Estudio sobre Problemas Con Resonancia

Juan Sebastian Alfonso Lozano
Director: Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2016

A mis padres, mis abuelos, mi hermano y mi tía. Nada de esto sería posible sin su ayuda.

Agradecimientos

En el presente trabajo representa la conclusión de una etapa muy importante de mi vida, doy gracias a todas las personas que han hecho parte de mi camino, por lo bueno y por lo malo, de todo he aprendido y es por eso que todo esto es posible.

En primer lugar agradezco a mi familia por su apoyo incondicional, a mi mama por nunca darme la espalda a pesar de los tropiezos y errores. Gracias por dejarme estudiar lo que más me gusta, sin ella nada seria igual. A mi padrastro y a mi hermano por su sabiduría y consejos, también a mis abuelos y a mi tía por su paciencia e incondicional apoyo en cada locura que se me ocurre.

Agradezco a mis compañeros de pregrado, a todos, en particular al Mono, Liz, Mariana, Manuel, Camilo y Camila por enseñarme como aprender y mejorar en esto, aunque las circunstancias sean contrarias y parezca un tema improbable de entender. Gracias a mis maestros por cada hora de trabajo que tuve la oportunidad de compartir en especial, a mi director de trabajo de grado, que me ha enseñado muchísimas cosas, entre las más importantes, que cualquiera puede ser matemático, solo es necesario mucho esfuerzo, trabajo duro, y amor por esto.

Índice general

Introducción **II**

1. Preliminares **1**

1.1. Diferenciación . . . 1

1.2. Principio del Punto Fijo de Banach . . . 6

1.3. Un Teorema de Aproximación Diofántica . . . 7

2. Teoremas de la Función Implícita y de la Función Inversa **10**

2.1. Teorema de Función Implícita . . . 13

2.2. Teorema de la Función Inversa . . . 18

2.3. Teorema de Nash-Moser . . . 21

3. El Problema de los Divisores Pequeños **27**

3.1. Teorema de Siegel . . . 27

4. Conclusiones **46**

Apéndices **47**

Referencias 47

Introducción

En muchas situaciones de la naturaleza es usual ver fenómenos vibrantes en los cuales se hace presente la resonancia, en las mareas oceánicas, en la afinación de un instrumento musical y en la voz humana capaz de quebrar una copa de cristal, los electrones en la corriente alterna [9, p. 91]. Quizás a gran escala como en la mecánica celeste o por el contrario a escala atómica como en la base de varias técnicas de espectroscopia [4, p. 513]. Para resolver teóricamente ciertos problemas con resonancia, como herramienta fundamental se usa el Teorema de la Función Inversa y también el Teorema de la Función Implícita de vital importancia en el análisis no lineal [6, p. 58].

En trabajos de Newton por primera vez se analizaba el comportamiento de una función implícita definida y por otro lado, en el contexto del calculo, Leibniz utilizó de cierta forma diferenciación implícita. En 1770, Lagrange demostró el Teorema de Inversión de gran importancia en la mecánica celeste y el cual se acerca en forma, a un Teorema de la Función Inversa. Cauchy, en su búsqueda por hacer rigurosa a la matemática puso su atención en el teorema y sus generalizaciones. Razón por la cual es a este último a quien se le atribuye el Teorema de la Función Inversa junto a Hadamard. Fue en el siglo XIX cuando Ulisse Dini enuncio y probó el Teorema de la Función Implícita, época en la cual las diferencias entre el análisis real y complejo eran profundas [7, p. 14].

Aquí se estudiará un ejemplo típico, el Problema de los Divisores Pequeños; que se destaca en el estudio del comportamiento a largo plazo de los movimientos oscilatorios en el sistema solar. El Problema de los Divisores Pequeños fue demostrado por C.L. Siegel en 1942 [5, p. 147].

CAPÍTULO 1

Preliminares

En el presente capítulo se enuncian algunas definiciones básicas y teoremas que se usan a lo largo del trabajo dadas en [2] y en [5].

1.1. Diferenciación

Definición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, f se dice *diferenciable en* $a \in A$ si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$b = \lim_{a \to x} \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Al real b anterior se le denota por $f'(x)$ y es la *diferencial de* f *en* a [2, p. 61].

Por la definición anterior

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) = 0$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h} = 0.$$

Y por la definición del limite; dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$|f(a+h)-f(a)-f'(a)h| < \epsilon|h|$$

Si se denota $r(h) = f(a+h)-f(a)-f'(a)h$ se tiene que $f(a+h) = f(a)+f'(a)h+r(h)$, donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Esto con la intención de extender de manera análoga de noción de diferenciabilidad en espacios de Banach.

Definición. Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ espacios de Banach con la misma norma $|\cdot|$ y sea $A \subseteq \mathbb{E}$ un conjunto abierto además se define $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$; se dice *diferenciable en* $a \in A$ si existen una aplicación lineal continua $L(a,\cdot) = L$ con $L \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ y una aplicación definida como $r(a,h) = r(h)$, tales que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + r(h)$$
$$f(a+h) - f(a) - L(h) = r(h).$$

Donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{||h||} = 0.$$

La aplicación lineal continua L es la *derivada de Frechet de* f *en* a. Esta se denotará por $f'(a)$ [2, p. 63].

Definición. Sean $\mathbb{E}$ y $\mathbb{F}$ espacios vectoriales normados y sea $A \subset \mathbb{E}$ un abierto tal que $0 \in A$. Se introduce la notación de Landau si para $g : A \longrightarrow \mathbb{F}$ se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{|h|} = 0.$$

En este caso se escribe $g(h) = o(h)$ y se dice que g *es una o de Landau* [2, p. 64].

Definición. Si f es diferenciable en $x \in A$ para todo x, entonces f *es Frechet Diferenciable en* A [2, p. 67].

Definición. Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espacios normados, $A \subset \mathbb{E}$ abierto, $a \in A$; $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$, y sea $v \in \mathbb{E}$. Si existe

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

Se dice que f posee derivada direccional en la dirección v en el punto a. A dicho limite se le llama la *derivada direccional de* f *en el punto* a *en la dirección* v, cuando $||v|| = 1$ [2, p. 67].

Definición. La aplicación f se dice de *Gateaux Diferenciable en la dirección* $a \in A$ si para todo $v \in \mathbb{E}$, existe el siguiente limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

El cual se denota por $\partial f(a, v)$ [2, p. 67].

Por las definiciones anteriores se puede afirmar que existe una relación entre estas. En espacios de Banach puede ser enunciada como sigue

Proposición 1.1. *Si* $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ *es Frechet diferenciable en* $a \in \mathbb{E}$ *entonces es Gateaux diferenciable en* $a \in \mathbb{E}$ *[2, p. 67].*

Demostración.
Por hipótesis f cumple que para todo $a \in A \subset \mathbb{E}$ con A un conjunto abierto, si L es su derivada de Frechet entonces $f(a + h) - f(a) - L(h) = r(h)$ y

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Así reemplazando

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

De esta manera $f(a + h) - f(a) - L(h) \in o(h)$, ahora la diferencial de Gateaux si existe, es el limite hacia 0 del siguiente cociente alrededor de cualquier $v \in \mathbb{E}$ y debe coincidir con la derivada de Frechet L. En este orden de ideas

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = L(v).$$

De la igualdad anterior se obtiene,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} - L(v) = 0$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)-t*L(v)}{t} = 0$$
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)-L(tv)}{t} = 0.$$

De este modo, $f(a+tv)-f(a)-L(tv) \in o(h)$ y por lo tanto f es diferenciable en la dirección de v. Así ser Frechet diferenciable implica ser Gateaux diferenciable, y las derivadas coinciden. □

La implicación recíproca no siempre es cierta. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(0,0) = 0, \qquad F(u,v) = \left(\frac{uv^4}{u^3+v^6}\right) \text{ para } (u,v) \neq (0,0).$$

La función F cumple que todas sus derivadas direccionales existen siempre que $u^2 + v^2 > 0$ y todas son iguales a 0 en el origen, pero no es continua en ese punto. Este es un ejemplo de una función que es Gateaux diferenciable pero no Frechet diferenciable.

Un resultado valioso sobre el análisis en $\mathbb{R}$ es el Teorema del Valor Medio pues es comúnmente usado para demostrar otros teoremas. El Teorema afirma que dada cualquier función continua f en el intervalo cerrado $[a,b]$ y diferenciable en el abierto (a,b) entonces debe existir al menos un $c \in (a,b)$ tal que la derivada de f calculada en el punto c adquiere el mismo valor que el siguiente cociente

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

En espacios normados una generalización del teorema es necesaria por el alcance que este tiene en la teoría sobre $\mathbb{R}$ y aunque no alcanza a ser una equivalencia estricta si es posible establecer la siguiente desigualdad la cual será de mucha utilidad en los espacios de Banach.

Teorema 1.1. *Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espacios normados y sea $A \subset \mathbb{E}$ un abierto, sea f diferenciable en A,*

$$f : A \longrightarrow \mathbb{F}$$

Si $a, b \in A$ son tales que $[a, b] \subset A$, entonces:

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup\{|f'(a + t(b - a))| \ : \ t \in (0, 1)\}.$$

Demostración.
Esta se puede encontrar en [2, p. 197]. □

Un resultado del teorema anterior necesario es el siguiente colorario, propuesto como ejercicio en [2]. Será utilizado más adelante y presenta como hipótesis adicional que la función f esté definida en una región conexa y así se extiende el resultado anterior a todos los puntos en dicha región.

Corolario 1.1. *Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ espacios normados y sea $A \subset \mathbb{E}$ un abierto conexo, sea $f : A \longrightarrow \mathbb{F}$ diferenciable en A, además si existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in A$, entonces*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in A$$

[2, p. 197].

Demostración.
Como $A \subset \mathbb{E}$ un abierto conexo se tiene que $[a, b] \subset A$ si $a \neq b$ y por hipótesis existe $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in A$ entonces en particular

$$\sup\{|f'(a + t(b - a))|\} \leq M.$$

Ahora por el Teorema 1.1

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq |b - a| \sup\{|f'(a + t(b - a))| \ : \ t \in (0, 1)\} \\ &\leq M|b - a|. \end{aligned}$$

Nuevamente, por ser A una región conexa, los puntos a, b son cualesquiera dos puntos distintos en A y la desigualdad se mantiene para todo $x, y \in A$. □

1.2. Principio del Punto Fijo de Banach

En esta sección se introducirán unas definiciones previas para enunciar una herramienta muy poderosa introducida por Stefan Banach como es el Teorema del Punto Fijo, el cual garantiza la existencia de puntos fijos de ciertas funciones definidas sobre espacios métricos y es muy útil para afirmar la existencia de soluciones. Además el teorema otorga un método para encontrar dichos puntos.

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y una aplicación $T : X \longrightarrow X$ es llamada una contracción sobre X si existe $k \in [0, 1)$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)) \forall x, y \in X$. [5, p. 69]

Definición. Una aplicación $T : X \longrightarrow X$ es llamada una contracción estricta si existe $k \in (0, 1)$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq k(d(x, y)) \forall x \neq y \in X$. [5, p. 69]

Teorema 1.2. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach y sea $X \subset \mathbb{E}$ cerrado con $X \neq \emptyset$ y $T : X \longrightarrow X$ una contracción estricta entonces T admite un único punto fijo $x^* \in X$, en consecuencia, $T(x^*) = x^*$. más aún, x^* puede ser hallado como sigue*

- *Se elige un $x_0 \in X$.*
- *Se define la sucesión x_n como*
$$x_n = T(x_{n-1})$$
entonces $x_n \to x^*$.

Demostración.
La demostración clásica del teorema fue dada por Stefan Banach y se puede encontrar en muchos libros, en particular una prueba se encuentra en [2, p. 276] y otra prueba distinta es dada en [5, p. 39]. □

Nótese la diferencia entre las hipótesis. Si se consideran solamente las aplicaciones que cumplen ser una contracción estricta, ya que en cualquier espacio de Banach $\mathbb{E}$ la aplicación constante $T : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ se comporta como una contracción que no es estricta y el teorema se cumple para el punto fijo c elegido como imagen constante de cada T posible en $\mathbb{E}$. De este modo, cumple el teorema.

Ahora si se considera solamente la situación en la que T es una contracción estricta. Se puede elegir un dominio no necesariamente cerrado sobre un espacio de Banach. En este caso no es posible garantizar la existencia de un punto fijo. La aplicación $T : [1,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$ definida como $T(x) = x + \frac{1}{x}$ es un ejemplo de esta situación. Se puede mostrar que T es una contracción estricta pero $[1,\infty)$ no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, el cual es una hipótesis para utilizar el Principio del punto fijo. En la gráfica 1.1 se observa a T que no posee un punto fijo pues su dominio no es un conjunto cerrado.

$$\begin{aligned} d(T(x),T(y)) &= |x + \frac{1}{x} - (y + \frac{1}{y})| \\ &= |x-y||1 - \frac{1}{xy}| \\ &< |x-y| = d(x,y). \end{aligned}$$

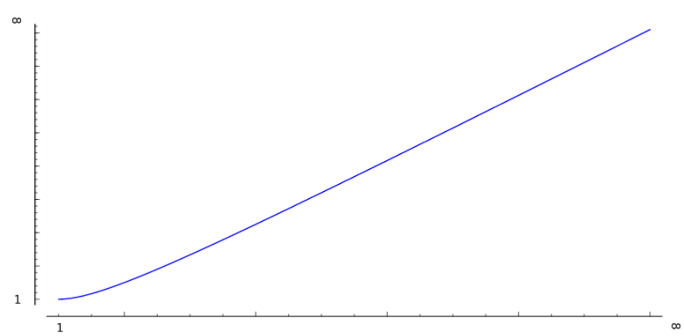

Figura 1.1: $T(x) = x + \frac{1}{x}$

1.3. Un Teorema de Aproximación Diofántica

En la siguiente sección se introduce un Teorema de gran utilidad para solucionar el problema de los divisores pequeños, aunque se encuentra en la teoría de aproximaciones diofánticas y fue propuesto por Dirichlet. El Teorema está lejos de nuestro estudio y solamente se presentara por su importancia en el resultado de Siegel.

Diofanto de Alejandría propuso entre muchas otras cosas, una idea básica, como aproximar números reales a partir de números racionales, razón por la cual la teoría de aproximaciones lleva su nombre. El problema de los divisores pequeños esta íntimamente relacionado con las aproximaciones diofánticas, por esta razón Dirichlet y Kronecker al igual que Siegel trabajaron de forma aislada en el problema de los divisores pequeños y lograron resultados enunciados como teoremas en la teoría de aproximaciones, la idea de Siegel es usar una desigualdad diofántica adecuada.

Teorema 1.3. *Sea τ un número irracional. Entonces existen infinitos racionales $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{Z}^+$ tal que*

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2} \tag{1.1}$$

[10, p. 17].

Demostración. Primero se debe denotar la parte entera y la parte fraccionaria de un número real x por

$$[x] = max\{z \in \mathbb{Z} | z \leq x\},$$

y además

$$\{x\} = x - [x].$$

Sea $Q \in \mathbb{Z}^+$. Ahora el conjunto de números que corresponden solamente a la parte fraccionaria

$$0, \{\tau\}, \{2\tau\}, \cdots, \{Q\tau\},$$

definen $Q + 1$ puntos distribuidos a lo largo de Q intervalos disjuntos

$$\left[\frac{j-1}{Q}, \frac{j}{Q}\right) \qquad j = 1, \cdots, Q.$$

Por el principio del palomar, debe haber al menos un intervalo que contenga al menos dos de estas partes fraccionarias, además sin perdida de generalidad $\{k\tau\} \geq \{l\tau\}$ para

$0 \leq k, l \leq Q$ y $k \neq l$. De esta manera

$$\begin{aligned}\{k\tau\} - \{l\tau\} &= k\tau - [k\tau] - l\tau + [l\tau] \\ &= (k-l)\tau + [l\tau] - [k\tau] \\ &= [(k-l)\tau] + \{(k-l)\tau\} + [l\tau] - [k\tau].\end{aligned}$$

Aquí se tiene que $([(k-l)\tau] + [l\tau] - [k\tau]) \in \mathbb{Z}$. Como $\{k\tau\} - \{l\tau\}$ se encuentra en el intervalo $\left[0, \frac{1}{Q}\right)$, la parte entera debe ser cero. Así $([(k-l)\tau] + [l\tau] - [k\tau]) = 0$.

Haciendo $q = k - l$ se obtiene

$$\{q\tau\} = \{k\tau\} - \{l\tau\} < \frac{1}{Q}.$$

Con $p := [q\tau]$

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| = \frac{|q\tau - p|}{q} = \frac{\{q\tau\}}{q} < \frac{1}{qQ}. \tag{1.2}$$

Y con esto 1.1 se cumple.

Ahora supóngase τ un número irracional y que existe solamente un número finito de soluciones $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots, \frac{p_n}{q_n}$ para 1.1. Como $\tau \notin \mathbb{Q}$, es posible hallar Q tal que

$$\left|\tau - \frac{p_j}{q_j}\right| > \frac{1}{Q}$$

para $j = 1, \cdots, Q$.. Esto contradice 1.2. Finalmente, supóngase τ un número racional, de la forma $\tau = \frac{a}{b}$ con $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$. Si $\tau = \frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$, entonces

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq}\ .$$

Con lo anterior y 1.1 implica que $q < b$. Por tanto existen infinitos números que cumplen 1.1 y el teorema ha sido probado [10, p. 17]. □

Definición. Un número irracional τ es diofántico o del tipo (C, r) si existe una constante $C > 0$ y un exponente con $r \geq 2$ tales que para cualquier número racional se tiene

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^r} \tag{1.3}$$

[10, p. 19].

CAPÍTULO 2

Teoremas de la Función Implícita y de la Función Inversa

El Teorema del Punto fijo de Banach precede al presente capítulo pues será utilizado para dar una prueba al Teorema de la Función Implícita. Comúnmente no se hace distinción entre los teoremas que se demostrarán en la presente sección ya que basta conocer al menos uno de ellos para lograr demostrar el otro, no importa la dirección que se tome.

El Teorema de la Función Implícita en dimensión infinita para espacios de Banach, entre otras cosas, se utiliza para demostrar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales y parametrizar el espacio de dichas soluciones. Esto solamente como ejemplo para ilustrar uno de los muchos usos que tienen estos teoremas.

De ahora en adelante no se hará distinción entre $T(x)$ y Tx para T definida sobre un espacio de Banach cualquiera, esto por la notación llevada en [5] y en otros libros.

Proposición 2.2. *Sea $\mathbb{E}$ un espacio de Banach entonces*

(a) Si $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ es una contracción estricta entonces $I - T$ es un homeomorfismo sobre $\mathbb{E}$;

(b) Si $R : \overline{B}_\delta(0) \longrightarrow \mathbb{E}$ es una contracción estricta y $|R(0)| < \delta(1-k)$, entonces $I + R$ tiene un único cero. Más aún, $B_\varrho(0) \subset (I+R)(B_\delta(0))$ para $\varrho = (1-k)\delta - |R(0)|$.

[5, p. 147]

Demostración. (a) Dado un $z \in \mathbb{E}$, es posible definir

$$
\begin{aligned}
T' : & \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E} \\
& x \longmapsto T'x = Tx + z
\end{aligned}
$$

De aquí es posible ver que si T es una contracción estricta

$$
\begin{aligned}
d(T'x, T'y) &= |T'x - T'y| \\
&= |Tx + z - (Ty + z)| \\
&= |Tx - Ty| \\
&\leq k|x - y|,
\end{aligned}
$$

T' también cumple la condición de ser una contracción estricta y por el Teorema del Punto Fijo, para un $x \in \mathbb{E}$ se tiene $x = Tx + z$, en otras palabras $z = x - Tx$. Defínase $S = I - T$. Por lo anterior S esta bien definida y se comporta como una contracción estricta; falta ver que S es biyectiva, en efecto, S es inyectiva ya que si $Sx = Sy$ debe suceder $x - Tx = y - Ty$ por como esta definida S, y operando lo anterior se obtiene $Tx - Ty = x - y$ como T es una contracción estricta, existe $k \in (0, 1)$ tal que

$$|Tx - Ty| \leq k|x - y| < |x - y| = |Tx - Ty| .$$

También como $k \neq 0$ solamente es posible que $|x - y| = 0$. Por lo tanto $x - y = 0$, es decir, $x = y$ y se concluye que S es inyectiva. Todavía falta ver la sobreyectividad de S. Para $z \in \mathbb{E}$, existe $x \in \mathbb{E}$ tales que $x - Tx = z$, así $x = T(x) + z$, lo que muestra que S es sobreyectiva. Por lo anterior S es biyectiva en consecuencia su inversa existe, por otro lado, por ser S una contracción. Para algún $k \in (0, 1)$ se mantiene

$$\begin{aligned}|Sx - Sy| &= |(I-T)x - (I-T)y| \\ &= |(x-y) - (Tx - Ty)| \\ &\geq |x-y| - |(Tx-Ty)| \\ &\geq (1-k)|x-y| \, .\end{aligned}$$

Dividiendo por $(1-k)$ se tiene $|x-y| \leq (1-k)^{-1}|Sx-Sy|$. Si $Sx = x'$ y $Sy = y'$ se tiene que $S^{-1}x' = x$ y del mismo modo $S^{-1}y' = y$. Reescribiendo la última desigualdad en estos términos

$$|S^{-1}x' - S^{-1}y'| \leq (1-k)^{-1}|x'-y'|.$$

Esto indica que S^{-1} es continua y por lo tanto S es una aplicación abierta y un homeomorfismo.

(b) Se aplicará el resultado del literal (a) en el caso especial de $-Rx$ para luego usar el teorema del punto fijo sobre $I+R$, se debe ver que $-Rx$ es una contracción. En efecto,

$$|-Rx - (-Ry)| = |Ry - Rx| \leq k|y-x| = k|x-y|,$$

así $-Rx$ también es una contracción y

$$\begin{aligned}|R(x)| - |R(0)| &\leq |R(x) - R(0)| \\ &\leq k|x-0| = k|x|,\end{aligned}$$

sumando a ambos lados $|R(0)|$ y como por hipótesis $|R(0)| < \delta(1-k)$

$$\begin{aligned}|R(x)| &\leq k|x| + |R(0)| \\ &< k\delta + \delta(1-k) = \delta,\end{aligned}$$

para $x \in \overline{B}_\delta(0)$.
Queda por ver que $B_\varrho(0) \subset (I+R)(B_\delta(0))$ para $\varrho = (1-k)\delta - |R(0)|$
Sea $y \in \overline{B}_\varrho(0)$ y como $|R(x)| < \delta$ para $x \in \overline{B}_\delta(0)$ entonces

$$|(I+R)y| = |y + Ry| \leq |y| + |Ry| < \varrho + \delta.$$

□

2.1. Teorema de Función Implícita

La proposición anterior es la herramienta principal que relaciona el Teorema del Punto Fijo con el Teorema de la Función Implícita. Existen más demostraciones para el siguiente teorema una de ellas realizada por Dini aunque rara vez se le ha dado el reconocimiento que merece principalmente por que las contribuciones conocidas sobre el Teorema son atribuidas a Cauchy y Hadamar [7, p. 14]. Por otra parte, en Italia usualmente llaman al teorema de la función implícita como teorema de Dini [3, p. 262].

Teorema 2.4. *(Teorema de Función Implícita) Sean $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ espacios de Banach, $U \subset \mathbb{E}$ y $V \subset \mathbb{F}$ vecindades de x_0 y y_0 respectivamente y sea $T : U \times V \longrightarrow \mathbb{G}$ continua y continuamente diferenciable con respecto a y. Supóngase también que $T(x_0, y_0) = 0$ y que $T_y^{-1}(x_0, y_0) \in L(\mathbb{G}, \mathbb{F})$. Entonces existen bolas $\overline{B}_r(x_0) \subset U$, $\overline{B}_r(y_0) \subset V$ y exactamente una aplicación $R : \overline{B}_r(x_0) \longrightarrow \overline{B}_r(y_0)$ tal que $Rx_0 = y_0$ y $T(x, Rx) = 0$ sobre $\overline{B}_r(x_0)$. Esta aplicación R es continua. [5, p. 148]*

Demostración.
Sin perdida de generalidad $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, ya que el caso general puede ser reducido a partir de una traslación. Sea L tal que $L(0) = T_y(0,0) = 0$ e I la identidad sobre $\mathbb{F}$. Además $T(x,y) = 0$ es equivalente a

$$\begin{aligned} y + (L^{-1}T(x,y) - y) &= 0 \\ L^{-1}T(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando L a ambos lados de la igualdad

$$\begin{aligned} T(x,y) &= L(0) \\ T(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Se debe ver que $S(x,\cdot) = L^{-1}T(x,\cdot) - I$ satisface las hipótesis de la Proposición 2.2 (b). Sea $S = L^{-1}T(x,\cdot) - I$ derivando con respecto a y se tiene

$$\begin{aligned} S_y(0,0)h &= L^{-1}T_y(0,0)h - Ih \\ &= L^{-1}L(0)h - Ih \\ &= (I - I)h \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $S_y(0,0) = 0$ y además S_y es continua se cumple que derivando en la siguiente igualdad $S(x,\cdot) = L^{-1}T(x,\cdot) - I$, la equivalencia se mantenga, en consecuencia

$$S_y(x,y)h = L^{-1}T_y(x,y)h - Ih \ .$$

Ahora dividiendo por h a ambos lados se tiene

$$S_y(x,\cdot) = L^{-1}T_y(x,\cdot) - I \ .$$

Así se puede fijar un $k \in (0,1)$ y encontrar $\delta > 0$ tal que $|S(x,y)| \leq k$ para (x,y) tales que $|(x,y)| < \delta$. En otras palabras, sobre la región $\overline{B}_\delta(0) \times \overline{B}_\delta(0) \subset U \times V$. Véase esto por la continuidad, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|(x,y)| < \delta$ entonces $|S_y(x,y) - S_y(0,0)| < \epsilon$ pero igualmente se conoce que $S_y(0,0) = 0$.

Por lo cual la anterior desigualdad puede reescribirse de la siguiente manera $|S_y(x,y)| < \epsilon$ con $k = \epsilon$ y k tomando valores en el intervalo $(0,1)$. De esta forma y cumpliendo las restricciones anteriores se tiene por el Corolario 1.1 lo siguiente

$$|S(x,y) - S(x,\overline{y})| \leq k|y - \overline{y}|.$$

Más aún, como $S(0,0) = 0$ y $S(\cdot,0)$ es continua, existe $r \leq \delta$ tal que

$$|S(x,0)| < \delta(1-k)$$

sobre $\overline{B}_r(0)$.

Por lo tanto, por la Proposición 1.1, hay un único $Rx \in B_\delta(0)$ para cada $x \in \overline{B}_r(0)$ que hace cero a $I + S(x,\cdot)$. Adicionalmente $0 = 0 + S(0,0)$ y de este modo $R(0) = 0$.

Veamos que R es continua, ya que si $x, \overline{x} \in U$ tales que

$$0 = Rx + S(x,Rx) = R\overline{x} + S(\overline{x}, R\overline{x}).$$

En consecuencia $Rx - R\overline{x} = S(\overline{x}, R\overline{x}) - S(x,Rx)$, se toma el valor absoluto a ambos lados de la equivalencia anterior y consecuentemente

$$\begin{aligned}
|Rx - R\overline{x}| &= |S(\overline{x}, R\overline{x}) - S(x,Rx)| \\
&= |S(\overline{x}, R\overline{x}) - S(x, R'\overline{x}) + S(x, R\overline{x}) - S(x,Rx)| \\
&\leq |S(\overline{x}, R\overline{x}) - S(x, R\overline{x})| + |S(x, R\overline{x}) - S(x,Rx)| \\
&\leq |S(\overline{x}, R\overline{x}) - S(x, R\overline{x})| + k|R\overline{x} - Rx| \\
&\leq (1-k)^{-1}|S(\overline{x}, R\overline{x}) - S(x, R\overline{x})| \\
&\leq (1-k)^{-1}|S(\overline{x}, R\overline{x}) - S(x, R\overline{x})| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, si $|x - \overline{x}| < \delta$ se tiene que $|Rx - R\overline{x}| < \epsilon$. En consecuencia, R es continua. $\square$

Nota 1. *Como ejemplo se tiene el problema no lineal con condiciones iniciales*

$$x'' + \mu x + f(x) = 0 \quad en \quad J = [0,1] \quad x(0) = x(1) = 0.$$

[5, p. 148]

El problema posee una perturbación representada por f. Se asume que $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$ y se aplicará el Teorema 2.3 con $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, $\mathbb{G} = C(J)$. Además

$$\mathbb{F} = C_0^2(J) = \{y \in C^2(J) \; : \; y(0) = y(1) = 0\},$$

con la norma definida por $|y| = |y''|_0$

Primero se verá que $\mathbb{F}$ es un espacio de Banach, en efecto, $|y| = |y''|_0$ define en $C_0^2(J)$ una norma de la siguiente manera

$$\begin{aligned} | \quad | : C_0^2(J) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sup_{t \in [0,1]} |x''(t)| \end{aligned}$$

por lo cual $|y| = |y''|_0$ esta bien definida y $|y| \geq 0$.
Supóngase con $x \in C_0^2(J)$ entonces

$$|x| = |x''|_0 = \sup_{t \in [0,1]} |x''(t)| = 0.$$

De esta manera, para todo $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} x''(t) &= 0 \\ x(t) &= ct. \end{aligned}$$

Como $x(0) = x(1) = 0$, se tiene que la función es $x(t) = 0$.
También se cumple la homogeneidad por escalar,

$$|cx| = |cx''|_0 = \sup_{t \in [0,1]} |cx''(t)| = |c||x|_0 = |c||x|.$$

Ahora véase que se cumple la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
|x+y| &= \sup_{t\in[0,1]} |x''(t)+y''(t)| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \left(|x''(t)|+|y''(t)|\right) \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} |x''(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |y''(t)| \\
&\leq |x|_0 + |y|_0.
\end{aligned}$$

Aún falta comprobar que Y es completo. En efecto, sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $C_0^2(J)$, de este modo, para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$ entonces

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &< \epsilon \\
|x''_n - x''_m| &< \epsilon \\
\sup_{t\in[0,1]} |x''_n(t) - x''_m(t)| &< \epsilon.
\end{aligned}$$

Para cada $t_0 \in [0,1]$ se cumple que $|x''_n(t_0) - x''_m(t_0)| < \epsilon$. De este modo, $(x''_n(t_0))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto converge a $y(t_0)$. De manera que $x''(t) = y(t)$ se integra con respecto a t a ambos lados de la igualdad, por lo cual $x'(t) = Y(t) + c_1$, de nuevo se integra con respecto a t y en consecuencia se puede conocer la forma de la solución $x(t) = W(t) + c_1 t + c_2$.

Adicionalmente $x(0) = 0$ de este modo se verifica también que $W(0) = -c_2$ y con esto se reemplaza para obtener $0 = x(1) = W(1) + c_1 - W(0)$. Se reemplaza para obtener $c_1 = W(0) - W(1)$, por lo cual si W es una primitiva de una primitiva de y entonces x se puede escribir de la siguiente forma

$$x(t) = W(T) + (W(0) - W(1))t - W(0),$$

siempre que $x''(t) = y(t)$.

Por todo lo anterior se cumple que $\mathbb{F}$ es un espacio de Banach.

Ahora defínase $F(\mu, x) = D^2 x + \mu x + f(x)$, y también el operador $D^2 \in L(C_0^2(J), C(J))$, esto es,

$$\begin{aligned}
F : \mathbb{R} \times C_0^2(J) &\longrightarrow C(J) \\
(\mu, x) &\longmapsto x'' + \mu x + f(x).
\end{aligned}$$

Ahora derivando $F(\mu, x)$ con respecto a x se obtiene $F_x(\mu, x) = D^2 + \mu + f'(x)$ y multiplicando por y a ambos lados el resultado es $F_x(\mu, x)y = D^2y + \mu y + f'(x)y$. Ahora evaluando para $x = 0$ toma la forma

$$\begin{aligned} F_x(\mu, 0)y &= D^2y + \mu y + f'(0)y \\ &= D^2y + y(\mu + f'(0)), \end{aligned}$$

por tanto, $F_x(\mu_0, 0)$ es un homeomorfismo, si y solo si, $\mu_0 + f'(0) \neq m^2\pi^2$. En efecto,

$$\begin{aligned} x'' + \mu x + f(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx(t) = 0. \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene la igualdad

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -kx(t).$$

El polinomio característico es de la forma, $\lambda^2 + k = 0$, entonces $\lambda = \pm\sqrt{-k}$. Así se obtienen los siguientes casos.

Primero para cuando $k = 0$

$$\begin{aligned} x'' &= 0 \\ x' &= c_1 \\ x &= c_1 t + c_2. \end{aligned}$$

Además $x(0) = 0 = x(1)$ en conclusión se obtiene que $c_1 = 0 = c_2$.
Para el segundo caso cuando $k < 0$. Si $k < 0$ existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha = \sqrt{-k}$ y las soluciones son de la forma

$$x(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t}.$$

Aquí también $x(0) = 0$, por consiguiente $a_1 + a_2 = 0$. En este orden de ideas, $a_1 = -a_2$ y reemplazando en la segunda condición de frontera $x(1) = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} x(1) = 0 &= a_1 e^{\alpha} - a_1 e^{-\alpha} \\ a_1 e^{\alpha} &= a_1 e^{-\alpha} \\ a_1 e^{2\alpha} &= a_1 \\ a_1 e^{2\sqrt{-k}} &= a_1 \\ e^{2\sqrt{-k}} &= 1. \end{aligned}$$

Por lo cual, la solución es $a_1 = a_2 = 0$, lo que implica que $x(t) = 0$.
En el último caso cuando $k > 0$, existe m tal que $m^2 = k$ y en consecuencia, $\sqrt{-k} = \pm mi$. La forma de la solución es la siguiente $x(t) = a_1 \cos(mt) + a_2 \sin(mt)$. Esto sigue cumpliendo las condiciones iniciales $x(0) = 0 = x(1)$ de aquí se obtiene

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &= a_1 \cos(0) + a_2 \sin(0) \\ 0 &= a_1 \cos(0) + a_2 \sin(0) \\ 0 &= a_1. \end{aligned}$$

Por otro lado también se debe cumplir $x(1) = 0$

$$x(1) = 0 = a_2 \sin(m).$$

si $a_2 \neq 0$ entonces $m = \pi n$ para $n \in \mathbb{N}$. Dicho de otra manera, $m^2 = k = \pi^2 n^2$, por lo tanto $F_x(\mu_0, 0)$ es un homeomorfismo si y solo si $\mu_0 + f'(0) \neq n^2\pi^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De esta forma se observa que el Teorema 2.3 es una herramienta cuyo objetivo es mostrar la existencia de un intervalo $(\mu_0 - r, \mu_0 + r)$ en donde el problema tiene solución. Es de aclarar que el Teorema 2.3 no es suficiente para la condición $\mu_0 + f'(0) = n^2\pi^2$. En general el ejemplo afirma que para toda $y \in C(J)$ existe $x \in C_0^2(J)$ tal que $x'' + (\mu + f'(0))x = g$ y cumple las condiciones de frontera $x(0) = x(1) = 0$.

El ejemplo anterior ilustra el uso del Teorema de la Función Implícita para solucionar un problema de ecuaciones diferenciales. En ocasiones este tipo de aplicaciones se pueden dar vía el Teorema de la Función Inversa.

2.2. Teorema de la Función Inversa

Aunque los teoremas de la función implícita e inversa son equivalentes , aquí se dará una demostración del Teorema de la Función Inversa usando el Teorema de la Función Implícita. Para ver la demostración reciproca donde primero se demuestra el Teorema de la Función Inversa para luego dar una demostración del Teorema de la Función Implícita revisar [2, p. 284].

Teorema 2.5. *(Teorema de la Función Inversa) Sea $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ espacios de Banach y sea U_0 una vecindad de x_0, sea $G : U_0 \longrightarrow \mathbb{F}$ continuamente diferenciable y $G'(x_0)^{-1} \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$. Entonces G es un homeomorfismo local. Es decir, existe una vecindad $U \subset U_0$ de x_0 tal que $G|_U$ es un homeomorfismo sobre la vecindad $G(U)$ de $y_0 = Gx_0$. Además, existe una vecindad posiblemente más pequeña $V \subset U$ tal que $G|_U \in C^1(G(V))$ y*

$$(G|_U^{-1})'(Gx) = G'(x)^{-1} \quad \textit{sobre} \quad V.$$

Más aún, $G|_U^{-1}$ es tan suave como G, como consecuencia, $G|_U^{-1} \in C^m(V)$ si $G \in C^m(U_0)$, esto también cuando $m = \infty$. [5, p. 149]

Demostración. Sea $F(x,y) = G(x) - y$, se aplica el Teorema 2.3 con $\mathbb{G} = \mathbb{F}$, y se permutarán los roles en los que se aplica el Teorema para x y y, así que existe una vecindad $W = B_\delta(y_0)$ tal que $\overline{B}_\delta(y_0) \subset U_0$ y además una única aplicación continua $T : W \longrightarrow B_\delta$ que cumple $Ty_0 = x_0$ y $F(Ty, y) = 0$

$$F(Ty, y) = G(Ty) - y = 0.$$

En este orden de ideas, $GTy = y$ para $y \in W$. De este modo se construye la vecindad $U \subset U_0$ como $U = T(W)$. Se aplica la diferencial en $GTy = y$ y por regla de la cadena se tiene $G'(Ty)T'y = I$.
Ahora véase que $G'(x_0)$ es una aplicación continua. En efecto, por hipótesis G es continuamente diferenciable. Adicionalmente $G'(x_0)$ es biyectiva y de inversa continua pues se tiene por hipótesis que $G'(x_0)^{-1} \in L(\mathbb{F}, \mathbb{E})$. Así $G'(x_0)$ es un homemorfismo. Se tiene que G' y T son continuas y en particular para cada $y \in W_0 \subset W$ se cumple que $G'(Ty)$ es un homeomorfismo al igual que T, por lo tanto $T'(y) = G'(Ty)^{-1}$ sobre W_0.
Por otro lado T debe ser Frechet diferenciable sobre W_0 para esto se quiere ver que $|T(y+h) - Ty - G'(Ty)^{-1}h|$ se comporta como una $o(h)$. En consecuencia,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|T(y+h) - Ty - G'(Ty)^{-1}h|}{h} = 0.$$

Si también $\overline{x} = T(y+h)$ y $x = Ty$. Con esto se obtiene directamente la siguiente relación $G\overline{x} = G(T(y+h)) = y + h$ y $Gx = G(Tx) = x$, por tanto

$$\begin{aligned} |T(y+h) - Ty - G'(Ty)^{-1}h| &\leq |G'(Ty)^{-1}||G'(Ty)(T(y+h) - Ty) - h| \\ &= c|G'(x)(\overline{x} - x) - (G\overline{x} - Gx)|, \end{aligned}$$

con $c = |G'(Ty)^{-1}|$. Además como T es continua y G es diferenciable en x,

$$\begin{aligned}
|T(y+h) - Ty - G'(Ty)^{-1}h| &\leq c|G'(x)(\overline{x} - x) - (G\overline{x} - Gx)| \\
&\leq c|o(\overline{x} - x)| \\
&= c|o(\overline{x} - x)|\frac{|\overline{x} - x|}{|\overline{x} - x|} \\
&= c\left|\frac{o(\overline{x} - x)}{\overline{x} - x|}\right||\overline{x} - x| \\
&\leq c\epsilon|\overline{x} - x| \\
&= c\epsilon|T(y+h) - Ty|\ .
\end{aligned}$$

Así $|T(y+h) - Ty - G'(Ty)^{-1}h| \leq c\epsilon|T(y+h) - Ty|$ esto sucede para $|h| \leq \delta(\epsilon)$ por la continuidad de T. A partir de lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
&|T(y+h) - Ty| - |G'(Ty)^{-1}h| \leq |T(y+h) - Ty - G'(Ty)^{-1}h| \\
&|T(y+h) - Ty| - |G'(Ty)^{-1}h| \leq c\epsilon|T(y+h) - Ty|\ .
\end{aligned}$$

Sumando y restando a ambos lados para agrupar los términos semejantes se obtiene

$$|T(y+h) - Ty| - c\epsilon|T(y+h) - Ty| \leq |G'(Ty)^{-1}h| = c|h|.$$

Luego se toma factor común la expresión $|T(y+h) - Ty|$ y el inverso multiplicativo de $(1 - \epsilon c)$ para reescribir lo anterior como sigue

$$|T(y+h) - Ty| \leq (1 - \epsilon c)^{-1}c|h|\ .$$

Por lo tanto, se cumple la siguiente cadena de desigualdades para un ϵ pequeño

$$|T(y+h) - Ty - G'(Ty)^{-1}h| \leq c\epsilon|T(y+h) - Ty| \leq (1 - \epsilon c)^{-1}c^2\epsilon|h|.$$

Esto significa que T es Frechet diferenciable sobre W_0 y se cumple que

$$T'(y) = G'(Ty)^{-1}.$$

En otras palabras $T = G|_U^{-1}$ es la función inversa de G en la vecindad U $\square$

Una consecuencia inmediata que debe tenerse en cuenta de los teoremas anteriores es la suavidad que heredan las funciones implícitas y está resumida en el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *Bajo las condiciones del Teorema 2.3 la función implícita R, encontrada sobre $B_r(x_0)$ es tan suave como T, posiblemente en una bola más pequeña $B_\rho(x_0) \subset B_r(x_0)$. Es decir, si $T \in C^m(U \times V)$ implica que $R \in C^m(B_\rho(x_0))$. [5, p. 150]*

Demostración.
Sea $L = T_y(x_0, y_0)$ y $X_0 = X \times Y$, defínase

$$\begin{aligned} G : U \times V &\longrightarrow X_0 \\ (x, y) &\longmapsto G(x, y) = (x, L^{-1}T(x, y)) \end{aligned}$$

por lo tanto si $T \in C^m(U \times V)$ entonces $R \in C^m(B_\rho(x_0))$ y además $G'(x_0, y_0)$ es un homeomorfismo sobre X_0 ya que

$$\begin{aligned} G'(x, y)(h, k) &= G(x + h, y + k) - G(x, y) \\ &= (x + h - x, L^{-1}T(x + h, y + k) - L^{-1}T(x, y)) \\ &= (h, L^{-1}(T(x + h, y + k) - T(x, y))) \\ &= (h, L^{-1}(T_x(x, y), T_y(x, y)(h, k))) \\ &= (h, L^{-1}(T_x(x, y)h + L^{-1}T_y(x, y)k) \end{aligned}$$

Dado que $L = T_y(x_0, y_0)$ entonces $L^{-1}T_y(x_0, y_0) = I$. Ahora evaluando la igualdad anterior en (x_0, y_0) se tiene

$$G'(x_0, y_0)(h, k) = (h, L^{-1}(T_x(x_0, y_0)h + k) \; .$$

En otras palabras $G^{-1}(x, 0) = (x, Rx)$ con R de la misma forma del Teorema 2.3. Así se puede aplicar el Teorema 2.4. $\square$

2.3. Teorema de Nash-Moser

Para lograr estar más cerca del resultado de Siegel aun es necesaria una generalización del teorema de la función implícita. Es posible ver el problema de los divisores pequeños como un Corolario de esta generalización para familias de espacios de Banach. En el presente estudio se sigue principalmente la prueba que se encuentra en [8, p. 59] .

Teorema 2.6. *Sean* $(\mathbb{E}_\lambda), (\mathbb{F}_\lambda), (\mathbb{G}_\lambda)$ *tres familias de espacios de Banach con* $\lambda \in (0,1]$ *y con normas crecientes, de esta mamera, si* $\nu \leq \lambda$ *entonces* $\|\cdot\|_\nu \leq \|\cdot\|_\lambda$. *Sea* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{E}_1 \times \mathbb{F}_1$ *y defínase para* $r > 0$ *lo siguiente* $\Omega_r^\lambda = B_r^\lambda(\overline{x}) \times B_r^\lambda(\overline{y})$, *donde* $B_r^\lambda(\overline{x})$ *es la bola centrada en* $\overline{x}$, *con radio r en* $\mathbb{E}_\lambda$, *análogamente para* $B_r^\lambda(\overline{y})$. *Sea* $\Phi : \Omega_r^\lambda \to \mathbb{G}_\lambda$ *una función* C^1 *con respecto a y, para todo* $\lambda \in (0,1]$ *y que satisface* $\Phi(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. *Se asume :*

1. $|\Phi(x,y) - \Phi(x,y') - \Phi_y(x,y')(y-y')|_{\lambda-\delta} \leq M\delta^{-2\alpha}\|y-y'\|_\lambda^2, \forall y' \in B_r^\lambda(\overline{y})$,
2. *Existe* $T(x,y) \in L(\mathbb{G}_\lambda, \mathbb{F}_\lambda)$ *tal que* $|T(x,y)|_{\lambda-\delta} \leq M\delta^{-\tau}|z|_\lambda$,
3. $|(\Phi_y(x,y)T(x,y) - I)z|_{\lambda-\delta} \leq M\delta^{-2(\alpha+\tau)}|z|_\lambda|\Phi(x,y)|_\lambda$,

donde $M \geq 1$, $\alpha \geq 0$, $\tau > 1$ *son constantes, y* $\delta \in (0, \lambda)$.

Se concluye que existe $C = C(M, \alpha, \tau) > 0$ *tal que para todo* $(x,y) \in \Omega_r^{\overline{\lambda}}$, *y también que para todo* $\overline{\lambda} \in (0,1]$ *con* $|\Phi(x,y)|_{\overline{\lambda}} \leq C\overline{\lambda}^{-2(\alpha+\tau)}$. *Así se tiene* $y_* = u(x) \in \mathbb{F}_{\frac{\overline{\lambda}}{2}}$ *satisface que*

$$\Phi(x, u(x)) = 0.$$

[8, p. 59]

Demostración. Primero se eligen las sucesiones adecuadas,

$$\lambda_n = \overline{\lambda}(1 + 2^{-n}), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

y también

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{2}(\lambda_n + \lambda_{n+1}).$$

Operando se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &= \frac{1}{2}(\frac{\overline{\lambda}}{2}(1 + 2^{-n}) + \frac{\overline{\lambda}}{2}(1 + 2^{-(n+1)})) \\ &= \frac{\overline{\lambda}}{2}\frac{1}{2}(2 + \frac{3}{2^{n+1}}) \\ &= \frac{\overline{\lambda}}{2}(1 + 3 \cdot 2^{-(n+2)}). \end{aligned}$$

Es preciso afirmar que $\lambda_0 = \overline{\lambda}$ y que $\lambda_n \to \frac{\overline{\lambda}}{2}$. En efecto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{\lambda}}{2}(1+2^{-n}) = \frac{\overline{\lambda}}{2}.$$

Para hacer más sencillas las cosas, se denotará $\Phi(y_n) = \Phi(x, y_n)$, $T(y_n) = T(x, y_n)$. Con esto la secuencia de iteración de Newton es la siguiente

$$\begin{cases} y_{n+1} & = y_n - T(y_n)\Phi(y_n) \\ y_0 & = y. \end{cases} \tag{2.1}$$

Se quiere probar:

(1)′ $y_n \in B_r^{\lambda_n}(\overline{y})$,

(2)′ sea $c_n = |\Phi(y_n)|_{\lambda_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\tau} c_n < \infty$,

(3)′ $\|y_{n+1} - y_n\|_{\mu_{n+1}} \leq M c_n (2^{(n+3)\tau} \overline{\lambda}^{-\tau})$.

Para probar (3)′ se necesita la iteración de Newton de la ecuación 2.1 y la hipótesis (2) donde $\lambda = \lambda_n$, $\delta = \lambda_n - \mu_{n+1} = \overline{\lambda} 2^{-(n+3)}$

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\|_{\mu_{n+1}} &= \|y_n - T(y_n)\Phi(y_n) - y_n\|_{\mu_{n+1}} \\ &= \|T(y_n)\Phi(y_n)\|_{\mu_{n+1}} \\ &\leq M(2^{(n+3)\tau}\overline{\lambda}^{-\tau})|\Phi(y_n)|_{\lambda_n} \\ &= M c_n (2^{(n+3)\tau}\overline{\lambda}^{-\tau}). \end{aligned}$$

Ahora se debe probar (2)′. Nuevamente por la ecuación 2.1 se tiene $y_{n+1} - y_n = -T(y_n)\Phi(y_n)$

$$\Phi(y_{n+1}) = [\Phi(y_{n+1}) - \Phi(y_n) - \Phi_y(x, y_n)(y_{n+1} - y_n)] - [\Phi_y(x, y_n)T(y_n) - I]\Phi(y_n).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} -\Phi(y_n) - \Phi_y(x, y_n)(y_{n+1} - y_n) &= \Phi_y(x, y_n)T(y_n)\Phi(y_n) - \Phi(y_n) \\ &= [\Phi_y(x, y_n)T(y_n) - I]\Phi(y_n). \end{aligned}$$

Por lo anterior, y usando la desigualdad triangular junto a las hipótesis (1) y (3) sin dejar atras que $\delta = \overline{\lambda} 2^{-(n+3)}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
c_{n+1} = |\Phi(y_{n+1})|_{\lambda_{n+1}} \leq & |\Phi(y_{n+1}) - \Phi(y_n) - \Phi_y(x, y_n)(y_{n+1} - y_n)|_{\lambda_{n+1}} \\
& + |[\Phi_y(x, y_n)T(y_n) - I]\Phi(y_n)|_{\lambda_{n+1}} \\
\leq & M(2^{(n+3)2\alpha}\overline{\lambda}^{-2\alpha})\|y_{n+1} - y_n\|_{\mu_{n+1}} \\
& + M(2^{(n+3)2(\alpha+\tau)}\overline{\lambda}^{-2(\alpha+\tau)})|\Phi(y_n)|^2_{\lambda_n} \\
= & M(2^{(n+3)}\overline{\lambda}^{-1})^{-2\alpha}\|y_{n+1} - y_n\|^2_{\mu_{n+1}} \\
& + M(2^{(n+3)}\overline{\lambda}^{-1})^{-2(\alpha+\tau)}c_n^2 \\
\leq & aq^n c_n^2,
\end{aligned}$$

donde $a = \overline{\lambda}^{-2(\alpha+\tau)}(M + M^3)q^3$ y $q = 4^{\alpha+\tau}$.

Sea

$$\alpha_n = aq^n c_n.$$

De manera directa para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la relación

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= aq^{n+1}c_{n+1} \\
&\leq aq^{n+1}(aq^n c_n^2) \\
&= a^2 q^{2n} c_n^2 \\
&= q\alpha_n^2.
\end{aligned}$$

Se elige un $k \in (1, 2)$, $\epsilon_0 \in (0, 1)$ que satisface $\epsilon_{n+1} = q\epsilon_n^k$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$q^{\frac{1}{k-1}}\epsilon_0 < 1.$$

Por lo tanto, como $\epsilon_n^k = q^k \epsilon_{n-1}^{k^2}$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1} &= q(q^k \epsilon_{n-1}^{k^2}) \\
&= q^{1+k}(\epsilon_{n-1}^{k^2}) \\
&= q^{1+k}(q^{k^2}\epsilon_{n-2}^{k^3}) \\
&= q^{1+k+k^2}(\epsilon_{n-2}^{k^3}) \\
&= q^{1+k+k^2+k^3}(\epsilon_{n-3}^{k^4}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{1+k+k^2+\cdots+k^n} \epsilon_0^{k^{n+1}} \\
&= q^{\frac{k^{n+1}-1}{k-1}} \epsilon_0^{k^{n+1}} \\
&= q^{-\frac{1}{k-1}} (q^{\frac{1}{k-1}} \epsilon_0)^{k^{n+1}} \quad < 1.
\end{aligned}
$$

Ahora, para un $c_0 = |\Phi(x,y)|_{\overline{\lambda}}$ suficientemente pequeño, y por elección que cumpla la condición $\alpha_0 = ac_0 \leq \epsilon_0$.

Para α_1,

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= q\alpha_0^2 \\
&= qa^2c_0^2 \leq q\epsilon_0^k.
\end{aligned}
$$

Para α_2,

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= q\alpha_1^2 \\
&= q^3\alpha_0^4 \leq q^3\epsilon_0^4 \\
&\leq q^3\epsilon_0^{k^2} \\
&= \epsilon_2.
\end{aligned}
$$

Así por inducción para todo $n \in \mathbb{N}$ se prueba que

$$
\alpha_n \leq \epsilon_n.
$$

Supongamos cierto $\alpha_n \leq \epsilon_n$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= q\alpha_n^2 \\
&\leq q\epsilon_n^2 \\
&\leq q\epsilon_n^k = \epsilon_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Ya que $\epsilon_n^k < \epsilon_n^2$ si $k > 2$. Como $\epsilon_n < 1$ si y solamente si para un ϵ_0 suficientemente pequeño, se tiene que $\epsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

En esta vía también se cumple

$$
c_{n+1} \leq \alpha_n c_n \leq \epsilon_n c_n.
$$

De manera inmediata $c_{n+1} \leq c_n$ pues $\epsilon_n < 1$ y $\alpha_n \leq \epsilon_n$, además $c_{n+1} \leq c_0\epsilon_n$. En cualquier caso ϵ_n converge a 0. Con esto (2)′ está demostrado.

Por último, se probará (1)′. Es cierto que

$$\begin{aligned}
\|y_{n+1} - y_0\|_{\mu_{n+1}} &\leq \sum_{j=0}^{n} \|y_{j+1} - y_j\|_{\mu_{j+1}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} Mc_j(2^{(j+3)\tau}\overline{\lambda}^{-\tau}) \\
&\leq a\sum_{j=0}^{n} c_j q^{\frac{j}{2}} \\
&\leq ac_0 \sum_{j=0}^{n} q^{\frac{j}{2}}.
\end{aligned}$$

Como la suma es finita, existe una constante $M_1 > 0$, tal que

$$\|y_{n+1} - y_0\|_{\mu_{n+1}} \leq ac_0M_1.$$

Si c_0 es tan pequeño como para permitir que

$$\|y_{n+1} - y_0\|_{\mu_{n+1}} < r - \|y - \overline{y}\|_{\overline{\lambda}} \quad \forall n,$$

se cumple también

$$\|y_n - y\|_{\lambda_n} \leq \|y_n - y\|_{\mu_n} < r - \|y - \overline{y}\|_{\lambda_n}.$$

Por lo tanto,

$$\|y_n - \overline{y}\|_{\lambda_n} \leq \|y_n - y\|_{\lambda_n} + \|y - \overline{y}\|_{\lambda_n} < r.$$

Es decir, $y_n \in B_r^{\lambda_n}(\overline{y})$ y (1)′ está probada.

Con (1)′, (2)′y (3)′ demostradas, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|y_{n+1} - y_n\|_{\frac{\overline{\lambda}}{2}} \leq M\overline{\lambda}^{-\tau}2^{3\tau}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n\tau}c_n < \infty.$$

Por lo tanto existe $y_* = u(x)$ tal que $y_n \to y_*$ en $\mathbb{F}_{\frac{\overline{\lambda}}{2}}$, y además

$$|\Phi(x, y_*)|_{\frac{\overline{\lambda}}{2}} \leq \lim_{n\to\infty} |\Phi(x, y_n)|_{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Así, $\Phi(x, y_*) = 0$. $\square$

CAPÍTULO 3

El Problema de los Divisores Pequeños

El problema de los divisores pequeños es atribuido a Siegel y es considerado vital en la mecánica celeste, aunque en realidad el resultado es obtenido por A. N. Kolmogorov y V. Arnold con respecto a un viejo problema en mecánica celeste. Es una pieza maestra en el análisis y las ideas similares ayudaron a resolver el problema de los divisores pequeños entre otros. más adelante J. Moser continuó con estudios sin el uso de la topología. El presente estudio se sigue de [8, p. 55].

3.1. Teorema de Siegel

Para una función dada f, analítica en una vecindad de 0 y que cumpla las condiciones iniciales $f(0) = 0$, $f'(0) = \sigma$, se debe encontrar cierta función u, también analítica en una vecindad de 0 y con condiciones iniciales $u(0) = 0$, y $u'(0) = 1$. Esta debe satisfacer

$$f(u(z)) = u(\sigma z). \tag{3.1}$$

En principio, se escribirá este problema en términos diferentes; esto con la intención de usar el Teorema de la Función Implícita como herramienta para afirmar la existencia de una solución.

Sea

$$\begin{aligned} f(z) &= \sigma z + \hat{f}(z) \\ u(z) &= z + \hat{u}(z). \end{aligned}$$

Así la ecuación 3.1 es equivalente a

$$\Phi(\hat{f}, \hat{u})(z) = \hat{f}(z + \hat{u}(z)) + \sigma \hat{u}(z) - \hat{u}(\sigma z) = 0. \tag{3.2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{f}, \hat{u}) &= \hat{f}(z + \hat{u}(z)) + \sigma \hat{u}(z) - \hat{u}(\sigma z) \\ &= f(z + \hat{u}(z)) - \sigma(z + \hat{u}(z)) + \sigma(u(z) - z)) - [u(\sigma z) - \sigma z] \\ &= f(u(z)) - \sigma(u(z)) + \sigma(u(z)) - \sigma z - u(\sigma z) + \sigma z \\ &= f(u(z)) - u(\sigma z) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con esto se construye una nueva función auxiliar Φ en una región determinada por $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $H(\Omega) = \{f : \ f \text{ es acotada y analítica en } \Omega\}$.

La función esta definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ H(\Omega) \times H(\Omega) &\longrightarrow H(\Omega) \\ (\hat{f}, \hat{u}) \quad &\longmapsto \Phi(\hat{f}, \hat{u}). \end{aligned}$$

Por otra parte $\Phi(\hat{f}, \hat{u})$ también es una función analítica sobre Ω definida así

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{f}, \hat{u}) : \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \Phi(\hat{f}, \hat{u})(z). \end{aligned}$$

Y además $\Phi(0,0) = 0$ ya que

$$\begin{aligned}\Phi(0,0) &= 0(z+0(z)) + \sigma 0(z) - 0(\sigma z)\\ &= 0+0-0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Con lo anterior se quiere aplicar el TFI sobre Φ, previamente $H(\Omega)$ debe cumplir las condiciones necesarias y esto es que sea un espacio de Banach. Primero $(H(\Omega), \mathbb{C})$ debe ser un espacio vectorial; segundo se debe ver que $H(\Omega)$ posee una Norma y por último que con dicha norma es una espacio completo.

Sean $f, g \in H(\Omega)$, se tiene que f y g se pueden expresar de la siguiente manera

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \quad ; \quad g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j.$$

Así

$$(f+g)(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) z^i.$$

Es decir, $f + g \in H(\Omega)$. Ahora sea $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\lambda f(z) &= \lambda \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda a_i z^i.\end{aligned}$$

Esta última serie converge si y solo si la serie que representa a $f(z)$ también converge. Esto sucede pues $f \in H(\Omega)$, así $\lambda f \in H(\Omega)$. La norma definida en $H(\Omega)$ es

$$\begin{aligned}\| \quad \| : H(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ f &\longmapsto \sup_{z\in\Omega} |f(z)|.\end{aligned}$$

Para comprobar que esta bien definida primero se tiene que $|\cdot|$ es el módulo en $\mathbb{C}$ y segundo que f es analítica y acotada sobre Ω. De este modo, $\|\cdot\|$ esta bien definida pues $\sup_{z\in\Omega} |f(z)|$ existe. Aun falta probar las propiedades que hacen de esta una norma.

Se verá que para f arbitraria $\|f\| \geq 0$. En efecto, para toda $f \in H(\Omega)$

$$\|f\| = \sup_{z\in\Omega} |f(z)| \geq 0$$

pues $|\cdot|$ es norma sobre $\mathbb{C}$ y se tiene que para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$; por lo tanto $\sup |f(z)| \geq 0$ con $z \in \Omega$.

Como segunda condición se tiene que comprobar $\|f\| = 0$ si y solo si $f = 0$. Supóngase $\|f\| = 0$, así

$$\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = 0.$$

Es decir, $|f(z)| = 0$ para todo $z \in \Omega$. Entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, así $f = 0$.

Recíprocamente si $f = 0$ es obvio que $|f(z)| = 0$ para todo $z \in \Omega$.

Es decir, $\sup_{z\in\Omega} |f(z)| = 0$, así $\|f\| = 0$.

Adicionalmente, sea $c \in \mathbb{C}$

$$\|cf\| = \sup_{z\in\Omega} |cf(z)| = |c| \sup_{z\in\Omega} |f(z)| = |c|\|f\|.$$

Falta observar que se cumple la desigualdad triangular para $\|\cdot\|$. Sean $f, g \in H(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|f + g\| &= \sup_{z\in\Omega} |(f + g)(z)| \\
&= \sup_{z\in\Omega} |f(z) + g(z)| \\
&\leq \sup_{z\in\Omega} (|f(z)| + |g(z)|) \\
&\leq \sup_{z\in\Omega} |f(z)| + \sup_{z\in\Omega} |g(z)| \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

Así, por todo lo que se demostró $\|\cdot\|$ es una norma sobre $H(\Omega)$.

Una vez más, aún falta demostrar que $H(\Omega)$ es completo y con esto se cumplen todas las condiciones necesarias para que este sea un espacio de Banach.

Sea $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy con $f_n \in H(\Omega)$ para $n \in \mathbb{N}$. Sucede que para un $z \in \Omega$ fijo la sucesión $(f_n(z))_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, ya que $\mathbb{C}$ es completo esta sucesión posee un limite que se denotará por $f(z)$. De esta manera para cada $z \in \Omega$ se tiene que $f_n(z) \longrightarrow f(z)$.

Sea $\epsilon > 0$ fijo y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$ entonces para cada $z \in \Omega$ se cumple que $|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$. Como $f_n(z) \longrightarrow f(z)$, así cuando $m \longrightarrow \infty$, la desigualdad anterior se reescribe como sigue $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para $n > N$, así $\|f_n - f\| \longrightarrow 0$. Con esto $(f_n) \longrightarrow f$.

Se cumple que f es acotada, es posible encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$ entonces para todo $z \in \Omega$ tal que $|f_n(z) - f_m(z)| < 1$ se tiene que $|f_n(z) - f(z)| < 1$ por desigualdad triangular

$$||f_n(z)| - |f(z)|| \leq |f_n(z) - f(z)| < 1.$$

Así para $n > N$

$$||f(z)|| \leq 1 + \sup_{z \in \Omega} |f_n(z)|.$$

Como último paso falta comprobar que f debe ser analítica. Como $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy y cada $f_n \in H(\Omega)$ entonces se cumple que si $\gamma \subseteq \Omega$ es una curva rectificable cerrada se tiene

$$f_n(z) = \oint_\gamma \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Por la convergencia uniforme se cumple también que

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma f(z) &= \oint_\gamma \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi \\
&= \lim_{n \to \infty} \oint_\gamma \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por consecuencia del Teorema de Morera f es analítica y por lo tanto $H(\Omega)$ es un espacio de Banach. El Teorema de Morera se puede encontrar en [1]

Ahora es posible usar el TFI sobre Φ, antes se probó que $\Phi(0,0) = 0$ ahora derivando a Φ con respecto a u se va a calcular $\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})$ por medio de la derivada de Frechet

$$\begin{aligned}
\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})h &= \Phi(\hat{f}, \hat{u} + h)(z) - \Phi(\hat{f}, \hat{u})(z) \\
&= \hat{f}(z + (\hat{u} + h)(z)) + \sigma((\hat{u} + h)(z)) - (\hat{u} + h)(\sigma z) \\
&- [\hat{f}(z + \hat{u}(z)) + \sigma(\hat{u}(z)) - \hat{u}(\sigma z)] \\
&= \hat{f}(z + (\hat{u} + h)(z)) - \hat{f}(z + \hat{u}(z)) + \sigma(h(z)) - h(\sigma z) \\
&= \hat{f}'(z + \hat{u}(z))h(z) + \sigma(h(z)) - h(\sigma z) \\
&= \hat{f}'(z + \hat{u}(z))h + o(h). \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Con esto es fácil determinar si $\Phi_{\hat{u}}(0,0)$ es inyectiva. Primero $\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u}) \in \mathcal{L}(H(\Omega), H(\Omega))$ así si se evalúa en cierto $h \in H(\Omega)$ esto implica que $\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})h \in H(\Omega)$, entonces para saber cuando $\Phi_{\hat{u}}(0,0)h(z) = 0$ determinará en que casos es inyectiva.

$$\Phi_{\hat{u}}(0,0)h(z) = \hat{0}'(z + \hat{0}(z))h(z) + \sigma(h(z)) - h(\sigma z) = 0.$$

De esta mamera, cuando $\sigma(h(z)) - h(\sigma z) = 0$ se cumpla $\Phi_{\hat{u}}(0,0)$ es inyectiva. Si $\sigma = e^{2i\pi\tau}$ el problema a resolver se convierte en

$$e^{2i\pi\tau}h(z) - h(e^{2i\pi\tau}z) = 0. \qquad (3.4)$$

Si $\tau = 1$ la ecuación 3.4 se convierte en $e^{2i\pi}h(z) - h(e^{2i\pi}z) = 0$ esto es solo una rotación de 360° grados, así se obtiene $\ker(\Phi_{\hat{u}}(0,0)) = H(\Omega)$.

Ahora si $\tau = k$ para $k \in \mathbb{Z}$ la ecuación 3.4 siempre se reduce a una rotación o múltiples rotaciones de 2π, de cualquier manera siempre se cumple que

$$\ker(\Phi_{\hat{u}}(0,0)) = H(\Omega).$$

Esto aún no determina todos los casos, si $\tau = \frac{1}{q}$ con $q \in \mathbb{Z}$, la ecuación 3.4 empieza a desenvolver distintos conjuntos donde $\Phi_{\hat{u}}(0,0)$ es inyectiva, si $q = 2$ se obtiene

$$e^{i\pi}h(z) - h(e^{i\pi}z) = 0.$$

Esto se reduce a encontrar las funciones $h \in H(\Omega)$ tal que cumplen la condición anterior $h(z) = -h(-z)$, en otras palabras que h sea una función impar. De este modo, si $\tau = \frac{1}{2}$ el $\ker(\Phi_{\hat{u}}(0,0))$ son las funciones impares.

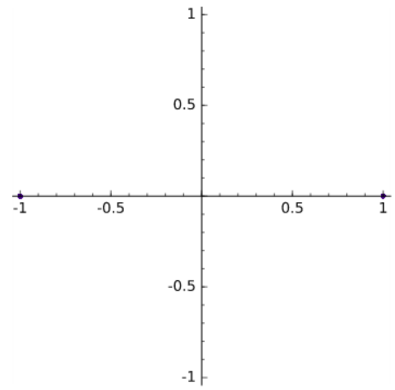

Figura 3.1: Caso $\tau = \frac{1}{q}$ y $q = 2$

No es sencillo describir de manera explicita el conjunto $\ker(\Phi_{\hat{u}}(0,0))$, para ver esto basta considerar más casos si $q = 5$, la ecuación 3.4 se escribe

$$e^{\frac{2i\pi}{5}} h(z) - h(e^{\frac{2i\pi}{5}} z) = 0.$$

Una representación gráfica muestra el problema para $q = 5$ y $q = 17$ respectivamente.

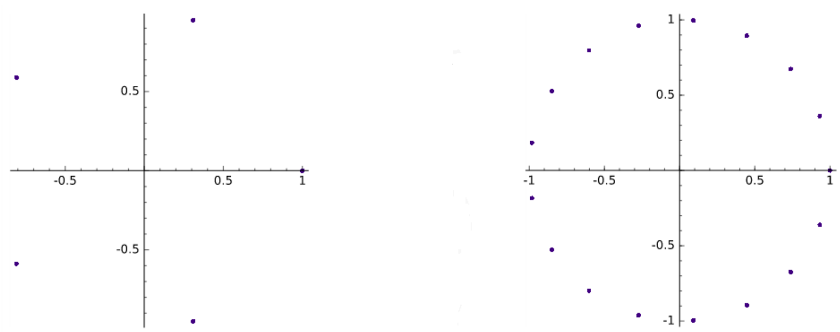

Figura 3.2: Casos $q = 5$ y $q = 17$ con $\tau = \frac{1}{q}$

Por lo anterior, $\ker(\Phi_{\hat{u}}(0,0)) \neq \{0\}$ cuando $\tau \in \mathbb{Q}$. Si $\tau \in \mathbb{I}$ sucede que $\Phi_{\hat{u}}(0,0) = \{0\}$, en otras palabras, es inyectiva. Si se escribe

$$\hat{v}(z) = \sum_{j=2}^{\infty} v_j z^j \,, \quad \hat{h}(z) = \sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j \,.$$

Esto es posible pues si $u \in H(\Omega)$ y cumplen las condiciones del problema, $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ se obtendrá siempre que $u_0 = u_1 = 0$; razón por la cual las sumas empiezan desde $j = 2$.

Si $\tau = \sqrt{2}$ el problema gráficamente se comporta de la siguiente manera.

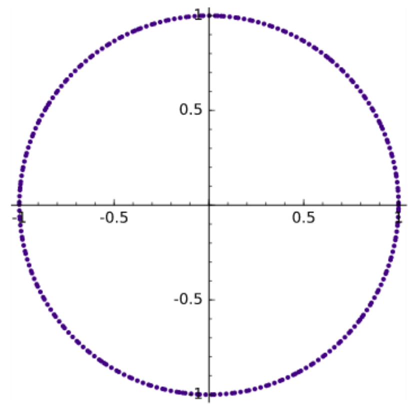

Figura 3.3: Caso $\tau = \sqrt{2}$

Ahora la ecuación

$$\hat{v} = \Phi_{\hat{u}}(0,0)\hat{h} \tag{3.5}$$

tiene una única solución siempre que $\tau \in \mathbb{I}$.

Una vez más se necesita $\Phi_{\hat{u}}(0,0)h(z) = \sigma(h(z)) - h(\sigma z)$ para reemplazar en la ecuación 3.5

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{\infty} v_j z^j &= \sigma(h(z)) - h(\sigma z)\\ &= \sigma(\sum_{j=2}^{\infty} h_j z^j) - \sum_{j=2}^{\infty} h_j(\sigma z)^j\\ &= \sum_{j=2}^{\infty}(\sigma h_j - h_j\sigma^j)z^j\end{aligned}$$

De esta última igualdad se obtienen $v_j = \sigma h_j - h_j\sigma^j$ y los términos de forma explícita para la solución con $j = 2, 3, \cdots$ son

$$\frac{v_j}{\sigma - \sigma^j} = h_j. \tag{3.6}$$

Si es posible encontrar soluciones determinadas por la ecuación 3.6, pero el denominador anterior tiende a cero para cierta subsucesión, esto permite afirmar que la inversa de $\Phi_{\hat{u}}(0,0)$ no es acotada.

Por el teorema de aproximación diofántica, existe una subsucesión de σ^{j_n} que tiende a σ. Cuando $\tau \in \mathbb{Q}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^k = \sigma$. En esta situación no hay soluciones pues $\Phi_{\hat{u}}(0,0)$ no es invertible. Cuando $\tau \in \mathbb{I}$ la situación cambia, pues $\Phi_{\hat{u}}(0,0)$ es invertible, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^k = \sigma$.

Un número real τ es del tipo (b, ν) con $b > 0$ y $\nu > 2$ si

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{b}{q^\nu} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{3.7}$$

De hecho para casi todo número real τ existen (b, ν) que dependen de τ, de tal manera que τ es del tipo (b, ν). Este tipo de números se definió en (1.3).

En efecto, para (b, ν) dados y fijando un q, el conjunto de todos los números reales $\tau \in [0, 1]$ tales que la ecuación 3.7 se cumple se denotará por

$$E_{b,\nu,q} = \{\tau \in [0,1] \ : \ \left|\tau - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{b}{q^\nu} \ \forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

Análogamente los números reales que no cumplen la ecuación 3.7 por el conjunto

$$F_{b,\nu,q} = [0,1] \setminus E_{b,\nu,q} = \{\tau \in [0,1] \ : \ \left|\tau - \frac{p}{q}\right| < \frac{b}{q^\nu} \quad \text{para cierto } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

De aquí se obtiene

$$-\frac{b}{q^\nu} < \tau - \frac{p}{q} < \frac{b}{q^\nu}.$$

Sumando a ambos lados $\frac{p}{q}$ y operando

$$-\frac{b}{q^\nu} + \frac{p}{q} < \tau < \frac{b}{q^\nu} + \frac{p}{q}$$
$$\frac{-b + pq^{\nu-1}}{q^\nu} < \tau < \frac{b + pq^{\nu-1}}{q^\nu}.$$

Así la longitud del intervalo para cada p y para $\tau \in F_{b,\nu,q}$ es $\frac{2b}{q^\nu} = 2bq^{-\nu}$. Existirán tantos posibles p como q, y como q es fijo, el conjunto donde la ecuación 3.7 no se cumple posee una medida menor que $2bq^{-\nu+1}$.

Posteriormente, el conjunto de todos los números reales τ tales que la ecuación 3.7 no se cumple posee una medida menor o igual a $2b\sum q^{-\nu+1} < \infty$, con $\nu \geq 2$ y como b puede ser arbitrariamente pequeño, esta medida tiende a cero para el b adecuado. En este orden de ideas, casi todo número real τ es del tipo (b, ν). En otras palabras $\tau \in \mathbb{I}$, el exponente de σ, no es un número de Liouville.

Supóngase que $\sigma = e^{2\pi i\tau}$ y τ es del tipo (b, ν). Entonces

$$
\begin{aligned}
|\sigma - \sigma^j| &= \left|e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi ij\tau}\right| \\
&= \left|e^{2\pi i\tau}(1 - e^{2\pi ij\tau})\right| \\
&= |e^{2\pi i\tau}||(1 - e^{2\pi ij\tau})| \\
&= |1 - e^{2\pi ij\tau}| \\
&= |e^{2\pi ij\tau} - 1|.
\end{aligned}
$$

Además usando que $p \in \mathbb{Z}$ el valor de $e^{-2\pi ip} = 1$ y con esto se cumple la siguiente identidad

$$
\begin{aligned}
|e^{2\pi i(j-1)(\tau - \frac{p}{j-1})} - 1| &= |e^{2\pi i\tau}e^{2\pi ip} - 1| \\
&= |e^{2\pi ij\tau} - 1|.
\end{aligned}
$$

De las igualdades anteriores

$$
\begin{aligned}
|\sigma - \sigma^j| &= |e^{2\pi i(j-1)(\tau - \frac{p}{j-1})} - 1| \\
&= |\cos(2\pi(j-1)(\tau - \frac{p}{j-1})) + i\sin(2\pi(j-1)(\tau - \frac{p}{j-1})) - 1|.
\end{aligned}
$$

El objetivo es proporcionar una cota inferior adecuada para $|\sigma - \sigma^j|$; para esto usando que $|x + iy| \geq |y|$ en la última igualdad se conoce una primera cota

$$
\begin{aligned}
|\sigma - \sigma^j| &\geq \left|\sin(2\pi(j-1)(\tau - \frac{p}{j-1}))\right| \\
&= \frac{2}{\pi}2\pi(j-1)\left|\tau - \frac{p}{j-1}\right|
\end{aligned}
$$

Esto para valores de x muy pequeños pues $\sin(x) \approx x$ en dichos valores.

Como τ es del tipo (b, ν) y la ecuación 3.7 aun se cumple, reemplazando en la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}|\sigma - \sigma^j| &\geq 4(j-1)\left|\tau - \frac{p}{j-1}\right| \\ &\geq 4\frac{b}{(j-1)^{\nu-1}}.\end{aligned}$$

Esta relación implica que la cota superior adecuada es

$$\frac{1}{|\sigma - \sigma^j|} \leq \frac{j^{\nu-1}}{4b}.$$

En este caso, por la ecuación 3.6 si $\hat{v}$ tiene un radio de convergencia r, $\hat{h}$ solo puede tener un radio de convergencia más pequeño.

En otras palabras, se introduce la familia de espacios de Banach:

$$A(r) = \{\hat{h}(z)|\hat{h} \text{ acotada y analítica en } |z| < r, \hat{h}(0) = \hat{h}'(0) = 0\}.$$

Con la norma

$$|\hat{h}| = \sup_{|z|<r} |\hat{h}(z)|.$$

Anteriormente se demostró que las funciones acotadas y analíticas son un espacio de Banach, ahora falta ver que las funciones que cumplen las condiciones iniciales $\hat{h}(0) = \hat{h}'(0) = 0$ con esa norma también son un espacio de Banach. Para esto falta ver que $\sup_{|z|<r} |\hat{h}(z)|$ si es una norma y que $A(r)$ es un espacio vectorial completo.

Ya se demostró que $H(\Omega)$ es de Banach. Si se define a $\Omega_\lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq \lambda\}$, la relación de contenencia entre los espacios es la siguiente, $A(\lambda) \subseteq H(\Omega_\lambda)$. Solamente falta ver que $A(\lambda)$ es un subespacio cerrado en $H(\Omega_\lambda)$.

Sea $y^* \in H(\Omega_\lambda)$ un punto de acumulación de $A(\lambda)$. Entonces existe una sucesión (s_n) de elementos en $A(\lambda)$ que posee una subsucesión (s_{n_k}) la cual converge a y^*, como esta converge, debe hacerlo puntualmente para cada $z \in \Omega_\lambda$. De modo que, para todo $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}|s_{n_k}(0) - y^*(0)| &< \epsilon \\ |y^*(0)| &< \epsilon.\end{aligned}$$

Con esto $|y^*(0)| = 0$ así $y^*(0) = 0$.

Nuevamente, por la formula de la integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} y^{*'}(0) &= \int_{|z|<r} \frac{y^*(\beta)}{\beta^2} d\beta \\ &= \int_{|z|<r} \lim_{n_k \to \infty} \frac{s_{n_k}(\beta)}{\beta^2} d\beta, \end{aligned}$$

por la convergencia uniforme,

$$y^{*'}(0) = \lim_{n_k \to \infty} \int_{|z|<r} \frac{s_{n_k}(\beta)}{\beta^2} d\beta.$$

Por último

$$y^{*'}(0) = \lim_{n_k \to \infty} s'_{n_k}(0) = 0.$$

Con esto, $y^* \in A(r)$, por lo tanto, es un espacio de Banach. Además $|z|^j < (r-\delta)^j$ y

$$\begin{aligned} |v_j| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{v(z)}{z^{j+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |v|_r \int_{|z|=r} \frac{1}{z^{j+1}} dz \\ &\leq |v|_r r^{-j}. \end{aligned}$$

Entonces se tiene que para todo $\hat{v} \in A(r)$

$$\begin{aligned} |\Phi_{\hat{u}}(0,0)^{-1} \hat{v}|_{r-\delta} &\leq \sup_{|z|<r-\delta} \sum_{j=2}^{\infty} \left| \frac{v_j z^j}{\sigma - \sigma^j} \right| \\ &\leq \frac{1}{4b} \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} j^{\nu-1} (r-\delta)^j |v_j| \\ &\leq \frac{1}{4b} |v|_r \sum_{j=2}^{\infty} j^{\nu-1} r^{-j} (r-\delta)^j \\ &\leq \frac{1}{4b} |v|_r \sum_{j=2}^{\infty} j^{\nu-1} \left(1 - \frac{\delta}{r} \right)^j. \end{aligned}$$

Aun falta encontrar una cota superior de $\sum_{j=2}^{\infty} j^{\nu-1}\left(1-\frac{\delta}{r}\right)^{j}$. Por el criterio de convergencia de la integral se quiere obtener una cota para la integral impropia con esto véase lo siguiente

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{\nu-1}\left(1-\frac{\delta}{r}\right)^x dx &= \int_0^\infty x^{\nu-1}e^{x\ln(1-\frac{\delta}{r})}dx\\ &= \int_0^\infty \frac{1}{-\ln^{\nu-1}(1-\frac{\delta}{r})}(-\ln(1-\frac{\delta}{r}))^{\nu-1}x^{\nu-1}e^{-(-x\ln(1-\frac{\delta}{r}))}dx.\end{aligned}$$

Realizando la siguiente sustitución $u=-x\ln(1-\frac{\delta}{r})$, además $du=-\ln(1-\frac{\delta}{r})dx$ y con esto reemplazando en la ecuación anterior

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{\nu-1}\left(1-\frac{\delta}{r}\right)^x dx &= \int_0^\infty \frac{1}{\ln^{\nu}(1-\frac{\delta}{r})}u^{\nu-1}e^{-u}du\\ &= \frac{1}{\ln^{\nu}(1-\frac{\delta}{r})}\Gamma(\nu).\end{aligned}$$

Ahora, con la cota encontrada por el criterio de la integral

$$\begin{aligned}|\Phi_{\hat{u}}(0,0)^{-1}\hat{v}|_{r-\delta} &\leq \frac{1}{4b}\frac{1}{\ln^{\nu}(1-\frac{\delta}{r})}\Gamma(\nu)|v|_r\\ &= (\delta^{\nu})(\delta^{-\nu})\frac{1}{4b}\frac{1}{\ln^{\nu}(1-\frac{\delta}{r})}\Gamma(\nu)|v|_r\\ &= \frac{\Gamma(\nu)\delta^{\nu}}{4b\ln^{\nu}(1-\frac{\delta}{r})}\delta^{-\nu}|v|_r\\ &\leq \frac{\Gamma(\nu)r^{\nu}}{4b\ln^{\nu}(1-\frac{\delta}{r})}\delta^{-\nu}|v|_r\\ &= C\delta^{-\nu}|v|_r.\end{aligned}$$

Con $C=C(\nu,r)$ una constante.

Escribir de manera explicita $\Phi_{\hat{u}}(\hat{f},\hat{u})^{-1}$ es quizás demasiado complicado, el objetivo es encontrar un candidato adecuado que se aproxime a esta inversa como reemplazo. Adicionalmente, la aproximación debe coincidir en la velocidad de convergencia.

Para esto, primero se tiene de la ecuación 3.3 que

$$\Phi_{\hat{u}}(\hat{f},\hat{u})\hat{v} = \hat{f}'(z+\hat{u}(z))\hat{v}(z)+\sigma(\hat{v}(z))-\hat{v}(\sigma z). \tag{3.8}$$

Y por regla de la cadena en la ecuación 3.2

$$(\Phi(\hat{f}, \hat{u}))'(z) = \hat{f}'(z + \hat{u}(z))(1 + \hat{u}'(z)) + [\sigma\hat{u}'(z) - \sigma\hat{u}'(\sigma z)].$$

Despejando $\hat{f}'(z + \hat{u}(z))$ en esta última igualdad

$$\hat{f}'(z + \hat{u}(z)) = \frac{(\Phi(\hat{f}, \hat{u}))'(z) - (\sigma\hat{u}'(z) - \sigma\hat{u}'(\sigma z))}{(1 + \hat{u}'(z))}$$

y reemplazando en (2.7)

$$\begin{aligned}
\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})\hat{v}(z) &= \frac{(\Phi(\hat{f}, \hat{u}))'(z) - (\sigma\hat{u}'(z) - \sigma\hat{u}'(\sigma z))}{(1 + \hat{u}'(z))}\hat{v}(z) + \sigma(\hat{v}(z)) - \hat{v}(\sigma z) \\
&= \frac{(\Phi(\hat{f}, \hat{u}))'(z)\hat{v}(z) - (\sigma\hat{u}'(z) - \sigma\hat{u}'(\sigma z))\hat{v}(z) + (\sigma(\hat{v}(z)) - \hat{v}(\sigma z))(1 + \hat{u}'(z))}{(1 + \hat{u}'(z))} \\
&= \frac{(\Phi(\hat{f}, \hat{u}))'(z)\hat{v}(z)}{1 + \hat{u}'(z)} + \frac{\sigma\hat{v}(z)(\hat{u}'(\sigma z) + 1) - (1 + \hat{u}'(z))\hat{v}(\sigma z)}{1 + \hat{u}'(z)}.
\end{aligned}$$

Escribiendo esto sin evaluar sobre z

$$\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})\hat{v} = \frac{(\Phi(\hat{f}, \hat{u}))'\hat{v}}{1 + \hat{u}'} + \frac{\sigma\hat{v}(\hat{u}' \circ \sigma + 1) - (1 + \hat{u}')(\hat{v} \circ \sigma)}{1 + \hat{u}'}. \tag{3.9}$$

También se tiene

$$\begin{aligned}
(1 + \hat{u}' \circ \sigma)\Phi_{\hat{u}}(0, 0)\left(\frac{\hat{v}}{1 + \hat{u}'}\right) &= (1 + \hat{u}' \circ \sigma)\left[\frac{\sigma\hat{v}}{1 + \hat{u}'} - \frac{\hat{v}}{1 + \hat{u}'} \circ \sigma\right] \\
&= (1 + \hat{u}' \circ \sigma)\left[\frac{\sigma\hat{v}(1 + \hat{u}' \circ \sigma) - (\hat{v} \circ \sigma)(1 + \hat{u}')}{(1 + \hat{u}')(1 + \hat{u}' \circ \sigma)}\right] \\
&= \frac{\sigma\hat{v}(\hat{u}' \circ \sigma + 1) - (1 + \hat{u}')(\hat{v} \circ \sigma)}{1 + \hat{u}'}.
\end{aligned}$$

Reemplazando la igualdad anterior en 3.9

$$\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})\hat{v} = \frac{\hat{v}}{1 + \hat{u}'}\Phi(\hat{f}, \hat{u})' + (1 + \hat{u}' \circ \sigma)\Phi_{\hat{u}}(0, 0)\left(\frac{\hat{v}}{1 + \hat{u}'}\right). \tag{3.10}$$

Con esto, el candidato para ser la aproximación inversa es

$$T(\hat{f}, \hat{u})\hat{h} = (1 + \hat{u}')\Phi_{\hat{u}}(0, 0)^{-1}\left(\frac{\hat{h}}{1 + \hat{u}' \circ \sigma}\right).$$

con $\hat{v}(z) = (1 + \hat{u}'(z))\hat{h}(z)$.

Aplicando $T(\hat{f}, \hat{u})\hat{h}$ en (2.9) y restando a ambos lados $\hat{h}$

$$\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})T(\hat{f}, \hat{u})\hat{h} - \hat{h} = \Phi(\hat{f}, \hat{u})'\Phi_{\hat{u}}(0,0)^{-1}\left(\frac{\hat{h}}{1 + \hat{u}' \circ \sigma}\right).$$

Volviendo a la ecuación 3.2 y una vez más usando la formula de la integral de Cauchy

$$\begin{aligned}
|\Phi(\hat{f}, \hat{u})'|_{r-\delta} &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<r-\delta} \frac{\left[\hat{f}(\zeta + \hat{u}(\zeta)) + \sigma\hat{u}(\zeta) - \hat{u}(\sigma\zeta)\right] d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|<r-\delta} \frac{|\Phi(\hat{f}, \hat{u})||d\zeta|}{|\zeta - z|^2} \\
&\leq \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(r-\delta)^2} \int_{|z|<r-\delta} |\Phi(\hat{f}, \hat{u})||d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(r-\delta)^2} |\Phi(\hat{f}, \hat{u})|_r \int_{|z|<r-\delta} |d\zeta| \\
&= \frac{1}{(r-\delta)} |\Phi(\hat{f}, \hat{u})|_r.
\end{aligned}$$

Como es analítica y por la desigualdad anterior

$$|\Phi(\hat{f}, \hat{u})'|_{r-\delta} = \sup_{|z|<r-\delta} |\Phi(\hat{f}, \hat{u})'(z)| \leq \frac{1}{(r-\delta)} |\Phi(\hat{f}, \hat{u})|_r \leq C\delta^{-1} |\Phi(\hat{f}, \hat{u})|_r. \tag{3.11}$$

Esto siempre que $\frac{\delta}{r-\delta} \leq C(\nu, r) = C$.

Ahora tomando $\gamma \in (0, 1)$, y $|\hat{u}'| < \gamma$, implica que $1 + \hat{u}' \circ \sigma \neq 0$ y también

$$|(\Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{u})T(\hat{f}, \hat{u}) - Id)\hat{h}|_{r-\delta} \leq C\delta^{-(\nu+1)} |\Phi(\hat{f}, \hat{u})|_r |\hat{h}|_r, \tag{3.12}$$

con $C = C(\gamma, \nu, r)$. De la misma manera,

$$|T(\hat{f}, \hat{u})\hat{h}|_{r-\delta} \leq C\delta^{-\nu} |\hat{h}|_r. \tag{3.13}$$

A continuación se introduce una nueva norma necesaria para los siguientes cálculos,

$$\|\hat{h}\|_r = \sup_{|z|<r} |\hat{h}'(z)|.$$

Esta norma está bien definida si y solo si $\hat{h}'(z)$ es acotada en $|z| < r$, razón por la cual sólo puede ser considerada en elementos que cumplan esta condición de lo contrario, el sup ni siquiera existiría. Además $\sup_{|z|<r} |\hat{h}'(z)| \geq 0$ para cualquier h que cumpla las condiciones.

Supóngase que $\sup_{|z|<r} |\hat{h}'(z)| = 0$, esto implica que $|\hat{h}'(z)| = 0$ para todo z tal que $|z| < r$. Así $\hat{h}'(z) = 0$ y $\hat{h}(z) = 0$ para todo z tal que $|z| < r$. De modo que $h = 0$. Recíprocamente si $h(z)$ para todo z tal que $|z| < r$ entonces $|\hat{h}'(z)| = 0$ y por lo tanto $\|\hat{h}\|_r = 0$.

La desigualdad triangular también se cumple

$$\begin{aligned}
\|\hat{h} + \hat{v}\|_r &= \sup_{|z|<r} |(\hat{h} + \hat{v})(z)| \\
&= \sup_{|z|<r} |\hat{h}(z) + \hat{v}(z)| \\
&\leq \sup_{|z|<r} (|\hat{h}(z)| + |\hat{v}(z)|) \\
&= \sup_{|z|<r} |\hat{h}(z)| + \sup_{|z|<r} |\hat{v}(z)| \\
&= \|\hat{h}\|_r + \|\hat{v}\|_r.
\end{aligned}$$

Nuevamente se hace una estimación, del error de $\Phi(\hat{f}, \hat{u}) - \Phi(\hat{f}, \hat{v}) - \Phi_{\hat{u}}(\hat{f}, \hat{v})(\hat{u} - \hat{v})$, con el fin de encontrar una cota adecuada; para esto usando la ecuación 3.2 se reescribe lo anterior como sigue

$$\begin{aligned}
&= \hat{f}(z + \hat{u}(z)) + \sigma\hat{u}(z) - \hat{u}(\sigma z) - \Big[\hat{f}(z + \hat{v}(z))\sigma\hat{v}(z) - \hat{v}(\sigma z)\Big] \\
&\quad - \Big[\hat{f}'(z + \hat{v}(z))(\hat{u}(z) - \hat{v}(z)) + \sigma(\hat{u}(z) - \hat{v}(z)) - ((\hat{u}(\sigma z) - \hat{v}(\sigma z)))\Big] \\
&= \hat{f}(z + \hat{u}(z)) - \hat{f}(z + \hat{v}(z)) - \hat{f}'(z + \hat{v}(z))(\hat{u}(z) - \hat{v}(z)) \\
&= \left(\int_0^1 \int_0^1 s\hat{f}''(z + \hat{v} + st(\hat{u}(z) - \hat{v}(z)))dtds\right)((\hat{u}(z) - \hat{v}(z)))^2.
\end{aligned}$$

Realizando la sustitución $u = z + \hat{v}(z) + st(\hat{u}(z) - \hat{v}(z))$ se tiene $du = s(\hat{u}(z) - \hat{v}(z))dt$

y reemplazando

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^1 \int_{z+\hat{v}(z)}^{z+\hat{v}(z)+s(\hat{u}(z))} \hat{f}''(u)duds\right)(\hat{u}(z)-\hat{v}(z)) \\
&= \left(\int_0^1 \left[\hat{f}'(u)|_{z+\hat{v}(z)}^{z+\hat{v}(z)+s(\hat{u}(z))}\right] ds\right)(\hat{u}(z)-\hat{v}(z)).
\end{aligned}
$$

Ahora evaluando en los correspondientes límites

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^1 \left[\hat{f}'(z+\hat{v}(z)+s(\hat{u}(z))) - \hat{f}'(z+\hat{v}(z))\right] ds\right)(\hat{u}(z)-\hat{v}(z)) \\
&= \left(\int_0^1 \left[\hat{f}'(z+\hat{v}(z)+s(\hat{u}(z)))\right] ds\right)(\hat{u}(z)-\hat{v}(z)) - \hat{f}'(z+\hat{v}(z))(\hat{u}(z)-\hat{v}(z)).
\end{aligned}
$$

Una vez más para resolver la integral se sustituye $p = z+\hat{v}(z)+s(\hat{u}(z)-\hat{v}(z))$ y posteriormente $dp = (\hat{u}(z)-\hat{v}(z))ds$,

$$
\begin{aligned}
&= \int_{z+\hat{v}(z)}^{z+\hat{u}(z)} \hat{f}'(p)dp - \hat{f}'(z+\hat{v}(z))(\hat{u}(z)-\hat{v}(z)) \\
&= \hat{f}(z+\hat{u}(z)) - \hat{f}(z+\hat{v}(z)) - \hat{f}'(z+\hat{v}(z))(\hat{u}(z)-\hat{v}(z)).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, se obtiene lo deseado. Usando la formula de Cauchy, si $f \in A(r)$ con $|f|_r < \gamma$,

$$
\begin{aligned}
|f''(z)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{|\zeta-z|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3} d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}|f|_r \int_{|\zeta-z|=R} \frac{1}{|\zeta-z|^3}|d\zeta| \\
&\leq \frac{2}{R^2}|f|_r.
\end{aligned}
$$

siempre que $0 < R \leq r-|z|$. Ahora la cota adecuada es la siguiente

$$
|\Phi(\hat{f},\hat{u}) - \Phi(\hat{f},\hat{v}) - \Phi_{\hat{u}}(\hat{f},\hat{v})(\hat{u}-\hat{v})| \leq \frac{2\gamma}{\delta^2}\|\hat{u}-\hat{v}\|_r^2. \tag{3.14}
$$

Corolario 3.3. *(Teorema de Siegel) Supóngase que τ es del tipo (b,ν), con $b > 0$ y $\nu > 2$. Sea $\sigma = e^{2\pi i\tau}$. Si $f(z) = \sigma z + \hat{f}(z)$ es una función analítica sobre $|z| < 1$, con las condiciones*

$\hat{f}(0) = \hat{f}'(0) = 0$, entonces existe γ, $r_0 \in (0,1)$ y una función analítica u sobre $|z| < \frac{3r_0}{4(1+\gamma)}$ tal que

$$\sup_{|z|<r_0} |\hat{f}(z)| \leq \gamma$$

y $f \circ u = u \circ \sigma$. [8, p. 61]

Demostración. Primero se deben introducir las familias de espacios de Banach: Sea $r > 0$,

$$A(r) = \{h(z)|h \text{ es acotada y analítica en } |z| < r, h(0) = h'(0) = 0\},$$

con la norma

$$|h|_r = \sup_{|z|<r} |h(z)|,$$

y

$$\hat{A}(r) = \{h(z) \in A(r)|h'(z) \text{ es acotada en } |z| < r\},$$

con la norma

$$\|h\|_r = \sup_{|z|<r} |h'(z)|.$$

De las familias de espacios de Banach mencionadas sólo falta comprobar que $\hat{A}(r)$ es cerrado con respecto a $A(r)$ para obtener que tambien es de Banach.

En efecto, tomando $s_n \in \hat{A}(r)$ una sucesión de Cauchy, existe una subsucesión $s_{n_k} \in \hat{A}(r)$ tal que $s_{n_k} \to y*$ y por resultados anteriores $y* \in A(r)$, de nuevo por la formula de la integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} y^{*'}(s) &= \int_{|z|<r} \frac{y^*(\beta)}{(\beta - s)^2} d\beta \\ &= \int_{|z|<r} \lim_{n_k \to \infty} \frac{s_{n_k}(\beta)}{(\beta - s)^2} d\beta. \end{aligned}$$

Por la convergencia uniforme,

$$y^{*'}(s) = \lim_{n_k \to \infty} \int_{|z|<r} \frac{s_{n_k}(\beta)}{(\beta - s)^2} d\beta.$$

Por último, como $s_{n_k} \in \hat{A}(r)$, $s_{n_k}(s)$ es acotada siempre que $|s| < r$,

$$y^{*'}(s) = \lim_{n_k \to \infty} s'_{n_k}(s) < \infty.$$

Con esto, $y^* \in \hat{A}(r)$, por lo tanto, es un espacio de Banach.

Ahora se debe tomar

$$X_\lambda = A(r_0), \quad Y_\lambda = \hat{A}(r_\lambda) \quad \text{y} \quad Z_\lambda = A(r_\lambda)$$

donde $\lambda \in (0,1]$, $r_\lambda = \frac{1+\lambda}{2}$, $\rho = \frac{r_0}{1+\lambda}$, $\gamma \in (0,1)$ se determinará. Sea

$$\Phi(\hat{f}, \hat{u})(z) = \hat{f}(z + \hat{u}(z)) + \sigma \hat{u}(z) - \hat{u}(\sigma z).$$

como en la ecuación 3.2. Sea $\overline{\lambda} = 1$ y para $\|\hat{f}\|_{A(r_0)} < \gamma$, $\|\hat{u}\|_{\hat{A}(\rho)} < \gamma$ se tiene

$$|\Phi(\hat{f}, \hat{u})| \leq \gamma + 2|\hat{u}|_{A(\rho)} \leq \gamma(1 + 2\rho).$$

Si $r_0 > 0$ es pequeño, se elige un $\gamma > 0$ también pequeño. Como todas las hipótesis del teorema 2.6 se cumplen. En efecto las ecuaciones 3.13, 3.12 y 3.11 cumplen las hipótesis (1), (2) y (3) respectivamente. La conclusión se obtiene del teorema 2.6, así la ecuación

$$\Phi(\hat{f}, \hat{u}) = 0$$

tiene una solución

$$\hat{u}(z) = z + \sum_{n \geq 2} u_n z^n.$$

□

CAPÍTULO 4

Conclusiones

- El Teorema de la Función Implícita es una herramienta elemental en el análisis no lineal, no sólo es útil para encontrar soluciones a problemas en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Sus extensiones pueden aplicarse a Topología Diferencial, Geometría Diferencial y la Teoría de Bifurcación entre otras.
- La primera intención siempre para afrontar un problema no lineal de manera simple es una aproximación lineal. Bajo esta idea una función inversa aproximada que sea lineal es el caso sencillo, las propiedades de linealidad son fundamentales para lograr afirmar la existencia de al menos una solución al problema no lineal, sin entrar en detalles en cuantas más posibles soluciones existan.
- La elección de una inversa aproximada adecuada determinará la efectividad del método, por esta razón aun si no se tiene una inversa acotada siempre se debe considerar una inversa aproximada que si sea acotada. Esta condición es vital para asegurar la existencia de cierta solución.

Bibliografía

[1] AHLFORS, L. *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1979.

[2] CAICEDO, J. F. *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá., 2005.

[3] CANUTO, C., AND TABACCO, A. *Mathematical Analysis II*. Springer-Verlag, 2010.

[4] DE PAULA, A., AND DE PAULA, J. *Química Física*. Editorial Medica Panamericana, 2013.

[5] DEIMLING, K. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, 1985.

[6] DONTCHEV, A., AND ROCKAFELLAR, R. *Implicit Functions and Solution Mappings: A View from Variational Analysis*. Springer-Verlag, 2009.

[7] KRANTZ, S., AND PARKS, H. *The Implicit Function Theorem: History, Theory, and Applications*. Springer-Verlag, 2013.

[8] KUNG-CHING, C. *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[9] MERINO, J. *Las vibraciones de la música*. Editorial Club Universitario, 2007.

[10] STEUDING, J. *Diophantine Analysis*. Chapman & Hall/CRC, 2005.