
EL OPERADOR DE D'ALEMBERT
BAJO LAS CONDICIONES DE FRONTERA
DIRICHLET-PERIÓDICAS UNIDIMENSIONALES

Trabajo de Ascenso para Profesor Asociado

ARTURO SANJUÁN
Profesor Asistente



Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2015

Índice general

Introducción	III
1. Núcleo	1
1.1. Núcleo en C^k	1
1.2. Núcleo en L^p	5
2. Rango	9
2.1. Rango en C^k	9
2.2. Rango en L^p	12
2.2.1. Espacios de Sóbolev	14
2.2.2. Espacios de Hölder	16
2.3. Teoría de la Ecuación de Onda Lineal	17
3. Análisis Espectral	18
3.1. Espectro de \square^{-1}	18
3.2. El Conjunto $\sigma(\square)$	20

4. Conclusiones	22
Apéndices	24
Referencias	24

Introducción

Denotemos con $\square u(x, t) := \partial_t^2 u(x, t) - \partial_x^2 u(x, t)$. El operador lineal \square se llama operador de Onda u Operador de D'Alembert. Si $f(x, t)$ es una función fija, el problema de encontrar soluciones u a la ecuación diferencial parcial

$$\square u = f$$

se remonta al Siglo VIII. Este problema tiene una gran importancia en la historia de la matemática. Con el ánimo de modelar matemáticamente las vibraciones de una cuerda, como la de un violín, Juan Bernoulli y Daniel Bernoulli formulan la ecuación de onda. Euler y D'Alembert en 1747 encontraron soluciones de la forma

$$\phi(x + t) - \psi(t - x)$$

cuando $f \equiv 0$. No obstante, las soluciones obtenidas por Daniel Bernoulli, haciendo uso del método de separación de variables, no coincidían con las de Euler y D'Alembert ya que estaban expresadas en forma de series trigonométricas. Medio siglo después, con los trabajos de Fourier (1807), se lograron conciliar las dos representaciones [5, p. 531-533].

Las consideraciones e interpretaciones físicas para la deducción de la ecuación pueden ser consultadas en la bibliografía [31, 35, 34].

Sobre la función u se pueden imponer distintas condiciones. Asumimos, a lo largo del trabajo, que las vibraciones tienen periodicidad en el tiempo. Asumiremos también que

el periodo es un múltiplo racional de π . Bajo esta hipótesis basta estudiar, sin pérdida de generalidad, el caso en que el periodo es 2π . La consideración de los periodos que son múltiplos irracionales de π complican considerablemente el análisis [10, 24]. Periodos de este estilo no serán considerados en este trabajo.

Supondremos además, sin pérdida de generalidad, que la cuerda tiene longitud π y está fija en los extremos. Más específicamente $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. A las condiciones

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \\ u(x, t) &= u(x, t + 2\pi) \end{aligned}$$

se le llaman condiciones de frontera Dirichlet-periodícas.

El objetivo principal del presente trabajo es exponer, a través de una organización teórica, las propiedades del operador de onda u operador de D'Alembert \square . Para ello es necesario hacer el correspondiente estudio de la ecuación de onda lineal.

Las técnicas matemáticas para encontrar soluciones clásicas a la ecuación de onda lineal son ampliamente conocidas en la literatura de ecuaciones diferenciales y libros de textos [19, 35, 15, 18]. Sin embargo, el estudio riguroso de las propiedades matemáticas del operador de D'Alembert y la existencia de soluciones más generales (débiles) de la ecuación de onda lineal está disperso en artículos científicos y no presentan mayor detalle [22, 26, 7, 23]. En estos artículos científicos se emplean términos como *núcleo* y *rango* o se usan propiedades como *compacidad*. Estos términos y propiedades no presentan justificación o se enuncian como de fácil demostración. Adicionalmente, los espacios empleados (y las formas de emplearlos) por los distintos investigadores no siempre coinciden y por tanto la teoría no se encuentra integrada en un sólo lugar. Todo esto hace que resulte difícil, a matemáticos interesados en ecuaciones de onda más generales (semilineales, cuasilineales, etc.), introducirse en el tema.

El aporte del trabajo es, por tanto, brindar una organización teórica desde el análisis funcional de las propiedades del operador de D'Alembert y de la ecuación de onda lineal.

Para la lectura de este trabajo se asumen conocimientos de análisis matemático [29, 30, 3], análisis funcional [6, 28] y cálculo avanzado [9, 1].

Los capítulos están organizados del siguiente modo. En el primer capítulo se estudian las soluciones clásicas y débiles a la ecuación de onda homogénea, es decir, cuando $f \equiv 0$. Estas soluciones conformarán el núcleo de \square . En el segundo capítulo se estudia el rango del operador de onda, o el problema lineal no-homogéneo. Se brindará además una fórmula explícita para las soluciones. En el tercer capítulo se hace el análisis espectral del operador de onda en L^2 .

CAPÍTULO 1

Núcleo

En este capítulo estudiaremos desde una perspectiva del análisis funcional el problema lineal homogéneo. Para ello debemos hacer una cuidadosa delimitación de los espacios donde está definido el operador. Primero daremos la definición de solución clásica y luego veremos lo que se entiende por solución débil y encontraremos el núcleo en L^p .

1.1. Núcleo en C^k

Denotemos con \mathbb{T} al espacio cociente $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Es bien sabido que \mathbb{T} es una variedad compacta de clase C^∞ modelada sobre \mathbb{R} que además es un grupo de Lie (ver [17, p. 9] y [1, p. 278]). A la variedad \mathbb{T} la llamamos el *toro* y puede ser visto como el conjunto de números $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$. Es decir, tales que $z = e^{it}$ para algún $t \in \mathbb{R}$ [29, p. 183]. Decimos que una función a valor real es 2π -*periódica* si $\text{dom}(f) = \mathbb{T}$. Lo anterior es equivalente a decir que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y que $f(x) = f(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ [30, p. 88].

Denotamos con \mathbb{M} a la variedad producto $(0, \pi) \times \mathbb{T}$ y con $\overline{\mathbb{M}}$ a la variedad con borde $[0, \pi] \times \mathbb{T}$. El conjunto $C(\mathbb{M})$ es el espacio de todas las funciones continuas definidas en \mathbb{M} . Si escribimos $C_c(\mathbb{M})$ es el espacio de todas las funciones *continuas a soporte compacto* definidas en \mathbb{M} . Es decir, el conjunto de todas las funciones continuas en \mathbb{M} que se anulan por fuera de un compacto contenido en \mathbb{M} . Podemos reemplazar \mathbb{M} por cualquier abierto (o variedad) de \mathbb{R}^n . Incluso, \mathbb{M} puede ser reemplazado por cualquier conjunto de \mathbb{R}^n . Es claro que $C(\overline{\mathbb{M}}) = C_c(\overline{\mathbb{M}})$ y $C_c(\mathbb{M})$ son espacios de Banach con la norma del máximo $\|u\|_\infty := \max |u(p)|$. Esta misma notación la usaremos para $\sup |u(p)|$ en el *espacio de funciones acotadas*.

Para $k = 0, 1, 2, \dots$ escribimos con $C^k(\mathbb{M})$ al conjunto de todas las *funciones continuamente diferenciables* hasta orden k y definidas en \mathbb{M} . También contemplamos el espacio $C^\infty(\mathbb{M})$ de las funciones *infinitamente diferenciables* o *funciones suaves* definidas en \mathbb{M} . Aquí también podemos reemplazar \mathbb{M} por cualquier conjunto abierto o variedad. El conjunto $C^k(\overline{\mathbb{M}})$ es el conjunto de todas las funciones en $C^k(\mathbb{M})$ tales que todas sus derivadas parciales hasta de orden k se pueden extender de manera continua a $\overline{\mathbb{M}}$. Otros espacios de interés son $C_c^k(\mathbb{M}) = C^k(\mathbb{M}) \cap C_c(\mathbb{M})$ con $1 \leq k \leq \infty$. En $C^k(\overline{\mathbb{M}})$ definimos la norma

$$\|u\|_k := \max_{j=0, \dots, k} \max_{(x,t) \in \mathbb{M}} |\partial_{i,j}^{i+j} u(x,t)|.$$

De manera similar definimos la norma en $C^k(\mathbb{T})$. Los espacios $C^k(\overline{\mathbb{M}})$ y $C^k(\mathbb{T})$ con la norma $\|\cdot\|_k$ son espacios de Banach.

De particular interés para este trabajo son los espacios de Banach C_0^k y C_\times^k . C_0^k es el espacio de de todas las funciones $u \in C^k(\overline{\mathbb{M}})$ tales que $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Por su parte, C_\times^k es el espacio de todas las funciones $p \in C^k(\mathbb{T})$ tales que $\int_{\mathbb{T}} p = 0$. Es decir, de promedio nulo.

El problema lineal homogéneo lo formulamos de la siguiente manera: encontrar soluciones $u : [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a la ecuación

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0 \tag{1.1}$$

sujetas a las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \tag{1.2}$$

y a las condiciones de periodicidad en el tiempo

$$u(x, t) = u(x, t + 2\pi). \quad (1.3)$$

A las condiciones (1.2)-(1.3) se les suele llamar *condiciones de frontera Dirichlet-periodicas*. Las soluciones a la ecuación (1.1) que están en C_{∂}^k con $k \geq 2$ se llaman *soluciones clásicas*. La palabra clásica hace referencia a tener la suficiente derivabilidad y continuidad para que la ecuación tengan el sentido usual. Para emplear la notación que hemos usado hasta el momento, podemos decir que si definimos, para $k \geq 2$, $\square : C_{\partial}^k \rightarrow C^{k-2}(\overline{\mathbb{M}})$ mediante la fórmula

$$\square u := \partial_t^2 u - \partial_x^2 u.$$

Al operador \square se le dice *operador de ondas*, *D'Alembertiano* u *operador de D'Alembert*. Un cálculo directo muestra que \square así definido es un operador lineal continuo de C_{∂}^2 en C^{k-2} . De este modo, encontrar soluciones clásicas a (1.1) sujeta a (1.2)-(1.3) es equivalente a determinar el núcleo del operador de onda \square en C_{∂}^k

$$\mathcal{N}_k := \ker(\square) = \square^{-1}(0) \subseteq C_{\partial}^k.$$

Es bien sabido por la literatura en ecuaciones diferenciales parciales (ver [15, p. 67], [35, p. 32-35], [20, p. 113-114] o [19, p. 40-43] p. ej.) más algunos cálculos sencillos, que los únicos elementos de \mathcal{N}_k son las funciones de la forma

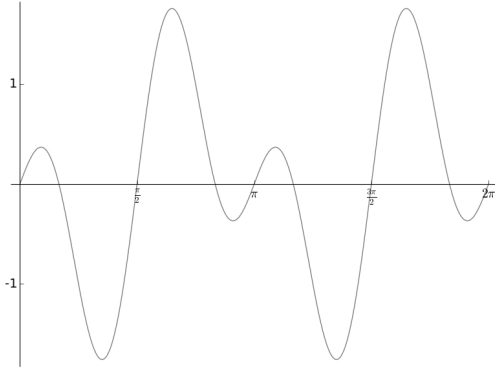
$$u(x, t) = \rho(t + x) - \rho(t - x) \quad (1.4)$$

para alguna $\rho \in C^k(\mathbb{T})$.

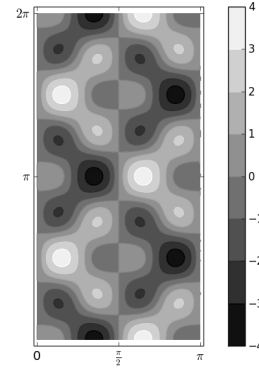
Es posible que distintas $\rho \in C^k(\mathbb{T})$ generen la misma solución $u \in \mathcal{N}_k$. Basta tomar ρ y $\rho + c$ con c constante para verificar esta situación. Para solucionar este problema, Rabinowitz [25, p. 150] propuso lo que se conoce ahora como la *normalización del núcleo*. Para ello se consideran solamente funciones $\rho \in C_{\times}^k$. Se puede ver por un cálculo directo que si tomamos distintas $\rho \in C_{\times}^k$, se obtienen distintas $u \in \mathcal{N}_k$.

Escribiendo lo anterior en términos de operadores, definimos $\mathcal{Z} : C_{\times}^k \rightarrow C_{\partial}^k$ mediante la fórmula

$$\mathcal{Z}\rho(x, t) = \rho(t + x) - \rho(t - x). \quad (1.5)$$



(a) $\rho_0(r) = 2 \sin r \cos(2r)$



(b) Solución $u_0(x, t) = \rho_0(t+x) - \rho_0(t-x)$

Figura 1.1: Ejemplo de solución clásica al problema lineal homogéneo

Es claro que el operador $\mathcal{Z} : C_{\times}^k \rightarrow C_{\partial}^k$ es un operador lineal continuo y uno-uno. Con la notación que tenemos hasta el momento, podemos decir que

$$\mathcal{N}_k = \square^{-1}(0) = \text{rng}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}(C_{\times}^k) \quad (1.6)$$

La existencia de soluciones, incluso las no-triviales (distintas de la solución cero), queda entonces establecida con lo que hemos hecho hasta el momento.

La función ρ tiene la siguiente interpretación físico-geométrica. Si la curva solución u tiene una forma inicial, es decir si $u(x, 0) = \psi(x) \in C_{\partial}^k$ para $x \in (0, \pi)$ y $k \geq 2$ y si denotamos con $\tilde{\psi}$ a la extensión natural en C_{\times}^k , entonces $\rho = \tilde{\psi}/2$ será la función en C_{\times}^k tal que $\mathcal{Z}\rho$ sea solución. En este trabajo no nos ocuparemos de esta interpretación, sólo consideraremos a las correspondientes funciones ρ .

Tenemos entonces un problema bien puesto en el sentido de Hadamard [16, p. 13]. Si consideramos una $\rho_0 \in C_{\times}^k$ como dato inicial, tenemos gracias a las propiedades de \mathcal{Z} , existencia, unicidad y dependencia continua. Dicho de otra forma, el siguiente teorema resume la teoría expuesta en esta sección..

Teorema 1.1 (Existencia, Unicidad y Dependencia Continua de las Soluciones Clásicas al Problema Lineal Homogéneo). *Para $\rho_0 \in C_{\times}^k$ con $k \geq 2$ existe una única $u_0 \in C_{\partial}^k$ que satisface $\square u_0 = 0$ con $u_0 = \mathcal{Z}\rho_0$. Además, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|\rho - \rho_0|_k < \delta$, entonces $|\mathcal{Z}\rho - \mathcal{Z}\rho_0|_k < \epsilon$.*

Un ejemplo de una solución a este problema se ve en las figuras 1.1a-1.1b. Los segmentos paralelos al eje x , en la figura 1.1b representan la forma de la cuerda en vibración en un instante de tiempo t .

1.2. Núcleo en L^p

Para $p \in [1, \infty)$, definimos L^p_\times como el espacio de las funciones $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ de promedio nulo tales que $|f|^p$ es integrable en el sentido Lebesgue. $L^\infty_\times(\mathbb{T})$ será el espacio de las funciones a valor real, 2π -periódicas y esencialmente acotadas. Dos funciones son iguales si son iguales salvo un conjunto de medida cero. La norma es la norma usual en L^p y será notada con $\|\cdot\|_p$.

Si $\Omega = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$. Se define $L^p(\Omega)$ como el espacio de las funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $|f|^p$ es integrable en el sentido de Lebesgue. $L^\infty(\Omega)$ será el conjunto de las funciones esencialmente acotadas. La norma se notará, como es usual, con $\|\cdot\|_p$. En L^2_\times y $L^2(\Omega)$ denotamos la norma simplemente con $\|\cdot\|$ y el producto interno por $(\cdot | \cdot)$.

Usamos la notación $\langle f, x \rangle$ para representar la evaluación del funcional lineal continuo $f \in (L^p)^* = L^{p'}$ en el elemento $x \in L^p$ con $p \in (1, \infty)$ y p y p' exponentes conjugados, es decir $1/p + 1/p' = 1$. Esta representación es posible gracias al Teorema de Representación de Riesz [6, p. 97]. Si $p = p' = 2$, entonces $\langle f, g \rangle = (f | g)$. Gracias al Teorema de Extensión Continua [21, p. 100] podemos extender de manera continua $\mathcal{Z} : L^p_\times \rightarrow L^p(\Omega)$. Claramente \mathcal{Z} seguirá siendo uno-uno. Por el Teorema de la Aplicación Abierta [21, p. 286].

Se dice que $u \in L^p(\Omega)$ es una *solución débil en L^p* al problema (1.1)-(1.3) si

$$\langle u, \square\varphi \rangle = 0 \tag{1.7}$$

para toda $\varphi \in C_c^2(\mathbb{M})$. Para ver una motivación de esta definición ver [6, cap. 8] o [18, cap 7]. Cuando $u \in C^k_\partial$ con $k \geq 2$, la Integración por Partes establece la identidad $\langle u, \square\varphi \rangle = (\square u | \varphi)$. Para $p \in [1, \infty]$, notamos con N_p al conjunto de todas las soluciones débiles al problema (1.1)-(1.3) en $L^p(\Omega)$. Para $p = 2$ escribimos simplemente N en vez de N_2 .

Queremos expresar el conjunto de soluciones $u \in L^p(\Omega)$ a (1.1) en términos del operador \mathcal{Z} . Más específicamente, queremos ver que $N_p = \mathcal{Z}(L^p_{\times})$. Para eso necesitamos definir la aplicación

$$\mathcal{Q}(f)(r) := \int_0^\pi (f(x, r-x) - f(x, r+x)) dx. \quad (1.8)$$

Usando la Desigualdad de Hölder, se puede ver que $\mathcal{Q} : L^p(\Omega) \rightarrow L^p_{\times}$ para $p \in [1, \infty)$ está bien definida y es lineal continua. El caso $p = \infty$ se deduce de un cálculo directo. En los espacios C^k , $\mathcal{Q} : C^k(\overline{\mathbb{M}}) \rightarrow C^k_{\times}$ también está bien definida y es lineal continua. Además \mathcal{Q} es una inversa a izquierda de \mathcal{Z} , lo que implica que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\mathcal{Z} &= \mathbf{1}_{C^k_{\times}} \quad (= \mathbf{1}_{L^p_{\times}} \text{ resp.}) \\ \mathcal{Z}\mathcal{Q} &= \Pi_{\text{rng } \mathcal{Z}}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

donde $\Pi_{\mathbb{X}}$ representa la proyección sobre el subespacio cerrado \mathbb{X} y $\mathbf{1}_{\mathbb{X}}$ es la identidad en el espacio \mathbb{X} . Lo anterior implica que $\ker \mathcal{Q}$ e $\text{rng } \mathcal{Z}$ son subespacios cerrados de $L^p(\Omega)$ (o $C^k(\overline{\mathbb{M}})$) y que admitan complementos ortogonales [6, sec 2.4].

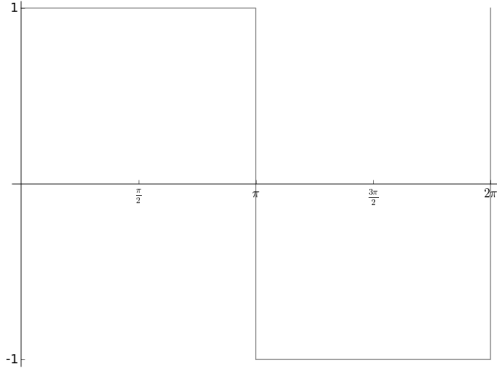
Consideremos primero el caso $p = 1$. Sea $u \in \mathcal{Z}(L^1_{\times})$, entonces existe $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{M})$ tal que $u_n \xrightarrow{L^1} u$ y existen $p_n, p \in L^1_{\times}$ tales que $u_n = \mathcal{Z}p_n$ y $u = \mathcal{Z}p$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{M})$ arbitraria pero fija. La estimación

$$\begin{aligned} |\langle u, \square\varphi \rangle| &\leq |\langle u - u_n, \square\varphi \rangle| + |\langle u_n, \square\varphi \rangle| \\ &\leq \|u - u_n\|_1 \|\square\varphi\|_\infty + |\langle \square\mathcal{Z}p_n, \varphi \rangle| \\ &\leq \|u - u_n\|_1 |\square\varphi|_\infty, \end{aligned}$$

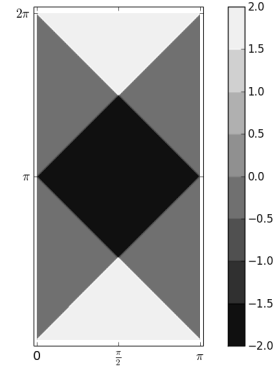
demuestra la contención $\mathcal{Z}(L^1_{\times}) \subseteq N_1$.

Ahora tomemos $u \in N_1$. De manera similar, existe una sucesión $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{M})$ tal que $u_n \xrightarrow{L^1} u$. Para cada n existe un única $\rho_n = \mathcal{Q}u_n \in C_c^\infty$ tal que $u_n = \mathcal{Z}\rho_n$. Claramente ρ_n es una sucesión de Cauchy en $L^1(\Omega)$ y por tanto existe una única $\rho \in L^1_{\times}$ tal que $\rho_n \xrightarrow{L^1} \rho$. Como $\mathcal{Z}u_n \xrightarrow{L^1} u$, por el Teorema del Gráfico Cerrado [6, p. 37] $u = \mathcal{Z}\rho$. Completando así la demostración de que $N_1 = \mathcal{Z}(L^1_{\times})$.

Para el caso general en que $p \in [1, \infty]$, debemos tener en cuenta las inclusiones $L^p_{\times} \subset L^1_{\times}$ y $L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. De este modo, sea $u \in N_p \subset N_1 = \mathcal{Z}(L^1_{\times})$. Entonces existe $\rho \in L^1_{\times}$ tal



(a) $\rho_0(r) = \chi_{[2k\pi, 2(k+1)\pi)} - \chi_{[2(k-1)\pi, 2k\pi)}$



(b) Solución $u_0(x, t) = \rho_0(t + x) - \rho_0(t - x)$

Figura 1.2: Ejemplo de solución débil al problema lineal homogéneo

que $u = \mathcal{Z}\rho$, pero $\mathcal{Q}\mathcal{Z}\rho = \rho = \mathcal{Q}u \in L^p_\times$. Así $\mathcal{Z}\mathcal{Q}u = \Pi_{\text{rng } \mathcal{Z}} u = u$. Es decir $u \in \mathcal{Z}(L^p_\times)$. Recíprocamente, sea $u \in \text{rng } \mathcal{Z}(L^p_\times) \subset \mathcal{Z}(L^1_\times) = N_1$. Entonces, existe $\rho \in L^p_\times$, tal que $u = \mathcal{Z}\rho \in N_p \subset N_1$. En cualquier caso $\langle u, \square\varphi \rangle = 0$.

Usando (1.9) y lo realizado hasta el momento, tenemos que $\mathcal{N}_k \subset C^k(\overline{\mathbb{M}})$ y $N_p \subset L^p(\Omega)$ admiten un complemento topológico que denotaremos \mathcal{N}_k^\perp y N_p^\perp respectivamente. Hemos establecido las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_k \oplus \mathcal{N}_k^\perp &= C^k(\overline{\mathbb{M}}) \\ N_p \oplus N_p^\perp &= L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Adicionalmente, en los espacios C^k , tenemos que

$$\text{rng } \mathcal{Z} = \mathcal{N}_k \quad \ker \mathcal{Q} = \mathcal{N}_k^\perp$$

y de manera análoga en los espacios L^p

$$\text{rng } \mathcal{Z} = N_p \quad \ker \mathcal{Q} = N_p^\perp.$$

Concluimos esta sección formulando la versión para soluciones débiles del Teorema 1.1

Teorema 1.2 (Existencia, Unicidad y Dependencia Continua de las Soluciones Débiles al Problema Lineal Homogéneo). *Sea $p \in [1, \infty]$ y sea $\rho_0 \in L^p_\times$. Entonces existe una única*

$u_0 \in L^p(\Omega)$ que satisface $\square u_0 = 0$ en el sentido débil con $u_0 = \mathcal{Z}\rho_0$. Además, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|\rho - \rho_0\|_p < \delta$, entonces $\|\mathcal{Z}\rho - \mathcal{Z}\rho_0\|_p < \epsilon$.

Un ejemplo de solución débil al problema lineal homogéneo se puede apreciar en las figuras 1.2a-1.2b.

CAPÍTULO 2

Rango

En este capítulo hacemos un análisis del rango del operador de onda. Empezamos por caracterizar el rango en el espacio de las funciones C^k con $k \geq 0$ y luego haremos la respectiva caracterización para soluciones débiles en los espacios de Sólbolev y Soluciones en el espacio de las funciones Hölder-continuas. Finalmente definiremos el operador \square^{-1} y mostraremos sus propiedades.

2.1. Rango en C^k

Sea $f \in C^k(\overline{\mathbb{M}})$ ($k \geq 0$) y supongamos que existe solución $u \in C_0^{k+j}$ ($j \geq 0$) a la ecuación (1.1) bajo las condiciones (1.2)-(1.3). Es decir, supongamos que $f \in \text{rng}(\square) = \square(C_0^{k+j})$. Veamos primero cuáles son las condiciones necesarias sobre f para que $f \in \text{rng} \square$.

Siguiendo las ideas de Lovicarová [22], denotemos con T a la envolvente convexa de los puntos

$$\{(x, t), (\pi, t - x + \pi), (\pi, t + x - \pi)\}.$$

Integrando a ambos lados de la ecuación (1.1) sobre el triángulo T y aplicando el Teorema de Green en el plano, [33, p. 134], obtenemos la ecuación

$$\iint_T \square u = - \int_{t+x-\pi}^{t-x+\pi} u_x(\pi, s) ds - 2u(x, t). \quad (2.1)$$

Combinando (1.1) con (2.1) obtenemos

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{t+x-\pi}^{t-x+\pi} u_x(\pi, s) ds - \frac{1}{2} \int_x^\pi \int_{t+x-y}^{t-x+y} f(y, s) ds dy. \quad (2.2)$$

Usando las condiciones $u(0, t) = 0$ y $u_x(x, t) = u_x(x, t + 2\pi)$ y la ecuación (2.2), vemos que la integral

$$- \int_{t-\pi}^{t+\pi} u_x(\pi, s) ds = \int_0^\pi \int_{t-y}^{t+y} f(y, s) ds dy \quad (2.3)$$

es constante para todo $t \in \mathbb{T}$. A esta constante la llamamos f_* . Derivando el lado derecho de (2.3), obtenemos

$$\int_0^\pi [f(y, t-y) - f(y, t+y)] dy = 0. \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) es equivalente a decir que $f \in \ker(\mathcal{Q})$ con $\mathcal{Q} : C_\partial^k \rightarrow C_\times^k$ y $k \geq 0$. En otras palabras

$$\square(C_\partial^{k+j}) = \text{rng}(\square) \subset \ker(\mathcal{Q}) = \mathcal{N}_k^\perp.$$

Veamos ahora que $f \in \mathcal{N}_k^\perp = \ker \mathcal{Q}$ con $k \geq 1$ es una condición suficiente para que $f \in \square(C_\partial^{k+1})$. En efecto. Para $f \in \mathcal{N}_k^\perp$ definimos la función $S(f) : \overline{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$S(f)(x, t) := -\frac{1}{2} \int_x^\pi \int_{t+x-y}^{t-x+y} f(y, s) ds dy + \frac{\pi-x}{2\pi} f_*. \quad (2.5)$$

Argumentando por inducción matemática sobre k , se puede demostrar que

$$S : \mathcal{N}_k^\perp \rightarrow C^{k+1}(\overline{\mathbb{M}})$$

es un operador lineal continuo.

Cálculos directos sobre la definición de $S(f)$ muestran que

$$\partial_x[S(f)(x, t)] = \frac{1}{2} \int_x^\pi [f(y, t+x-y) + f(y, t-x+y)] dy \quad (2.6)$$

$$\partial_t[S(f)(x, t)] = \frac{1}{2} \int_x^\pi [f(y, t+x-y) - f(y, t-x+y)] dy. \quad (2.7)$$

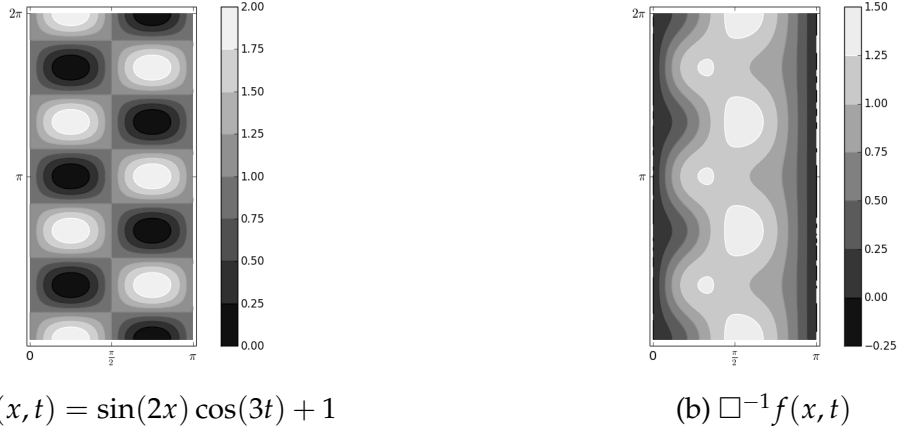


Figura 2.1: Ejemplo de función $f \in \mathcal{N}_k^\perp$ con $\square^{-1}f \in \mathcal{N}_{k+1}^\perp$

De donde $\partial_t^2[S(f)(x, t)] = \partial_{tx}^2[S(f)(x, t)] = 0$ y $\partial_x^2[S(f)(x, t)] = -f(x, t)$. Lo que implica que

$$\square S(f) = f. \quad (2.8)$$

Esto completa la demostración de que $f \in \square(C_\partial^{k+1}) = \text{rng } \square$. Tenemos demostrado hasta el momento que para $k \geq 1$

$$\mathcal{N}_k^\perp = \square(C_\partial^{k+1}) = \text{rng } \square \quad (2.9)$$

A manera de ejemplo, si $f(x, t) = \sin(2x) \cos(3t) + 1$, entonces $\square^{-1}f(x, t) = \frac{1}{2} \pi x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{15} \cos(3t) \sin(3x) - \frac{1}{5} \cos(3t) \sin(2x)$. Estas funciones están representadas en las figuras 2.1a-2.1b

La relación (2.8) quiere decir, en otras palabras que \square admite inverso a derecha. Esto implica que el operador de onda $\square : C_\partial^{k+1} \rightarrow C^k(\overline{\mathbb{M}})$ está bien definido, y que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{k+1} &= \ker \square = \text{rng } \mathcal{Z} \\ \mathcal{N}_k^\perp &= \text{rng } \square = \ker \mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Claramente \square no es inyectivo. Sin embargo, puede ser definido de manera inyectiva en el espacio cociente $C_\partial^{k+1} / \mathcal{N}_{k+1} = \mathcal{N}_{k+1}^\perp$. Podemos definir entonces la aplicación lineal

continua

$$\begin{aligned} \square^{-1} : \mathcal{N}_k^\perp &\longrightarrow \mathcal{N}_{k+1}^\perp \\ f &\longmapsto \Pi_{\mathcal{N}_{k+1}^\perp} S(f), \end{aligned} \quad (2.10)$$

con $\Pi_{\mathcal{N}_{k+1}^\perp} S(f) = (\mathbf{1}_{C^{k+1}} - \mathcal{Z}\mathcal{Q})S(f)$. Adicional a las nociones de existencia, unicidad y dependencia continua; en el caso no-homogéneo tenemos la noción de regularidad. El problema de la regularidad estudia la pregunta siguiente: ¿dada $f \in C^k$, bajo qué condiciones se puede garantizar que las soluciones están en C^{k+j} . En el problema lineal no-homogéneo tenemos también regularidad. Resumimos los resultados de obtenidos hasta el momento en el siguiente teorema.

Teorema 2.3 (Existencia, Unicidad, Regularidad y Dependencia Continua de las Soluciones Clásicas al Problema Lineal No-Homogeneo). *Sean $k \geq 1$, $\rho_0 \in C_\times^{k+1}$ y $f_0 \in \mathcal{N}_k^\perp$. Entonces existe una única solución clásica $u(\rho_0, f_0) \in C_\delta^{k+1}$ a la ecuación $\square u = f$ dada por la fórmula $u(\rho_0, f_0) = \mathcal{Z}\rho_0 + \square^{-1}f_0$. Además, dado $\epsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que si $|\rho - \rho_0|_{k+1} < \delta_1$ y $|f - f_0|_k < \delta_2$, entonces $|u(\rho, f) - u(\rho_0, f_0)|_{k+1} < \epsilon$.*

2.2. Rango en L^p

Usando la densidad de $C^{k+1}(\overline{\mathbb{M}})$ en $L^1(\Omega)$ y por El Teorema de la Extensión Continua, \square^{-1} tiene una extensión natural $\square^{-1} : N_1^\perp \rightarrow N_\infty^\perp$. Basta notar que $|Sf(x, t)| \leq \frac{3}{2} \|f\|_1$. La inclusión $L^p \subset L^q$ con $p \geq q$ implica que $\square^{-1} : N_p^\perp \rightarrow N_q^\perp$ es lineal continuo, para cualesquiera $p, q \in [1, \infty]$. De hecho se tiene que $|\square^{-1}f|_\infty < \infty$ si $f \in L^p(\Omega)$. Es decir, si $f \in L^p(\Omega)$, $\square^{-1}f$ es una función continua.

Definimos el rango de \square en L^p , $\square(L^p(\Omega))$, a través de soluciones débiles. Decimos que $f \in L^p(\Omega)$ está en el rango de \square si existe $u \in L^p$ tal que

$$\langle u, \square\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad (2.11)$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{M})$. A esta $u \in L^p(\Omega)$ se le dice también *solución débil al problema lineal no-homogéneo*. Más aún, por la definición de N_p , es claro que u debe estar en N_p^\perp .

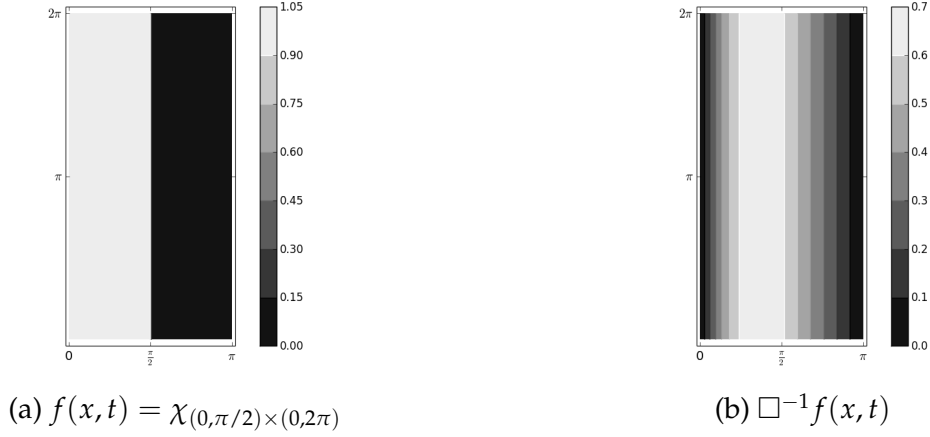


Figura 2.2: Ejemplo de una función $f \in N_1^\perp$ con $\square^{-1}f \in \mathcal{N}_1^\perp$

Consideremos el caso $p = 1$ y veamos que $f \in N_1^\perp$ si y sólo si f está en el rango de \square en $L^1(\Omega)$. En efecto, supongamos primero que $f \in N_1^\perp$, tomando $u = \square^{-1}f$ y escogiendo $f_n \in \mathcal{N}_1^\perp$ tal que $f_n \xrightarrow{L^1} f$, vemos que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple

$$\begin{aligned}
 & |\langle \square^{-1}f, \square\varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| \\
 & \leq |\langle \square^{-1}(f - f_n), \square\varphi \rangle| + |\langle f - f_n, \varphi \rangle| + |(\square^{-1}f_n | \square\varphi) - (f_n | \varphi)| \\
 & \leq \|\square^{-1}(f - f_n)\|_1 \|\square\varphi\|_\infty + \|f - f_n\|_1 \|\square\varphi\|_\infty < \epsilon.
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que f está en el rango de \square en L^1 .

Recíprocamente, supongamos ahora que f está en el rango de \square en $L^1(\Omega)$. Esto quiere decir, que existe una solución débil $u \in N_p^\perp$ a (2.11). Es claro que el rango de \square es un subespacio cerrado de $L^1(\Omega)$. Una manera de verlo es usando las propiedades de \square^{-1} . Denotando con $f_0 = \Pi_{N_1}f$, se puede ver fácilmente que $f \equiv 0$ lo que completa la demostración. Tenemos entonces que N_1^\perp es el rango de \square en $L^1(\Omega)$. Para demostrar el caso general con $p \in [1, \infty]$ se procede de manera similar que en casos anteriores usando las inclusiones $L^p \subset L^q$ con $q \leq p$. En resumen

$$N_p^\perp = \square(L^p(\Omega)) = \square(N_p^\perp). \quad (2.12)$$

Además, hemos demostrado que si $f \in N_p^\perp$, entonces $\square\square^{-1}f = f$. Podríamos en este punto formular un teorema de existencia, unicidad y dependencia continua de las

soluciones débiles al problema lineal no-homogéneo; pero este resultado estaría incompleto, ya que en este problema es posible estudiar a fondo la regularidad. Este estudio lo haremos en las dos secciones siguientes.

En las figuras 2.2a-2.2b se ve un ejemplo de una función $f \in L^1(\Omega)$ dada por $f = \chi_{(0,\pi/2) \times (0,2\pi)}$. Esta función está claramente en N_1^\perp y su imagen por \square^{-1} se puede calcular usando (2.5), de donde

$$\square^{-1}f(x, t) = -\frac{1}{2}\chi_{(0,\pi/2) \times (0,2\pi)}(x, t)(x - \pi/2)^2 + \frac{\pi}{8}(\pi - x).$$

Notemos que f no es continua mientras que $\square^{-1}f$ sí lo es.

2.2.1. Espacios de Sóbolev

Sea $p \in [1, \infty]$, definimos el espacio de Sóbolev $W^{1,p}$ como el conjunto de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que existen $g_1, g_2 \in L^p(\Omega)$ que satisfacen las identidades

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \varphi_x &= - \int_{\Omega} u g_1 \\ \int_{\Omega} u \varphi_t &= - \int_{\Omega} u g_2 \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Usando inducción sobre m definimos $W^{m,p}$ como el espacio de todas las funciones $u \in W^{m-1,p}$ tales que $u_t, u_x \in W^{m-1,p}$. Es bien sabido que $W^{m,p}$ es un espacio de Banach con la norma definida como

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{0 \leq i+j \leq m} \|\partial_{i,j}^{i+j} u\|_p$$

Denotamos con H^m al espacio de Hilbert $W^{m,2}$. Para $p \in [1, \infty)$, escribimos $W_0^{1,p}$ como el completado de $C_c^1(\overline{\mathbb{M}})$ bajo la norma de $W^{1,p}$. Será de particular importancia el espacio $H = W_0^{1,2}$. En $W_0^{1,p}$ tenemos la desigualdad de Poincaré. En efecto, gracias al Teorema de Fubini [30, p. 164-165], para casi todo $t \in \mathbb{T}$, $u(\cdot, t) \in W^{1,p}(0, \pi)$, $u(\cdot, t)$ tiene un representante continuo y vale la segunda forma del Teorema Fundamental del Cálculo [6, p. 204]

$$u(x, t) = u(x, t) - u(0, t) = \int_0^x u_x(s, t) ds.$$

Entonces que $\|u\|_\infty \leq \|u_x\|_1$, de donde

$$\|u\|_p \leq \|\nabla u\|_p := \|u_x\|_p + \|u_t\|_p.$$

Esto implica que en $W_0^{1,p}$ podemos considerar la norma $\|\nabla u\|_p$ como norma equivalente a $\|u\|_{1,p}$. En H denotamos la norma simplemente con $\|\cdot\|$.

Denotamos los espacios $Y_p^k := W_0^{1,p} \cap W^{k,p} \cap N_p^\perp$. Escribimos simplemente $Y_p = Y_p^1$ y $Y = Y_2$. Veamos ahora que $\square^{-1} : N_p \rightarrow Y_p$ es un operador lineal continuo donde $p \in [1, \infty)$. En efecto. Para estimar $\|\square^{-1} f\|_{1,p}$ es necesario estimar en L^p cada término en (2.6) y en (2.7). De este modo

$$\begin{aligned} & \left(\int_\Omega \left| \int_x^\pi [f(y, t + x - y)] dy \right|^p \right)^{1/p} \\ & \leq \pi^{(p-1)/p} \left(\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |f(y, t + x - y)|^p dy dx dt \right)^{1/p} \\ & \leq \pi \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |f(y, t - y)|^p dy dt \right)^{1/p} \leq \pi \|f\|_p \end{aligned} \quad (2.13)$$

Gracias a (2.13) tenemos que

$$\|\square^{-1} f\|_{1,p} \leq 4\pi \|f\|_p. \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) demuestra la continuidad de $\square^{-1} : N_p^\perp \rightarrow Y_p$. Además, por el Teorema de Rellich-Kondrachov [2, p. 167][6, p. 285] y gracias a que Ω se puede identificar con la variedad \mathbb{M} que tiene frontera de clase C^1 , tenemos que el operador $\square^{-1} : N_p^\perp \rightarrow N_p^\perp$ es compacto con $p \in (1, \infty)$.

Siguiendo un argumento inductivo como en [25, p. 165] tenemos que si $f \in Y_p^k$, entonces $\square^{-1} f \in Y_p^{k+1}$. Este es precisamente uno de los resultados de regularidad que sobre el problema lineal no-homogéneo.

Una clase distinta de regularidad se obtiene si se considera el espacio de las funciones Hölder-continuas

2.2.2. Espacios de Hölder

Definimos en $\overline{\mathbb{M}}$, identificable con $\overline{\Omega}$, el espacio de las funciones Hölder continuas de orden $\alpha \in (0, 1]$ como el conjunto de todas las funciones $u \in C(\overline{\mathbb{M}})$ tales que

$$|u|_{C^\alpha} := \sup \left\{ \frac{|u(x, t) - u(y, s)|}{(|x - y| + |s - t|)^\alpha} : (x, t), (y, s) \in \mathbb{M} \text{ y } (x, t) \neq (y, s) \right\} < \infty$$

Dotamos a C^α con la norma

$$\|u\|_{C^\alpha} = |u|_\infty + |u|_{C^\alpha}.$$

Con la norma $\|\cdot\|_{C^\alpha}$, C^α es un espacio de Banach. Veamos que $\square^{-1} : N_p \rightarrow C^{p'}$ es un operado lineal continuo siguiendo las ideas de [26, p. 43]. Aquí $p > 1$, p y p' son exponentes conjugados, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. En efecto. Tomemos T_1 y T_2 como al envolvente convexa de

$$\begin{aligned} & \{(x, t), (\pi, t + x - \pi), (\pi, t - x + \pi)\} \\ & \{(x + h, t + k), (\pi, t + k - x + h + \pi), (\pi, t + h + x + k - \pi)\} \end{aligned}$$

respectivamente. Si tomamos $T = (T_1 \cup T_2) \setminus (T_1 \cap T_2)$, vemos que $\mu(T)$, la medida de T , está acotada por $|k^2 - 2k(\pi - x)| \leq 4(|h| + |k|)$. De este modo

$$\begin{aligned} |Sf(x + h, t + k) - Sf(x, t)| & \leq \frac{1}{2} \int_T |f| \\ & \leq \frac{1}{2} \mu(T)^{p'} \|f\|_p \\ & \leq 2\pi(|h| + |k|)^{p'} \|f\|_p \end{aligned} \tag{2.15}$$

De (2.15) se tiene que

$$\|\square^{-1}f\|_{C^{p'}} \leq C_p \|f\|_p \tag{2.16}$$

donde $C_p > 0$ solo depende de p . Esto demuestra la continuidad de $\square^{-1} : N_p^\perp \rightarrow C^{p'}$. Más aún, usando el Teorema de Arzelà-Ascoli [30, p. 245], vemos que $\square^{-1} : N_p^\perp \rightarrow N_{p'}^\perp$ es un operador compacto.

2.3. Teoría de la Ecuación de Onda Lineal

Con la teoría presentada hasta el momento queda demostrado el siguiente teorema, el más general, sobre la ecuación de onda lineal bajo las condiciones de frontera Dirichlet-periódicas cuando el periodo es un múltiplo racional de π .

Teorema 2.4 (Existencia, Unicidad, Regularidad y Dependencia Continua de las Soluciones Débiles al Problema Lineal No-Homogeneo). *Sean $p > 1, k \in \{0, 1, \dots\}, \rho_0 \in L^p_\times$ y $f_0 \in Y^k_p$. Entonces existe una única solución débil*

$$u(\rho_0, f_0) = \mathcal{Z}\rho_0 + \square^{-1}f \in N_p \oplus (Y^{k+1}_p \cap C^{p'})$$

a la ecuación $\square u = f$. Además, dado $\epsilon > 0$, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que si $\|\rho - \rho_0\|_p < \delta_1$ y $\|f - f_0\|_{k,p} < \delta_2$, entonces

$$\|\mathcal{Z}\rho - \mathcal{Z}\rho_0\|_p + \|\square^{-1}f - \square^{-1}f_0\|_{k+1,p} + \|\square^{-1}f - \square^{-1}f_0\|_{C^{p'}} < \epsilon.$$

CAPÍTULO 3

Análisis Espectral

En este capítulo fijamos el valor de $p = 2$. Consideraremos entonces los espacios de Hilbert $L^2(\Omega)$, L^2_{\times} , H , N , N^{\perp} , Y y $C^{1/2}$ definidos anteriormente. Estudiaremos entonces las propiedades espectrales de $\square^{-1} : N^{\perp} \rightarrow N^{\perp}$ y haremos un tratamiento formal de $\sigma(\square)$, el espectro del operador de onda.

En este sentido, necesitamos estudiar el problema de valores propios

$$\square u = \nu u \tag{3.1}$$

sujeto a las condiciones de frontera $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ y a las condiciones de periodicidad en el tiempo $u(x, t) = u(x, t + 2\pi)$.

3.1. Espectro de \square^{-1}

Para encontrar $\sigma(\square^{-1})$ en N^{\perp} vamos a aplicar el Teorema Espectral [6, p. 167]. Necesitamos ver entonces que \square^{-1} es un operador compacto y autoadjunto. La compacidad

ya se tiene por las relación (2.14) y el Teorema de Rellich-Kondrachov o por la relación (2.16) y el Teorema de Arzelà-Ascoli.

Veamos ahora que es auto-adjunto. En efecto. Consideremos primero $f, g \in \mathcal{N}_\infty^\perp \cap C_c^\infty(\mathbb{M})$, entonces

$$\begin{aligned} (\square^{-1}f | g) &= (\square^{-1}f | \square\square^{-1}g) \\ &= (\square\square^{-1}f | \square^{-1}g) \\ &= (f | \square^{-1}g). \end{aligned}$$

Para el caso en el que $f, g \in N^\perp$ basta tomar límite gracias a la densidad de $\mathcal{N}_\infty^\perp \cap C_c^\infty(\mathbb{M})$ en N^\perp .

De este modo, por El Teorema Espectral y un cálculo directo, existe una sucesión doble de valores $\nu_{kj} = (k^2 - j^2)$ con $k = 1, \dots, j = 0, 1, \dots$ y $k \neq j$ y existe una sucesión doble de funciones propias en N_∞^\perp dadas por

$$\begin{aligned} \vartheta_{k0}(x, t) &= \frac{1}{\pi} \sin(kx) \text{ para } k = 1, 2, \dots \\ \vartheta_{kj}(x, t) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kx) \cos(jt) \text{ para } k = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots \\ \varrho_{kj}(x, t) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin(kx) \sin(jt) \text{ para } k = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

tales que $\square\vartheta_{kj} = \nu_{kj}\vartheta_{kj}$ y $\square\varrho_{kj} = \nu_{kj}\varrho_{kj}$.

De este modo

$$\sigma(\square^{-1}) = \left\{ \frac{1}{k^2 - j^2} : k = 1, \dots, j = 0, \dots, k \neq j \right\} \quad (3.2)$$

en N^\perp .

Como consecuencia del Teorema Espectral se tiene que que las funciones ϱ_{kj} y ϑ_{kj} forman un sistema ortonormal total o una base de Hilbert para N^\perp . Adicionalmente, cada valor propio tiene multiplicidad finita.

Usando un cálculo directo, vía la Identidad de Parseval [30, p. 81], se puede demostrar que las funciones ϱ_{kk} y ϑ_{kk} con $k = 1, 2, \dots$ forman una base de Hilbert para N . Es decir, el conjunto de funciones

$$\{\varrho_{kj}, \vartheta_{kj} : k = 1, \dots, j = 0, \dots\}$$

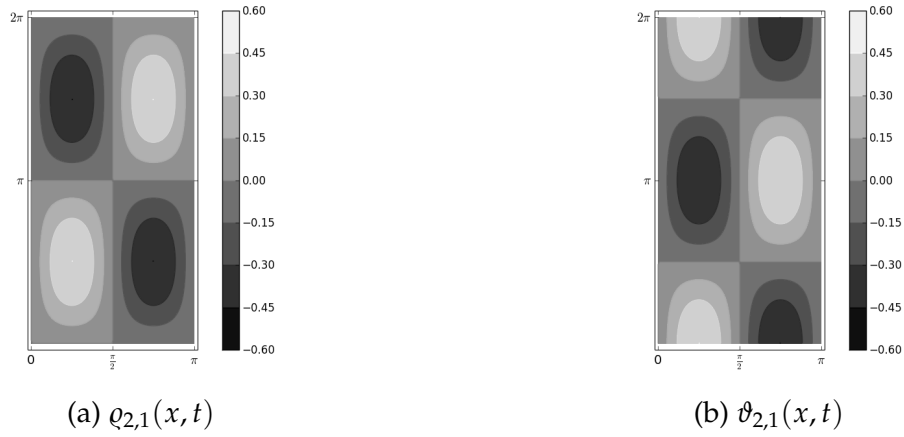


Figura 3.1: Las dos únicas funciones propias asociadas a $\nu_{2,1} = 3$

es una base de Hilbert para $L^2(\Omega)$.

Lo anterior le da sentido a definir formalmente el conjunto

$$\sigma(\square) := \{k^2 - j^2 : k = 1, \dots, j = 0, \dots\}.$$

Notemos que la adherencia en L^2 del espacio generado por las funciones propias correspondientes al valor $0 \in \sigma(\square)$ es N . Por esta razón se suele decir que 0 es el único valor propio de multiplicidad infinita.

3.2. El Conjunto $\sigma(\square)$

Usando teoría de números elemental se pueden encontrar propiedades del conjunto $\sigma(\square)$ que permiten entender, entre otras, las distintas formas en las que se puede dividir el espacio $L^2(\Omega)$.

Algunas propiedades de $\sigma(\square)$ son la siguientes.

- P 1) Los únicos valores propios simples son el 1 y el 4. En efecto. Veamos primero que son simples. Para esto, basta notar que si no lo fueran, $j \neq 0$ y cada uno sería una diferencia de cuadrados no nulos. Esto sería absurdo.

CONCLUSIONES

Veamos ahora que son los únicos. Si $m^2 \neq 1, 4$ y es par, entonces existe m_0 tal que $m = 2m_0$ y $m^2 = (m^2 + 1)^2 - (m^2 - 1)^2$. Si es impar se procede de manera similar. Es decir m^2 no sería de multiplicidad simple.

- P 2) Los cuadrados perfectos positivos están en $\sigma(\square)$ y son los únicos de multiplicidad impar. En efecto. Si la ecuación $m^2 = k^2 - j^2$ tiene a $(m, 0)$ como solución. Es inmediato ver que las demás soluciones, de haberlas, vienen en pares.
- P 3) Los números primos están en $\sigma(\square)$ y tienen multiplicidad dos [32, p. 20]. En efecto. Si $p \in \sigma(\square)$ es primo, basta tomar $k = (p + 1)/2$ y $j = (p - 1)/2$. Es inmediato ver que son las únicas soluciones.
- P 4) $\sigma(\square) = 4\mathbb{Z} \cup (2\mathbb{Z} + 1) \setminus \{-1, -4\}$ [23, p. 1654]. En efecto. Basta escribir $k = j + l$ de donde se obtiene la relación $k^2 - j^2 = l^2 + 2lj$. La conclusión se tiene de tomar los casos l par y l impar.

CAPÍTULO 4

Conclusiones

El operador de onda \square en los espacios C^k y las soluciones clásicas a la ecuación de onda lineal permiten el estudio del operador de onda en los espacios L^p , $W^{p,k}$ y $C^{0,p}$ a través de extensiones continuas y argumentos de densidad. La importancia de las aplicaciones \mathcal{Z} y \mathcal{Q} se deben a que están asociadas al núcleo y al rango del operador de onda del siguiente modo.

$$\text{rng } \mathcal{Z} = \ker \square$$

$$\ker \mathcal{Q} = \text{rng } \square.$$

Además son válidos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{\times}^k & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & C_{\partial}^k & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & C_{\times}^k \\
 & \searrow \mathbf{1} & \downarrow \mathcal{Q} & \searrow \Pi_{N_k} & \downarrow \mathcal{Z} \\
 & & C_{\times}^k & & C_{\partial}^k
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 L_{\times}^p & \xrightarrow{\mathcal{Z}} & L^p(\Omega) & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & L_{\times}^p \\
 & \searrow \mathbf{1} & \downarrow \mathcal{Q} & \searrow \Pi_{N_p} & \downarrow \mathcal{Z} \\
 & & L_{\times}^p & & L^p(\Omega)
 \end{array}$$

En vista de que $\ker \square$ no se reduce al cero, el operador \square no es invertible. Sin embargo, se puede definir en $\ker \mathcal{Q}$, el complemento ortogonal de $\ker \square$, un inverso a través de la función S dado por

$$\square^{-1} = (\mathbf{1} - \mathcal{Z}\mathcal{Q})S.$$

De este modo \square^{-1} tiene una fórmula explícita. Adicionalmente, puede verse como un operador lineal continuo definido en los siguientes espacios

$$\begin{array}{ll}
 \square^{-1} : \mathcal{N}_k^\perp \rightarrow \mathcal{N}_k^\perp & \text{para todo } k = 0, 1, \dots, \\
 \square^{-1} : N_p^\perp \rightarrow N_q^\perp & \text{para todos } p, q \in [1, \infty], \\
 \square^{-1} : N_p^\perp \rightarrow Y_p & \text{para todo } p \in [1, \infty], \\
 \square^{-1} : Y_p^k \rightarrow Y_p^{k+1} & \text{para todos } p \in [1, \infty], k = 0, 1, \dots \text{ y} \\
 \square^{-1} : N_p \rightarrow C^{p'} & \text{para todo } p \in (1, \infty).
 \end{array}$$

En especial, la relación

$$\|\square^{-1}f\|_{1,p} + \|\square^{-1}f\|_{p'} \leq \kappa \|f\|_p$$

para $p \in (1, \infty)$ y alguna $\kappa > 0$, garantiza la compacidad de $\square^{-1} : N_p \rightarrow N_p$ y de $\square^{-1} : N_p \rightarrow N_{p'}$. Este hecho es el más importante de los mostrados en este trabajo, ya que para resolver ecuaciones de onda más avanzadas se recurre fuertemente a este hecho. Basta ver los resultados expuestos en [27, 26, 7, 8, 23, 14, 13, 4, 12, 11] para ver como se emplea, de manera sistemática, la compacidad de \square^{-1} para encontrar soluciones a ecuaciones de onda semilineales bajo las condiciones de frontera Dirichlet-periódicas.

Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer Verlag, 2005.
- [2] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 2003.
- [3] T.M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974.
- [4] P. Bates and A. Castro. Existence and Uniequeness for a Variational Hyperbolic System without Resonance. *Nonlinear Analysis Theory, Methos and Applications*, 4(6):1151–1156, 1980.
- [5] E. T. Bell. *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica de México, 2004.
- [6] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2010.
- [7] H. Brézis, J. M. Coron, and L. Nirenberg. Free Vibrations for a Nonlinear Wave Equation and a Theorem of P. Rabinowitz. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXIII:667–689, 1980.

- [8] H. Brézis and L. Nirenberg. Forced Vibrations for a Nonlinear Wave Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXI:1–30, 1978.
- [9] J. F. Caicedo. *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá., 2005.
- [10] J. F. Caicedo and A. Castro. A Semilinear Wave Equation with Derivative of Nonlinearity Containing Multiple Eigenvalues of Infinite Multiplicity. *Contemporary Mathematics*, 208, 1997.
- [11] J. F. Caicedo, A. Castro, R. Duque, and A. Sanjuán. Existence of L^p -solutions for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Serie S*, 7(6), December 2014.
- [12] J. F. Caicedo, A. Castro, and A. Sanjuán. Bifurcation at Infinity for a Semilinear Wave Equation with Nonmonotone Nonlinearity. (*preprint*).
- [13] A. Castro and B. Preskill. Existence of Solutions for a Wave Equation with Nonmonotone Nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 28(2):549–658, 2010.
- [14] A. Castro and S. Unsurangsie. A Semilinear Wave Equation with Nonmonotone Nonlinearity. *Pacific Journal of Mathematics*, 132(2):215–225, 1988.
- [15] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997.
- [16] G. Freiling and V.A. Yurko. *Lectures on the Differential Equations of Mathematical Physics: A First Course*. Nova Science Publishers, 2008.
- [17] S.T. Hu. *Differentiable manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, 1969.
- [18] R. Iorio and V. Magalhães. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2001.
- [19] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 4 edition, 1981.
- [20] J. Jost. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2002.

- [21] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, 1989.
- [22] H. Lovicarová. Periodic Solutions of a Weakly Nonlinear Wave Equation in one Dimension. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 19(94):324–343, 1968.
- [23] Jean Mawhin. Periodic solutions of some semilinear wave equations and systems: a survey. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(9):1651–1669, 1995. Some Nonlinear Oscillations Problems in Engineering Sciences.
- [24] P. J. McKenna. On Solutions of a Nonlinear Wave Question when the Ratio of the Period to the Length of the Interval is Irrational. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 93(1):59–64, 1985.
- [25] P. Rabinowitz. Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XX:145–205, 1967.
- [26] P. Rabinowitz. Free Vibrations for a Semilinear Wave Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXI:31–68, 1978.
- [27] Paul H Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Journal of Functional Analysis*, 7(3):487–513, 1971.
- [28] W. Rudin. *Funcitonal Analisis*. Mc Graw-Hill Book Company, 1973.
- [29] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions, 3 edition, 1976.
- [30] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions, 3 edition, 1981.
- [31] F. Scheck. *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Springer Verlag, 2005.
- [32] H.N. Shapiro. *Introduction to the Theory of Numbers*. Dover Books on Mathematics Series. Dover Publications, 2008.

- [33] M. Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Advanced book program. W. A. Benjamin, 1965.
- [34] M. Spivak. *Physics for Mathematicians. Mechanics I*. Perish, 2010.
- [35] W. Strauss. *Partial Differential Equations. An Introduction*. John Wiley and Sons, 1992.

Índice alfabético

- complemento ortogonal, 6
- condiciones
 - de frontera Dirichlet-periódicas, 3
- D'Alembertiano, 3
- desigualdad
 - de Poincaré, 14
- espacio
 - L^p , 5
 - de Sóbolev, 14
 - funciones cont diferenciables, 2
 - funciones continuas, 2
- funcion
 - 2π -periódica, 1
- funciones
 - Hölder continuas, 16
 - suaves, 2
- núcleo
 - de \square , 3
 - de \mathcal{Q} , 10
- normalización del núcleo, 3
- operador
 - de D'Alembert, 3
 - de onda, 3
- problema
 - bien puesto, 4
 - lineal homogéneo, 4, 8
 - lineal no-homogéneo, 12, 17
 - valores propios, 18
- rango
 - de \square , 9
 - de \mathcal{Z} , 4
- soluciones
 - clásicas, 3
 - debiles, 12
 - débiles, 5
 - dependencia continua, 4
 - existencia, 4
 - regularidad, 12
 - unicidad, 4
- Toro, 1