
PEQUEÑOS PLANETAS FANTÁSTICOS

UNA MIRADA DESDE EL CÁLCULO



**UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS**

IX JORNADA DE MATEMÁTICAS
PROYECTO CURRICULAR DE
MATEMÁTICAS



ARTURO SANJUÁN
Profesor Asociado

Bogotá, 2015

*Quando las proposiciones matemáticas
se refieren al a realidad, no son ciertas;
cuando son ciertas, no se refieren a la realidad.*
-Albert Einstein

*El poder que mueve la invención matemática
no es el razonamiento, es la imaginación.*
-August De Morgan

Resumen

En este trabajo estudiamos el campo gravitacional en pequeños planetas y nos preguntamos por el sentido matemático y físico de los mismos. Planetas de este estilo han hecho su aparición en la literatura fantástica y en el manga japonés. Nuestro enfoque será dado desde el cálculo. El modelado empleado es la ecuación de Poisson. Se trata de un modelo ampliamente conocido, un *modelo de juguete*.

Descripción del “Fenómeno”

En el manga Dragon Ball, creado por Akira Toriyama, aparece el planeta Kaio (ver Figura 1a), en donde habitan Kaio-sama y su mascota Bubbles. En este planeta apenas caben la casa de Kaio-sama, su carro y



(a) Planeta Kaio, Dragón Ball



(b) Asteroide B612 de El Principito.

Figura 1: Dos pequeños planetas fantásticos

unos árboles. Uno de los datos más importantes es que el planeta Kaio tiene diez veces la gravedad de la tierra. El radio del planeta es desconocido, pero para efectos del análisis lo fijaremos en $R_K = 15\text{m}$.

Similar al planeta anterior, tenemos el asteroide B612 o planeta de El Principito, ver Figura 1b. Según su autor, Antoine de Saint-Exupéry, el planeta es algo más grande que una casa (asumida pequeña). Digamos de radio $R_p = 3\text{m}$.

El resto del trabajo está orientado bajo las siguientes preguntas: ¿Son posibles planetas de estas características desde un punto de vista matemático? ¿Qué podemos decir desde el punto de vista físico?

Forma Integral de la Ley de Gravitación Universal

La *Ley de Gravitación Universal de Newton* es una ley física deducida de observaciones empíricas, como la *Ley de Hooke*, por ejemplo [Spi10, p. 47]. La Ley de Gravitación afirma que la fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masa e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias [Spi10, p. 37]. La constante de proporcionalidad involucrada se denota con G y se conoce como la *Constante de Gravitación Universal*. Esta constante fue calculada accidentalmente gracias al famoso Experimento de Cavendish,

$$G \approx 6,67384 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{Kg}^2$$

en el Sistema Internacional de Medida [Sch05, p. 10].

La Ley de Gravitación Universal tiene serias limitaciones para objetos supermasivos y grandes distancias. En ese caso es necesario recurrir a la Teoría General de la Relatividad y las Ecuaciones de Campo

de Einstein [Ber76, Parte II]. Es decir, la Ley de Gravitación Universal no es muy universal que digamos. No obstante, nuestro modelo de juguete está restringido a la física clásica o física Newtoniana.

Permítanos en esta sección ser poco rigurosos e imprecisos en aras de la comprensión. Deduciremos la forma integral de la Ley de Gravitación Universal. Denotemos con $\Omega_i \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$ el volumen de los dos cuerpos. Vamos a suponer que los Ω_i son regiones acotadas. Es decir, son conjuntos abiertos, conexos y acotados. Suponemos también que $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \emptyset$. Denotemos con μ_i la densidad de masa de Ω_i , ($i = 1, 2$). Dividimos a Ω_1 en n celdas Δx_i y a Ω_2 en m celdas Δy_j , ver Figura 2.

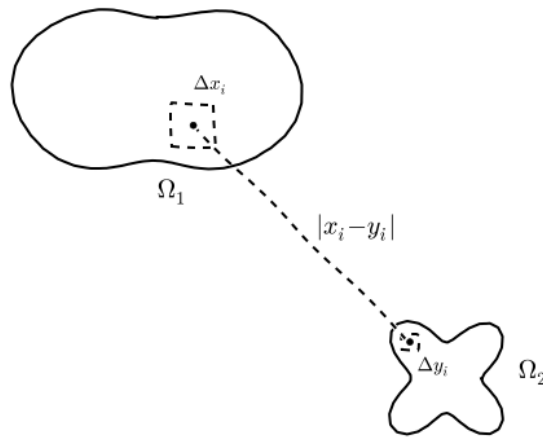


Figura 2: Diferenciales de los sólidos Ω_i

La masa del volumen Δx_i aproximadamente $\Delta x_i \mu(x_i)$. Del mismo modo, la masa del volumen Δy_j es aproximadamente $\Delta y_j \mu(y_j)$. Así, por la Ley de Gravitación Universal, la magnitud de la fuerza que ejerce el cuerpo de volumen Δx_i sobre el cuerpo de volumen Δy_j es aproximadamente

$$G \frac{\Delta x_i \mu(x_i) \Delta y_j \mu(y_j)}{|x_i - y_j|^2}.$$

Si “los Δ son pequeños” la fuerza total ejercida por el cuerpo de volumen Ω_1 sobre el cuerpo de volumen Ω_2 es aproximadamente

$$F_{12} \approx G \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\mu_1(x_i) \mu_2(y_j)}{|x_i - y_j|^2} \frac{(x_i - y_j)}{|x_i - y_j|} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Por lo tanto es razonable la siguiente fórmula integral para F_{12}

$$F_{12} = G \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \frac{\mu_1(x) \mu_2(y)}{|x - y|^3} (x - y) dy dx \quad (1)$$

☞Ejercicio. ¿Por qué es posible integrar sobre Ω_1 y Ω_2 ? ¿Cuales son las mínimas condiciones que deben tener las funciones μ_i para que la integral exista? ¿Qué condiciones mínimas deberían tener μ_1 y μ_2 para que el fenómeno tenga sentido físico?

☞Ejercicio. Sea $d_M := \sup\{|x - y| : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}$ y $d_m := \inf\{|x - y| : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}$. Demuestre que existen $x_M, x_m \in \overline{\Omega_1}$ y $y_M, y_m \in \overline{\Omega_2}$ tales que $d_M = |x_M - y_M|$ y $d_m = |x_m - y_m|$. Además

$$0 < d_m < d_M < \infty.$$

Demuestre la relación

$$G \frac{m_1 m_2}{d_M^2} \leq |F_{12}| \leq G \frac{m_1 m_2}{d_m^2}$$

donde $m_i = \iiint_{\Omega_i} \mu_i$ es la masa de Ω_i con $i = 1, 2$.

Teorema del Casquete de Newton: I Parte

Usualmente la Ley de Gravitación se presenta como si las masas se pudiesen considerar puntuales. Esto permite entender mejor el problema y facilita algunas cuentas. Es de interés para nosotros reducir una sola de las masas a un punto. Esta técnica fue desarrollada por Newton usando el concepto de centro de gravedad introducido por Arquímedes. En esta sección vamos a demostrar una versión del Teorema del Casquete de Newton.

Teorema (Teorema del Casquete de Newton). Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos, acotados y convexos tales que $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \emptyset$ y sea ξ el centro de gravedad de Ω_2 . Si d_m es suficientemente grande, F_{12} se puede aproximar por

$$F(\xi) = G m_2 \iiint_{\Omega_1} \frac{\mu_1(x)(x - \xi)}{|x - \xi|^3} dx. \quad (2)$$

Sea ζ el centro de gravedad de Ω_1 . Si $\zeta \in \Omega_1$ y ξ está lo suficientemente lejos de Ω_1 , se pueden considerar los dos cuerpos como masas puntuales y se puede aproximar la magnitud de F_{12} mediante la expresión clásica

$$F_{\times} = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (3)$$

donde $d = |\xi - \zeta|$. En el caso en que Ω_1 y Ω_2 sean esferas con densidad constante, se tiene la igualdad

$$|F_{12}| = F_{\times}.$$

☞Ejercicio. El centro de masa de Ω_i es el vector

$$\frac{\iiint_{\Omega_i} x \mu_i(x) dx}{\iiint_{\Omega_i} \mu_i(x) dx}.$$

Usando una argumentación por diferenciales como en la sección anterior, deduzca la fórmula del centro de gravedad.

☞Ejercicio. Demuestre que si d_m es lo suficientemente grande, $\xi \notin \Omega_1$ y la integral $F(\xi)$ tiene sentido. ¿Qué tan grande debe ser d_m ?

Vamos a suponer por ahora que Ω_1 y Ω_2 son convexos.

⇒ *Problema.* Si $\bar{\Omega}$ es convexo, y $\bar{\zeta}$ es su centro de gravedad, entonces $\bar{\zeta} \in \bar{\Omega}$. Ayuda: ver [Kut05, p. 419]

Por el problema anterior, podemos suponer que $\bar{\zeta} \in \Omega_2$. Para demostrar la primera parte realizamos la estimación del error absoluto

$$\begin{aligned}
 |F(\bar{\zeta}) - F_{12}| &= G \left| m_2 \iiint_{\Omega_1} \frac{\mu_1(x)(x - \bar{\zeta})}{|x - \bar{\zeta}|^3} dx - \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \frac{\mu_1(x)\mu_2(y)(x - y)}{|x - y|^3} dy dx \right| \\
 &= G \left| \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \frac{\mu_1(x)\mu_2(y)x}{|x - \bar{\zeta}|^3} dy dx - \iiint_{\Omega_1} \frac{\mu_1(x)}{|x - \bar{\zeta}|^3} dx \iiint_{\Omega_2} y\mu_2(y) dy \right. \\
 &\quad \left. - \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \frac{\mu_1(x)\mu_2(y)(x - y)}{|x - y|^3} dy dx \right| \tag{4} \\
 &\leq G \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \mu_1(x)\mu_2(y) |x - y| \left| |x - y|^{-3} - |x - \bar{\zeta}|^{-3} \right| dy dx \\
 &\leq G d_M \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \mu_1(x)\mu_2(y) \left| |x - y|^{-3} - |x - \bar{\zeta}|^{-3} \right| dy dx.
 \end{aligned}$$

⇒ *Ejercicio.* A lo largo del texto para calcular o estimar integrales múltiples, calculamos la integral iterada o intercambiamos el orden de integración. Tal como acaba de ocurrir en (4). ¿Por qué es posible hacer esto? Tal vez [Spi65, p. 58-60] puede ayudar. ¿Cuál es la versión más general de este hecho?

El integrando de la expresión de la derecha en (4) involucra la expresión $\left| |x - y|^{-3} - |x - \bar{\zeta}|^{-3} \right|$ que es la que realmente falta por acotar por algo “pequeño”. Para eso vamos a utilizar un teorema importante del cálculo vectorial. La siguiente versión es una adaptación de [Cai05, p. 262-263] y [MT03, p. 241-245]

Teorema (Teorema de Taylor con Resto de Lagrange). Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , $a, h \in \mathbb{R}^n$ tales $[a, a + h] \subset \Omega$. Si $M = \|D^2 f(x)\| < \infty$ para todo $x \in [a, a + h]$, entonces

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + R(h), \tag{5}$$

donde el resto de Lagrange R satisface

$$|R(h)| \leq \frac{M}{2} |h|^2. \tag{6}$$

En la formulación del teorema anterior $[a, a + h]$ es el segmento que une a con $a + h$ y $\|\cdot\|$ representa la norma en las aplicaciones bilineales. Es decir, si $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación bilineal, entonces $\|F\| = \sup\{|F(x, y)| : |x|, |y| \leq 1\}$. Recuerde que la primera derivada en este contexto es una aplicación lineal representada por el vector gradiente y la segunda derivada es una aplicación bilineal representada por la matriz Hessiana. Ver [MT03, p. 125-130, 252] para una lectura introductoria o [Cai05, p. 87-88, 112-115] para una lectura avanzada.

Para $x \in \Omega_1$ fijo, vamos a aplicar el Teorema de Taylor con Resto de Lagrange tomando $f(y) = |x - y|^{-3}$, $a = \bar{\zeta}$, $h = y - \bar{\zeta}$ y $\Omega = \Omega_2$.

⇒ *Ejercicio.* Verifique que en efecto f así definida es en efecto de clase C^2 y que puede siempre encontrar un $y \in \Omega_1$ tal que $[\bar{\zeta}, y] \subset \Omega_1$.

☞Ejercicio. Demuestre que una aplicación bilineal de $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se puede representar por una matriz cuadrada de $n \times n$. Si A es la matriz que representa F , entonces $F(x, y) = y^t Ax$. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que $|y^t Ax|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2 |y|^2 |x|^2$. Use esto para verificar que que

$$\|F\| \leq \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \leq n \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (7)$$

☞Ejercicio. ¿Por qué es necesaria la hipótesis de convexidad de las regiones? ¿Por qué es necesario que los centros de gravedad estén en sus respectivos conjuntos?

Un cálculo directo muestra que

$$\nabla f(\xi) = 3|y - \xi|^{-5} \xi.$$

De manera similar

$$\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j} = 15|y - z|^{-7} z_i z_j + 3|y - z|^{-5} \delta_{ij} \quad (8)$$

donde δ_{ij} es el Delta de Kronecker y $z \in [\xi, y]$.

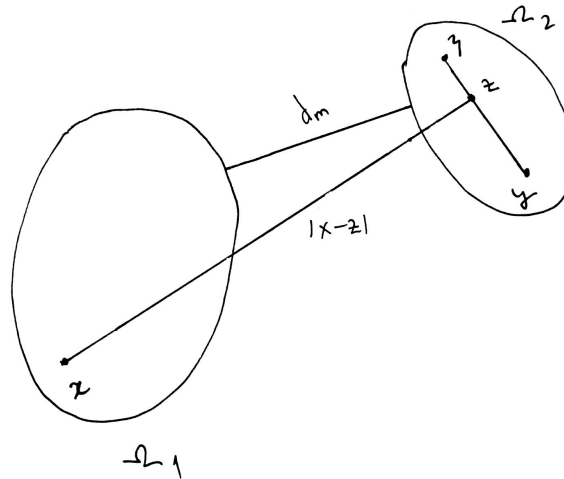


Figura 3: Relación entre z , x , y y d_m

En la Figura 3 se puede ver que es válida la relación $|x - z| \geq d_m$. Combinando (6), (7) y (8) obtenemos

$$\begin{aligned} |R(y - \xi)| &\leq 9d_m^{-5} (5|z|^2 d_m^{-2} + 1) \\ &\leq 9d_m^{-5} (5(d_M + |x_M|)^2 d_m^{-2} + 1) \\ &\leq 9d_m^{-5} (5(d_m + \text{diam } \Omega_1 + \text{diam } \Omega_2 + |x_M|)^2 d_m^{-2} + 1) \\ &\leq d_m^{-3}, \end{aligned} \quad (9)$$

si d_m es suficientemente grande. De manera similar tenemos que

$$\begin{aligned}
|\nabla f(\xi) \cdot (y - \xi)| &\leq 3d_m^{-5} |z| |y - \xi|. \\
&\leq 3d_m^{-5} (d_M + |x_M|) \text{diam } \Omega_2 \\
&\leq 3d_m^{-5} (d_m + \text{diam } \Omega_1 + \text{diam } \Omega_2 + |x_M|) \text{diam } \Omega_2 \\
&\leq d_m^{-3},
\end{aligned} \tag{10}$$

para d_m suficientemente grande. Combinando (9) y (10) vemos que

$$\begin{aligned}
|F(\xi) - F_{12}| &\leq G d_M m_1 m_2 d_m^{-3} \\
&\leq G (d_m + \text{diam } \Omega_1) m_1 m_2 d_m^{-3}
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\leq d_m^{-1} \rightarrow 0 \tag{12}$$

cuando $d_m \rightarrow \infty$. De este modo queda demostrada la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte del teorema procedemos de manera similar

$$\begin{aligned}
\left| F_{\times} \left(\frac{\xi - \zeta}{|\xi - \zeta|} \right) - F(\xi) \right| &= G m_2 \left| \frac{m_1 (\xi - \zeta)}{|\xi - \zeta|^3} - \iiint_{\Omega_1} \frac{\mu_1(x) (\xi - x)}{|\xi - x|^3} dx \right| \\
&= G m_2 \left| \frac{m_1}{|\xi - \zeta|^3} \left[\xi - \frac{1}{m_1} \iiint_{\Omega_1} x \mu_1(x) dx \right] - \iiint_{\Omega_1} \frac{\mu_1(x) (\xi - x)}{|\xi - x|^3} dx \right| \\
&= G m_2 \left| \iiint_{\Omega_1} \frac{\mu_1(x) (\xi - x)}{|\xi - \zeta|^3} dx - \iiint_{\Omega_1} \frac{\mu_1(x) (\xi - x)}{|\xi - x|^3} dx \right| \\
&\leq G m_2 \max_{x \in \Omega_1} |\xi - x| \iiint_{\Omega_1} \mu_1(x) \left| |\xi - x|^{-3} - |\xi - \zeta|^{-3} \right| dx \\
&\leq G m_2 (d_m + \text{diam } \Omega_1) \iiint_{\Omega_1} \mu_1(x) \left| |\xi - x|^{-3} - |\xi - \zeta|^{-3} \right| dx,
\end{aligned} \tag{13}$$

donde ahora $d_m = \min_{x \in \overline{\Omega_1}} |x - \zeta|$, $f(x) = |\xi - x|^{-3}$, $a = \zeta$ y $h = x - \zeta$. Entonces

$$|\nabla f(\zeta) \cdot (x - \zeta)| \leq 3d_m^{-5} d_1 \text{diam } \Omega_1$$

donde $d_1 = \max\{|x| : x \in \overline{\Omega_1}\}$.

$$|R(x - \zeta)| \leq 9d_m^{-5} (5d_1^2 d_m^{-2} + 1).$$

Esto prueba la segunda parte del teorema ya que

$$\left| F_{\times} \left(\frac{\xi - \zeta}{|\xi - \zeta|} \right) - F(\xi) \right| \rightarrow 0$$

cuando $d_m \rightarrow \infty$.

Para concluir la demostración. En el caso de esferas de densidad constante necesitamos tecnología adicional. Más adelante daremos una demostración.

☞ *Ejercicio.* Demuestre que un cuerpo esférico con densidad radialmente simétrica tiene su centro de gravedad en el centro de la esfera. En otras palabras, el centro de gravedad y el centro de masa coinciden. En particular se tiene si la densidad es constante.

☞ *Problema.* ¿Se puede generalizar el Teorema de los Casquetes para cuerpos no convexos? [Ayuda: use el concepto de envolvente convexa]

Funciones Armónicas

En esta sección seguimos principalmente las ideas de [Joh81, p. 72-74]. Nos apoyamos también en [Jos02, p. 7-9], [GT01, p. 14-16] y [Str92, p. 146-154].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto. Se dice que $u \in C^2(\Omega)$, a valor real, es una *función armónica* en Ω si satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

es el operador diferencial de Laplace o Laplaciano. El operador de Laplace también se puede entender como la divergencia del gradiente. Es decir

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u,$$

La anterior definición se puede extender a \mathbb{R}^n al igual que todos los resultados de esta sección.

☞ *Ejercicio.* Demuestre la siguiente identidad para $f, g \in C^2(\Omega)$,

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\nabla f \cdot \nabla g + g\Delta f.$$

Recordemos el siguiente teorema que puede ser consultado en [Spi65, p. 135] o [Rud76, p. 287]

Teorema (Teorema de la Divergencia). Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado, η el vector normal unitario exterior a $\partial\Omega$ y sea F un campo vectorial diferenciable en Ω . Entonces

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot F dx = \iint_{\partial\Omega} F \cdot \eta ds_x$$

donde ds_x es el diferencial de área.

☞ *Ejercicio.* Deduzca la versión del Teorema de la Divergencia en \mathbb{R}^n usando el Teorema de Stokes en \mathbb{R}^n .

☞ *Ejercicio.* Sean $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$. Aplique el Teorema de la Divergencia al campo $u\nabla v$ y obtenga la *Primera Identidad de Green* [GT01, p. 17]

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u dx + \iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds_x \quad (14)$$

Cambiando u por v en la Primera Identidad de Green y restando, obtenga la *Segunda Identidad de Green*

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u dx - u\Delta v) dx = \iint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds_x. \quad (15)$$

☞ *Ejercicio.* Demuestre que la ecuación $\Delta u = 0$ es invariante bajo rotaciones y translaciones. En \mathbb{R}^n también es válida esta propiedad, pero su demostración puede ser ligeramente más elaborada [Ayuda: use la transformación $y = Qx$ donde Q es una matriz ortogonal, es decir $QQ^t = I$.]

Dado que la Ecuación de Laplace es invariante bajo rotaciones y traslaciones es de esperar que soluciones radialmente simétricas alrededor de un punto ϑ sean soluciones especiales. Es decir, buscamos soluciones

$$v(x) =: \psi(r) = \psi(|x - \vartheta|) =: K(x, \vartheta)$$

donde $\psi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Para expresar Δu en términos de $\psi(r)$ escribimos x en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) y aplicamos la Regla de la Cadena. Es necesario tener presente que las derivadas parciales con respecto a θ y ϕ se anulan por tratarse de una función radialmente simétrica. Así, para $i = 1, 2, 3$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \frac{x_i}{r}. \end{aligned}$$

Derivando nuevamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{x_i}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{r} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \\ &= \psi''(r) + \frac{2}{r} \psi'(r) \end{aligned}$$

De este modo encontrar soluciones a la ecuación de Laplace equivale a solucionar la ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes variables y singular en el origen

$$\psi'' + \frac{2}{r} \psi' = 0.$$

Por separación de variables obtenemos, salvo constantes, que

$$v(x) = \psi(r) = C|r|^{-1} = C|x - \vartheta|^{-1} = K(x, \vartheta). \quad (16)$$

v es una función armónica en $\Omega \setminus \{\vartheta\}$. La constante C será escogida de manera especial. Note que $K(x, \vartheta)$ aparece en el integrando de la Ley de Gravitación Universal. Profundizaremos más adelante en esta "coincidencia". A la función $v(x) = K(x, \vartheta)$ se le llama *solución fundamental*. Para un estudio de soluciones fundamentales y una introducción a las distribuciones ver [Joh81, p. 67-71,75].

☞ *Ejercicio.* Para $n = 2, 3$, encuentre la fórmula explícita en coordenadas esféricas para Δu sin asumir simetría radial. Para dimensión arbitraria puede ser más laboriosa la situación. Encuentre ψ para dimensión arbitraria.

Veamos algunas implicaciones de la solución fundamental en la ecuación de Laplace.

Notamos $D_\rho(\vartheta) := \{x : |x - \vartheta| \leq \rho\}$, $B_\rho(\vartheta) := \{x : |x - \vartheta| < \rho\}$ y $S_\rho(\vartheta) := \{x : |x - \vartheta| = \rho\}$. Tomemos $\vartheta \in \Omega$ y tomemos un $\rho > 0$ tal que $B_\rho(\vartheta) \subset \Omega$.

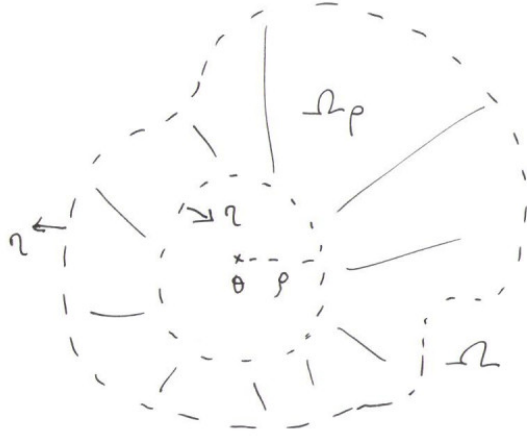


Figura 4: Ω_ρ

Tomemos el conjunto $\Omega_\rho = \Omega \setminus D_\rho(\vartheta)$ ver Figura 4. Es claro que $\partial\Omega_\rho = \partial\Omega \cup S_\rho(\vartheta)$ y que $S_\rho(\vartheta)$ está orientada en sentido contrario a $\partial\Omega$. Además sabemos que $K(x) = K(x, \vartheta)$ es armónica en Ω_ρ . Tomemos $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y apliquemos la Segunda Identidad de Green en Ω_ρ . Entonces

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega_\rho} K \Delta u \, dx &= \iiint_{\Omega_\rho} (K \Delta u - u \Delta K) \, dx \\
 &= \iint_{\partial\Omega_\rho} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) ds_x \\
 &= \iint_{\partial\Omega} \left(K \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) ds_x - \iint_{S_\rho(\vartheta)} \left(K \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) ds_x
 \end{aligned} \tag{17}$$

Consideremos cada uno de los términos en en la segunda integral de la identidad anterior. Estimemos primero

$$\begin{aligned}
 \left| \iint_{S_\rho(\vartheta)} K \frac{\partial u}{\partial \eta} ds_x \right| &\leq |C| \rho^{-1} \iint_{S_\rho(\vartheta)} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| ds_x \\
 &\leq |C| \rho^{-1} \iiint_{B_\rho(\vartheta)} |\Delta u| \, dx \\
 &\leq |C| \rho^{-1} \max_{\Omega} |\Delta u| \iiint_{B_\rho(\vartheta)} dx \\
 &\leq \frac{4}{3} \pi |C| \rho^2 \max_{\Omega} |\Delta u| \\
 &\rightarrow 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

cuando $\rho \rightarrow 0$. Ahora calculemos el siguiente límite en el segundo término de la última integral en (17)

$$\begin{aligned}
\lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{S_\rho(\vartheta)} K \frac{\partial u}{\partial \eta} ds_x &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{S_\rho(\vartheta)} \left[u \nabla K(x, \vartheta) \cdot \frac{(x - \vartheta)}{|x - \vartheta|} \right] ds_x \\
&= C \lim_{\rho \rightarrow 0} \iint_{S_\rho(\vartheta)} \left[u \frac{(x - \vartheta) \cdot (x - \vartheta)}{|x - \vartheta|^4} \right] ds_x \\
&= 4\pi C \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho(\vartheta)} u ds_x \\
&= 4\pi C u(\vartheta) \\
&= -u(\vartheta),
\end{aligned} \tag{19}$$

si escogemos $C = -1/4\pi$.

☞ *Ejercicio.* Demuestre rigurosamente el valor del límite en (19) y demuestre que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \iiint_{\Omega_\rho} K \Delta u = \iiint_{\Omega} K \Delta u.$$

☞ *Problema.* Demuestre que la correspondiente C para la solución fundamental en dimensión n con $n > 2$ viene dada por

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(2-n)2\pi^{\frac{n+1}{2}}}$$

donde Γ es la función Gamma. Puede ayudar [Apo07, p. 411].

Combinando (17), (18) y (19) tenemos la siguiente representación para u

$$u(\vartheta) = \iiint_{\Omega} K \Delta u dx - \iint_{\partial\Omega} \left[K \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial K}{\partial \eta} \right] ds_x \tag{20}$$

Si $u \in C_c^2(\Omega)$ es una función de clase C^2 de soporte compacto, tenemos que (20) se convierte en

$$u(\vartheta) = \iiint_{\Omega} K \Delta u \tag{21}$$

Tomemos el caso en el que $\Omega = B_\rho(\vartheta)$. Si repetimos el mismo procedimiento anterior usando

$$G(x, \vartheta) := K(x, \vartheta) - K(0, \vartheta) = \psi(|x - \vartheta|) - \psi(\rho).$$

en vez de K y obtenemos que:

(G1) G es armónica en $\Omega \setminus \{\vartheta\}$.

(G2) $G \equiv 0$ en $\partial\Omega = S_\rho(\vartheta)$.

(G3)

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{1}{4\pi} \rho^{-2}$$

y la identidad (20) se convierte en

$$u(\vartheta) = \iiint_{B_\rho(\vartheta)} G \Delta u \, dx + \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho(\vartheta)} u \, ds_x. \quad (22)$$

A la función G se le conoce como *Función de Green de Primera Especie* para la bola de centro en ϑ y radio ρ , $B_\rho(\vartheta)$. En el caso en que u sea armónica tenemos el siguiente teorema

Teorema (Fórmula de Gauß de para los Promedios Aritméticos). *Si u es una función armónica en un disco cerrado $D_\rho(\vartheta)$, entonces*

$$u(\vartheta) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{S_\rho(\vartheta)} u(x) \, dx.$$

☞ *Ejercicio.* Integre con respecto a ρ en la Fórmula de Gauß para las Medias Aritméticas y obtenga la Fórmula para los las medias de volúmenes

$$u(\vartheta) = \frac{3}{4\pi\rho^3} \iiint_{B_\rho(\vartheta)} u(x) \, dx.$$

☞ *Problema.* Encuentre las soluciones fundamentales y las correspondientes identidades de Green y funciones de Green en \mathbb{R}^3 para la ecuación de Helmotz

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Esta ecuación es importante en electromagnetismo, física cuántica, ondas sonoras y otros fenómenos estacionarios. En [Joh81, p. 79] y [Sim72, p. 184-204] puede encontrar ayuda.

Teorema de los Casquetes de Newton: Parte II

Nos hace falta demostrar en el Teorema de los Casquetes de Newton que si $\Omega_1 = B_{\rho_1}(\zeta)$ y $\Omega_2 = B_{\rho_2}(\tilde{\zeta})$ son dos bolas separadas con densidad constante, entonces la Ley de Gravitación Universal se puede suponer que los Ω_i con sus respectivas densidades son masas puntuales ubicadas en su centros ζ y $\tilde{\zeta}$.

En otras palabras

$$G \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \frac{\mu_1 \mu_2 (x - y)}{|x - y|^3} \, dy dx = G m_1 m_2 \frac{(\zeta - \tilde{\zeta})}{|\zeta - \tilde{\zeta}|^3}.$$

En efecto

$$\begin{aligned}
G \iiint_{\Omega_1} \iiint_{\Omega_2} \frac{\mu_1 \mu_2 (x-y)}{|x-y|^3} dy dx &= -4\pi G \mu_1 \mu_2 \iiint_{B_{\rho_1}(\zeta)} \iiint_{B_{\rho_2}(\xi)} \nabla_x K(x, y) dy dx \\
&= -4\pi G \mu_1 \mu_2 \iiint_{B_{\rho_1}(\zeta)} \nabla_x \left[\iiint_{B_{\rho_2}(\xi)} K(x, y) dy \right] dx \\
&= -4\pi G \mu_1 \mu_2 \frac{4\pi}{3} \rho_2^3 \iiint_{B_{\rho_1}(\zeta)} \nabla_x K(x, \xi) dx \quad (23) \\
&= 4\pi G \mu_1 m_2 \nabla_{\xi} \left[\iiint_{B_{\rho_1}(\zeta)} K(x, \xi) dx \right] \\
&= 4\pi G m_1 m_2 \nabla_{\xi} K(\zeta, \xi) \\
&= G m_1 m_2 \frac{(\zeta - \xi)}{|x - \zeta|^3}.
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de la versión del Teorema de los Casquetes de Newton que enunciamos arriba.

☞ *Problema.* Con las consideraciones hechas en esta sección demuestre que dos cuerpos de masas puntuales en el vacío tienen su centro de gravedad en reposo o en velocidad rectilínea uniforme. Además el movimiento relativo de un cuerpo con respecto al otro tiene las siguientes posibilidades: uno de los dos se mueve en línea recta hacia el otro con aceleración, constante. Uno orbita alrededor del otro en una trayectoria elíptica. El cuerpo de referencia permanece en uno de los focos de la elipse. También puede tratarse de una trayectoria parabólica o elíptica. Deduzca las tres leyes de Kepler sobre el movimiento de La Tierra alrededor de El Sol. Puede consultar [Spi10, p. 37, 55, 56, 67, 120, 125, 136, 162] para una exposición magistral, [HDS74, p. 23-27] para una exposición más anítica, [Sch01, sección 1.7] para un enfoque desde la física o [Apo61, p. 545-550] y [Spi12, p. 330] para una introducción elemental. El mismo problema para más de dos cuerpos puntuales sigue siendo, en general, un problema abierto en matemáticas. Algunos abordajes involucran una introducción a la Teoría del Caos. En este caso se recomienda [HDS74, cap. 14]

Aplicaciones a Pequeños Planetas Fantásticos: Datos Curiosos

Suponga que los planetas que vamos a considerar son todos de densidad constante y perfectamente “redondos”. Por tal razón puede suponerlos como masas puntuales ubicadas en los centros de las bolas.

A manera de calentamiento, revisemos algunos hechos de física elemental.

☞ *Ejercicio.* 1) Denotemos con \oplus a El Planeta Tierra. Tome la masa de La Tierra $M_{\oplus} = 1,27\text{Kg}$ y el radio de la Tierra $R_{\oplus} = 6,371 \cdot 10^6\text{m}$. Empleando la Ley de Gravitación Universal y las tres leyes de Newton, verifique que la aceleración de un objeto que cae hacia la superficie de la tierra (a una altura cercana a la superficie de la tierra) es aproximadamente igual a

$$g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

- 2) Demuestre el siguiente hecho descubierto por Galileo: sin importar qué tan “pesado” sea un objeto con respecto a otro, si se sueltan desde una misma altura, deben caer al mismo tiempo.
- 3) Demuestre que la ecuación de movimiento de un cuerpo que se suelta desde una altura h (cercana a la superficie de la tierra) viene dado por la famosa fórmula

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

- 4) Verifique la unidades de medida en los cálculos anteriores.

En el caso del Asteroide B612, asumiendo que la aceleración de la gravedad es la misma que en la superficie de La Tierra. En este caso tendemos que

Radio	$R_p = 3\text{m}$
Masa	$M_p = 1,3 \cdot 10^{12}\text{Kg}$
Densidad	$\mu_p = 1,6 \cdot 10^{10}\text{Kg/m}^3$

La masa del planeta de El Principito equivale, aproximadamente, a 2 millones de camiones Caterpillar 797 compactada en una bola de radio 3m. El camión más pesado del mundo, pesa unas 623 toneladas métricas.ver Figura 5. En el planeta Tierra no existe un material tan denso. El elemento más denso en la Tierra es el Osmio (Os) con una densidad de $\mu_{Os} = 2,2 \cdot 10^4\text{Kg/m}^3$. Sin embargo, en el universo sí existen objetos más densos. Por ejemplo una estrella de neutrones tiene una densidad de $5,9 \cdot 10^{17}\text{Kg/m}^3$. No obstante, las leyes de la física clásica difícilmente son aplicables en estos contextos. Sin hablar de la estabilidad de un planeta así. Matemáticamente hablando el planeta de El Principito tiene todo el sentido. En este caso la matemática parece estar más del lado de la fantasía de que la física.



Figura 5: Camión Caterpillar 797. (Imagen tomada de Wikipedia)

Superando el problema de la existencia de un material superdenso. Tendríamos por ejemplo que un cubo de “tierra” del Asteroide B612, del tamaño de un cubo de azúcar, pesaría aproximadamente 16 toneladas métricas, el peso de un bus del SITP.

Repitiendo el ejercicio anterior para el Planeta Kaio, tendríamos que

Radio	$R_K = 15\text{m}$
Masa	$M_K = 3,3 \cdot 10^{14}\text{Kg}$
Densidad	$\mu_K = 3,1 \cdot 10^{10}\text{Kg/m}^3$

El Planeta Kaio es casi 300 veces más pesado que el planeta del Principito. El planeta Kaio es dos veces más denso. Un cubo de “arena” de este planeta, del tamaño de un cubo de azúcar, pesaría lo que pesa un biarticulado de Transmilenio: unas 30 toneladas métricas.

Podemos pensar, qué sentido tendría la vida como la conocemos en un planeta así. La cabeza de un humano pesa alrededor de 15Kg. En el planeta Kaio, la cabeza de una persona pesaría, es decir, tendría una Fuerza aproximada de 1470N. Esto equivale a la fuerza de una bola de 150Kg en la superficie de la tierra. Es como tener una cabeza hecha de Basalto (la roca más densa de La Tierra de origen volcánico de densidad 3000Kg/m^3). No parece posible que un humano se pueda poner en pie en el planeta Kaio. Un *saijajin* seguramente no tendrá mayores inconvenientes.

El Potencial Newtoniano

En esta sección seguiremos las indicaciones de [Joh81, p. 80, ejercicio 7]. Vamos a estudiar el problema de una masa puntual ξ , de masa m , que es atraída por un cuerpo $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con densidad de masa $\mu(x)$. De acuerdo con (2), la fuerza de atracción viene dada por el vector

$$F(\xi) = Gm \iiint_{\Omega} \frac{\mu(x)(x - \xi)}{|x - \xi|^3} dx \quad (24)$$

aquí $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región (un abierto conexo) acotada y $\xi \notin \overline{\Omega}$.

☞*Ejercicio.* Usando la Segunda Ley de Newton deduzca la Ley de Conservación de La Energía para una masa puntual m de coordenadas ξ que se mueve en un campo de fuerzas F que sólo depende de la posición ξ . Ayuda en [Spi10, p. 87]. Demuestre que el trabajo realizado a lo largo de un camino sólo depende de los extremos sii $F = \nabla u$ para alguna u sii F es un campo de fuerzas conservativo. ¿Qué relación tiene esto con el Teorema Fundamental del Cálculo?

El campo de fuerzas dado por (24) es conservativo. Para esto basta probar que existe alguna función u tal que $\nabla u = F$ [Spi10, p. 87-99]. Un cálculo directo muestra que $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$u(\xi) := Gm \iiint_{\Omega} \frac{\mu(x)}{|x - \xi|} dx \quad (25)$$

es la función deseada. Para calcular $\nabla u = (u_{\xi_i}(\xi))$ debemos derivar bajo el signo de la integral en (25). La función u definida en (25) se llama *potencial gravitatorio* o *potencial Newtoniano* y representa la energía potencial de la partícula ξ de masa m .

☞*Ejercicio.* Verifique que, en efecto, es posible derivar bajo el signo de la integral y demuestre que es válida la relación $\nabla u = F$.

☞*Ejercicio.* Verifique que (25) existe como integral impropia. Tenga en cuenta la singularidad ξ y su extensión en todo el espacio. Suponga que μ se anula por fuera de Ω .

A continuación vamos a transformar la ecuación (25) en una ecuación diferencial parcial elíptica. Esto nos permitirá estudiar los problemas de existencia y unicidad de u . Es decir, estamos interesados en demostrar que u satisface (25) si u satisface la *Ecuación de Poisson*

$$\Delta u(\xi) = -4\pi G\mu(\xi) \quad \text{para } \xi \in \Omega. \quad (26)$$

si $\mu \in C^2(\overline{\Omega})$.

En efecto. Sean B' y B dos bolas concéntricas cualesquiera tales que

$$B' \subset \overline{B'} \subset B \subset \overline{B} \subset \Omega.$$

y sea $\zeta \in C_c^2(\Omega)$ una función de clase C^2 y de soporte compacto (existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\zeta(x) = 0$ para $x \notin K$) en Ω tal que $\zeta(x) = 1$ en B .

⇒ *Problema.* Demuestre que una función ζ así existe. De hecho puede suponer que $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$, i.e. de clase C^∞ y de soporte compacto en Ω . Se puede ayudar de la idea de Mollificadores [Bre10, p. 108].

Usando la identidad $\mu = \zeta\mu + (1 - \zeta)\mu$ tenemos que para $\xi \in B'$

$$\begin{aligned} \Delta u(\xi) &= \Delta_\xi \left[Gm \iiint_{\Omega} \frac{\mu(x)}{|x - \xi|} dx \right] \\ &= -4\pi Gm \Delta_\xi \left[\iiint_{\Omega} K(x, \xi) \mu(x) dx \right] \\ &= -4\pi Gm \Delta_\xi \left[\iiint_{\Omega} K(x, \xi) \zeta(x) \mu(x) dx + \iiint_{\Omega} K(x, \xi) (1 - \zeta(x)) \mu(x) dx \right] \\ &= -4\pi Gm \left[\iiint_{\Omega} K(x, \xi) \Delta_x (\zeta(x) \mu(x)) dx + \Delta_\xi \left[\iiint_{\Omega \setminus B} K(x, \xi) (1 - \zeta(x)) \mu(x) dx \right] \right] \\ &= -4\pi Gm \left[\zeta(\xi) u(\xi) + \left[\iiint_{\Omega \setminus B} \Delta_\xi K(x, \xi) (1 - \zeta(x)) \mu(x) dx \right] \right] \\ &= -4\pi Gm \mu(\xi). \end{aligned}$$

Note que u tiene que ser al menos de clase C^1 para satisfacer la ecuación integral.

Aplicaciones a Pequeños Planetas Fantásticos: Pozos

Vamos a suponer como antes que la densidad de cada planeta es constante y radialmente simétrica. μ_P y μ_K representan las densidades del planeta de El Principitio y el planeta Kaio respectivamente. u debe tener también simetría radial, debe ser al menos de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$, armónica por fuera de $\Omega = B_\rho(0)$ y se debe anular en ∞ .

Denotemos indistintamente $u(r) = u(x) = u(|x|)$. Entonces la ecuación de Poisson (26) se convierte en

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) = -C_1 \quad (27)$$

donde $C_1 = 4\pi Gm\mu$. Integrando obtenemos que para $r < \rho$

$$u_{\text{int}}(\xi) = -\frac{1}{6}C_1 - C_2 \frac{1}{r} + C_3.$$

Dado que u es de clase C^1 , necesariamente $C_2 = 0$. Ahora bien, por fuera de Ω u debe ser armónica, esto implica que

$$u_{\text{ext}}(\xi) = C_4 \frac{1}{r} + C_5.$$

Puesto que la energía potencial se anula en ∞ , necesariamente $C_5 = 0$. Igualando u_{int} , u_{ext} y sus derivadas en $|x| = \rho$ vemos que $C_3 = 2\pi m G\mu \rho^2$ y $C_4 = \frac{4}{3}\pi m G\mu \rho^3$. De donde, el potencial (la solución a la ecuación de Poisson) para $B_\rho(0)$ viene dado por

$$u(\xi) = \begin{cases} 2\pi m G\mu (\rho^2 - \frac{1}{3}|\xi|^2) & \text{si } |\xi| \leq \rho. \\ \frac{4}{3}\pi m G\mu \rho^3 |\xi|^{-1} & \text{si } |\xi| > \rho. \end{cases} \quad (28)$$

A la función u también se le suele llamar Pozo de Gravedad cuando se grafica como $-u$. El corte en \mathbb{R} de los pozos de Gravedad de los planetas Kaio y B612 para un cuerpo de masa $m = 1$ se pueden ver en la Figura 6.

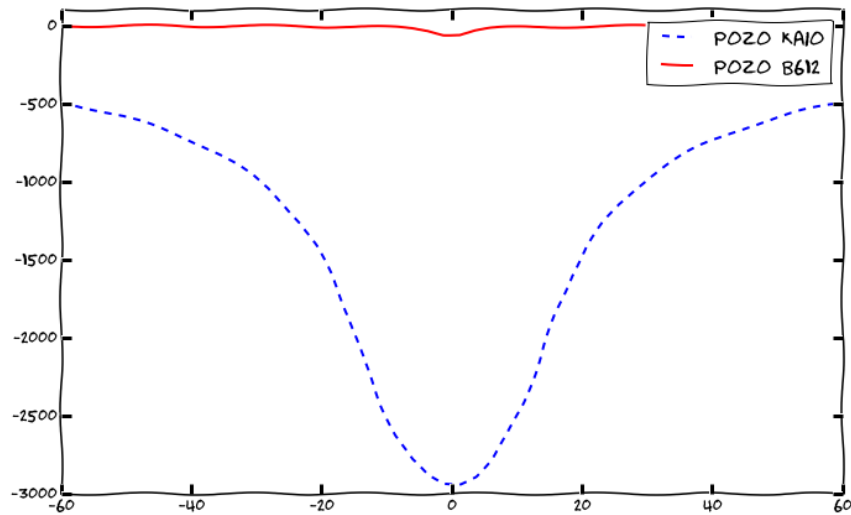


Figura 6: Pozos de Gravedad de Pequeños Planetas Fantásticos

Aplicaciones a Pequeños Planetas Fantásticos: Escape

Los cuerpos celestes suelen estar en rotación gracias a la Ley de Conservación del Momento Angular. Sin embargo, en esta sección supondremos que nuestros planetas no rotan.

Podemos plantearnos la siguiente pregunta: ¿Cuál es la velocidad mínima con la que debe lanzarse un cuerpo para que escape de la atracción gravitatoria de nuestros planetas?

Como vimos anteriormente los campos (2) son conservativos. Eso quiere decir que

$$\frac{1}{2}mv^2(\xi(t)) - u(\xi(t))$$

es una cantidad constante. Aquí v representa la velocidad instantánea. Se puede suponer que en ∞ tanto la energía cinética como la energía potencial se hacen cero para un objeto que ha escapado del campo gravitatorio.

Así, la velocidad de escape se puede definir como

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (29)$$

donde M es la masa del planeta en cuestión. Nótese que esta velocidad es independiente de la masa del objeto lanzado.

Reemplazando los correspondientes valores en (29), terminamos este trabajo con los siguientes datos curiosos. Para lanzar un balón al aire en el planeta B612 y que nunca regrese basta con lanzarlo a 28Km/h, la velocidad de una bicicleta. Si se quiere hacer lo mismo en el planeta Kaio, tendría que ser lanzado a 195Km/h, la velocidad máxima de un carro de gama media. Lo anterior contrasta con la velocidad de escape en la tierra que es aproximadamente de 40,269Km/h.

Referencias

- [Apo61] T.M. Apostol. *Calculus*. Number v. 1 in Blaisdell Mathematics Series. Blaisdell Publishing Company, 1961.
- [Apo07] T.M. Apostol. *CALCULUS, VOLUME II, 2ND ED.* Wiley India Pvt. Limited, 2007.
- [Ber76] P.G. Bergmann. *Introduction to the Theory of Relativity*. Dover Classics of Science and Mathematics. Dover Publications, 1976.
- [Bre10] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2010.
- [Cai05] J. F. Caicedo. *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá., 2005.
- [GT01] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. U.S. Government Printing Office, 2001.
- [HDS74] M.W. Hirsch, R.L. Devaney, and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics. Elsevier Science, 1974.
- [Joh81] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 4 edition, 1981.
- [Jos02] J. Jost. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2002.
- [Kut05] S.S. Kutateladze. *A.D. Alexandrov: Selected Works Part II: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces*. Classics of Soviet Mathematics. CRC Press, 2005.

- [MT03] J.E. Marsden and A. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, 2003.
- [Rud76] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill International Editions, 3 edition, 1976.
- [Sch01] M. Schechter. Periodic Solutions of a Semilinear Higher Dimensional Wave Equations. *Chaos Solitons & Fractals*, (12):1029–1034, 2001.
- [Sch05] F. Scheck. *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Springer Verlag, 2005.
- [Sim72] G.F. Simmons. *Differential equations: with applications and historical notes*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1972.
- [Spi65] M. Spivak. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*. Advanced book program. W. A. Benjamin, 1965.
- [Spi10] M. Spivak. *Physics for Mathematicians. Mechanics I*. Perish, 2010.
- [Spi12] M. Spivak. *Calculus*. Editorial Reverté, 4 edition, 2012.
- [Str92] W. Strauss. *Partial Differential Equations. An Introduction*. John Wiley and Sons, 1992.