ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA A LA TEORÍA DE BIFURCACIÓN

Claudia Lorena Duarte Espitia

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

2015

ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA A LA TEORÍA DE BIFURCACIÓN

Claudia Lorena Duarte Espitia

Trabajo de Grado

Trabajo Dirigido por:

Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ

2015

Nota de aceptación

Firma
Nombre:
Jurado

Firma
Nombre:
Director

Bogotá, 9 de Junio del 2015

Dedicado a mi familia.

Agradecimientos

Este trabajo es la conclusión de cinco años y medio de estudio en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en los cuales me formé tanto académicamente como personalmente. Gracias a muchas personas que de alguna manera influyeron en mi vida.

Agradezco en primer lugar a mi mamá, por su ejemplo, apoyo y cariño; a Dios porque nunca me abandonó en el camino y a todos los maestros que contribuyeron en mi formación. En especial al profesor Arturo Sanjuán quien me brindó su apoyo, paciencia y comprención; al profesor Oriol Mora quien contribuyó de manera directa tanto a mi formación académica como personal. Estos dos profesores me hicieron ver la matemática de una modo diferente. Tanto así que no solo es mi profesión si no también mi pasión.

Índice general

Índice de figuras

Introducción

El Teorema de Función Implícita junto con el Teorema de la Función Inversa juegan un papel muy importante en muchas ramas de la matemática, sus aplicaciones comprenden áreas como el Álgebra, la Geometría Diferencial, Análisis Funcional, Ecuaciones Diferenciales, y muchas otras más. Su principal descubridor fue Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) quien se acercó al Teorema con mayor rigor, aunque en algunos escritos de otros matemáticos de la época se evidencian ideas muy cercanas, como la derivación implicita en el trabajo de Gottfried Leibniz e Isaac Newton [6, Preface] .

El teorema de la función implícita es muy importante en el análisis no lineal. Es por ello que en este trabajo estudiaremos algunas aplicaciones del teorema a esta área.

Una característica específica de análisis no lineal, es que su configuración teórica está estrictamente vinculada a las aplicaciones, especialmente las relacionadas con ecuaciones diferenciales. Es así como surge una de las teorías más importantes de esta área que es la *teoría de bifurcación* la cual estudia los de puntos de bifurcación y las propiedades globales y locales del conjunto de soluciones de una ecuación no lineal [9, Preface].

Los principales aportes a la teoría de bifurcación fueron realizados por Lyapunov y Schmidt en 1908, los trabajos de Krasnoselskii y su escuela en 1950, permitieron la consolidación de la teoría.

Esta área del análisis usa técnicas y métodos de muchos campos como Análisis funcional, Topología, Ecuaciones diferenciales entre otros. Sus resultados son de gran importancia ya que permiten solucionar problemas no lineales presentes en física, química, biología molecular, teoría de la aproximación, teoría de control, nanotecnología.

La Teoría de Bifurcación resulta ser muy interesante, pues permite conocer y estudiar la relación que tienen la Matemáticas con otras áreas del conocimiento, por tal razón en este trabajo que darán los conceptos básicos de la teoría, y algunas de sus aplicaciones.

Capítulo 1

Diferenciación

En este capítulo, se estudia la diferenciación en espacios normados, concepto necesario para la demostración del Teorema de la función implícita expuesto posteriomente y para el desarrollo de la teoría de Bifurcación, expuesta en el tercer capítulo.

1.1. Derivada de Fréchet

Primero se verá la definición de la diferencial en un punto para una función real con dominio real y luego se expondra las propiedades más importantes que cumple ésta, con el objetivo de definir la diferencial de una función entre espacios normados que vá cumplir las mismas propiedades.

Definición 1.1.1. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, f se dice diferenciable en a si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b,$$

se denota por $f'(a)$ al real b anterior, puesto que es único [3, p. 69].

En la definición anterior es importante que A sea un conjunto abierto, debido a que existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \delta\} \subseteq A$, así que, si $|h| < \delta$ para $h \in \mathbb{R}$ entonces $a + h \in A$.

Una forma equivalente de enunciar esta definición se da en la siguiente proposición:

Proposición 1.1.1. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto , $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$. f es diferenciable es a si y solamente si existen $b \in \mathbb{R}$ y r una función tales que*

$$f(a+h) = f(a) + bh + r(h), \qquad \textit{donde} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0. \tag{1.1}$$

Demostración. Supongamos que f es diferenciable en a, tomando $f'(a) = b$ en la definición anterior tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) = 0,$$

que es lo mismo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f'(a)h}{h} = 0.$$

Luego, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)h|}{|h|} < \epsilon,$$

si se define $r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$ por lo anterior tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0,$$

lo cual prueba la primera parte de la proposición.

Ahora supongamos que tenemos la segunda equivalencia, despejando $r(h)$ tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} \right| < \epsilon.$$

Simplificando

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \epsilon,$$

así que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Luego f es diferenciable en a [3, p. 70]. $\square$

Las siguientes dos proposiciones se acercan un poco más a lo que es la definición de la derivada de Fréchet. También permitirán concluir que la derivada de Fréchet y la derivada usual en $\mathbb{R}$ coinciden.

Nota 1.1.1. *Si definimos la aplicación L para $a \in R$ como*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto L(x) = ax, \end{aligned}$$

tenemos que es lineal y continua.

El Teorema de representacion de Riesz y lo anterior llevan a dar una equivalencia para la definición (1.1.1).

Proposición 1.1.2. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. f es diferenciable en a si y sólo si existen, una aplicación lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y una función $r(h)$, tales que*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + r(h), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0. \tag{1.2}$$

Demostración. Si f es diferenciable en a, existe $b = f'(a)$ y $r(h)$ que satisfacen (1.1), definamos $L(h) = b \cdot h$ para cada $h \in \mathbb{R}$, por la nota anterior tenemos que L es una aplicación lineal. Luego se satisface (1.2).

Por otro lado, si existe una aplicación lineal L y una aplicación r que satisfacen (1.2), por el Teorema de Representación de Riesz véase [7, p.188], L puede expresarse de manera única como $L(h) = c \cdot h$, para algún $c \in \mathbb{R}$, así que por la proposición (1.1.1) f es diferenciable en a y $f'(a) = c$ [3, p. 70]. □

Nota 1.1.2. *Como $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y $\mathbb{R}$ es de dimensión finita entonces L es continua.*

Las proposiciones anteriores que caracterizan a la diferencial de una función real en un punto, sugieren la siguiente definición, que es una extensión de la diferencial a una función definida entre espacios normados. En este contexto la diferencial en un punto es una aplicación lineal y continua que cumple las mismas propiedades de la diferencial habitual, entre ellas está la implicación de continuidad en el punto.

Definición 1.1.2 (Derivada de Fréchet)**.** *Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ espacios normados con norma notada en ambos por $\|\cdot\|$. Sea $U \subseteq \mathbf{X}$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbf{Y}$, $x \in U$. f se dice Fréchet diferenciable en x, si existe una aplicación lineal continua $L(x, \cdot) = L \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y una aplicación $r(x, h) = r(h)$, tales que*

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + r(h), \qquad \text{donde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0. \tag{1.3}$$

La aplicación $L(x, \cdot) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ es llamada la derivada de Fréchet de f en x y es denotada por $f'(x)$. Si f posee derivada de Fréchet en cada punto de U, la función $f' : U \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es llamada la derivada de Fréchet de f o la diferencial de f [3, p. 72].

Si f posee derivada de Fréchet en cada punto de U, y si la función $f' : U \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es continua en x_0, entonces se dice que f es continuamente diferenciable en x_0. Si f es continuamente diferenciable en cada punto de U, entonces se dice que f es continuamente diferenciable en U, y se denota por $f \in C^1(U, \mathbf{Y})$.

Nota 1.1.3. *De la definición se puede concluir que si f es diferenciable en x_0, entonces f es diferenciable en x_0 cuando las normas es $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ son reemplazdas por normas equivalentes.*

Ahora se verá que la derivada de Fréchet es única. Para lograr este objetivo primero se define convenientemente la función $\rho(h) = \frac{r(h)}{\|h\|}$, $\rho(0) = 0$. Debido a que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$ se tiene $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$, luego $\rho(h)$ es continua en 0.

Proposición 1.1.3. *Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ espacios normados, $U \subseteq \mathbf{X}$ abierto, $x \in U$,*

$$f : U \to \mathbf{Y}, \text{ diferenciable en el sentido de Fréchet en } x,$$

entonces la aplicación líneal continua $L = L(x, \cdot) = f'(x)$ en la definición (1.1.2), es única.

Demostración. Sean $T, L \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Supongamos que satisfacen la definición anterior. Como $x \in U$ y U es un conjunto abierto entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(x) = \{a \in \mathbf{X} : \|x - a\| < r\} \subset U$.

Si $h \in \mathbf{X}$ es tal que $\|h\| < r$, se tiene que $x + h \in U$ ya que $\|x - (x + h)\| = \|h\| < r$, luego

$$f(x + h) = f(x) + L(h) + r_1(h) = f(x) + T(h) + r_2(h),$$

donde $r_1(h), r_2(h)$ son los restos de L, T respectivamente. Sustituyendo por $\rho_1(h), \rho_2(h)$ de la nota anterior, se tiene que

$$f(x + h) = f(x) + L(h) + \rho_1(h)\|h\| = f(x) + T(h) + \rho_2(h)\|h\|,$$

donde $\lim_{h\to 0} \rho_i(h) = 0, \rho_i(0) = 0$, para $i = 1, 2$.

Sea $v \in \mathbf{X}$, si $v = 0$ es claro que $L(v) = T(v)$ por ser aplicaciones lineales, si $v \neq 0$ entonces para todo real t tal que $\|tv\| < r$, se obtiene que $x + tv \in U$. Luego para $h = tv$ con $t \neq 0$, deducimos que

$$f(x + tv) = f(x) + L(tv) + \rho_1(tv)\|tv\| = f(x) + T(tv) + \rho_2(tv)\|tv\|.$$

Así que

$$L(tv) - T(tv) = \rho_2(tv)\|tv\| - \rho_1(tv)\|tv\|,$$

luego

$$t(L(v) - T(v)) = \rho_2(tv)\|tv\| - \rho_1(tv)\|tv\|,$$
$$L(v) - T(v) = \frac{1}{t}\left(\rho_2(tv)\|tv\| - \rho_1(tv)\|tv\|\right).$$

Multiplicado por uno en la parte derecha de la ecuación tenemos

$$L(v) - T(v) = \frac{\|v\|}{t\|v\|}\left(\rho_2(tv)\|tv\| - \rho_1(tv)\|tv\|\right),$$

teniendo en cuenta el signo de t

$$L(v) - T(v) = \pm \frac{\|v\|}{\|tv\|}\left(\rho_2(tv)\,\|tv\| - \rho_1(tv)\,\|tv\|\right) \tag{1.4}$$
$$= \pm \|v\|\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right). \tag{1.5}$$

Si $t \to 0$ tenemos que $tv \to 0$, ya que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{\|v\|} > 0$ tal que si $|t| < \delta$ se tiene que

$$\|tv\| \leq |t|\,\|v\| < \delta\,\|v\| < \epsilon.$$

De esta manera tenemos que $\text{lím}_{t\to 0}\,\rho_i(tv) = 0$ para $i = 1, 2$, lo cual se debe a que ρ_i es continua en cero.

Como la parte izquierda de (1.5) no depende de t, entonces tomando el límite cuando $t \to 0$ tenemos

$$L(v) - T(v) = \pm \|v\| \lim_{t\to 0}\left(\rho_2(tv) - \rho_1(tv)\right) = 0.$$

Luego $L(v) = T(v)$ para todo $v \in \mathbf{X}$. Esto demuestra que la derivada de Fréchet para cada x en $\mathbf{X}$ es única [3, p. 74]. $\square$

Ejemplo 1.1.1. Sean $\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$ espacios normados, $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, si $f(x) = c$ entonces $f'(x) = \theta$ para todo $x \in \mathbf{X}$, donde la función θ es la función cero, en efecto,

$$f(x+h) = c = f(x) + 0 = f(x) + \theta(h).$$

Ejemplo 1.1.2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, entonces para cada $x \in \mathbf{X}$ y $h \in \mathbf{X}$ se tiene

$$T(x+h) = T(x) + T(h)$$

así que T es diferenciable para todo x y además $T'(x) = T$.

Ejemplo 1.1.3. Sean $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ espacios normados, $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ el espacio normado con $\|x\| = \text{máx}\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$ para $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{X}$. Sea $F \in \mathcal{L}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; \mathbf{Y})$ una aplicación bilineal continua. Entonces F es Fréchet diferencible en cada punto $x \in \mathbf{X}$ y $F'(x)$ es la función $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, definida por

$$T(h) = F(h_1, x_2) + F(x_1, h_2) \quad \text{para cada } h = (h_1, h_2) \in \mathbf{X}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} F(x+h) &= F(x_1 + h_1, x_2) + F(x_1 + h_1, h_2) \\ &= F(x_1, x_2) + F(h_1, x_2) + F(x_1, h_2) + F(h_1, h_2) \\ &= F(x) + T(h) + F(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Resta ver que T es una aplicación lineal continua y que $F(h_1, h_2)$ es $\circ(h)$. Veamos esto, sea $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned}
T(\alpha h + \beta k) &= F(\alpha h_1 + \beta k_1, x_2) + F(x_1, \alpha h_2 + \beta k_2) \\
&= F(\alpha h_1, x_2) + F(\beta k_1, x_2) + F(x_1, \alpha h_2) + F(x_1, \beta k_2) \\
&= \alpha F(h_1, x_2) + \beta F(k_1, x_2) + \alpha F(x_1, h_2) + \beta F(x_1, k_2) \\
&= \alpha(F(h_1, x_2) + F(x_1, h_2)) + \beta(F(k_1, x_2) + F(x_1, k_2)) \\
&= \alpha T(h) + \beta T(k).
\end{aligned}$$

Luego T es lineal en $\mathbf{X}$. T es una aplicación continua puesto que

$$\begin{aligned}
\|T(h)\| &= \|F(h_1, x_2) + F(x_1, h_2)\| \\
&= \|F(h_1, x_2)\| + \|F(x_1, h_2)\| \\
&= \|F\| \cdot \|h_1\| \cdot \|x_2\| + \|F\| \cdot \|x_1\| \cdot \|h_2\| \\
&\leq \|F\| \left(\|h_1\| \cdot \|x_2\| + \|x_1\| \cdot \|h_2\|\right) \\
&\leq 4 \|F\| \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} \max\{\|h_1\|, \|h_2\|\} \\
&= 4 \|F\| \|x\| \|h\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\|F(h_1, h_2)\| &\leq \|F\| \cdot \|h_1\| \cdot \|h_2\| \\
&\leq \|F\| \max\{\|h_1\|, \|h_2\|\} \max\{\|h_1\|, \|h_2\|\} \\
&= \|F\| \cdot \|h\|^2.
\end{aligned}$$

Luego $F(h_1, h_2) \in \circ(h)$. Por tanto F es Fréchet diferenciable y $F'(x) = T$ [10, p.169].

Ejemplo 1.1.4. Considérese el espacio normado $G = \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ de todas las aplicaciones lineales continuas de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{X}$. Considérese la aplicación

$$\begin{aligned}
f : G &\to G \\
L &\mapsto f(L) = L^2 = L \circ L
\end{aligned}$$

se vera que f es diferenciable en todo $L \in G$. En efecto, sea $L, H \in G$,

$$f(L + H) = (L + H)^2 = L^2 + HL + LH + H^2,$$

si se toma

$$\begin{aligned}
f'(L) : G &\to G \\
H &\mapsto f'(L)(H) = HL + LH
\end{aligned}$$

se verá que $f'(L)$ es lineal como función de H.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $T, H \in G$

$$\begin{aligned} f'(L)(\alpha T + \beta H) &= (\alpha T + \beta H)L + L(\alpha T + \beta H) \\ &= (\alpha T)L + (\beta H)L + L(\alpha T) + L(\beta H) \\ &= \alpha TL + \beta HL + \alpha LT + \beta LH \\ &= \alpha(TL + LT) + \beta(HL + LH) \\ &= \alpha f'(L)(T) + \beta f'(L)(H). \end{aligned}$$

Ahora la continuidad se deduce gracias a que $\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ es un espacio normado, así,

$$\begin{aligned} \left\| f'(L)(H) \right\| &= \|HL + LH\| \leq \|HL\| + \|LH\| \\ &\leq \|H\| \|L\| + \|L\| \|H\| = 2 \|L\| \|H\| . \end{aligned}$$

Primero se usa la desigualdad triangular de la norma para operadores lineales y luego se tiene que la composición de aplicaciones lineales continuas es bilineal continua. Si definimos $c = 2 \|L\| \geq 0$ tenemos que

$$\left\| f'(L)(H) \right\| \leq c \|H\| ,$$

por tanto $f'(L)$ es una aplicación lineal acotada.

Resta ver que si se toma $r(H) = H^2$, se obtiene

$$\lim_{H \to 0} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0,$$

en efecto, para $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon$ tal que si $0 < \|H\| < \delta$ entonces

$$\frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = \frac{\left\|H^2\right\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \|H\| < \delta = \epsilon.$$

Por lo tanto f es una función diferenciable en todo $L \in G$ [3, p.79].

Nota 1.1.4. *La derivada f' de una función f no necesariamente es continua.*

Ejemplo 1.1.5. Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$\varphi(t) = t^2 \sin\left(\frac{\pi}{t^2}\right) \quad (t \neq 0), \quad \varphi(0) = 0.$$

Tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \epsilon$ tal que si $0 < |h| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi(0 + h) - \varphi(0)|}{|h|} &= \left| h \sin\left(\frac{\pi}{h^2}\right) \right| \\ &\leq |h| \cdot 1 < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Así $\varphi'(0) = 0$, y para $t \neq 0$

$$\varphi'(t) = 2t \sin\left(\frac{\pi}{t^2}\right) - \frac{2\pi}{t} \cos\left(\frac{\pi}{t^2}\right).$$

Luego φ es diferenciable en $\mathbb{R}$. Si tomamos $t = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ para $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\begin{aligned}\varphi'\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) &= \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}} \sin(n\pi) - 2\pi n^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi) \\ &= -2\pi n^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi) \\ &= -2\pi n^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^n \\ &= \pm - 2\pi n^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Por tanto φ' no es continua en 0, más aún en ningún intervalo compacto que contenta a 0 [10, p.6].

Proposición 1.1.4. *Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ espacios normados, $U \subseteq \mathbf{X}$ abierto, $f : U \to \mathbf{Y}$, $x \in U$. Si f es diferenciable en x, entonces f es continua en x.*

Demostración. Como f es diferenciable en x, existe una aplicación $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y una función r de h tales que

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h), \qquad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} f(x+h) &= \lim_{h \to 0} (f(x) + T(h) + r(h)) \\ &= f(x) + \lim_{h \to 0} T(h) + \lim_{h \to 0} r(h).\end{aligned}$$

Como T es una aplicación continua, en particular en 0, entonces $\lim_{h \to 0} T(h) = T(0) = 0$. Además $\lim_{h \to 0} r(h) = 0$. En efecto, como f es direfenciable en x, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \|h\| < \delta$ entonces

$$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} < \epsilon.$$

Si tomamos $\delta_1 = min\,\{1, \delta\}$, si $0 < \|h\| < \delta_1$ entonces

$$\|r(h)\| < \epsilon \cdot \|h\| < \epsilon \cdot \delta_1 < \epsilon.$$

Luego

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

por tanto f es continua en x [3, p.77]. $\square$

Proposición 1.1.5. *Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ espacios normados, $U \subseteq \mathbf{X}$, $V \subseteq \mathbf{Y}$ abiertos. Supongamos que $f : U \to V$ es diferenciable en $x_0 \in U$, y $g : V \to \mathbf{Z}$ es diferenciable en $f(x_0) \in V$ entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

Demostración. Sea $h \in \mathbf{X}$ tal que $x_0 + h \in U$, definamos $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ entonces

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0) + k),$$

como g es diferenciable en $f(x_0)$

$$g(f(x_0) + k) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(k) + r_1(k), \quad \text{donde} \quad \lim_{k \to 0} \frac{r_1(k)}{\|k\|} = 0. \tag{1.6}$$

Además tenemos que f es diferenciable en x_0 luego

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)(h) + r_2(h), \quad \text{donde} \quad \lim_{h \to 0} \frac{r_2(h)}{\|h\|} = 0.$$

Reemplazando esto en (1.6) tenemos

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(h) + r_2(h)) + r_1(k).$$

Como $g'(f(x_0))$ es lineal

$$g(f(x_0 + h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(h)) + g'(f(x_0))(r_2(h)) + r_1(k),$$

si definimos

$$r_3(h) = g'(f(x_0))(r_2(h)) + r_1(k).$$

Veamos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_3(h)}{\|h\|} = 0.$$

En efecto, como $g'(f(x_0))$ es lineal continua y $\|h\|$ es escalar entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{g'(f(x_0))(r_2(h)) + r_1(k)}{\|h\|} &= g'(f(x_0)) \left(\lim_{h \to 0} \frac{r_2(h)}{\|h\|} \right) + \lim_{h \to 0} \frac{r_1(k)}{\|h\|} \\ &= g'(f(x_0))(0) + \lim_{h \to 0} \frac{r_1(k)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{r_1(k)}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Ahora vemos este ultimo límite

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{r_1(k)}{\|h\|} &= \lim_{h \to 0} \frac{r_1(k)}{\|h\|} \frac{\|k\|}{\|k\|} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{r_1(k)}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|}. \end{aligned}$$

Como f es continua, si $h \to 0$ entonces $k \to 0$. Luego tomando la norma en el límite anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\|r_1(k)\|}{\|k\|}\cdot\frac{\|k\|}{\|h\|} &= \lim_{h\to 0}\frac{\|r_1(k)\|}{\|k\|}\cdot\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)\|}{\|h\|}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\|r_1(k)\|}{\|k\|}\cdot\frac{\|f'(x_0)h+r_2(h)\|}{\|h\|}\\
&\leq \lim_{h\to 0}\frac{\|r_1(k)\|}{\|k\|}\cdot\frac{\|f'(x_0)h\|+\|r_2(h)\|}{\|h\|}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\|r_1(k)\|}{\|k\|}\cdot\frac{\|f'(x_0)\|\,\|h\|+\|r_2(h)\|}{\|h\|}\\
&= 0\cdot\left(\left\|f'(x_0)\right\|+0\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\|\cdot\|$ es continua entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{r_1(k)}{\|k\|}\cdot\frac{\|k\|}{\|h\|}=0$$

así que

$$g(f(x_0+h)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(h)) + r_3(h), \quad \text{donde} \quad \lim_{h\to 0}\frac{r_3(h)}{\|h\|}=0.$$

De lo anterior se tiene que

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\circ f'(x_0).$$

□

1.2. Derivada de Gateux

La siguiente definición es un extensión de la derivada direccional de una función definida en $\mathbb{R}^n$ a una función definida en espacios normados.

Definición 1.2.1 (Derivada de Gateux)**.** *Sean* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *espacios de normados,* $U \subseteq \mathbf{X}$ *un conjunto abierto,* $f : U \to \mathbf{Y}$*,* $x \in U$ *y sea* $v \in \mathbf{X}$*. Si existe el límite*

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} \tag{1.7}$$

se dice que f *posee derivada direccional en la dirección* v *en el punto* x *el cual se denota por* $\partial f(x, v)$*. La aplicación* f *se dice Gateux diferenciable en* x *si para todo* $v \in \mathbf{X}$ *existe este límite [3, p.76].*

Nota 1.2.1. *Por la defininción nos podemos dar cuenta que la derivada de Gateux es única ya que el límite en espacios normados es único.*

Las siguientes proposiciones muestran algunas propiedades interesantes de la derivada de Gateux.

Proposición 1.2.1. *Sean* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *espacios de normados,* $U \subseteq \mathbf{X}$ *un conjunto abierto. Si* $f : U \to \mathbf{Y}$*, es diferenciable en el sentido de Gateux en un punto* $x \in U$*, entonces para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y para todo* $v \in \mathbf{X}$ *se tiene*

$$\partial f(x, \lambda v) = \lambda \partial f(x, v).$$

Demostración. Sea $v \in \mathbf{X}$ y $\lambda = 0$ entonces

$$\partial f(x, \lambda v) = \partial f(x, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x) - f(x)}{t} = 0 = 0 \cdot \partial f(x, v),$$

tomando $\lambda \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \partial f(x, \lambda v) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x + \lambda t v) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\lambda \left(f(x + \lambda t v) - f(x) \right)}{\lambda t} \\ &= \lambda \lim_{t \to 0} \frac{f(x + \lambda t v) - f(x)}{\lambda t} \\ &= \lambda \partial f(x, v) \end{aligned}$$

el ultimo paso se debe a que si $t \to 0$ entonces $\lambda t \to 0$ [3, p.96]. □

Proposición 1.2.2. *Sean* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *espacios normados,* $U \subseteq \mathbf{X}$ *un conjunto abierto. Si* $f : U \to \mathbf{Y}$*, es G-diferenciable en* x*, entonces para todo* $v \in \mathbf{X}$ *y para todo* $y^* \in \mathbf{Y}^*$ *la función*

$$\varphi(t) = \langle y^*, f(x + tv) \rangle$$

es diferenciable en $t = 0$*, y* $\varphi'(t) = \langle y^*, \partial f(x, v) \rangle$*.*

Demostración. Como φ es una función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, tomando la definición (1.1.1) para $a = 0$ se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(0 + h) - \varphi(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\langle y^*, f(x + hv) \rangle - \langle y^*, f(x) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\langle y^*, f(x + hv) - f(x) \rangle}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left\langle y^*, \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} \right\rangle \\ &= \left\langle y^*, \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h} \right\rangle \\ &= \langle y^*, \partial f(x, v) \rangle \end{aligned}$$

la última parte se da por ser y^* una aplicación lineal continua y por ser f G-diferenciable en x. Por tanto φ es diferenciable en $t = 0$. □

Proposición 1.2.3. *Sea $f : U \to \mathbf{Y}$ una función G-diferenciable para cada punto en U, si para $x_0, h \in U$ el conjunto $\{x_0 + th | t \in [0, 1]\} \subset U$ entonces*

$$\|f(x_0 + th) - f(x_0)\|_{\mathbf{Y}} \leq \sup_{0<t<1} \|\partial f(x_0 + th, h)\|_{\mathbf{Y}} . \tag{1.8}$$

Demostración. Si $f(x_0+h) = f(x_0)$ entonces se cumple (1.8). Supongamos que $f(x_0+h) \neq f(x_0)$, definamos $y = f(x_0 + h) - f(x_0)$, por el corolario (1.4) del Teorema de Hahn Banach [2, p.4] existe $y^* \in \mathbf{Y}^*$, con $\|y^*\| = 1$ tal que

$$\|y\|_{\mathbf{Y}} = \langle y^*, y\rangle ,$$

lo que es igual

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_{\mathbf{Y}} = \langle y^*, f(x_0 + h) - f(x_0)\rangle . \tag{1.9}$$

Si consideramos la función

$$\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0 + th)\rangle \qquad \text{para } t \in [0, 1],$$

entonces para $v \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to 0} \frac{\varphi(t + v) - \varphi(t)}{v} &= \left\langle y^*, \lim_{v\to 0} \frac{f(x_0 + (t + v)h) - f(x_0 + th)}{v} \right\rangle \\
&= \left\langle y^*, \lim_{v\to 0} \frac{f((x_0 + th) + vh) - f(x_0 + th)}{v} \right\rangle \\
&= \langle y^*, \partial f(x_0 + th, h)\rangle .
\end{aligned}$$

Así

$$\varphi'(t) = \langle y^*, \partial f(x_0 + th, h)\rangle , \tag{1.10}$$

como f es G-Diferenciable en todo punto del abierto U, en particular para los puntos $x_0 + th$ con $t \in [0, 1]$. Entonces φ es difenciable en $[0, 1]$ debido a que $\partial f(x_0 + th, h)$ existe. Luego φ es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en (0,1).

Por del Teorema del Valor Medio, tenemos que existe $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi). \tag{1.11}$$

Sustituyendo (1.9) y (1.10) en (1.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_{\mathbf{Y}} &= \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= \langle y^*, \partial f(x_0 + \xi h, h)\rangle \\
&\leq \|y^*\| \, \|\partial f(x_0 + \xi h, h)\| \\
&\leq \|\partial f(x_0 + \xi h, h)\| .
\end{aligned}$$

Ahora si tomamos el supremo en la parte derecha para $\xi \in (0, 1)$

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0)\|_{\mathbf{Y}} \leq \sup_{0<\xi<1} \|\partial f(x_0 + \xi h, h)\| .$$

□

El siguiente resultado es muy importante, ya que muestra la relación entre la derivada de Fréchet y la derivada de Gateux.

Proposición 1.2.4. *Sean* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *espacios normados* $U \subseteq \mathbf{X}$ *abierto,* $x \in U$, $f : U \to \mathbf{Y}$ *diferenciable en* x, *entonces para todo* $v \in \mathbf{X}$,

$$f'(x)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}. \tag{1.12}$$

Demostración. Si $v = 0$ es claro que se satisface (1.12). Sea $v \neq 0$ en $\mathbf{X}$, como $x \in U$, y U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in \mathbb{R}$ satisface $\|tv\| = |t| \|v\| < \delta$ entonces $x + tv \in U$,

$$f(x+tv) = f(x) + f'(x)(tv) + r(tv), \qquad \text{donde } \lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0,$$

es decir

$$f'(x)(tv) = f(x+tv) - f(x) - r(tv),$$

por ser $f'(x)$ una aplicación lineal y $t \neq 0$ entonces

$$f'(x)(v) = \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \frac{r(tv)}{t},$$

tomando el límite cuando $t \to 0$ obtenemos

$$f'(x)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} - \lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{t},$$

además se tiene que

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{t} = \|v\| \lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{\|v\| t} = \pm \|v\| \lim_{t \to 0} \frac{r(tv)}{\|tv\|} = 0,$$

se concluye así (1.12). □

Esta proposición tomada de [3, p.75] nos permite concluir que toda función Fréchet difereciable en x es Gateux diferenciable en x, pero el recíproco no se cumple, veamos esto

Ejemplo 1.2.1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

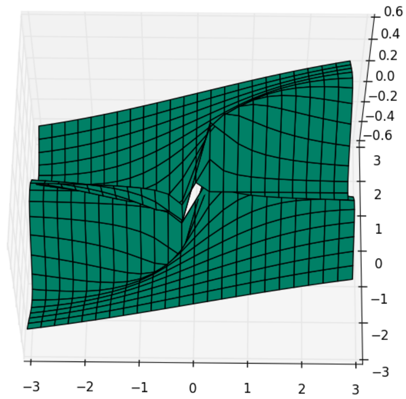

Figura 1.1: G-Diferenciable

veamos que f es G diferenciable en $(0,0)$. En efecto, si $v=(0,a)$ para $a\in\mathbb{R}$ tenemos que $\partial f(\vec{0},v)=0$, para $v=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, con $a_1\neq 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+tv)-f((0,0))}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{t^3a_1a_2^2}{t^3(a_1^2+t^2a_2^2)}\\ &= \frac{a_2^2}{a_1}\end{aligned}$$

el límite existe puesto que $a_1\neq 0$.

Supongamos que f es Fréchet diferenciable en $(0,0)$ entonces por la proposición anterior tenemos que para todo $v\in\mathbb{R}^2$

$$f'(0,0)(v)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+tv)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(tv)}{t}$$

si tomamos v como los vectores canónicos tenemos

$$f'(0,0)(0,1)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,t))}{t}=0$$

y

$$f'(0,0)(1,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((t,0))}{t}=0$$

como e_1, e_2 son una base para $\mathbb{R}^2$ y $f'(0,0)$ es una aplicación lineal entonces para $v=(a_1,a_2)$ se tiene

$$f'(0,0)(a_1,a_2)=a_1f'(0,0)(1,0)+a_2f'(0,0)(0,1)=0+0=0$$

es decir $f'(0,0)$ es el operador cero, así que para todo $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ tenemos

$$\begin{aligned}f((0,0)+(h,k)) &= f(0,0)+f'(0,0)(h,k)+r_1(h,k)\\ &= r_1(h,k)\end{aligned}$$

donde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r_1(h,k)}{|(h,k)|} = 0.$$

Veamos ahora este último límite, si tomamos $h = k \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{r_1(h,h)}{|(h,h)|} &= \frac{f(h,h)}{|(h,h)|} \\
&= \frac{h^3}{\sqrt{2}\,|h|\,(h^2+h^4)} \\
&= \frac{h^3}{\sqrt{2}\,|h|\,h^2(1+h^2)} \\
&= \pm\frac{1}{\sqrt{2}(1+h^2)}
\end{aligned}$$

entonces el límite no existe cuando $h \to 0$. Luego f no es Fréchet diferenciable en (0,0). Más aún f no es continua en $(0,0)$. Puesto que si tomamos $x = y^2$ para $x \neq 0$ entonces

$$f(x,y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$$

pero $f(0,0) = 0$, luego f no es continua en $(0,0)$.

Nota 1.2.2. *En el ejemplo anterior $\partial f(\vec{0},\cdot)$ no es lineal.*

La proposición (1.2.4) nos permite caracterizar la diferencial en el sentido de Fréchet para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ llamada habitualmente como el Jacobiano de f.

Ejemplo 1.2.2. Sea $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n, \mathbf{Y} = \mathbb{R}^m$ y sea $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, m$. Si se define $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$por

$$f(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix},$$

si f es F-diferenciable entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Tomando $e_1, \ldots, e_n$ y $e_1^*, \ldots, e_m^*$ como los vectores coordenados unitarios de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente, tenemos

$$f'(x)(e_k) = \partial f(x; e_k) = \mathbf{D}_k f(x)$$

donde $\mathbf{D}_k f = (D_k\varphi_1, \ldots, D_k\varphi_m)$ y $D_k\varphi_i$ es la derivada parcial de φ_i con respecto a la k-esima componente, para $k = 1, \ldots, n$. Luego

$$f'(x)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} D_k\varphi_i(x)e_i^*.$$

Como $f'(x)$ es una aplicación lineal entre espacios de dimensión finita, entonces la matriz asociada a la aplicación respecto la base canónica, está unícamente determinada por

$$f'(x) = \begin{bmatrix} D_1\varphi_1(x) & D_2\varphi_1(x) & \dots & D_n\varphi_1(x) \\ D_1\varphi_2(x) & D_2\varphi_2(x) & \dots & D_n\varphi_2(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1\varphi_m(x) & D_2\varphi_m(x) & \dots & D_m\varphi_2(x) \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.2.3. En el ejemplo anterior si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces $f'(x) = (D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f)$ que habitualmemte se denota por $\nabla f(x)$ y actua como aplicación sobre $\mathbb{R}^n$ por medio del producto interno. Es decir

$$f'(x)v = \nabla f(x) \cdot v \qquad \text{para } v \in \mathbb{R}^n.$$

El siguiente teorema da condiciones adicionales suficientes para que una función con derivada de Gateux permita tener derivada de Fréchet.

Teorema 1.2.5. *Supongamos que $f : U \to Y$ es G-Diferenciable, y para todo $x \in \mathbf{X}$ existe $A(x) \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tal que*

$$\partial f(x, h) = A(x)h \qquad \textit{para todo } h \in \mathbf{X}.$$

Si la función $x \mapsto A(x)$ es continua en x_0, entonces f es F-Diferenciable en x_0.

Demostración. Sea $h \in \mathbf{X}$, tal que $x_0 + h \in U$ sin perdida de generalidad supongamos $\{x_0 + th; t \in [0, 1]\} \subseteq U$. Definamos $y = f(x_0 + h) - f(x_0) - A(x_0)h \in \mathbf{Y}$, si $y = 0$ entonces

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(x_0)h + r(h) \qquad \text{donde } r(h) = 0 \in \circ(h),$$

si $y \neq 0$ entonces por el corolario (1.4) del Teorema de Hahn Banach tomado de [2, p.3] existe $y^* \in \mathbf{Y}^*$ con $\|y^*\| = 1$ que depende de y, tal que

$$\|y\|_{\mathbf{Y}} = \langle y^*, y \rangle .$$

Es decir

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(x_0)h\|_{\mathbf{Y}} = \langle y^*, f(x_0 + h) - f(x_0) - A(x_0)h \rangle .$$

Por otro lado, si definimos

$$\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0 + th) \rangle$$

para $t \in [0,1]$, tenemos que la función φ es diferenciable por tanto continua, en efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{v\to 0} \frac{\varphi(t+v)-\varphi(t)}{v} &= \left\langle y^*, \lim_{v\to 0} \frac{f(x_0+(t+v)h)-f(x_0+th)}{v} \right\rangle \\
&= \left\langle y^*, \lim_{v\to 0} \frac{f((x_0+th)+vh)-f(x_0+th)}{v} \right\rangle \\
&= \langle y^*, \partial f(x_0+th,h)\rangle
\end{aligned}$$

como f es G-Diferenciable en todo punto del abierto U en particular para los puntos x_0+th con $t \in [0,1]$, entonces φ es difenciable en $[0,1]$ debido a que $\partial f(x_0+th,h)$ existe. Luego φ es continua en $[0,1]$ y diferenciable en (0,1).

Por del Teorema del Valor Medio, tenemos que existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\xi).$$

Así

$$\begin{aligned}
|\varphi(1)-\varphi(0)-\langle y^*, A(x_0)h\rangle| &= \left|\varphi'(\xi)-\langle y^*, A(x_0)h\rangle\right| \\
&= |\langle y^*, \partial f(x_0+\xi h,h)\rangle - \langle y^*, A(x_0)h\rangle| \\
&= |\langle y^*, \partial f(x_0+\xi h,h) - A(x_0)h\rangle| \\
&= |\langle y^*, A(x_0+\xi h)h - A(x_0)h\rangle| \\
&= |\langle y^*, [A(x_0+\xi h) - A(x_0)]h\rangle| \,.
\end{aligned}$$

Como la función $x \mapsto A(x)$ es continua en x_0 y además si $h \to 0$ tenemos que $\xi h \to 0$, luego

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{|\varphi(1)-\varphi(0)-\langle y^*, A(x_0)h\rangle|}{\|h\|} &= \left|\left\langle y^*, \lim_{h\to 0} \frac{[A(x_0+\xi h)-A(x_0)]h}{\|h\|}\right\rangle\right| \\
&\leq \|y^*\| \left\|\lim_{h\to 0} \frac{[A(x_0+\xi h)-A(x_0)]h}{\|h\|}\right\| \\
&= \|y^*\| \lim_{h\to 0} \left\|\frac{[A(x_0+\xi h)-A(x_0)]h}{\|h\|}\right\| \\
&\leq \|y^*\| \lim_{h\to 0} \frac{\|A(x_0+\xi h)-A(x_0)\|\cdot\|h\|}{\|h\|} \\
&\leq \|y^*\| \lim_{h\to 0} \|A(x_0+\xi h)-A(x_0)\| \\
&= \|y^*\|\cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Gracias a esto podemos concluir

$$\begin{aligned}
|\varphi(1)-\varphi(0)-\langle y^*, A(x_0)h\rangle| &= |\langle y^*, f(x_0+h)-f(x_0)-A(x_0)h\rangle| \\
&= \|f(x_0+h)-f(x_0)-A(x_0)h\|_{\mathbf{Y}} \in o(h)
\end{aligned}$$

como $\|\cdot\|$ es continua entonces

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - A(x_0)h \in o(h).$$

Por tanto

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(x_0)h + r(h)$$

donde $A(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y $r(h) = o\,(h)$. Como la derivada de Fréchet es única entonces

$$f'(x_0) = A(x_0)$$

[4, p.3]. $\square$

Ejemplo 1.2.4. Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle , \rangle$. Definamos $f(x) = \|x\|$ con $x \neq 0$. Si $F(x) = \|x\|^2$ tenemos que para $h \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned}
F(x + th) - F(x) &= \|x + th\|^2 - \|x\|^2 \\
&= \langle x + h, x + h\rangle - \langle x, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, th\rangle + \langle th, x\rangle + \langle th, th\rangle - \langle x, x\rangle \\
&= 2\,\langle x, th\rangle + \langle th, th\rangle \\
&= 2\,\langle x, th\rangle + \|th\|^2\,.
\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{2\,\langle x, th\rangle + \|th\|^2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} 2\left\langle x, \frac{th}{t}\right\rangle + \lim_{t\to 0} t^2\,\langle h, h\rangle \\
&= 2\,\langle x, h\rangle
\end{aligned}$$

luego $\partial F(x, h) = A(x)h$ donde $A(x) = 2\,\langle x, \cdot\rangle$ para todo $h \in \mathbf{X}$.

Como el producto interno es bilineal continuo, entonces para x fijo $A(x)$ es una aplicación lineal continua con respecto a h. De la misma manera la función $x \mapsto A(x)$ es continua para todo $x \in \mathbf{X}$ ya que el producto interior es continuo en la primera componente. Aplicando en teorema anterior se tiene que F es F-diferenciable para todo $x \in \mathbf{X}$.

Además, como F es diferenciable y $F = f^2$ entonces f también lo es, así que por regla de la cadena

$$F'(x) = 2 \cdot f \cdot f'(x)$$

luego

$$F'(x)h = (2f \cdot f'(x))h = (2\,\|x\|)f'(x)h$$

ya que estamos en $\mathbb{R}$ y $x \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
f'(x)h &= \frac{1}{2\|x\|} F'(x)h \\
&= \frac{1}{2\|x\|} 2\langle x, h\rangle \\
&= \left\langle \frac{x}{\|x\|}, h \right\rangle,
\end{aligned}$$

luego

$$f'(x) = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \cdot \right\rangle$$

[4, p.6].

Ejemplo 1.2.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto acotado. Denotemos por $C(\bar{\Omega})$ al espacio de las funciones reales continuas en $\bar{\Omega}$. Sea

$$\varphi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una función de clase C^1. Definamos la función f por

$$\begin{aligned}
f : C(\bar{\Omega}) &\to C(\bar{\Omega}) \\
u &\mapsto f(u) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

donde $f(u)(x) = \varphi(x, u(x))$. Entonces f es F-diferenciable y para todo $u_0 \in C(\bar{\Omega})$,

$$f'(u_0 \cdot v)(x) = \varphi_u(x, u_0(x)) \cdot v(x) \qquad \text{para todo } v \in C(\bar{\Omega}). \tag{1.13}$$

Demostración. La función f está bien definida, puesto que para cada $u \in C(\bar{\Omega})$ se tiene que $f(u)$ es continua, en efecto, como φ y u son continuas, sea $a \in \bar{\Omega}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(u)(x) &= \lim_{x\to a} \varphi(x, u(x)) \\
&= \varphi(a, u(a)) \\
&= f(u)(a)
\end{aligned}$$

como a lo tomamos arbitrario entonces la función $f(u)$ es continua en $\bar{\Omega}$.

Sean $h \in C(\bar{\Omega})$, $t \in \mathbb{R}$ y $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, definamos para $\kappa \in [0,1]$ y $x \in \bar{\Omega}$ fijo la función

$$\psi(\kappa) = \varphi(x, u_0(x) + \kappa t h(x)),$$

entonces ψ es diferenciable en (0,1) y

$$\psi'(\kappa) = \varphi_u(x, u_0(x) + \kappa t h(x)) \cdot (th(x)). \tag{1.14}$$

Además ψ es continua en $[0,1]$ ya que φ es continua en la segunda componente. Como ψ es una función real, entonces por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in (0,1)$ que depende de x tal que

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\xi).$$

Definamos $\theta(x) = \xi$ entonces por (1.14) se tiene

$$\psi(1) - \psi(0) = \varphi_u(x, u_0(x) + \xi th(x)) \cdot (th(x)).$$

Así

$$\varphi(x, u_0(x) + th(x)) - \varphi(x, u_0(x)) = \varphi_u(x, u_0(x) + \theta(x)th(x)) \cdot (th(x)). \tag{1.15}$$

Utilizando (1.15) y $t \neq 0$ tenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(u_0 + th) - f(u_0)}{t}\right)(x) &= \frac{\varphi(x, (u_0(x) + th(x))) - \varphi(x, u_0(x))}{t} \\ &= \frac{\varphi_u(x, u_0(x) + \theta(x)th(x)) \cdot (th(x))}{t} \\ &= \varphi_u(x, u_0(x) + \theta(x)th(x)) \cdot (h(x)).\end{aligned}$$

Por otro lado sea $M \in \mathbb{R}^+$, como φ es continuamente diferenciable, entonces φ_u es continua en $\bar{\Omega} \times [-M, M]$ el cual es compacto, luego φ_u es uniformente continua en $\bar{\Omega} \times [-M, M]$. Por tanto para cada $x \in \bar{\Omega}$ tenemos que para todo$\epsilon > 0$ y $M \in \mathbb{R}$ existe $\delta = \delta(\epsilon, M) > 0$ tal que si $\|\xi - \xi'\| < \delta$ con $\|\xi\|, \|\xi'\| < M$, entonces

$$\left\|\varphi_u(x, \xi) - \varphi_u(x, \xi')\right\| < \epsilon. \tag{1.16}$$

Tomemos ahora $M_1 = \|u_0\| + \|h\|$ y $\epsilon > 0$, por lo anterior existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon, M_1)$, definamos $\delta_2 = \min\left\{\frac{\delta_1}{\|h\|}, 1\right\}$ y sea t tal que $|t| < \delta_2$. Entonces

$$\begin{aligned}\|u_0(x) + \theta(x)th(x)\| &\leq \|u_0(x)\| + |t|\,|\theta(x)|\,\|h(x)\| \\ &\leq \|u_0\| + \|h\| = M_1,\end{aligned}$$

tambien

$$\|u_0(x)\| \leq \|u_0\| + \|h\| = M_1.$$

Por (1.16)

$$\|\varphi_u(x, u_0(x) + \theta(x)th(x)) - \varphi_u(x, u_0(x))\| < \epsilon.$$

Se sigue que

$$\lim_{t \to 0} \varphi_u(x, u_0(x) + \theta(x)th(x)) \cdot (h(x)) = \varphi_u(x, u_0(x)) \cdot (h(x)).$$

luego

$$\partial f(u_0, h)(x) = \varphi_u(x, u_0(x)) \cdot (h(x)). \tag{1.17}$$

Notemos que la función $h \mapsto A(u)h = \varphi_u(x, u_0(x)) \cdot (h(x))$ es lineal y continua por ser $\varphi_u(x, u_0(x))$ lineal y continua , además la función $u \mapsto A(u)$ de $C(\bar{\Omega})$ en $\mathcal{L}(C(\bar{\Omega}), C(\bar{\Omega}))$ es continua, entonces por el teorema (1.1.10) f es F-Diferenciable y por (1.17)

$$f'(u_0 \cdot v)(x) = \varphi_u(x, u_0(x)) \cdot v(x) \qquad \text{para todo } v \in C(\bar{\Omega})$$

[4, p.4]. $\square$

Capítulo 2

Teorema de la Función Implícita

A continuación se darán algunos resultados preliminares para el Teorema de la Función Implícita, el cual es uno de los pilares de análisis, puesto que para una función $F : U \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ con ciertas condiciones, garantiza la existencia de una función local continua u que relaciona los espacios $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ y resuelve la ecuación

$$F(x, y) = 0. \tag{2.1}$$

El TFI es muy importante, ya que muchas veces es imposible resolver la ecuación anterior para y en terminos de x, por ejemplo para:

$$F(x, y) = y^5 + 16y + 2x^2y + x,$$
$$F(x, y) = y^4 + \cos(x + y) + 2x^2,$$

pero algunas veces esto se logra resolver en una cierta vecindad, así que este teorema garantiza la existencia de la función u y además establece su derivada.

2.1. Principio de Contracción de Banach

En 1922 Banach probó un teorema que bajo ciertas condiciones asegura la existencia y unicidad de un punto fijo. Este teorema es llamado el Teorema de punto Fijo de Banach o el Principio de contracción de Banach.

Definición 2.1.1 (Punto Fijo)**.** *Sea $f : M \to M$ donde M es un espacio métrico con métrica d. Un punto $a \in M$ se llama punto fijo de f si $f(a) = a$.[3, p.322]*

Definición 2.1.2. *Sean $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ espacios métricos, una aplicación $f : M_1 \to M_2$ se dice contracción si existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$ tal que para todo $x, y \in M_1$ se tiene*

$$d_2\left(f(x), f(y)\right) \leq \lambda d_1\left(x, y\right).$$

Ejemplo 2.1.1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto convexo, $f : A \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $\|f'(x)\| \leq \lambda$ para todo $x \in A$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda < 1$. Por la desigualdad de valor medio [3, p. 228] tenemos que para todo $x, y \in A$

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\| \sup\left\{\left\|f'(z)\right\| : z \in (x, y)\right\},$$

donde (x, y) denota el intervalo n-dimensional.

Como $\|f'(x)\| \leq \lambda$ entonces $\sup\{\|f'(z)\| : z \in (x, y)\} \leq \lambda$.

Así que

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \lambda \|y - x\|.$$

Luego f es una contracción.[3, p.322]

Ejemplo 2.1.2. Sea (M, d) un espacio metrico, si $f : M \to M$ es una contracción con constante λ, entonces f^n $(n \in \mathbb{N})$ es un contracción.

Demostración. Para $x, y \in M$, y para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $f^n(x), f^n(y) \in M$, como f es una contracción entonces

$$\begin{aligned} d(f^n(x)), f^n(y)) &= d(f(f^{n-1}(x)), f(f^{n-1}(y))) \leq \lambda d(f^{n-1}(x), f^{n-1}(y)) \\ &\leq \lambda d(f(f^{n-2}(x)), f(f^{n-2}(y))) \leq \lambda^2 d(f^{n-2}(x), f^{n-2}(y)) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^{n-1} d(f(x), f(y)) \leq \lambda^n d(x, y), \end{aligned}$$

como $\lambda < 1$ entonces $\lambda^n < 1$, así que f^n es un contracción con constante λ^n. □

Proposición 2.1.1. *Sean $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ espacios metricos, si la aplicación $f : M_1 \to M_2$ es una contracción entonces f es uniformemente continua.*

Demostración. Si $\lambda = 0$ entonces $d_2(f(x), f(y)) = 0$, como d_2 es una métrica entonces $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in M_1$ luego f es un funcion constante, por tanto es continua.

Para $\epsilon > 0$ y $\lambda \neq 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{\lambda} > 0$ tal que si para $x, y \in M_1$ se tiene que $d_1(x, y) < \delta$ entonces

$$d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) < \lambda\delta \leq \frac{\epsilon}{\lambda} = \epsilon.$$

□

Teorema 2.1.2 (Principio de Contracción)**.** *Sean (M, d) un espacio métrico completo, $f : M \to M$ una contración con constante λ $(0 \leq \lambda < 1)$. Entonces f posee un único punto fijo, aún más, si $a \in M$, la sucesión $x_1 = f(a), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n)$ converge al punto fijo de f.*

Demostración. Si $\lambda = 0$ entonces $d_2\left(f(x), f(y)\right) = 0$, como d_2 es una métrica entonces $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in M_1$ luego f es un función constante, es decir existe $c \in M$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in M$, en particular para c, $f(c) = c$.

Si $\lambda \neq 0$, sea $a \in M$, definamos la sucesión $x_1 = f(a), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n)$, notemos que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d\left(f(x_{n-1}), f(x_n)\right) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n) \leq \cdots \leq \lambda^{n-1} d(x_1, x_2) \leq \lambda^n d(a, x_1)$$

Luego para $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 1$ tenemos por desigualdad triangular que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ &\leq \lambda^n d(a, x_1) + \lambda^{n+1} d(a, x_1) + \cdots + \lambda^{n+m-1} d(a, x_1) \\ &= \left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots \lambda^{n+m-1}\right) d(a, x_1). \end{aligned}$$

Además tenemos que

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda} = \lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots$$

de donde

$$\left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots \lambda^{n+m-1}\right) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}$$

multiplicando en ambos lados por $d(a, x_1)$ que es un numero positivo

$$\left(\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots \lambda^{n+m-1}\right) d(a, x_1) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(a, x_1)$$

asi que

$$d(x_n, x_{n+m}) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(a, x_1). \tag{2.2}$$

Veamos ahora, que esta sucesión es de Cauchy. Como $\lambda^n \to 0$ cuanto $n \to \infty$ por ser $\|\lambda\| < 1$ entonces para todo $\epsilon > 0$, $\frac{\epsilon(1-\lambda)}{d(a,x_1)} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\lambda^n\| = \lambda^n < \frac{\epsilon(1-\lambda)}{d(a, x_1)} \qquad \text{para todo } n \geq N$$

esto implica que

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(a, x_1) < \frac{\epsilon(1-\lambda)}{(1-\lambda) d(a, x_1)} d(a, x_1) = \epsilon.$$

Luego para (2.2) se tiene

$$d(x_n, x_{n+m}) < \epsilon \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

Como M es un conjunto completo y (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces (x_n) converge a un punto de M, llamemosle w y

$$\lim_{n\to\infty} x_n = w = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

por ser f una función continua

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(w).$$

Por tanto $f(w) = w$, entonces queda demostrada la existencia de un punto fijo de f.

Supongamos ahora que f posee punto fijo z es decir $f(z) = z$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq d(z,w) = d(f(z), f(w)) \leq \lambda d(z,w) \\ 0 &\leq \lambda d(z,w) - d(z,w) \end{aligned}$$

de donde

$$0 \leq (\lambda - 1)d(z,w). \tag{2.3}$$

Como $\lambda < 1$ entonces $(\lambda - 1) < 0$, asi que (2.3) es posible si y solo si

$$d(z,w) = 0$$

por ser d una métrica $z = w$, lo cual muestra que f tiene un único punto fijo.[3, p.323] $\square$

Los siguientes ejemplos muestran la importancia de las condiciones M completo y $(0 \leq \lambda < 1)$.

Ejemplo 2.1.3. Sea $M = \mathbb{R} - \{0\}$ con la métrica inducida por el valor absoluto, el cual no es completo. Definamos $f : M \to M$ por $f(x) = \lambda x$ para $0 < \lambda < 1$. Entonces f es una contracción puesto que

$$|f(x) - f(y)| = \lambda |x - y|,$$

pero f no posee un punto fijo.

Ejemplo 2.1.4. Sea $M = [1, \infty)$ con la métrica inducida por el valor absoluto de $\mathbb{R}$, se tiene que $(M, |\cdot|)$ es un espacio métrico completo ya que es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$. Definamos

$$\begin{aligned} f : [1,\infty) &\longrightarrow [1,\infty) \\ x &\longmapsto f(x) = x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Si f posee un punto fijo z entonces $f(z) = z + \frac{1}{z} = z$, de donde $\frac{1}{z} = 0$, lo cual es imposible, así que f no posee punto fijos y además

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| x - y + \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} \right| \\ &= \left| (x-y) - \frac{(x-y)}{xy} \right| = \left| (x-y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) \right| \\ &= |x-y| \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| \end{aligned}$$

por otro lado tenemos que para $x, y \in [1, \infty)$, $1 - \frac{1}{xy} < 1$, luego

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{para todo } x, y \in [1, \infty) .$$

En este ejemplo $\lambda = 1$ y no existe un punto fijo de f, así que es necesario que $\lambda < 1$.

2.2. Álgebras de Banach

Definición 2.2.1 (Álgebra)**.** *Sea A un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, A es álgebra sobre $\mathbb{R}$ si existe entre los elementos de A una ley de composición interna, la cual se llamara producto, es decir una aplicación $p : A \times A \to A$ tal que para $x, y \in A$, $p(x, y) = x \cdot y$. Este producto satisface:*

- *p es asociativo, es decir, dados $x, y, z \in A$*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

- *p es bilineal, es decir, para $x, y, z \in A$ y $\lambda \in K$*

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z, \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z, \\ \lambda(x \cdot y) &= (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y). \end{aligned}$$

A es llamada un álgebra con identidad, si A contiene un elemento e tal que para todo $x \in A$, $e \cdot x = x \cdot e = x$. Este elemento e es llamado una identidad en A.[3, p.179]

Nota 2.2.1. *Si A es un álgebra con identidad entonces la identidad es única. Puesto que si e, e' son identidades entonces como $e \in A$ y e' es identidad $e \cdot e' = e$ de manera analoga $e \cdot e' = e'$ así que $e = e'$.*

Definición 2.2.2 (Álgebra normada)**.** *Un álgebra normada es un espacio normado que es una álgebra, tal que para todo $x, y \in A$,*

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \|y\| , \tag{2.4}$$

y si A tiene identidad e entonces $\|e\| = 1$. Un álgebra de Banach es un álgebra normada que es completa, considerada como un espacio normado.[7, p.395]

Ejemplo 2.2.1. Sea $\mathbf{Y}$ un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ es un espacio de Banach con norma

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\| ,$$

para cada $L \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$.

$\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ es un álgebra, en efecto, si definimos una ley de composición interna, para cada $L, T \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ por $L \cdot T = L \circ T$, la cual esta bien definida, puesto que la composición de aplicaciones lineales continuas en $\mathbf{Y}$ es una aplicación lineal continua $\mathbf{Y}$.

Además tenemos que para $L, T, H \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ y $\alpha \in K$ donde $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} &L \circ (T + H) = L \circ T + L \circ H, \\ &(L + T) \cdot H = L \circ H + T \circ H, \\ &\alpha(L \circ T) = (\alpha L) \circ T = L \circ (\alpha T), \end{aligned}$$

y

$$\|L \circ T\| \leq \|L\| \, \|T\| \, .$$

La identidad en $\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ es I la aplicación identica y

$$\|I\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ix\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

Proposición 2.2.1. *Sea A una álgebra de Banach real con identidad e. Si $x \in A$ satisface $\|x\| < 1$, entonces $e - x$ es invertible y*

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{j=1}^{\infty} x^j.$$

Demostración. Primero veremos si $\sum_{j=1}^{\infty} x^j$ converge. Sabemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x\|^j < +\infty$$

debido a que $\|x\| < 1$. Además, por (2.4) tenemos que para $y = x$

$$\left\|x^2\right\| \leq \|x\|^2 \, .$$

Por inducción, para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\left\|x^j\right\| \leq \|x\|^j \, .$$

Luego por criterio de comparación [8, p.64], tenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x^j\right\| < +\infty.$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty} x^j$ converge absolutamente y A es un espacio completo entonces converge. Sea $s = \sum_{j=1}^{\infty} x^j + e$. Veamos ahora que $s = (e-x)^{-1}$. En efecto, por simple cálculo tenemos

$$(e-x)^{-1}(e+x+\ldots+x^n) = (e+x+\ldots+x^n)(e-x)^{-1} \tag{2.5}$$
$$= e - x^{n+1}. \tag{2.6}$$

Ahora tomemos $n \to \infty$, como $\|x\| < 1$ entonces $x^{n+1} \to 0$. Aplicando ésto a lo anterior $(e-x)s = s(e-x) = e$. Lo cual termina la demostración.[7, p.398] □

Teorema 2.2.2. *Sea A un álgebra de Banach real con identidad. Entonces el conjunto G de todos los elementos invertibles de A es un conjunto abierto.*

Demostración. $G \neq \emptyset$ puesto que $e \in G$. Sean $x_0 \in G$, $\delta = \frac{1}{\|x_0^{-1}\|}$. Sea $x \in A$ con

$$\|x - x_0\| < \delta.$$

Definamos $y = x_0^{-1}x$ y $z = e - y$ entonces por propiedades de la norma y usando (2.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \|z\| = \|-z\| &= \|y - e\| \\ &= \left\|x_0^{-1}x - x_0^{-1}x_0\right\| \\ &= \left\|x_0^{-1}(x - x_0)\right\| \\ &\leq \left\|x_0^{-1}\right\| \|x - x_0\| \\ &< \left\|x_0^{-1}\right\| \delta = 1. \end{aligned}$$

Por tanto $\|z\| < 1$, por la proposición anterior $y = e - z$ es invertible, entonces $y \in G$. Como G es un grupo con el producto, entonces

$$x_0 y = x_0 x_0^{-1} x = x \in G.$$

Como $x_0 \in G$ es arbitrario entonces G es un conjunto abierto.[7, p.399] □

Nota 2.2.2. *El conjuto M de los elementos de A no invertibles es un conjunto cerrado.*

Teorema 2.2.3 (Teorema de la Función Implícita)**.** *Sean $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ espacios de Banach, $U \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ un conjunto abierto. Supongamos que $f \in C(U, Z)$, tiene derivada de Fréchet con respecto a y, $f_y \in C(U, \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}))$. Si para un punto $(x_0, y_0) \in U$,*

$$f(x_0, y_0) = 0,$$
$$f_y^{-1}(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$$

entonces existen $r, r_1 > 0$ *y* $u \in C\left(B_r(x_0), B_{r_1}(y_0)\right)$ *tal que*

$$\begin{cases} B_r(x_0) \times B_{r_1}(y_0) \subset U, \\ u(x_0) = y_0 \\ f(x, u(x)) = 0 & \textit{para todo } x \in B_r(x_0). \end{cases}$$

Además, si $f \in C^1(U, \mathbf{Z})$ *entonces* $u \in C^1\left(B_r(x_0), B_{r_1}(y_0)\right)$ *y*

$$u'(x) = -f_y^{-1}(x, u(x)) \circ f_x(x, u(x)) \qquad \textit{para todo } x \in B_r(x_0)$$

Demostración. Como U es un conjunto abierto existen $\beta, \beta_1 > 0$ tales que, si $\|x\| < \beta, \|y\| < \beta_1$ entonces $(x + x_0, y + y_0) \in U$. Definamos $g : B_\beta(0) \times B_{\beta_1}(0) \to \mathbf{Y}$ por

$$g(x, y) = f_y^{-1}(x_0, y_0) \circ f(x + x_0, y + y_0)$$

entonces $g \in C(B_\beta(0) \times B_{\beta_1}(0), \mathbf{Y})$ puesto que es una composición de funciones continuas.

Tenemos que para $x = y = 0$,

$$g(0, 0) = f_y^{-1}(x_0, y_0) \circ f(x_0, y_0)$$

por hipotesis $f(x_0, y_0) = 0$ y como f_y^{-1} es una aplicación lineal entonces

$$f_y^{-1}(x_0, y_0)(0) = 0$$

así que

$$g(0, 0) = 0. \tag{2.7}$$

Por (1.1.2) y (1.1.5), tenemos

$$g_y(x, y) = f_y^{-1}(x_0, y_0) \circ f_y(x + x_0, y + y_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \tag{2.8}$$

además

$$g_y(0, 0) = f_y^{-1}(x_0, y_0) \circ f_y(x_0, y_0) = id_{\mathbf{Y}}$$

luego $g_y^{-1}(0, 0) = id_{\mathbf{Y}}$ existe, donde $id_{\mathbf{Y}}$ denota el operador identidad el cual es lineal y continuo, entonces

$$g_y^{-1}(0, 0) \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}). \tag{2.9}$$

Por otro lado, tenemos que $g_y \in C(B_\beta(0) \times B_{\beta_1}(0), \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}))$ puesto que es composición de aplicaciones continuas.

Se demostrara el Teorema de la Función Implícita para g. Despues se verá que no hay perdida de generalidad para f.

Con el objetivo de resolver la ecuación

$$g(x,y)=0$$

tomaremos x fijo y veremos para que $y \in \mathbf{Y}$ esta ecuación se cumple.

Este problema se reduce a encontrar el punto fijo de la función

$$R(x,y)=y-g(x,y) \qquad \text{para } x \text{ fijo}$$

es decir si para algún $y_1 \in B_{\beta_1}(0)$ se tiene que $R(x,y_1)=y_1-g(x,y_1)=y_1$ entonces $g(x,y_1)=0$. Para esto vamos a utilizar el teorema (2.1.2) de Contracción de Banach. Primero se verá en que conjuntos R es una contracción:

Sean $y_1, y_2 \in B_{\beta_1}(0)$

$$\begin{aligned}\|R(x,y_1)-R(x,y_2)\| &= \|y_1-g(x,y_1)-y_2+g(x,y_2)\| \\ &= \|(y_1-y_2)-(g(x,y_1)-g(x,y_2)\|\end{aligned}$$

si definimos $h(t)=g(x,y_1t+(1-t)y_2)$ para $t\in[0,1]$, tenemos que

$$h'(t)=g_y(x,y_1t+(1-t)y_2)\cdot(y_1-y_2).$$

Como $h(t)$ es una aplicación continua, diferenciable en $(0,1)$, además h' es continua en $(0,1)$ y existen las derivadas laterales en 0, 1 respectivamente, y h' se puede extender a una aplicación continua en $[a,b]$, entonces por el Teorema Fundamental del Cálculo en espacios de Banach [3, p.271]

$$\begin{aligned}h(1)-h(0) &= \int_0^1 h'(t)dt \\ &= \int_0^1 g_y(x,y_1t+(1-t)y_2)\cdot(y_1-y_2)dt \\ &= g(x,y_1)-g(x,y_2).\end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}\|R(x,y_1)-R(x,y_2)\| &= \left\|y_1-y_2-\int_0^1 g_y(x,y_1t+(1-t)y_2)\cdot(y_1-y_2)dt\right\| \\ &= \left\|\int_0^1 (y_1-y_2)-g_y(x,y_1t+(1-t)y_2)\cdot(y_1-y_2)dt\right\| \\ &= \left\|\int_0^1 (id_{\mathbf{Y}}-g_y(x,y_1t+(1-t)y_2))\cdot(y_1-y_2)dt\right\| \\ &\leq \int_0^1 \|(id_{\mathbf{Y}}-g_y(x,y_1t+(1-t)y_2))\cdot(y_1-y_2)dt\|\,.\end{aligned}$$

Como $id_{\mathbf{Y}}$ es un operador lineal acotado y $g_y(x, y_1 t + (1-t)y_2)$ tambien lo es, entonces

$$\begin{aligned}
\|R(x,y_1) - R(x,y_2)\| &\leq \int_0^1 \|(id_{\mathbf{Y}} - g_y(x, y_1 t + (1-t)y_2))\| \cdot \|(y_1 - y_2)\| \, dt \\
&= \int_0^1 \|(id_{\mathbf{Y}} - g_y(x, y_1 t + (1-t)y_2))\| \, dt \cdot \|(y_1 - y_2)\| \\
&= \int_0^1 \|(g_y(0,0) - g_y(x, y_1 t + (1-t)y_2))\| \, dt \cdot \|(y_1 - y_2)\| .
\end{aligned}$$

Además g_y es continua en $(0,0)$, entonces para $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ existen $\delta, \delta_1 > 0$ tales que si $x \in B_\delta(0)$, $y \in B_{\delta_1}(0)$ entonces

$$\|g_y(0,0) - g_y(x,y)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Así que para $y_1, y_2 \in B_{\delta_1}(0)$, como la bola es convexa, entonces para todo $t \in [0,1]$,

$$\|g_y(0,0) - g_y(x, y_1 t + (1-t)y_2)\| \leq \frac{1}{2}.$$

Por tanto para $x \in B_\delta(0)$, $y_1, y_2 \in B_{\delta_1}(0)$

$$\|R(x,y_1) - R(x,y_2)\| \leq \int_0^1 \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\| \, dt = \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\| .$$

Así que $R(x,\cdot)$ es una contracción en el conjunto abierto $B_{\delta_1}(0)$. Solo falta que sea un contracción en un conjunto completo. Si tomamos $r_1 < \delta_1$, veamos que $R(x,\cdot) : \bar{B}_{r_1}(0) \to \bar{B}_{r_1}(0)$ esta bien definida.

$$\begin{aligned}
\|R(x,y)\| &= \|R(x,0) - R(x,0) + R(x,y)\| \\
&\leq \|R(x,0)\| + \|R(x,y) - R(x,0)\| \\
&\leq \|R(x,0)\| + \frac{1}{2} \|y - 0\| \\
&\leq \|R(x,0)\| + \frac{1}{2} r_1 \\
&= \|g(x,0)\| + \frac{1}{2} r_1.
\end{aligned}$$

Como g es continua en (0,0) para $\epsilon = \frac{1}{2} r_1$ existe $r > 0$ tal que para todo $x \in \bar{B}_r(0)$

$$\|g(x,0) - g(0,0)\| < \frac{1}{2} r_1.$$

Luego para $x \in \bar{B}_r(0)$, $y \in \bar{B}_{r_1}(0)$

$$\|R(x,y)\| < \frac{1}{2} r_1 + \frac{1}{2} r_1 = r_1.$$

De esta manera se completan las hipótesis del teorema 2.1.2 para $R(x,\cdot) : \bar{B}_{r_1}(0) \to \bar{B}_{r_1}(0)$. Pudiendo así garantizar la existencia de un punto fijo $y \in \bar{B}_{r_1}(0)$ para cada $x \in$

$\bar{B}_r(0)$. Lo cual nos permite definir la función $u : B_r(0) \to B_{r_2}(0)$ tal que $g(x, u(x)) = 0$, para r_2 suficientemente cercano a r_1 y $r_2 > r_1$.

Resta ver que $u \in C(B_r(0), B_{r_2}(0))$. Sean $x, x' \in B_r(0)$

$$\begin{aligned}
\left\|u(x) - u(x')\right\| &= \left\|R(x, u(x)) - R(x', u(x'))\right\| \\
&= \left\|R(x, u(x)) + R(x', u(x)) - R(x', u(x)) - R(x', u(x'))\right\| \\
&\leq \left\|R(x', u(x)) - R(x', u(x'))\right\| + \left\|R(x, u(x)) - R(x', u(x))\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u(x) - u(x')\right\| + \left\|R(x, u(x)) - R(x', u(x))\right\|,
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\|u(x) - u(x')\right\| \leq 2\left\|R(x, u(x)) - R(x', u(x))\right\|. \tag{2.10}$$

Por ser R una contracción entonces por la proposición (2.1.1) es continua en todo punto x, así que para $\epsilon > 0$, $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x'\| < \delta$ entonces

$$\left\|R(x, u(x)) - R(x', u(x))\right\| < \frac{\epsilon}{2},$$

lo que implica

$$\left\|u(x) - u(x')\right\| \leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Luego $u \in C(B_r(0), B_{r_2}(0))$ y $g(x, u(x)) = 0$.

Definamos ahora $x^* = x + x_0$ y $u_1(x^*) = u(x) + y_0$. Si $x \in B_r(0)$ entonces $x^* \in B_r(x_0)$ y $u_1(x^*) \in B_{r_1}(y_0)$ así que $u_1(x^*) \in C(B_r(x_0), B_{r_1}(y_0))$ y

$$\begin{aligned}
f(x^*, u_1(x^*)) &= f_y(x_0, y_0) \circ g(x, u(x)) \\
&= f_y(x_0, y_0)(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Concluyendo así la primer parte del Teorema.

Si suponemos que $f \in C^1(U, \mathbf{Z})$ entonces $g \in C^1(B_\beta(0) \times B_{\beta_1}, \mathbf{Y})$. Por (2.10) y realizando el mismo procedimiento anterior para $h(t) = g(tx + (1-t)x, u(x))$ con $t \in [0, 1]$ tenemos para $x, x' \in B_r(0)$

$$\begin{aligned}
\left\|u(x) - u(x')\right\| &\leq 2\left\|g(x, u(x)) - g(x', u(x))\right\| \\
&\leq 2\left\|\int_0^1 g_x(tx + (1-t)x', u(x))(x - x')dt\right\| \\
&\leq 2\int_0^1 \left\|g_x(tx + (1-t)x', u(x))\right\| \cdot \left\|(x - x')\right\| dt.
\end{aligned}$$

Luego para $h \in \mathbf{X}$ tal que $x + h \in B_r(0)$ se tiene que

$$\|u(x + h) - u(x)\| \leq 2\int_0^1 \|g_x(t(x + h) + (1-t)x, u(x + h))\| \cdot \|(h)\| dt$$

como $g_x(t(x+h)+(1-t)x, u(x+h))$ es una aplicación lineal y continua por tanto acotada, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|u(x+h)-u(x)\| &\leq 2\int_0^1 C\cdot\|h\|\,dt \\ &= 2C\cdot\|h\|\,. \end{aligned}$$

Además $g(x+h, u(x+h)) = g(x, u(x)) = 0$ entonces

$$g(x+h, u(x+h)) - g(x, u(x)) = 0$$

y

$$[g(x+h, u(x+h)) - g(x, u(x+h))] + [g(x, u(x+h)) - g(x, u(x))] = 0,$$

asociando términos tenemos,

$$[g(x+h, u(x+h)) - g(x, u(x+h))] + [g(x, u(x) + (u(x+h) - u(x)) - g(x, u(x))] = 0$$

como g tiene derivada en el sentido de Fréchet con respecto a x y y entonces

$$g_x(x, u(x+h))h + \circ(h) + g_y(x, u(x))(u(x+h) - u(x)) + \circ(u(x+h) - u(x)) = 0. \quad (2.11)$$

Por (2.8) tenemos que $g_y(x, u(x)) \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$, donde $\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ es un álgebra de Banach con identidad (vease ejemplo 2.2.1). Como $g_y^{-1}(0,0)$ existe, por el Teorema (2.2.2) existe $\gamma > 0$ tal que si $T \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ y $\|g_y(0,0) - T\| < \gamma$ entonces T^{-1} existe.

Como $g_y \in C(B_\beta(0) \times B_{\beta_1}, \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}))$, entonces para $\epsilon = \gamma$ existe $r > 0$ tal que si $x \in B_r(0)$ entonces

$$\|g_y(0,0) - g_y(x, u(x))\| < \epsilon = \gamma$$

así que $g_y^{-1}(x, u(x))$ existe para todo $x \in B_r(0)$.

Evaluando $g_y^{-1}(x, u(x))$ en (2.11) nos queda:

$$g_y^{-1}(x, u(x)) \circ g_x(x, u(x+h))h + u(x+h) - u(x) + g_y^{-1}(x, u(x))(\circ(u(x+h) - u(x)) + \circ(h)) = 0. \quad (2.12)$$

Como $g_y^{-1}(x, u(x))$ es continua entonces

$$g_y^{-1}(x, u(x))(\circ(u(x+h) - u(x)) + \circ(h)) = \circ(h).$$

Puesto que $\circ(u(x+h) - u(x)) \in \circ(h)$, veamos esto

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\circ(u(x+h) - u(x))}{\|h\|} &= \lim_{h\to 0} \frac{\circ(u(x+h) - u(x))}{\|u(x+h) - u(x)\|} \cdot \frac{\|u(x+h) - u(x)\|}{\|h\|} \\ &\leq 0 \cdot \frac{2C\,\|h\|}{\|h\|} = 0. \end{aligned}$$

Luego (2.12) se covierte en

$$g_y^{-1}(x,u(x)) \circ g_x(x,u(x+h))h + u(x+h) - u(x) + \circ(h) = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned} u(x+h) - u(x) &= -g_y^{-1}(x,u(x)) \circ g_x(x,u(x+h))h + \circ(h) \\ &= -g_y^{-1}(x,u(x)) \circ g_x(x,u(x))h + L(x)(h) \circ (h) \end{aligned}$$

para $L(x)(h) = -g_y^{-1}(x,u(x)) \circ g_x(x,u(x+h))h + g_y^{-1}(x,u(x)) \circ g_x(x,u(x))h$.

Además tenemos que $L(x)(h) = \circ(h)$. En efecto, como $\|\cdot\|$, g_x y u son continuas entonces

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\|L(x)(h)\|}{\|h\|} &= \lim_{h\to 0} \frac{\left\|-g_y^{-1}(x,u(x)) \circ (g_x(x,u(x)) - g_x(x,u(x+h)))h\right\|}{\|h\|} \\ &\leq \lim_{h\to 0} \left\|-g_y^{-1}(x,u(x))\right\| \|g_x(x,u(x)) - g_x(x,u(x+h))\| \\ &= \lim_{h\to 0} \left\|-g_y^{-1}(x,u(x))\right\| \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto

$$u(x+h) - u(x) = -g_y^{-1}(x,u(x)) \circ g_x(x,u(x))h + \circ(h).$$

Luego

$$u'(x) = -g_y^{-1}(x,u(x)) \circ g_x(x,u(x)). \tag{2.13}$$

Veamos ahora que no hay perdida de generalidad para f. Sabemos que

$$g_y^{-1}(x,u(x)) = f_y^{-1}(x+x_0,u(x)+y_0) \circ f_y(x_0,y_0)$$

$$g_x(x,u(x)) = f_y^{-1}(x_0,y_0) \circ f_x(x+x_0,u(x)+y_0).$$

Reemplazando en (2.13)

$$\begin{aligned} u'(x) &= -f_y^{-1}(x+x_0,u(x)+y_0) \circ f_y(x_0,y_0) \circ f_y^{-1}(x_0,y_0) \circ f_x(x+x_0,u(x)+y_0) \\ &= -f_y^{-1}(x+x_0,u(x)+y_0) \circ f_x(x+x_0,u(x)+y_0). \end{aligned}$$

Con la sustitución anterior tenemos

$$u_1'(x^*) = -f_y^{-1}(x^*,u_1(x^*)) \circ f_x(x^*,u_1(x^*)) \qquad \forall x^* \in B_r(x_0) \tag{2.14}$$

[4, p.12]. □

Ejemplo 2.2.2. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = x^2 - y^2 - 1.$$

Es claro que el conjunto $H = \{(x, y)|F(x, y) = 0\}$ es una hiperbola.

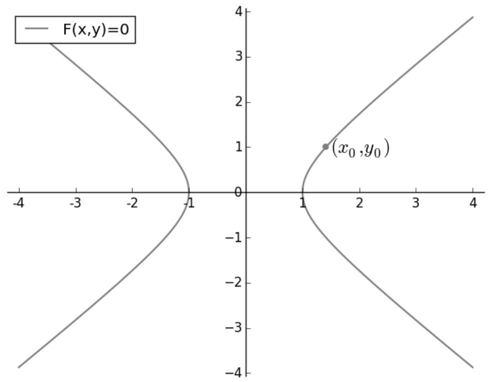

Figura 2.1: Ejemplo 1.2.6

$F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, si $(x_0, y_0) \in H$ tenemos $F_y(x_0, y_0) = -2y_0$, para que $F_y(x_0, y_0)$ sea invertible debe ser $y_0 \neq 0$. Pero si $y_0 = 0$ entonces $x_0 = 1$ ó -1, y es evidente que no existe un función continua definida en un abierto que contenga a x_0 y sea solución de la ecuación. Es aquí donde se hace necesaria la condición que $F_y(x_0, y_0)$ sea invertible.

Como $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, F_y es continua y $y_0 \neq 0$, entonces por el TFI existe un intervalo abierto A que contiene a x_0 y una funcion u definida en él tal que $(x, u(x)) \in H$. En este caso u se puede obtener de manera explicita por $u(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, donde el signo depende si $y_0 > 0$ o $y_0 < 0$ y A es cualquier intervalo abierto que contenga x_0 y este en el dominio de u.

Ahora si tomamos $y_0 = 0$ entonces $x_0 = \pm 1$, como lo vimos anteriormente es imposible obtener una función y en terminos de x pero si es posible obtener una en terminos de y pues $F_x(x_0, y_0) = 2x_0$ es invertible. Aplicando el Teorema de la Función Implicíta existe un intervalo abierto B que contiene a y_0 y una funcion ϕ definida en él tal que $(\phi(y), y) \in H$. Donde $\phi(y) = \pm\sqrt{y^2 + 1}$. y el signo depende de x_0.

Las condiciones del Teorema de la Función Implícita son suficientes pero no necesarias, veamos esto:

Ejemplo 2.2.3. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y) = x - y^3.$$

Esta figura muestra la solución de la ecuación $F(x, y) = 0$.

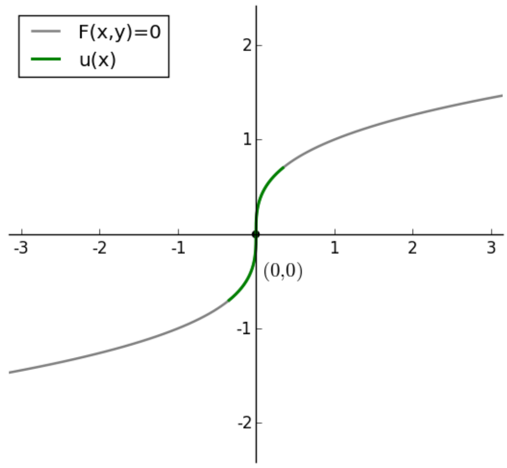

Figura 2.2: Ejemplo 1.2.7

Si consideramos el punto $(0, 0)$, tenemos $F_y(0, 0) = 0$ así que no es invertible, luego no cumple las hipótesis del TFI, pero existe la función $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$ continua definida en $\mathbb{R}$ que resuelve la ecuación.

Nota 2.2.3. *Con el fin de enunciar el Teorema de la Función Implícita para una función definida entre espacios euclideos es necesario tener en cuenta la siguiente aclaración.*

Sea $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ una función definida en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Si $m \leq n$ entonces $\mathbf{U} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k$ donde $l, k < n$, luego para todo $(x, y) \in U$, $f_y(x, y)$ tiene asociada la matriz $Jf = [D_j f_i(x, y)]$ con $j = 1, \ldots, k$ y $i = 1, \ldots, n$ la cual no tiene inversa, así que $f_y(x, y)$ no es invertible. Por tanto no es posible enunciar el TFI.

Si $m > n$ entonces $\mathbf{U} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, luego para cada $(x, y) \in U$,$f_y(x, y)$ tiene asociada la matriz $Jf = [D_j f_i(x, y)]$ con $j = 1, \ldots, n$ y $i = 1, \ldots, n$ la cual tiene inversa si $det[D_j f_i(x, y)] \neq 0$, por tanto es posible enunciar el teorema.

Teorema 2.2.4. *Sea $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ una función vectorial definida en un subconjunto abierto U de $\mathbb{R}^{k+n}$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $f \in C^1$ en S. Sea (x_0, y_0) un punto de U en el que $f(x_0, y_0) = 0$ y el determinante jacobiano $n \times n$ $det[D_j f_i(x_0, y_0)] \neq 0$. Entonces existe un conjunto abierto k-dimensional V que contiene a x_0 y una función vectorial u y sólo una, definida en V y con valores en R^n*

tales que

$$\begin{cases} u \in C^1 & \text{en } V \\ u(x_0) = y_0 \\ f(x, u(x)) = 0 & \text{para todo } x \in V. \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.4. Sea $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y, z, w) = (x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2, x^2 - y^2 + z^2 - w^2)$$

entonces

$$f_1(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2$$
$$f_2(x, y, z, w) = x^2 - y^2 + z^2 - w^2.$$

Veamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial(z, w)}(x_0, y_0, z_0, y_0) &= det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial w}(x_0, y_0, z_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial w}(x_0, y_0, z_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= det \begin{pmatrix} 2z_0 & 2w_0 \\ 2z_0 & -2w_0 \end{pmatrix} \\ &= -8z_0 w_0. \end{aligned}$$

Entonces si $z_0 \neq 0$ y $w_0 \neq 0$, F cumple las hipótesis del TFI, puesto que F es continua ya que f_1 y f_2 lo son, además $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ debido a que las derivadas parciales de f_1 y f_2 son continuas. Luego existen U, V abiertos de R^2 que contiene a los puntos (x_0, y_0), (z_0, w_0) respectivamente y g_1, g_2 continuas en U tales que

$$F(x, y, g_1(x, y), g_2(x, y)) = (0, 0). \tag{2.15}$$

Si $f_1(x_0, y_0, z_0, y_0) = f_2(x_0, y_0, z_0, y_0) = 0$ entonces para $z_0, w_0 > 0$ se tienen las funciones

$$z = g_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad w = g_2(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$$

que cumplen (2.15), para $x, y \in (-1, 1)$. Cambiando el signo de g_1 y g_2 tomamos todas la posibilidades para $z_0 \neq 0$, $w_0 \neq 0$ definidas en un conjunto abierto y que resulven la ecuación $F(x, y) = 0$.

2.3. Teorema de la Función Inversa

Teorema 2.3.1 (Teorema de la Función Inversa)**.** *Sean* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *espacios de Banach,* $V \subset \mathbf{Y}$ *un conjunto abierto y* $g \in C^1(V, \mathbf{X})$*. Supongamos que* $y_0 \in V$ *y* $g'^{-1}(y_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$*. Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que* $B_\delta(y_0) \subset V$ *y*

$$g : B_\delta(y_0) \to g\left(B_\delta(y_0)\right) \tag{2.16}$$

es un difeomorfismo.

Además

$$\left(g^{-1}\right)'(x_0) = \left(g'\right)^{-1}(y_0) \quad \textit{con } x_0 = g(y_0).$$

Demostración. Como $(g')^{-1}(y_0) \neq 0$ entonces definamos

$$\lambda = \frac{1}{2\left\|\left(g'\right)^{-1}(y_0)\right\|} > 0.$$

Por hipótesis $g \in C^1(V, X)$, luego g' es continua en y_0, así que existe $r > 0$ tal que para todo $y \in B_r(y_0)$

$$\left\|g'(y) - g'(y_0)\right\| < \lambda. \tag{2.17}$$

Por otro lado, para cada $x \in X$, definamos

$$\phi(y) = y + (g')^{-1}(y_0)(x - g(y)) \qquad \text{para cada } y \in V.$$

Veamos bajo que conjunto ϕ es una contracción. Como

$$\begin{aligned}
\phi'(y) &= I - \left(g'\right)^{-1}(y_0)g'(y) \\
&= \left(g'\right)^{-1}(y_0)g'(y_0) - \left(g'\right)^{-1}(y_0)g'(y_0) \\
&= \left(g'\right)^{-1}(y_0)\left[g'(y_0) - g'(y)\right].
\end{aligned}$$

Si definimos a ϕ en $B_r(y_0)$ entonces por (2,17)

$$\begin{aligned}
\left\|\phi'(y)\right\| &= \left\|\left(g'\right)^{-1}(y_0)\left[g'(y_0) - g'(y)\right]\right\| \\
&= \left\|\left(g'\right)^{-1}(y_0)\right\| \left\|\left[g'(y_0) - g'(y)\right]\right\| \\
&\leq \left\|(g')^{-1}(y_0)\right\| \lambda \leq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y como V es conexo y ϕ diferenciable en V, entonces por la desigualdad del valor medio tenemos que para $y_1, y_2 \in B_r(y_0)$

$$|\phi(y_1) - \phi(y_2)| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|.$$

Gracias a esto podemos concluir que g es $1-1$ en $B_r(y_0)$, en efecto, si $y_1, y_2 \in B_r(y_0)$ y $g(y_1) = g(y_2) = x$ entonces

$$\begin{aligned}
\phi(y_1) &= y_1 + \left(g'\right)^{-1}(y_0)(x - g(y_1)) \\
&= y_1 \\
\phi(y_2) &= y_2.
\end{aligned}$$

Pero como ϕ es una contracción en $B_r(y_0)$ su punto fijo es único, luego $y_1 = y_2$. Ahora definamos $f : \mathbf{X} \times B_r(y_0) \to \mathbf{X}$ por

$$f(x, y) = x - g(y)$$

donde $f \in C^1(V, X)$, ya que C^1 es un espacio vectorial.

Como $f_y = -g'$ y $-g'$ es continua en $B_r(y_0)$ entonces $f_y \in C^1(X \times B_r(y_0), X)$. Tomemos $x_0 = g(y_0)$ entonces

$$f(x_0, y_0) = x_0 - g(y_0) = 0$$

y

$$f_y^{-1}(x_0, y_0) = -g'^{-1}(y_0) \in L(X, V).$$

Por el Teorema de la Función Implícita exísten $r_1, r_2 > 0$ y una función $u \in C(B_{r_1}(x_0), B_{r_2}(y_0))$ tal que

$$B_{r_1}(x_0) \times B_{r_2}(y_0) \subset X \times B_r(y_0)$$

y

$$f(x, u(x)) = 0,$$

así que $f(x, u(x)) = x - g(u(x)) = 0$. Entonces

$$x = g \circ u(x). \qquad \text{para cada } x \in B_{r_1}(x_0).$$

Como g es continua en y_0 para $\epsilon = r_1$ exíste $\delta < r_2$ tal que

$$g(B_\delta(y_0)) \subset B_{r_1}(x_0).$$

Por lo que se vió anteriormente g es inyectiva es $B_r(y_0)$ y como $\delta < r_2$ entonces g es inyectiva en $B_\delta(y_0)$ y es sobreyectiva si tomamos

$$g : B_\delta(y_0) \to g(B_\delta(y_0)) \tag{2.18}$$

Veamos que u es efectivamente la inversa de g. Sea $y \in B_\delta(y_0)$, supongamos $u \circ g(y) = y_2$ para algún $y_2 \in B_{r_2}(y_0)$. Luego

$$\begin{aligned} g \circ u \circ g(y) &= g(y_2) \\ g(y) &= g(y_1). \end{aligned}$$

Como g es inyectiva en $B_{r_2}(y_0)$, entonces $y_1 = y_2$ y

$$g \circ u(y) = y \quad \text{para todo } y \in B_\delta(x_0).$$

Además u es continua, entonces $\vec{g}(B_\delta(y_0))$ es un conjunto abierto en X. Además $u \in C^1$ luego g definido como en (2.16) es un difeomorfismo.

□

Ejemplo 2.3.1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. Los puntos del plano x, y que cumplen esta ecuación son

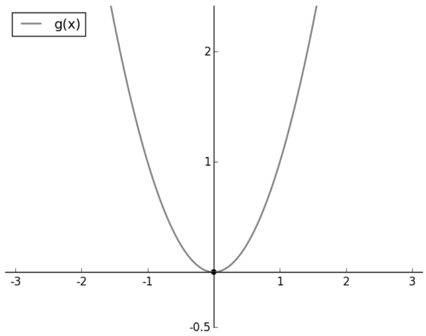

Figura 2.3: Ejemplo 1.2.9

Como $g'(x_0) = 2x_0$, para que $g'(x)$ sea invertible debe ser $x_0 \neq 0$. Si $x_0 = 0$ es evidente que no existe una función f de y a x definida en un conjunto abierto que contenga a x_0 y tal que $g \circ f = f \circ g = I$. Es aquí donde se hace necesaria la condición $g'(x_0) \neq 0$.

Debido a que $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $g'(x_0)$ es invertible para $x_0 \neq 0$. Por el TFV existe un intervalo abierto A que contiene a y_0 y un función f definida en él inversa de g.

En este caso para $x_0 \neq 0$ puede obtenerse la función $f(y) = \pm\sqrt{y}$ definida en $(0, \infty)$ el cual contiene a $y_0 = g(x_0)$, y el signo depende del valor de x_0.

Ejemplo 2.3.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy).$$

Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se denota su imagen por (z, w). Entonces $z = x^2 + y^2$, $w = 2xy$ y $z + w = (x + y)^2 \geq 0$, $z - w = (x - y)^2 \geq 0$, luego la imagen de f es la que se ilustra en la siguiente figura

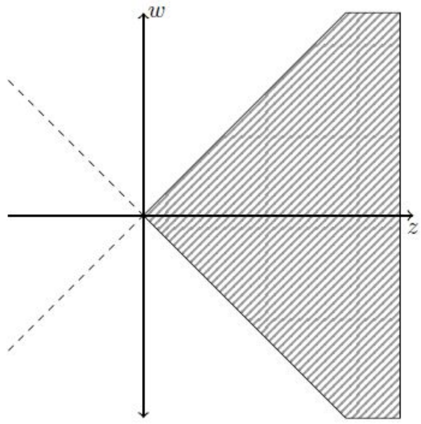

Figura 2.4: Ejemplo 1.2.10

Además $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, puesto que sus derivadas parciales existen y son continuas.

$$Jg(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} = 4(x^2 - y^2).$$

Así que $Jg(x,y) \neq 0$ para $x^2 \neq y^2$. Entonces para los puntos $(x, \pm x)$ tenemos $x^2 = y^2$. Estos puntos dividen el plano en cuatro cuadrantes en los cuales existe una función inversa ya que se cumplen la hipotesis del TFV.

Analizando la función f, nos damos cuenta que ésta es inyectiva en el conjunto que muestra la Figura 2.3.2 para el plano xy. Pues si tomamos $a > 0$ y $x = a\cos(\theta)$, $y = a\sin(\theta)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces la imagen es el conjunto de puntos

$$f(x,y) = (a^2, \sin(2\theta)) \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

la cual es recorrida cuatro veces por la función f. Entonces para cada cuadrante la función es inyectiva. Es aqui donde radica la importancia de la condición $Jg(x,y) \neq 0$, puesto que no puede haber un conjunto abierto que contenga puntos de la forma $(x, \pm x)$ en el cual la función posea inversa.

Para el cuadrante $\Omega = \{(x,y); |y| < x, x > 0\}$ se resuleven las siguientes ecuaciones

$$z + w = (x+y)^2, \quad z - w = (x-y)^2$$

entonces

$$x = \frac{\sqrt{z+w} + \sqrt{z-w}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{z+w} - \sqrt{z-w}}{2}.$$

[5, p.141]

Capítulo 3

Bifurcación

El concepto de punto bifurcación surge con el estudio de la ecuación

$$F(x, \lambda) = 0, \tag{3.1}$$

donde $x \in \mathbf{X}$ y $\lambda \in \Lambda$, para $\mathbf{X}, \Lambda$ espacios de Banach. La Teoría de Bifurcación estudia los cambios que ocurren en el conjunto de soluciones de (3.1) ante la variación del parámetro λ.

Por ejemplo, consideremos

$$F(x, \lambda) = x^3 - \lambda x \quad \text{para } \lambda, x \in \mathbb{R}$$

Entonces (3.1) tiene solución $x = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ (habitualmente se le llama la solución trivial), si $\lambda \leq 0$ entonces $x = 0$. Para $\lambda > 0$ se tienen dos ramas de soluciones:

$$x = \sqrt{\lambda}, \quad x = -\sqrt{\lambda}$$

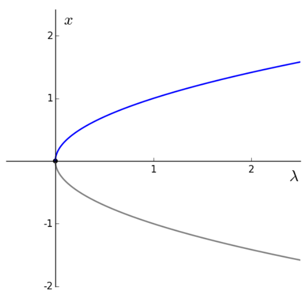

Figura 3.1: Bifurcación (tomado de [3, p. 31])

Así que en $\lambda = 0$ el conjunto de soluciones cambia radicalmente. Además si tomamos una vecindad de $(0, \lambda)$ con respecto a la topología de $\mathbb{R}^2$, nos damos cuenta que esta vecindad posee soluciones no triviales. A este punto se le denomina punto de bifurcación.

Estos fenómenos de bifurcación se producen ampliamente en la naturaleza. Principalmente en ecuaciones diferenciales que modelan procesos que evolucionan con el tiempo.

3.1. Punto de Bifucación

Definición 3.1.1 (Punto de Bifurcación)**.** *Sean* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *espacios de Banach y sea* Λ *un espacio topológico. Supongamos* $F : \mathbf{X} \times \Lambda \to \mathbf{Y}$ *una función continua. Para* $\lambda \in \Lambda$ *sea*

$$S_\lambda = \{x \in \mathbf{X} | F(x, \lambda) = 0\}$$

el conjunto solución de la ecuación $F(x, \lambda) = 0$ *donde* λ *es un parámetro. Supongamos que* $0 \in S_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$. *Entonces* $(0, \lambda_0)$ *es un punto de bifurcación, si para cada vecindad* U *de* $(0, \lambda_0)$*, existe* $(x, \lambda) \in U$ *con* $x \in S_\lambda - \{0\}$*[4, p.31].*

Nota 3.1.1. *De la definición anterior se tiene que* $(0, \lambda)$ *es un punto de bifurcación si y sólo si existe una sucesión* $\{(x_n, \lambda_n)\}$ *tal que* $f(x_n, \lambda_n) = 0$*,* $x_n \to 0$*,* $\lambda_n \to \lambda_0$*.*

Ejemplo 3.1.1. Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, \lambda) = x + x^3 - \lambda x$, entonces $(0, \lambda)$ es solución de $F(x, \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Si (x, λ) es solución, para $x \neq 0$ entonces

$$x^2 = \lambda - 1.$$

Luego para $\lambda \leq 1$ no existen más que soluciones triviales. Para $\lambda > 1$ el conjunto solución tiene como punto límite a $(0, 1)$. Luego $(0, 1)$ es punto de bifurcación y además $F_x(0, 1) = 0$ [1, p.20].

Ejemplo 3.1.2. Sean $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(x, \lambda) = x - \lambda x^2.$$

Si $F(x, \lambda) = 0$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, el punto $(0, \lambda)$ no es un punto de bifurcación. Puesto que el conjunto solución es $x - \lambda x^2 = 0$, que son la dos ramas de la hiperbola $x = \frac{1}{\lambda}$ en la cual $(0, \lambda)$ no es un punto límite. Notese que $F_x(0, \lambda) = 1$ [1, p.19].

3.2. Condiciones Necesarias

El siguiente teorema dá una condición necesaria para que $(0, \lambda_0)$ sea un punto de bifurcación.

Teorema 3.2.1. *Sea $F \in C(\mathbf{X} \times \Lambda, \mathbf{Y})$ tal que F_x es continua en $\mathbf{X} \times \Lambda$. Si $(0, \lambda_0)$ es un punto de bifurcación, entonces $F_x(0, \lambda_0)$ no es un homeomorfismo.*

Demostración. Supongamos que $F_x(0, \lambda_0)$ es un homeomorfismo es decir $F_x^{-1}(0, \lambda_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. Entonces f cumple las hipótesis del Teorema de la Función Implícita véase (2.2.3), luego existen $r, r_1 > 0$ y una función $u \in C(B_r(\lambda_0), B_{r_1}(0))$ tal que

$$F(u(\lambda), \lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in B_r(\lambda_0).$$

Por otro lado tenemos que $F(0, \lambda) = 0$ para $\lambda \in B_r(\lambda_0)$. Por la construcción de u hecha en el teorema, u resuelve de manera única la ecuación anterior en $B_r(\lambda_0)$, así que $u(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in B_r(\lambda_0)$. Luego $(0, \lambda)$ no es punto de bifurcación. Por tanto $F_x(0, \lambda_0)$ no es un homeomorfismo. □

Veamos que la condición obtenida en el teorema anterior es un condición necesaria para que $(0, \lambda_0)$ sea un punto de bifurcación, más no suficiente.

Ejemplo 3.2.1. Sean $\mathbf{X} = \mathbf{Z} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$, si

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Sea $f : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ definida por

$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v^3 \\ u^3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que

$$F_x(x, \lambda) = \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 3v^2 \\ -3v^2 & (1-\lambda) \end{pmatrix}.$$

Si $x = 0$ entonces $F_x(0, \lambda) = (1 - \lambda)I$, donde I denota la matriz identidad. Así que $F_x(0, \lambda)$ no es un homeomorfismo para $\lambda = 1$. Pero $(\theta, 1)$ no puede ser un punto de bifurcación, puesto que si $F(x, \lambda) = 0$ entonces se cumplen las siguientes ecuaciones

$$(1 - \lambda)uv = -v^4, \quad (1 - \lambda)uv = u^4.$$

Luego $u^4 = -v^4$, así $u = v = 0$ y la ecuación $F(x, \lambda) = 0$ solo tiene soluciones triviales, entonces $(0, \lambda)$ no es un punto de bifurcación [4, p.33].

Ejemplo 3.2.2. Sean $\mathbf{X} = \mathbf{Z} = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{Y} = \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, si

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Sea $f : \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ definida por

$$f(x,\lambda) = \beta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma u(u^2+v^2) \\ \gamma v(u^2+v^2) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \gamma > 0.$$

Entonces se tiene

$$F_x(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (\beta-\lambda)+\gamma(3u^2+v^2) & 2\gamma uv \\ 2\gamma uv & (\beta-\lambda)+\gamma(3v^2+u^2) \end{pmatrix}.$$

Si $x = \theta$ entonces $F_x(\theta,\lambda) = (\beta-\lambda)I$, donde I denota la matriz identidad. Por lo tanto el único punto que pueder ser de bifurcación es $(0,\beta)$.

Si $F(x,\lambda) = 0$ con $x \neq 0$, entonces

$$\gamma u(u^2+v^2) = u(\lambda-\beta), \qquad \gamma v(u^2+v^2) = v(\lambda-\beta).$$

Luego $u^2+v^2 = \frac{\lambda-\beta}{\gamma}$, el cual describe un paraboloide elipitico centrado en $(0,\beta)$ para $\lambda \neq \beta$. Así que $(0,\beta)$ es un punto de bifurcación [1, p.19].

3.2.1. Espectro de un Operador

Definición 3.2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$. El conjunto solvente se difine como*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}; (T-\lambda I) \text{ es biyectica de } \mathbf{X} \text{ sobre } \mathbf{X}\}.$$

El espectro $\sigma(T)$ es el complemento del conjunto solvente, $\sigma(T) = \mathbb{R} - \rho(T)$ [2, p.94].

Proposición 3.2.2. *El espectro $\sigma(T)$ es un conjunto compacto y*

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|].$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, con $|\lambda| > \|T\|$, se demostrará que $T - \lambda I$ es biyectivo, lo cual probará que $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Sea $y \in \mathbf{X}$, entonces la ecuación $Tu - \lambda u = y$ que se puede expresar como $u = \frac{1}{\lambda}(Tu - y)$, tiene solución única. En efecto, sea f una función, definida por

$$\begin{aligned} f :& \mathbf{X} \to \mathbf{X} \\ u \mapsto & f(u) = \frac{1}{\lambda}(Tu - y). \end{aligned}$$

Entonces f es una contracción, puesto que para $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$, se tiene

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f_\lambda(x_2)\| &= \left\| \frac{1}{\lambda} T(x_1 - x_2) \right\| \\ &\leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \|T\| \|x_1 - x_2\| \\ &< \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Por el (2.1.2), el Teorema de Contración de Banach existe un único punto fijo. Luego $T - \lambda I$ es biyectiva de $\mathbf{X}$ sobre $\mathbf{X}$.

Ahora se demostrará, que $\rho(T)$ es abierto. Sea $\lambda_0 \in \rho(T)$, entonces $(T - \lambda_0)^{-1}$ es un operador lineal acotado con $\left\|(T - \lambda_0)^{-1}\right\| > 0$. Sea $\epsilon = \frac{1}{\|(T-\lambda_0)^{-1}\|} > 0$, y $\lambda \in B_\epsilon(\lambda_0)$. De igual manera, se tratará de resolver $Tu - \lambda u = y$, para $y \in \mathbf{X}$, la cual se puede escribir de la forma $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$, es decir

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1} \left[y + (\lambda - \lambda_0)u\right].$$

Definamos la función g por

$$\begin{aligned} g :& \mathbf{X} \to \mathbf{X} \\ & u \mapsto g(u) = (T - \lambda_0 I)^{-1} \left[y + (\lambda - \lambda_0)u\right]. \end{aligned}$$

La cual es una contracción, puesto que para $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} \|g(x_1) - g(x_2)\| &= \left\|(T - \lambda_0 I)^{-1} \left[(\lambda - \lambda_0)(x_1 - x_2)\right]\right\| \\ &\leq |\lambda - \lambda_0| \left\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\right\| \|x_1 - x_2\| \\ &< \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Luego g tiene un único punto fijo. Asi que $(T - \lambda I)$ es biyectiva de $\mathbf{X}$ sobre $\mathbf{X}$. Por lo tanto, $\rho(T)$ es un conjunto abierto y su complemento $\sigma(T)$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Por tanto compacto [2, p.94]. □

Teorema 3.2.3. *Sea $\mathbf{X}$ un espacio de Banach, $U \subset \mathbf{X}$, una vecindad abierta de θ, sea $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbf{X}$ continua. Si*

$$F(x, \lambda) = Lx - \lambda x + N(x, \lambda),$$

donde $L \in \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $N : U \times \mathbb{R} \to \mathbf{X}$ continua tal que

$$\|N(x, \lambda)\| = \circ(\|x\|) \quad \textit{cuando}\, \|x\| \to 0$$

uniformemente para λ en un vecindad de λ_0. Si $(0, \lambda_0)$ es un punto de bifurcación, entonces $\lambda_0 \in \sigma(L)$, es decir λ_0 es un spectrum de L.

Demostración. Si $\lambda_0 \notin \sigma(L)$, entonces $\lambda_0 \in \rho(L)$, puesto que $\sigma(L) = \mathbb{R} - \rho(L)$, así λ_0 pertence al resolvente de L. Como $\rho(L)$ es abierto, existe $\epsilon > 0$ y $C_\epsilon > 0$ tal que

$$\left\|(L - \lambda I)^{-1}\right\| \leq C_\epsilon \quad \text{para } |\lambda - \lambda_0| < \epsilon.$$

Sea $x \in S_\lambda$, entonces $F(x, \lambda) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \left\|(L - \lambda I)^{-1} N(x, \lambda)\right\| \\ &\leq \left\|(L - \lambda I)^{-1}\right\| \|N(x, \lambda)\| \\ &\leq C_\epsilon \|N(x, \lambda)\| \\ &= \circ(\|x\|). \end{aligned}$$

Por tanto $x = 0$, y $(0, \lambda_0)$ no es un punto de bifurcación. $\square$

Capítulo 4

Conclusiones

- El concepto de derivación para funciones en espacios de dimensión infinita es fundamental en la matemática, ya que su extensión generaliza técnicas del cálculo que son primordiales para el desarrollo de muchas áreas.

- El Teorema de la Función Implícita para funciones de varias variables y su extensión a espacios de dimensión infinita, es una herramienta muy importante, particularmente en análisis no lineal, puesto que garantiza la dependencia entre variables ligadas por una ecuación, permitiendo así a la Teoría de Bifurcación analizar de una manera cualitativa el comportamiento del conjunto de soluciones de la ecuación. Lo cual es muy importante, puesto que muchos sistemas de ecuaciones no se pueden solucionarse de manera explicita.

Bibliografía

[1] Andrés Mauricio Rivera Acevedo, *Bifurcación de soluciones periódicas en el problema de sitnikov*, (2012), 1–144.

[2] Haim Brezis, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations.*, Springer, 2011.

[3] Jose F. Caicedo, *Cálculo avanzado. introducción*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2005.

[4] Kung-Ching Chang, *Methods in nonlinear analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[5] Weldel Fleming, *Functions of several variables*, Springer, New York, 1977.

[6] Steven G. Krantz, *The implicit function theorem*, Springer, New York, 2013.

[7] Erwin Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[8] Walter Rudin, *Principios de análisis matemático*, McGraw-Hill, México, 1980.

[9] A. Ambrosetti and G. Prodi, *Primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[10] T.M.Flett, *Differential analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.