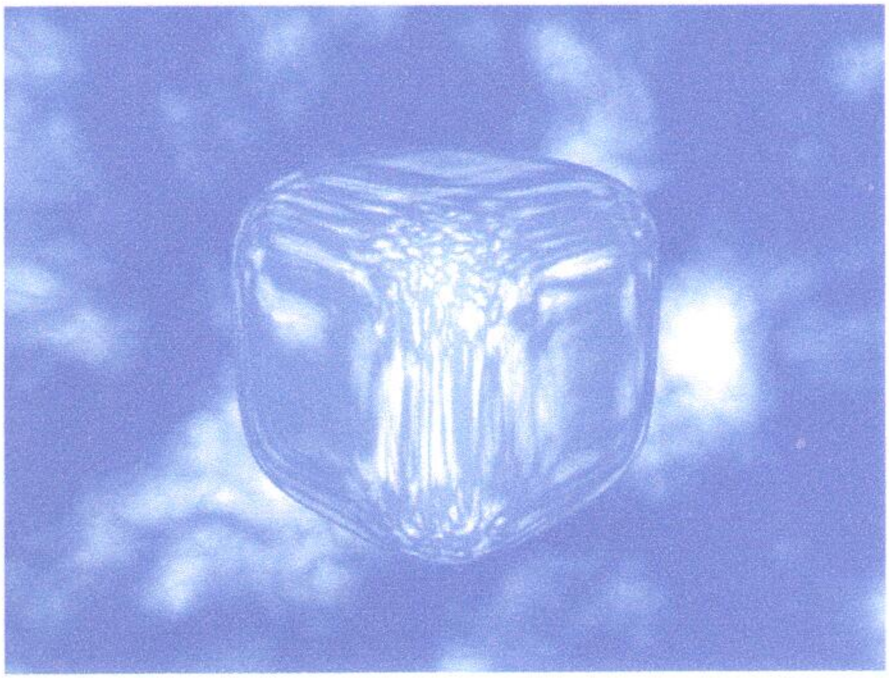

Figure 4: $B_1^4(0)$

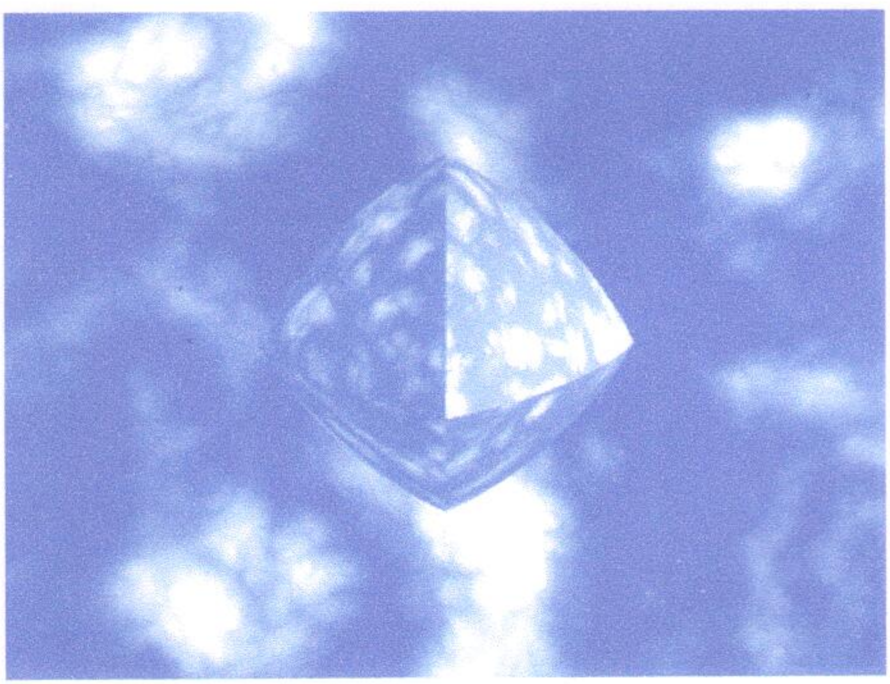

Figure 5: $B_1^{\frac{4}{3}}(0)$

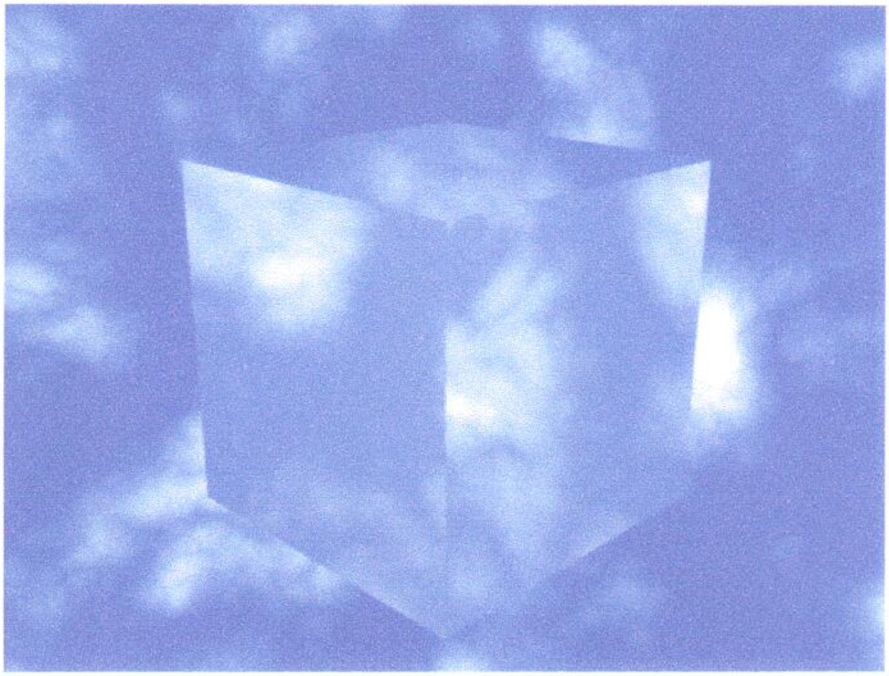

Figure 6: $B_1^{\infty}(0)$

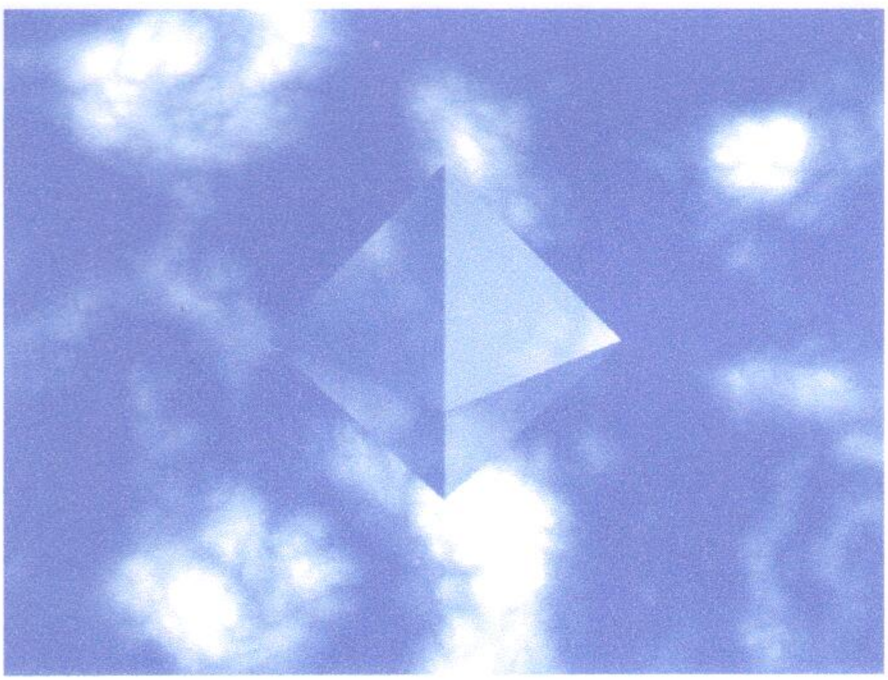

Figure 7: $B_1^1(0)$

El siguiente hecho es un resultado del análisis funcional.

**Hecho 1** *Teorema de representación de Riesz* $1^{\underline{a}}$ *parte:* $\mathcal{L}_p^*$ *es isométricamente isomorfo a* $\mathcal{L}_q$ *para* $p > 1$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *El isomorfismo está dado por*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}_q &\to \mathcal{L}_p^* \\ g &\mapsto \Phi_g \end{aligned} \qquad \textit{donde}$$

$$\begin{aligned} \Phi_g : \mathcal{L}_p &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \Phi_g(f) = \int_X gf d\mu. \end{aligned}$$

Cuando $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathfrak{F} = \mathcal{P}(X)$ y $\mu$ la medida de conteo, entonces, este teorema nos dice que bajo las hipótesis para $p$ y $q$. $(l_q^n)^*$ es isomorfo isométricamente a $l_p^n$

# 2 El Paso al Infinito

## 2.1 Algo Escencial para Recordar

De ahora en adelante denotaremos con $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ un espacio de medida y $f, g : X \to \mathbb{B}$ donde $\mathbb{B}$ es un espacio de Banach, salvo mención explícita de lo contrario. Definamos entonces:

1. $g \sim f$, sii, $f = g$ c.s.
2. $\mathcal{N} := \{N \in \mathfrak{F} : N \text{ es } \mu - nulo\}$.
3. $$\begin{aligned} \text{esssup}|f| :&= \inf_{g \sim f}(\sup_{x \in X} |g(x)|) \\ &= \inf_{N \in \mathcal{N}}(\sup_{x \in N^c} |f(x)|). \end{aligned}$$
4. $f$ es $\mu-$escencialmente acotada, sii, esssup$|f| < \infty$. O lo que es lo mismo, existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $f \restriction N^c$ es acotada.

## 2.2 El Pastel Mutante

Grace estaba de cumpleaños, invitó a $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ personas. (Estamos trabajando en $ZFC + CH$, es decir asumimos axioma de elección e hipótesis del continuo). Había dos pasteles, uno de chocolate y otro de fresa. Eran mutantes, ya que se regeneraban al sacar una tajada. A la hora de repartir el ponqué, Grace les dijo que hicieran una fila. De la gente que pudo hacer la fila, si pedían, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ del ponque de chocolate y $\frac{7}{10}$ de pastel de fresa, Grace economizaba y les daba $\frac{1}{4}$ del de chocolate y $\frac{1}{10}$ del de fresa. Los demás se quedaron sin pastel. Es decir para $(x, y) \in (0,1)$x$(0,1)$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in \mathbb{I} \text{ x } \mathbb{I} \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} & x = \frac{r}{p} \text{ y } y = \frac{s}{q} \text{ fracciones irreducibles} \end{cases}$$

Si sólo hubiera sido un ponqué, entonces para $x \in (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{I} \\ \frac{1}{p} & x = \frac{r}{p} \text{ fraccion irreducibles} \end{cases}$$

Las funciones son erráticamente las siguientes:

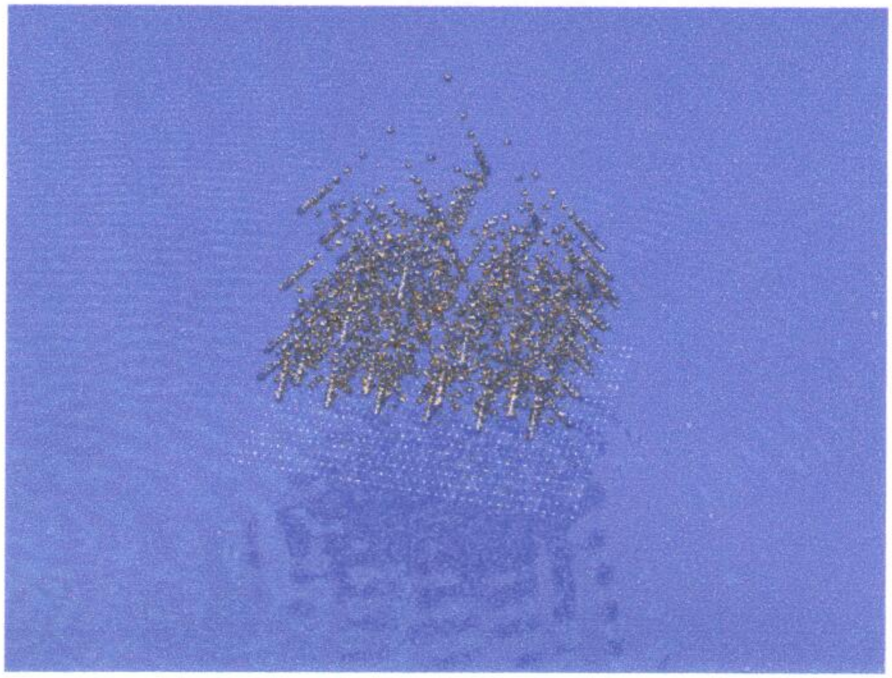

Figure 8: Para dos Pasteles

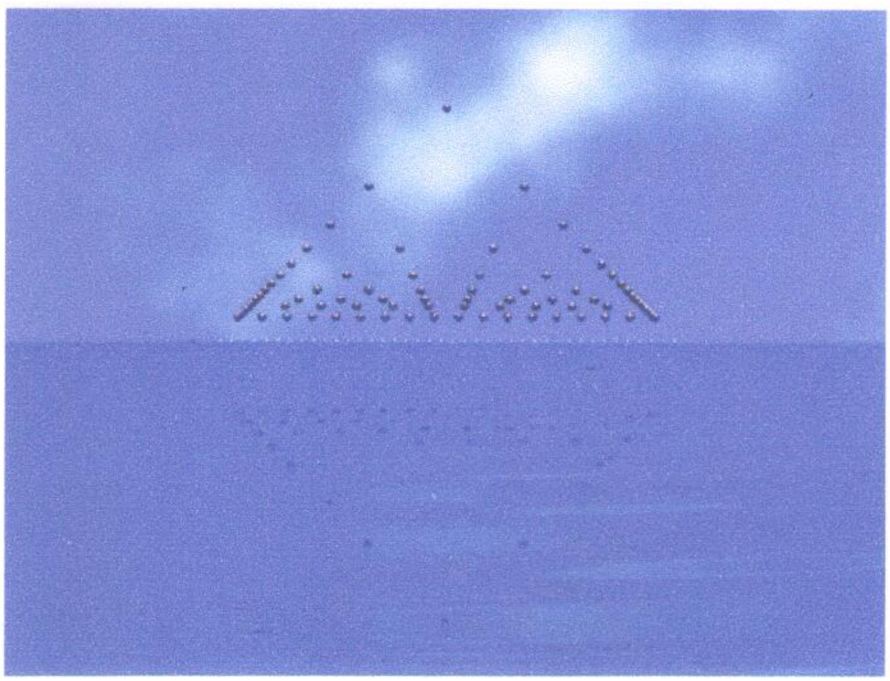

Figure 9: Para un Pastel

### 2.3 Moraleja del Pastel Mutante

1. esssup$|f|$=0, es decir
2. escencialmente, el que más comió, no comió nada. En otras palabras
3. Casi nadie probó el pastel.

# 3 Recordemos

Sea $\mu$ una medida sobre $X$ con valores en $\mathbb{C}$ definida en $\mathfrak{F}$. Consideremos el problema de encontrar una medida positiva $\lambda$ tal que $|\mu(E)| \leq \lambda(E)$ para todo $E \in \mathfrak{F}$. Queremos hacer $\lambda$ lo mas pequeña posible. Cualquier solución a este problema debe satisfacer

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|\end{aligned}$$

donde $\{E_i\}$ es una particion de $E \in \mathfrak{F}$. Resulta natural definir

$$\begin{aligned}\lambda(E) &:= |\mu|(E) \\ &= \sup_{\{E_i\}\in\Pi(E)} (\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E)|)\end{aligned}$$

donde $\Pi(E)$ es el conjunto de todas las particiones contables de $E$.

Si $E$ es un intervalo, $E_i = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ es una partición por subintervalos y $\mu$ es la medida de Lebesgue-Stieltjes con respecto a una función $f$ de variación acotada. Entonces

$$|\mu|(E) = \sup(\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i) - f(x_{i-1})|)$$

y en este caso, $|\mu|(E)$ coincide con la variación total de $f$ en $E$. Esta es una posible razón por la cual $|\mu|$ se llama la variación total de $\mu$. Notemos que si $\mu$ es una medida positiva entonces $|\mu| = \mu$, notemos ademas que

$$cm(X, \mathfrak{F}) := \{\mu : \mathfrak{F} \to \mathbb{B} : \mu \text{ es aditiva}\}$$

es un espacio vectorial normado con las operaciones definidas de manera natural, y con $||\mu|| := |\mu|(X)$. Definamos ahora

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \qquad\qquad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

Por ejemplo, si

$$\mu(X) = \int_X f d\mu$$

Entonces

$$|\mu|(X) = \int_X |f| d\mu$$
$$\mu^+(X) = \int_X f^+ d\mu$$
$$\mu^-(X) = \int_X f^- d\mu$$

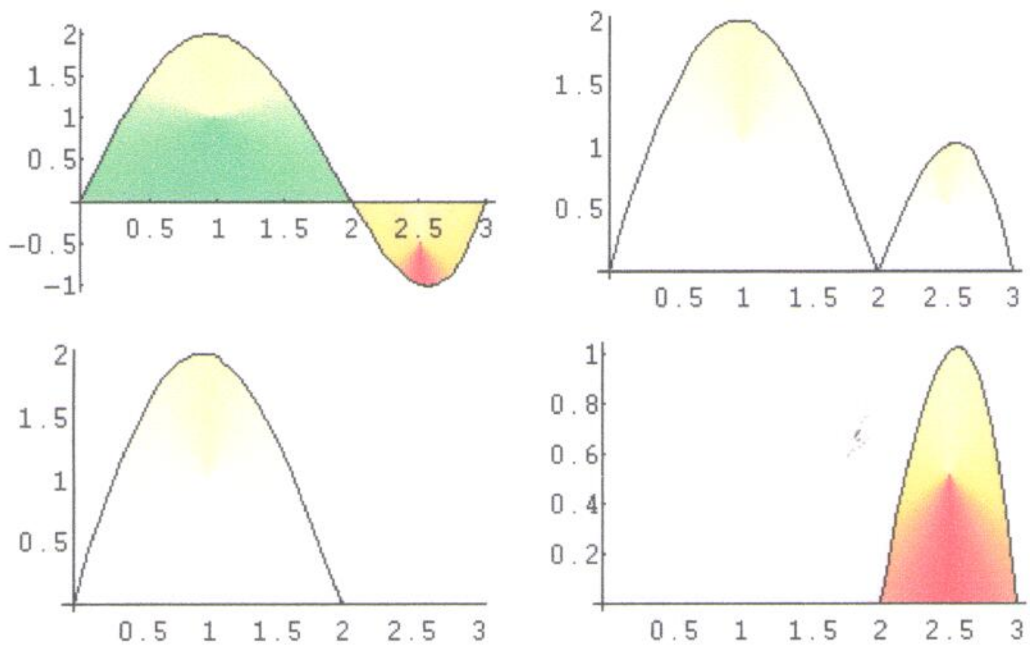


Figure 10: Variación total

Sean $\lambda$ medida finita y compleja y $\mu$ medida compleja. $\lambda$ *es absolutamento continua con respecto a* $\mu$ ($\lambda << \mu$), sii, $|\mu|(E) = 0$ implica $\lambda(E) = 0$, o lo que es lo mismo

$$\lim_{|\mu|(E)\to 0} \lambda(E) = 0$$

En efecto: Supongamos que $\lim_{|\mu|(E)\to 0} \lambda(E) = 0$ entonces dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|\mu|(E) < \delta$ entonces $|\lambda(E)| < \epsilon$, si suponemos que $|\mu|(E) = 0$, entonces, dado $\epsilon > 0$, $|\lambda(E)| < \epsilon$; es decir $\lambda(E) = 0$.

Supongamos ahora que $|\mu|(E) = 0$ implica $\lambda(E) = 0$. Observemos que $\lambda(E) \to 0$ cuando $|\mu|(E) \to 0$ se cumple cuando y sólo cuando las partes positivas reales e imaginarias de $\lambda$ tienden a cero, entonces podemos considerar $\lambda$ como no negativa. Supongamos, además, que $\lim_{|\mu|(E)\to 0} \lambda(E) \neq 0$, entonces existe $\epsilon > 0$ y conjuntos $E_n \in \mathfrak{F}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ tales que $\lambda(E_n) \geq \epsilon$ y $|\mu|(E_n) < \frac{1}{2^n}$.

Sea $E_0 = \limsup_{n\to\infty} E_n$, entonces para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\mu|(E_0) \leq |\mu|(\bigcup_{m=n}^{\infty} E_n) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m}$$

lo que muestra que $|\mu|(E_0) = 0$ y por lo tanto $\lambda(E_0) = 0$. Pero por otro lado

$$0 = \lambda(E_0) \geq \lim \sup_{n\to\infty} \lambda(E_n) \geq \epsilon$$

lo cual es absurdo y nuestra afirmación está probada. Intuitivamente $\lambda$ se "traga" los nulos de $\mu$.

Definamos ahora $\mathfrak{F}^*$ como la $\sigma$-algebra de los conjuntos de la forma $A \cup N$ con $A \in \mathfrak{F}$ y $N \subseteq M$ donde $\mu(M) = 0$ y sea $\mu_*(A \cup N) = \mu(A)$. El espacio $(X, \mathfrak{F}^*, \mu)$ se le llama la *extención de Lebesgue de* $(X, \mathfrak{F}, \mu)$

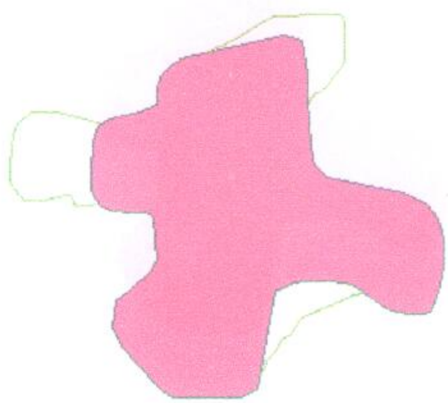

Figure 11: un conjunto de $\mathfrak{F}$ con un nulo

Extendamos nuestra definición de función medible. $f : X \to \mathbb{B}$ se dice $\mu$-*medible*, sii,

1. Existe $N \in \mathcal{N}$ tal que $f(N^c)$ es separable.
2. si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}^*$ para cada $B \in \mathfrak{B}$. Si $\mu$ es finita
3. $f^{-1}(B) \cap F \in \mathfrak{F}^*$ para cada $B \in \mathfrak{B}$ y para todo $F \in \mathfrak{F}$ con $\mu(F) < \infty$

# 4 $\mathcal{L}_\infty$

Sea $x \in l_p^n$, entonces $\lim_{p\to\infty} ||x||_{p,n} = ||x||_{\infty,n}$ donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $||x||_{\infty,n} = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$. En efecto. Para $n = 1$ es trivial, supongamos para $n$. Queremos ver que

$$\lim_{p\to\infty} (|x_1|^p + \cdots + |x_{n+1}|^p)^{\frac{1}{p}} = \max\{||x||_{\infty,n}, |x_{n+1}|\}.$$

Supongamos ademas que $||x||_{\infty,n} > |x_{n+1}|$, entonces existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $|x_{n+1}| = \alpha ||x||_{\infty,n}$. Sea $x_M$ tal que $||x||_{\infty,n} = |x_M|$, tenemos pues que

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty} ||x||_{p,n+1} &= \lim_{p\to\infty} (|x_1|^p + \cdots + |x_{n+1}|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{p\to\infty} (|x_1|^p + \cdots + \alpha^p ||x||^p_{\infty,n})^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{p\to\infty} (|x_1|^p + \cdots + |x_M|^p(1+\alpha^p) + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||x||_{\infty,n} \\
&= ||x||_{\infty,n+1}.
\end{aligned}$$

Los demás casos son similares.

Según lo anterior parece natural definir $||f||_\infty$ como alguna especie de sup que falle en los conjuntos $\mu$-nulos. Definamos entonces

1. $||f||_\infty := \text{esssup}|f|$
2. $L_\infty := \{f : X \to \mathbb{R} : ||f||_\infty < \infty\}$
3. $\mathcal{L}_\infty := L_\infty / \sim$

La siguiente propocición justifica esta definición.

**Propocición 1** *Si* $0 < \mu(X) < \infty$, $1 \le p < q \le \infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ *y* $||f|| > 0$ *entonces*

1. $\mathcal{L}_q$ *es subespacio de* $\mathcal{L}_p$
2. *Si* $f \in \mathcal{L}_q$ *entonces*

$$||f||_p \le ||f||_q \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

3. *Si* $f \in \mathcal{L}_\infty$ *entonces*

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} ||f||_p = ||f||_\infty}$$

Prueba.

1. Sea $f \in \mathcal{L}_q$ con $q < \infty$, Para esos $t$ tales que $|f(t)| \ge 1$, tenemos que $|f(t)|^p \le |f(t)|^q$. Consideremos ahora $g(t) := \max\{1, |f(t)|^q\}$, entonces $g$ es $q$ veces $\mu$-integrable y $|f(t)|^p \le g(t)$, por lo tanto $f$ es $p$ veces $\mu$-integrable. Si $q = \infty$ y $f \in \mathcal{L}_\infty$, entonces $f$ es $\mu$-escencialmente acotada, y como $\mu(X) < \infty$ entonces $\int_X |f|^p d\mu < \infty$. Por lo tanto $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_p$

2. Si $q = \infty$ es tambien trivial. Supongamos $q < \infty$. La desigualdad de Hölder nos dice que si $h \in \mathcal{L}_r$ y $g \in \mathcal{L}_s$, entonces $hg \in \mathcal{L}_1$ y

$$||hg||_1 \leq ||h||_r ||g||_s \qquad \text{para } p, q > 1 \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Apliquemos esto para $h = |f|^p \in \mathcal{L}_{\frac{q}{p}}$, $g = 1 \in \mathcal{L}_{\frac{q}{q-p}}$, $r = \frac{q}{p}$ y $s = \frac{q}{q-p}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &\leq \left( \int_X |f|^q d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left( \int_X d\mu \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \left( \int_X |f|^q \right)^{\frac{p}{q}} \mu(X)^{\frac{q-p}{q}} \end{aligned}$$

3. Sea $M := ||f||_\infty > 0$. fijemos $\epsilon > 0$, y sea

$$H_\epsilon := \{x \in N^c : |f(x)| \geq M - \epsilon\}$$

entonces $\nu := \mu(H_\epsilon) > 0$. En efecto, si $\nu = 0$, tenemos que

$$M \leq \sup_{x \in H_\epsilon^c} |f(x)|$$

Luego existe $x_0 \in H_\epsilon^c$ tal que

$$M - \epsilon \leq |f(x_0)| \leq \sup_{x \in H_\epsilon^c} |f(x)|.$$

Es decir existe $x_0 \in H_\epsilon^c \cap H_\epsilon$, absurdo, por lo tanto $\nu > 0$. Ahora

$$\begin{aligned} ||f||_p &\geq \left( \int_{H_\epsilon} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left( \int_{H_\epsilon} (M - \epsilon) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \nu^{\frac{1}{p}} (M - \epsilon) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \inf_{\alpha \geq p} ||f||_\alpha &\geq \inf_{\alpha \geq p} \left( \nu^{\frac{1}{p}} (M - \epsilon) \right) \\ &\geq M - \epsilon \end{aligned}$$

como esto se cumple para todo $\epsilon > 0$, entonces $\inf_{\alpha \geq p} ||f||_\alpha \geq M$ por lo tanto $\underline{\lim}_{p \to \infty} ||f||_p \geq M$, y

$$\lim_{p \to \infty} ||f||_p \geq \underline{\lim}_{p \to \infty} ||f||_p \geq M$$

De 2. tenemos que $||f||_p \leq ||f||_\infty \mu(X)^{\frac{1}{p}}$. Haciendo tender $p$ a infinito, obtenemos

$$\lim_{p \to \infty} ||f||_p \leq M$$

Concluimos que $\lim_{p \to \infty} ||f||_p = ||f||_\infty$

# 5 $\mathcal{L}_1^*$

El siguiente resultado es apenas esperado.

**Hecho 2** *Teorema de representación de Riesz* $2^{\underline{a}}$ *parte:* $\mathcal{L}_1^*$ *es isomorfo isometricamente a* $\mathcal{L}_\infty$. *El isomorfismo esta dado por*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}_\infty &\to \mathcal{L}_1^* \\ g &\mapsto \Phi_g \qquad\qquad \textit{donde} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_g : \mathcal{L}_1 &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \Phi_g(f) = \int_X gf d\mu \end{aligned}$$

# 6 $\mathcal{L}_\infty^*$

## 6.1 Preparándonos

Sea $(X, \mathfrak{F}^*, \mu)$ la extensión de Lebesgue de $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ definimos

$$\mathfrak{F}' := \{E \in \mathcal{P}(X) : A \cap E \in \mathfrak{F}^* \text{ para todo } A \in \mathfrak{F} \text{ con } \mu(A) < \infty\}$$

$\mathfrak{F}\prime$ es una $\sigma$-algebra. Definimos también

$$\mu'(E) := \begin{cases} \mu(E) & \text{para } E \in \mathfrak{F}^* \\ +\infty & \text{para } E \in \mathfrak{F}' - \mathfrak{F}^* \end{cases}$$

Notemos que los $\mu'$-nulos coinciden con los $\mu$-nulos y que

$$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}'^*$$

**Lema 1** *$f$ es $\mu$-medible, sii, $f$ es $\mu'$-medible*

Prueba. La primera condición de función medible es obvia. Demostremos, entonces, la tercera, ya que la segunda es un caso particular. Supongamos que $f$ es $\mu$ medible. Sean $B \in \mathfrak{B}$, $F \in \mathfrak{F}'$ con $\mu'(F) < \infty$. Por definición de $\mu'$, $F \in A^*$, esto significa que

$$F = E \cup N, \quad E \in \mathfrak{F}, \quad N \subseteq M \quad \text{donde } \mu(M) = 0$$

como por hipótesis $E \cap F \in \mathfrak{F}^*$, entonces

$$\begin{aligned} F \cap f^{-1}(B) &= (E \cup N) \cap f^{-1}(B) \\ &= (E \cap f^{-1}(B)) \cup (N \cap f^{-1}(B)) \\ &\in \mathfrak{F}^* \\ &\subseteq \mathfrak{F}'^* \end{aligned}$$

por lo tanto $f$ es $\mu'$-medible.

Supongamos ahora que $f$ es $\mu'$-medible. Sean $F \in \mathfrak{F}$ y $B \in \mathfrak{B}$ con $\mu'(F) < \infty$, entonces por hipótesis $F \cap f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}'^*$, es decir

$$F \cap f^{-1}(B) = E \cup N, \quad E \in \mathfrak{F}', \quad N \subseteq M \quad \text{donde } \mu'(M) = \mu(M) = 0.$$

Como $E \in \mathfrak{F}'$ entonces $F \cap E \in \mathfrak{F}^*$ (definición de $\mathfrak{F}'$) y $F^c \cap E \in \mathfrak{F}^*$. Ya que $\mathfrak{F}^*$ es una $\sigma$-algebra entonces

$$E = (F^c \cap E) \cup (F \cap E) \in \mathfrak{F}^*$$

por lo tanto

$$E = E' \cup N', \quad E' \in \mathfrak{F}, \quad N' \subseteq M' \quad \text{y} \quad \mu'(M) = 0$$

entonces

$$\begin{aligned} F \cap f^{-1}(B) &= E \cup N \\ &= (E' \cup N') \cup N \\ &= E'(\cup N' \cup N). \end{aligned}$$

Como $N' \cup N \subseteq M' \cup M$, $\mu(M' \cup M) = 0$ y $E' \in \mathfrak{F}$ tenemos que $f^{-1}(B) \cap F \in \mathfrak{F}^*$, es decir $f$ es $\mu$-medible, y nuestro lema está probado.

Ya que los conjuntos $\mu'$-nulos y los $\mu$-nulos coinciden, y ya que las funciones $\mu'$-medibles y las $\mu$-medibles coinciden, entonces $f$ está $\mu$-escencialmente acotada, sii, $f$ está $\mu'$-escencialmente acotada. Es decir

$$\mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu) = \mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}', \mu')$$

Definamos ahora $ab(X, \mathfrak{F}, \mu)$ como el espacio vectorial normado de todas las funciones de conjunto $\mu$-continuas, acotadas, $\sigma$-aditivas de valor real definidas en $\mathfrak{F}$, con la norma $||\lambda|| := |\lambda|(X)$

## 6.2 ¡¿Por qué diablos $ab(X, \mathfrak{F}', \mu')$?!

**Teorema 1** *$\mathcal{L}^*_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu)$ es isomorfo isométricamente a $ab(X, \mathfrak{F}', \mu')$ . El isomorfismo esta dado por*

$$\begin{aligned} \Phi : ab(X, \mathfrak{F}', \mu') &\to \mathcal{L}^*_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu) \\ \lambda &\mapsto \Phi_\lambda \qquad\qquad \textit{donde} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda : \mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \Phi_\lambda(f) = \int_X f d\lambda \end{aligned}$$

Prueba.

1. **$\Phi$ está bien definida:** Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu)$, entonces existe un conjunto $N$, $\mu$-nulo tal que $f(N^c)$ está acotado. Sea $\epsilon > 0$, entonces existen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}$ con diam$A_i < \epsilon$, para i=1,2, ... ,n, tales que $f(N^c) \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$. Como $f$ es $\mu$-medible, entonces para todo $F \in \mathfrak{F}$ con $\mu(F) < \infty$ se tiene que $f^{-1}(A_i) \cap F \in \mathfrak{F}^*$ para todo $i$ entre 1 y $n$. Para $i = 1, \ldots, n$ definamos $E_i := f^{-1}(A_i)$, entonces $E_i \in \mathfrak{F}'$. Escogamos $\alpha_i \in A_i$ hagamos $f_\epsilon := \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$, Entonces para $x \in N^c$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_\epsilon(x)| &< \epsilon \text{ o lo que es lo mismo} \\ ||f - f_\epsilon||_\infty &< \epsilon. \end{aligned}$$

Sea $\lambda \in ab(X, \mathfrak{F}', \mu')$ como cada conjunto $\mu'$-nulo es $\lambda$-nulo y como $N$ es $\mu$-nulo, entonces es $\mu'$-nulo y por tanto $\lambda$-nulo. Tenemos pues que $f$ es $\lambda$-medible ya que $|f(x)-f_\epsilon(x)| < \epsilon$ para todo $x \in N^c$, entonces $f_\epsilon \to f$ $\lambda$-uniformemente, por lo tanto $f_\epsilon \to f$ en $\lambda$-medida, lo que implica que $f$ es $\lambda$-medible, como $\lambda(N) = 0$ y $f(N^c)$ es acotado, entonces $f$ es $\lambda$-integrable y además

$$\begin{aligned}\left|\int_X f d\lambda\right| &\leq \int_X |f| d|\lambda| \\ &\leq \int_{N^c} \|f\|_\infty d|\lambda| + \int_N |f| d|\lambda| \\ &= \|f\|_{\infty,\lambda} \|\lambda\|\end{aligned}$$

Entonces dado $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu)$ y $\lambda \in ab(X, \mathfrak{F}', \mu')$, se tiene que

$$|\Phi_\lambda(f)| \leq \|f\|_{\infty,\lambda} \|\lambda\|,$$

de donde

$$\|\Phi_\lambda\| \leq \sup_{\|f\|=1} |\Phi_\lambda(f)| \leq \|\lambda\|,$$

Por lo tanto $\Phi_\lambda$ es un funcional acotado de $\mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu)$ para cada $\lambda \in ab(X, \mathfrak{F}', \mu')$

2. **Linealidad:** Es trivial ya que la integral es un funcional lineal

3. **Isometría:** Sea $\epsilon > 0$, y sean $E_1, \ldots, E_n$ conjuntos disyuntos de $\mathfrak{F}'$ tales que

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^n E_i = X \quad \text{y} \\ \|\lambda\| - \epsilon < \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)|\end{aligned}$$

con $|\lambda(E_i)| > 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. y sea

$$\begin{aligned}\alpha_i &:= \frac{|\lambda(E_i)|}{\lambda(E_i)} \quad \text{y} \\ f &:= \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}\end{aligned}$$

Como $\|f\|_\infty = 1$ entonces $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu)$ y

$$\begin{aligned}\|\Phi_\lambda\| &\geq \Phi_\lambda(f) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |\lambda(E_i)| \\ &> \|\lambda\| - \epsilon\end{aligned}$$

como esto se tiene para todo $\epsilon > 0$, entonces $\|\Phi_\lambda\| \geq \|\lambda\|$. Por lo tanto $\|\Phi_\lambda\| = \|\lambda\|$, de donde $\Phi$ es una isometría.

4. **$\Phi$ es uno-uno:** Por ser isometría.

5. **$\Phi$ es sobre:** Sea $\lambda(E) := \psi(\chi_E)$, para $E \in \mathfrak{F}^*$. $\lambda$ es acotada y aditiva ya que $\psi$ es acotada y lineal. $\lambda$ es $\mu$-continua pues si $\mu(E) = 0$, entonces $\chi_E = 0$ c.s., por lo tanto $\psi(\chi_E) = 0$, tenemos entonces que $\lambda$ esta en $ab(X, \mathfrak{F}', \mu')$.
Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu)$ y sea $\epsilon > 0$, sabemos que podemos encontrar
$$f_\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \quad \text{tal que} \quad f_\epsilon \to f \text{ con } f \in \mathcal{L}_\infty.$$
Calculemos
$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(f_\epsilon) &= \int_X f_\epsilon d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(\chi_{E_i}) \\ &= \psi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}) \\ &= \psi(f_\epsilon)\end{aligned}$$
y también
$$\begin{aligned}\psi(f) &= \lim_{\epsilon \to 0} \psi(f_\epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_X f_\epsilon d\lambda \\ &= \int_X f d\lambda \\ &= \Phi_\lambda(f)\end{aligned}$$
En otras palabras para cada $\psi \in \mathcal{L}_\infty^*(X, \mathfrak{F}, \mu)$ existe $\lambda \in ab(X, \mathfrak{F}', \mu')$ tal que $\Phi_\lambda = \psi$. Es decir, $\Phi$ es sobre.
De 1., 2., 3., 4., y 5. tenemos nuestro teorema. ✠

## 6.3 ¿Por qué no $\mathcal{L}_1(X, \mathfrak{F}, \mu)$?

La razón es por el teorema de Radon-Nykodim, veámos por qué. Sea
$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{L}_1(X, \mathfrak{F}, \mu) &\to \mathcal{L}_\infty^*(X, \mathfrak{F}, \mu) \\ f &\mapsto \Phi_f \qquad \text{donde}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\Phi_f : \mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu) &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \Phi_f(g) = \int_X fg d\mu\end{aligned}$$
Veámos que $\Phi$ es una inmersión isométrica estricta. Por el teorema de Radon-Nykodim podemos establecer un isomorfismo entre $\mathcal{L}_1(X, \mathfrak{F}, \mu)$ y $ab_\sigma(X, \mathfrak{F}, \mu)$; es decir el conjunto de todas las funciones de conjunto $\sigma$-aditivas definidas en $\mathfrak{F}$ a valor real acotads y $\mu$-continuas. Como
$$\begin{aligned}ab_\sigma(X, \mathfrak{F}, \mu) &\subseteq ab_\sigma(X, \mathfrak{F}', \mu') \\ &\subset ab(X, \mathfrak{F}', \mu') \\ &\equiv \mathcal{L}_\infty^*(X, \mathfrak{F}, \mu)\end{aligned}$$
Entonces $\mathcal{L}_\infty^*(X, \mathfrak{F}, \mu)$ no puede ser isomorfo isométricamente a $\mathcal{L}_1(X, \mathfrak{F}, \mu)$.

# 7 Observaciones Finales

1. La siguiente tabla nos muestra un esquema general de la situación.

| **Propiedad \ Espacio** | $l_p^n$ | $\mathcal{L}_p$ | $\mathcal{L}_1$ | $\mathcal{L}_\infty$ | $ba$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **Reflexivo** | si | si | no | no | no |
| **Dual** | $l_q^n$ | $\mathcal{L}_q$ | $\mathcal{L}_\infty$ | $ba$ | ¿No se sabe? |
| **Separable** | si | si | si | no | ? |

2. ¿Será que el dual geométrico y el dual funcional no son solo una coincidencia?

3. **Hecho 3** *Sea $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ un espacio de medida positiva, entonces existe un espacio compacto de Hausdorff $X'$ y un isomorfismo isométrico $\Lambda$ entre ¡$\mathcal{L}_\infty(X, \mathfrak{F}, \mu)$ y $C(X')$!. ¡ $\Lambda$ envía funciones reales en funciones continuas, funciones positivas en funciones positivas y funciones complejas conjugadas en funciones complejas conjugadas!. Mas aún $\Lambda$ es un ¡isomorfismo algebraico!.*
*Pero $C^*(X) \equiv rba(X)$*

# 8 Referencias


1. H.S.M Coxeter, *Regular Politopes*, The MacMillan Company, 1963.

2. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1966.

3. G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, 1966.

4. S.T. Hu, *Element of Real Analysis*, Holden Day, inc., 1967.

5. F. Caicedo, *Calculo Avanzado*, Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas y Estadística, 1993

6. M. Muñoz, *Medida y Probabilidad, Notas de Clase*, Universidad Nacional de Colombia, departamento de Matemáticas y Estadística, 1999.

7. M. de Mayorga, *El espacio dual de $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$*, Boletin de Matemáticas, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia,1983.

8. N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators Part I*, Interscience Publishers, inc, 1958.