CAOS, CATÁSTROFE Y ESTABILIDAD EN DINÁMICAS DE POBLACIONES

Arturo Sanjuán[1]
Profesor Asociado

XI JORNADA DE LAS MATMEÁTICAS
Bogotá D.C.
Noviembre 2017

[1] aasanjuanc@udistrital.edu.co

CAPÍTULO I
ESTABILIDAD

Acróbatas bajo los cerezos: rodando trompos y balanceándose. Yoshiharu (1857) en THE MET.

Sucesión de Fibonacci (1202)

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

Programación en Python

```
def F(n):
    if n == 1 or n == 2:
        return 2
    else:
        return F(n - 1) + F(n - 2)
F(12*3)
```

Entonces...

A los 3 años tendríamos **29 860 704** conejos.

"Familia de conejos bailando". American Caramel Company (1910) en THE MET.

Ecuación E. coli

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

Solución

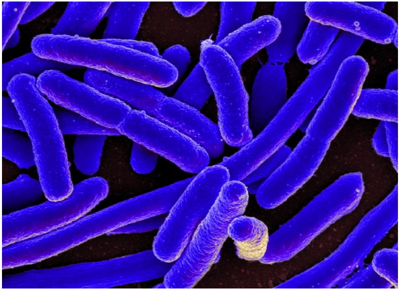
$$a_{n+1} = 2^n$$

Algunos datos de la E. Coli

- Frecuencia de fisión: 14 minutos
- Ciclo de vida: 10 días

Entonces...

Una sola bacteria generaría $2^{1028} \approx \mathbf{2{,}9 \cdot 10^{309}}$ bacterias en 10 días.



Colonia de E. Coli. NIAID-US (2002).

PERO, ¿QUÉ TAN GRANDE ES $2^{1028} \approx 2{,}9 \cdot 10^{309}$?

Algunos datos para comparar

- El universo conocido tiene un volumen de $\approx 4 \cdot 10^{80}\text{m}^3$.
- Una E. Coli tiene un volumen de $\approx 1,3\mu\text{m}^3 = 1,3 \cdot 10^{-18}\text{m}^3$

Entonces...

En 10 días $2{,}9 \cdot 10^{309}$ bacterias llenarían el espacio equivalente a

$$\mathbf{9{,}4 \cdot 10^{210}}\ \textbf{universos}$$

similares al nuestro. Más que un gúgol al cuadrado de universos de bacterias.

El universo conocido a escala logaritmica. Carlos Budassi (2012).

Supongamos...

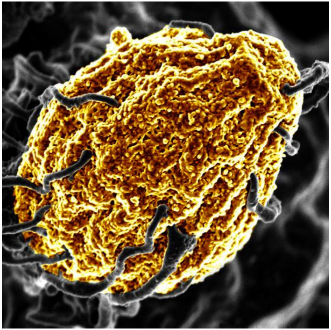
que en cada paso un macrófago se fagocita un número fijo de bacterias (término de cosecha constante).

Un modelo más general

$$\begin{cases} N(0) = N_0 \\ N(n+1) = bN(n) - c \end{cases}$$

Problema

Usando la variación de parámetros $N(n) = 2^n M(n)$, encuentre la fórmula explícita de $N(n)$ y encuentre el valor óptimo de c para garantizar el cese de la infección.



Macrófago. NIAID-US (2002).

¿Qué es?

La bifurcación ocurre cuando pequeños cambios en los parámetros causan cambios repentinos en el comportamiento cualitativo o topológico del sistema.

Por ejemplo

El c óptimo (c^*) del ejercicio anterior es un punto de bifurcación para ese sistema. Si $c > c^*$ la infección desaparece, si $c < c^*$ moriremos todos de septicemia.

Ornamento. Cultura Tolima (S. I-VII) en THE MET.

UN EJEMPLO MUY PERO MUY SENCILLO DE BIFURCACIÓN

Considere la fórmula recursiva

$$N(n+1) = bN(n)$$

Aplicando reiteradamente

$$N(t+h) - N(t) = N(t)(b^h - 1)$$

Dividiendo por h y tomando límite $h \to 0$

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

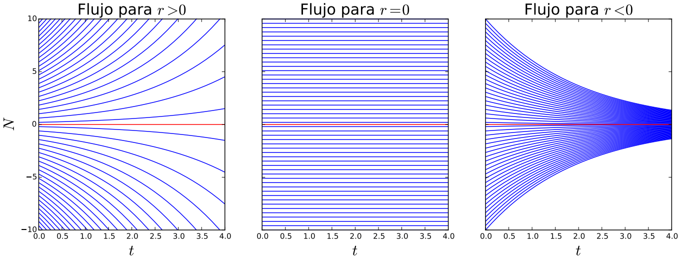
Parámetros

- $r = \log(b)$: tasa de crecimiento = tasa de natalidad - tasa de mortalidad.
- N_0: población inicial.

La ecuación $N'(t) = rN(t)$ tiene un punto crítico (de equilibrio) en $N^* = 0$.

- Si $r = 0$, N^* es neutro.
- Si $r > 0$, N^* es inestable (fuente).
- Si $r < 0$, N^* es asintóticamente estable (pozo).

Por tanto $r = 0$ es un punto de bifurcación.



El funeral del anarquista Galli. Carrà (1911)

Modelo Logístico de Verhulst (1838)

K, un nuevo parámetro

El número de individuos de una especie que el ambiente puede sustentar es la *capacidad de carga* K.

Modelo logístico

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Normalizando $N = ku$

$$u' = ru(1-u)$$

Con cosecha constante

$$u' = ru(1-u) - c$$

Bandada de cuervos en la puesta del sol. Kyōsai (1831) en THE MET.

Criterio de la derivada o linealización

Notemos que

$$N' = f(N) \approx f(N^*) + f'(N^*)(N - N^*) = f'(N^*)(N - N^*).$$

cuando $N \approx N^*$ punto crítico.

- $f'(N^\star) < 0 \Rightarrow N^\star$ es un pozo.
- $f'(N^\star) > 0 \Rightarrow N^\star$ es una fuente.
- $f'(N^\star) = 0 \Rightarrow N^\star$ el criterio no decide.

Los puntos críticos de $f_c(u) = u(1-u) - c$ están en una parábola de raíces

$$u^*_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

Entonces

En $c = \frac{1}{4}$ hay un punto de bifurcación.

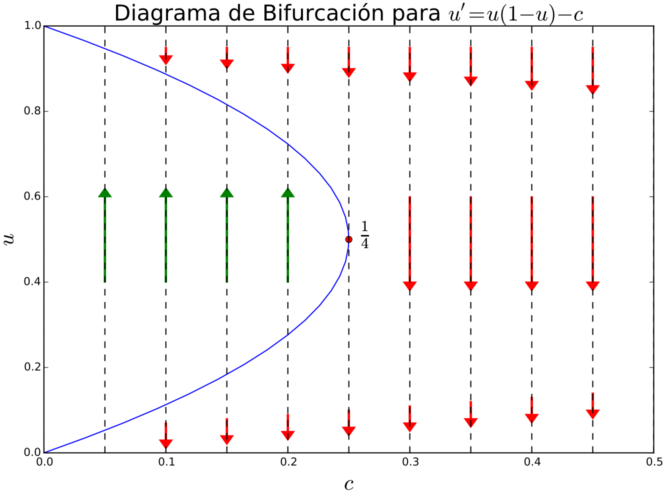
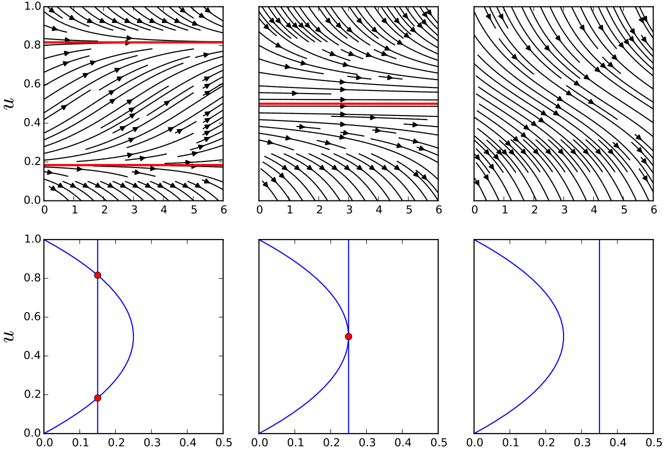


Diagrama de Bifurcación para $u' = u(1-u) - c$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
u
c
$\frac{1}{4}$

DIAGRAMAS DE FLUJO Y DE BIFURCACIÓN PARA DISTINTOS VALORES DE c



Problema

Haga el análisis cualitativo de equilibrio, estabilidad, bifurcación y interpretación biológica cuando la cosecha es periódica con respecto al tiempo. Por ejemplo

$$u' = ru(1-u) - \alpha \sin(t)$$

CAPÍTULO II
CAOS

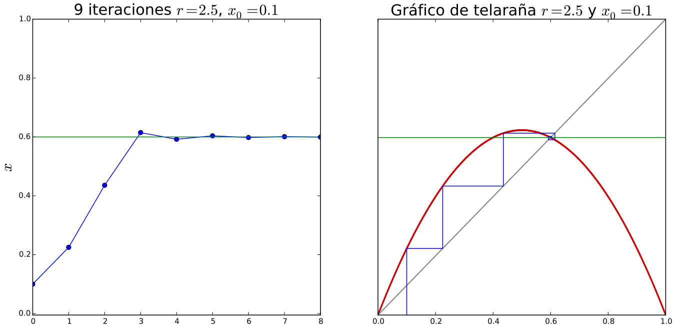
Ritmo de otoño. Pollock (1950) en THE MET.

En la versión discreta

Para $r \in [0,4]$ consideremos el sistema dinámico

$$x_{n+1} = f_r(x) = rx_n(1 - x_n) \in [0,1]$$

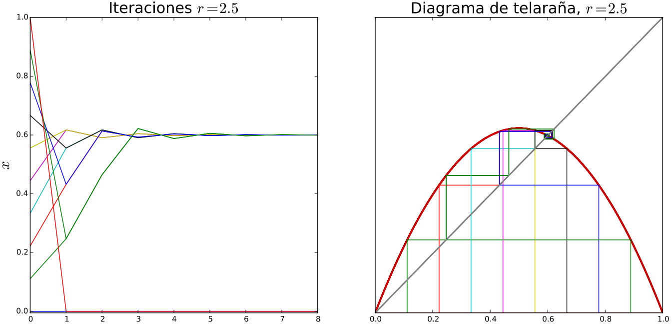
$x_0 \in [0,1]$ es la *semilla* de la *órbita* $x_0 \to x_1 \to x_2 \to \cdots$



LOS PUNTOS FIJOS SON LOS NUEVOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

$f(x^*) = x^*$ los hay de tres clases

- **Atrayentes**: Si los cercanos a x^* continúan cercanos a x^* para toda iteración y $f^n(x^*) \to x^*$.
- **Repelentes**: Si todas las órbitas cercanas a $x^s tar$, salvo x^* dejan de ser cercanas tarde o temprano.
- **Neutros**: Ni repelentes ni atrayentes.



SÍ, OTRO CRITERIO CON LA DERIVADA

Suponga que $f(x^*) = x^*$

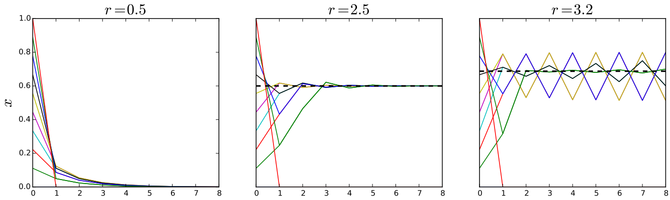
- Si $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^*$ es atrayente.
- Si $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^*$ es repelente.
- Si $|f'(x^*)| = 1 \Rightarrow$ el criterio no decide.

Demostración del primer caso

$$
\begin{aligned}
|f^n(x) - x^*| &= |f^n(x) - f^n(x^*)| \\
&\leq |f'(x^\star)||f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x^*)| \\
&\leq K|f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x^*)| \qquad\qquad 0 < K < 1 \\
&\quad\vdots \\
&\leq K^{n-1}|f(x) - f(x^*)| \\
&\leq K^{n-1}|f(x) - x^*| \to 0
\end{aligned}
$$

Puntos fijos de $f_r(x) = rx(1-x)$

- Si $r \in [0,1) \Rightarrow x_0^* = 0$ es el único punto fijo atrayente.
- Si $r \in (1,3) \Rightarrow x_0^* = 0$ es ahora repelente y aparece $x_r^* = (r-1)/r$ atrayente.
- Si $r \in (3,4] \Rightarrow x_0^* = 0$ y $x_r^* = (r-1)/r$ son ahora repelentes.
- Puntos de *bifurcación de intercambio* en $r = 1, 3$.



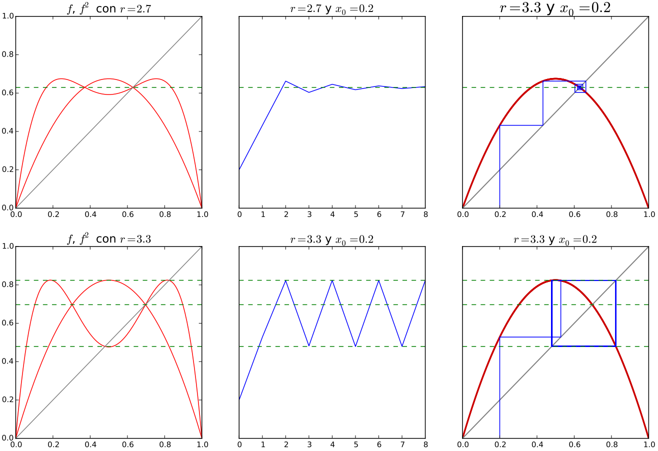
Idea

Un *2-ciclo* es una órbita de la forma $x_0 \to x_1 \to x_0 \to x_1 \to \cdots$ y son los puntos fijos de $f^2 = f \circ f$ que no son puntos fijos de f.
Proponga una definición para k-ciclo y su naturaleza (atrayente, repelente y neutro).

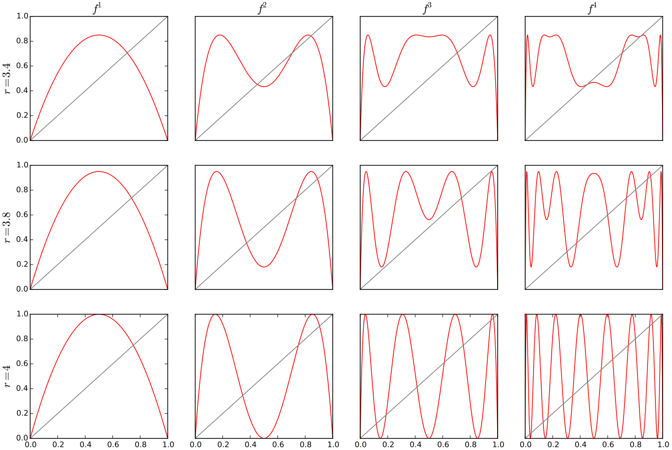
En el caso de la ecuación logística

Sólo hay un 2 ciclo atrayente para $r \in (3, 4]$. Es decir $r = 3$ hay un punto de bifurcación de *duplicación de periodo*. Compruébelo.

BIFURCACIÓN DE DUPLICACIÓN DE PERIODO EN $r = 3$



k-CICLOS CUANDO $r \uparrow 4$

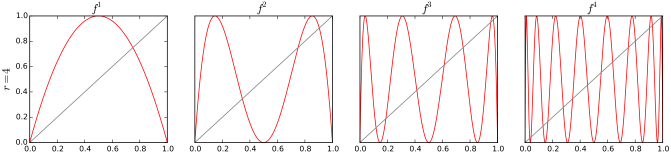


Definición de caos

$x_{n+1} = f_r(x_n)$ es caótica en $[0,1]$ porque:

- Los puntos periódicos son densos en $[0,1]$.
- f_r es *transitiva* en $[0,1]$: dados cualquier par de subintervalos hay un punto del uno que termina tarde o temprano en el otro.
- f_r *depende sensiblemente* de de las semillas: existe $\beta > 0$ tal que para cada x_0 existe un y_0 tan cerca como se desee tal que

$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta.$$



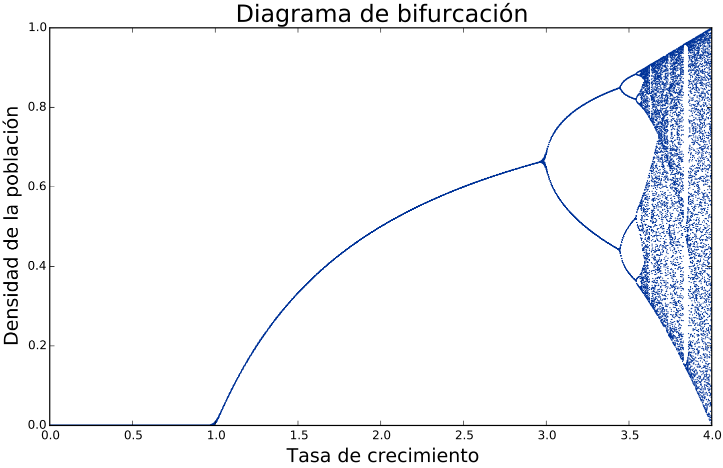
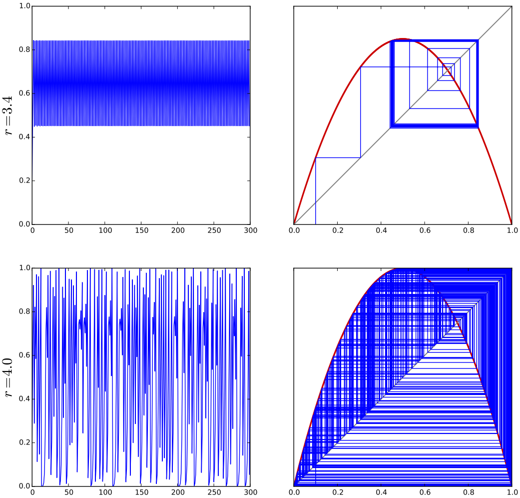


Diagrama de bifurcación
Densidad de la población
Tasa de crecimiento
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

TELARAÑAS CAÓTICAS



CAPÍTULO III
CATÁSTROFE

El gran dragón rojo y la mujer revestida de sol. Blake (1803).

Ludwig, Jones y Holling (1978)

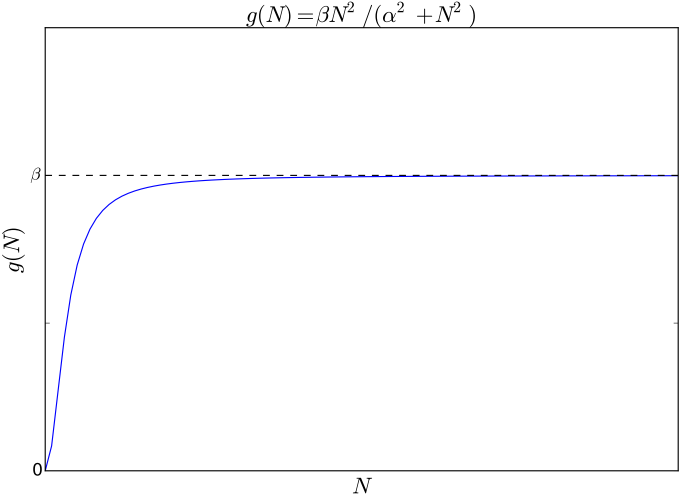
proponen un término de cosecha no-lineal que tiene en cuenta la dinámica depredadora de los pájaros.

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta\frac{N^2}{\alpha^2 + N^2}.$$

- α: densidad de la población de polillas donde comienza la saturación.
- β: máxima cosecha posible de los pájaros.

Diente de león con una polilla y una polillita. Dietzsch (1784) en The British Museum.

INTERPRETACIÓN DEL TÉRMINO DE COSECHA



Normalización

La ecuación

$$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta\frac{N^2}{\alpha^2 + N^2}.$$

puede ser normalizada

$$u' = ru\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u^2}{1 + u^2}$$

haciendo $u = N/\alpha$.

Puntos de equilibrio

$u \equiv 0$ siempre es un punto de equilibrio inestable. Los demás puntos de equilibrio son las soluciones a

$$r\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u}{1 + u^2} = 0$$

que son las soluciones a un polinomio de grado tres.

Puntos de equilibrio

$u \equiv 0$ siempre es un punto de equilibrio inestable. Los demás puntos de equilibrio son las soluciones a

$$r\left(1 - \frac{u}{q}\right) - \frac{u}{1+u^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$ru^3 - qru^2 + u(q+r) - qr = 0$$

que son las soluciones a un polinomio de grado tres.

Gracias al Teorema Fundamental del Álgebra sabemos que

La ecuación

$$P(u) = ru^3 - qru^2 + u(q+r) - qr = 0$$

puede tener:

- 3 raíces reales e iguales, $\Delta = 0$.
- 1 raíz real y dos complejas conjugadas, $\Delta < 0$.
- 2 raíces reales iguales y otra real diferente, $\Delta = 0$.
- 3 raíces reales diferentes, $\Delta > 0$.

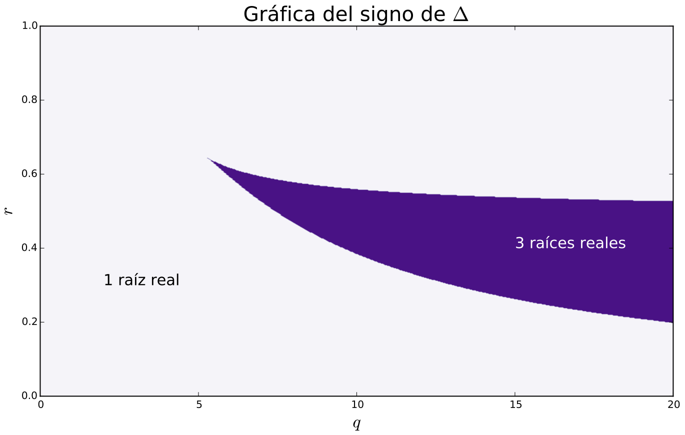
Problema

Usando que una raíz repetida también es raíz de la derivada demuestre que

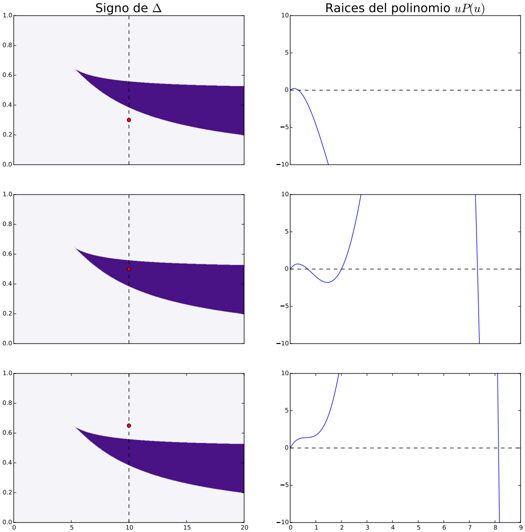
$$\begin{cases} r(\alpha) = \frac{2a^3}{a^2-1} \\ q(\alpha) = \frac{2a^3}{(a^2+1)^2} \end{cases}$$

es una parametrización racional del discrminante Δ con dos hojas $a \in [1, \sqrt{3}]$ y $a \in [\sqrt{3}, \infty)$. En $a = \sqrt{3}$ se pierde la suavidad.

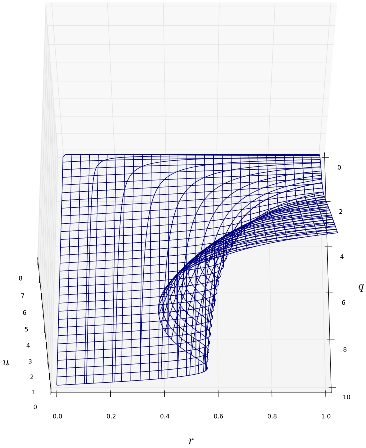
DIAGRAMA DE LA CANTIDAD DE PUNTOS DE EQUILIBRIO



CATÁSTROFE DE CÚSPIDE



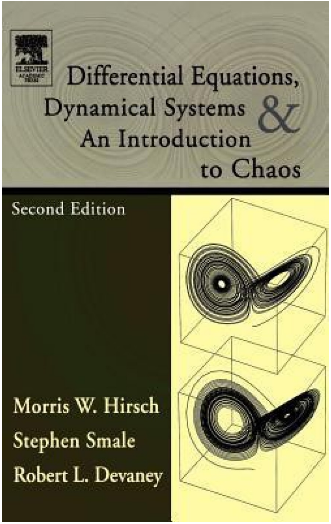
LA PALABRA MISTERIOSA DE HOY ES: ¡HISTÉRESIS!

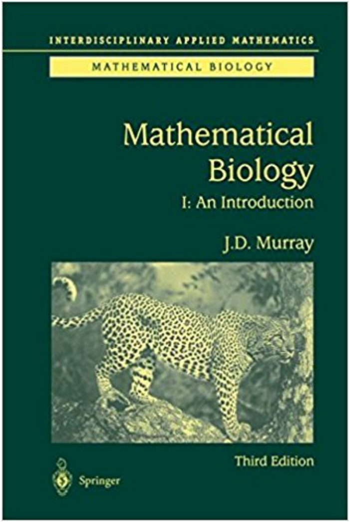


RECURSOS

Escena agrícola. Rowlandson (1827) en THE MET.

BIBLIOGRAFÍA "DURA"





WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

THE MET

WIKIMEDIA COMMONS

The British Museum

National Institute of Allergy and Infectious Diseases debian

SymPy

LaTeX

jupyter

python™

matplotlib

NumPy

Librería pynamical de Geoff Boeing

2^{1028} GRACIAS