MÉTODO DE CONTINUIDAD

Trabajo de Grado
Matemáticas

Diana Milena López Sierra

Director: Arturo Sanjuán

Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Bogotá D.C.
2015

A Alexis y Lina

Agradecimientos

A mis padres María y Oliverio por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, en toda mi educación, tanto académica, como de la vida, por su incondicional apoyo, sacrificio y cariño que me ha dado la fuerza para superar todas las adversidades.

A mi mejor amigo y mi esposo Alexis, por estar conmigo en aquellos momentos en que el estudio y el trabajo ocuparon todo mi tiempo. Gracias por toda tu ayuda, sacrificio y esfuerzo, por ser parte importante en el logro de mis metas profesionales, creer en mi capacidad y haber estado ahí en todos los momentos difíciles.

A Mis hermanos, Rubén, Nelson, Omar, Elver, Marcela y Felipe, por estar conmigo y apoyarme siempre, por permitirme vivir mis propias experiencias y aprender de las de ustedes. Los quiero mucho.

A mi director de trabajo de grado el Doctor en Matemáticas Álvaro Arturo Sanjuán Cuéllar, por su confianza, motivación, tiempo y amistad.

Y finalmente a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por abrirme sus puertas y permitirme vivir esta experiencia y crecimiento personal.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo estudiaremos la existencia y unicidad de soluciones a $Fx = y$ empezando con la descripción del comportamiento local de la función no lineal F mediante métodos puramente analíticos. Si f es diferenciable en una vecindad de x_0 es natural suponer algo acerca de la "primera aproximación"$F'(x_0)$, es decir, linealizar el problema no lineal a el problema lineal y estudiar las implicaciones de F cerca de x_0 a los supuestos acerca de $F'(x_0)$.

El resultado más simple de este tipo es el Teorema de la Función Inversa, el cual dice que F es un difeomorfismo de una pequeña vecindad U de x_0 en $F(U)$ si F es C^1 cerca a x_0 y $f'(x_0)$ es un homeomorfismo.

El Teorema de la Función Implícita (TFI) es de gran utilidad cuando queremos demostrar la existencia de soluciones para pequeñas perturbaciones de una ecuación determinada que tiene una solución conocida. En cuanto a las grandes perturbaciones, el TFI no es suficiente, hay que añadir nuevos ingredientes. El método continuidad es un principio general, que puede ser aplicado para probar la existencia de soluciones para una variedad de ecuaciones no lineales. Durante la descripción de El Método de Continuidad presentaremos algunos métodos y herramientas para demostrar que un conjunto es cerrado o abierto aplicando constantemente el Teorema de la Función Implícita. En la construcción del método introduciremos un parámetro $t \in [0, 1]$, tomamos $F(1, x) = f(x)$ y asumiendo que existe $x_0 \in X$ que satisface $F(0, x_0) = 0$. Queremos extender la solución x_0 de la ecuación $F(0, x) = 0$ a una solución de $F(1, x) = 0$. Para este propósito, definimos el conjunto

$$S = \{t \in [0, 1] : F(t, x) = 0 \ \ es \ \ solucionable\}.$$

Luego vamos a demostrar que para ver que $S = [0, 1]$, lo que necesitamos probar es que S es no vacío, abierto y cerrado con lo que garantizaremos la existencia de la solución a la ecuación:

$$f(x) = 0.$$

Este trabajo se desarrolla en cuatro capítulos. en el primer capitulo se encuentran algunos preliminares del análisis como Derivabilidad, Principio de Contracción y algunas generalidades y Teoremas importantes sobre los operadores lineales, los resultados que aparecen en este capitulo en su mayoría se presentan con demostración con el fin de que la teoría preliminar quede clara. Las demostraciones que no aparecen se pueden encontrar en las diferentes referencias bibliográficas. En el segundo capitulo se presentan el Teorema de la Función Implícita e Inversa con sus respectivas versiones en dimensión finita e infinita. El tercer capitulo es el problema central de este trabajo, en el cual se realiza la descripción detallada del Método de Continuidad cuya introducción ya se presento anteriormente. Finalmente se realizan las conclusiones en el capítulo cuatro.

CAPÍTULO 1

Preliminares Teóricos

1.1. Operadores Lineales

La presente sección presenta algunas observaciones referentes a los operadores lineales, un estudio mas detallado puede verse en [6, pág 97-107].

Definición. *Un operador lineal T es una aplicación tal que*

a) El dominio $\mathfrak{D}(T)$ de T es un espacio vectorial y el rango $\mathfrak{R}(T)$ esta en un espacio vectorial sobre el mismo campo.

b) Para todos los $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ y todo escalar α

$$T(x+y) = Tx + Ty \tag{1.1}$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \tag{1.2}$$

A menudo escribimos Tx en lugar de $T(x)$ si T es lineal.

Tomando $\alpha = 0$ en (1.2) podemos ver que $T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$ así que

$$T(0) = 0 \tag{1.3}$$

Definición. *Si T es un operador lineal, se define el espacio nulo o núcleo de T como*

$$N(T) = \{x \in \mathfrak{D}(T) : Tx = 0\} \tag{1.4}$$

Dado que cada $x \in X$ tiene una representación única como combinación de los elementos de la base, tenemos que

$$Tx = T\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i. \tag{1.5}$$

Si un operador T es inyectivo entonces existe el operador inverso de T dado por

$$\begin{array}{rcll} T^{-1}: \mathfrak{R}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{D}(T) & \\ y_0 & \longmapsto & x_0 & \qquad (y_o = Tx_0). \end{array}$$

Puede observarse que

$$\begin{array}{rcll} T^{-1}Tx & = & x & \qquad (x \in \mathfrak{D}(T)) \\ TT^{-1}y & = & y & \qquad (y \in \mathfrak{R}(T)) \end{array}$$

Si X, Y son espacios vectoriales, ambos reales. Sea $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow \mathfrak{R}(T)$ un operador lineal. Entonces

a) La inversa $T^{-1} : \mathfrak{R}(T) \longrightarrow \mathfrak{D}(T)$ existe si y solo si el espacio nulo $N(T) = \{0\}$ [6, pág 88]

b) Si T^{-1} existe, éste es un operador lineal.

Definición. *Sea X, Y espacios normados y $T : \mathfrak{D}(T) \longrightarrow Y$ un operador lineal, donde $\mathfrak{D}(T) \subseteq X$. El operador T es acotado si existe un número real c tal que para todo $x \in \mathfrak{D}(T)$,*

$$\|Tx\|_Y \leq c\|X\|_X \tag{1.6}$$

El más pequeño posible c que cumple lo anterior para todos los x no nulos en $\mathfrak{D}(T)$ es precisamente el supremo, denotado por

$$\|T\|_L = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{1.7}$$

$\|T\|$ es llamado la norma de el operador T. Si $\mathfrak{D}(T) = \{0\}$, definimos $\|T\| = 0$. Una fórmula alternativa para la norma de T es

$$\|T\|_L = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\| \tag{1.8}$$

Tomando $\|T\| = c$ en (1.6), obtenemos

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|_L\|X\|_X \tag{1.9}$$

Además si un espacio normado X es de dimensión finita, entonces cada operador lineal en X es acotado [6, pág 96]. Por ejemplo en $\mathbb{R}^n$ todo operador lineal cumple (1.9).

El siguiente Teorema relaciona los conceptos de conjunto abierto y continuidad, entre otros. Se presenta debido a su gran utilidad en la demostración del Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}^n$. Su demostración se obtuvo de [7, pág 209].

Teorema 1.1. *Sea Ω el conjunto de todos los operadores lineales invertibles en $\mathbb{R}^n$*

a) Si $A \in \Omega$, $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y

$$\|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| \leq 1 \tag{1.10}$$

entonces B es invertible.

b) Ω es un subconjunto abierto de $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ y la aplicación $A \to A^{-1}$ es continua en Ω

Demostración. a) Para ver que B es invertible es suficiente con demostrar que B es inyectiva, luego veremos que $N(T) = \{0\}$. Escribamos $\alpha = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ y $\beta = \|B - A\|$ entonces por (1.10) $\alpha > \beta$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha|x| = \alpha|A^{-1}Ax| \leq \alpha\|A^{-1}\||Ax| = |Ax| \tag{1.11}$$

luego por la desigualdad triangular

$$|Ax| \leq |(A - B)x| + |Bx| \leq \|B - A\||x| + |Bx| = \beta|x| + |Bx|.$$

Así que

$$(\alpha - \beta)|x| \leq |Bx| \qquad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{1.12}$$

Como $\alpha > \beta$ entonces $\alpha - \beta > 0$, así $Bx \neq 0$ si $x \neq 0$ luego $\mathfrak{N}(T) = \{0\}$, es decir B es inyectiva y por tanto invertible.

b) Sea $A \in \Omega$. Por (1.10), $\|B - A\| \leq \|A^{-1}\|^{-1}$, con $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, por tanto

$$B_{\|A^{-1}\|^{-1}}(A) \subset \Omega.$$

Así que Ω es abierto pues A es arbitrario.
Dado $\epsilon > 0$, tomemos

$$\delta = \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|^2}, \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1}\right\}.$$

Supongamos

$$B^{-1} - A^{-1} < \delta.$$

Si remplazamos x por $B^{-1}y$ en (1.12) obtenemos

$$(\alpha - \beta)|B^{-1}y| \leq |BB^{-1}y| \leq \|BB^{-1}\||y| = |y|. \tag{1.13}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
|y| &\geq (\|A^{-1}\|^{-1} - \|B - A\|)|B^{-1}y| \\
&= \|A^{-1}\|^{-1}(1 - \|A^{-1}\|\|B - A\|)|B^{-1}y| \\
&\geq \|A^{-1}\|^{-1}(1 - \frac{1}{2}\|A^{-1}\|\|A^{-1}\|^{-1})|B^{-1}y| \\
&= \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1}|B^{-1}y|
\end{aligned}$$

luego

$$2\|A^{-1}\| \geq \frac{|B^{-1}y|}{|y|} = \|B^{-1}\|. \tag{1.14}$$

Además mediante un calculo directo podemos ver que

$$B^{-1}(A-B)A^{-1} = B^{-1} - A^{-1} \tag{1.15}$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\|B^{-1} - A^{-1}\| &\leq \|B^{-1}\|\|(B-A)\|\|A^{-1}\| \\
&\leq 2\|A^{-1}\|\|(B-A)\|\|A^{-1}\| \\
&= 2\|A^{-1}\|^2\|(B-A)\| \\
&< 2\|A^{-1}\|^2\frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|^2} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

Así $A \to A^{-1}$ es continua.

■

1.2. Derivabilidad

Sean X, Y, Z espacios de Banach, con norma notada en ambos $\|\cdot\|$.Las siguientes definiciones de derivada de Fréchet y Gateaux son las que aparecen en [3, pág 2].

Definición (Derivada de Fréchet)**.** *Sea $U \subset X$ un conjunto abierto, $x_0 \in U$; decimos que $f : U \longrightarrow Y$ es Fréchet Diferenciable (o F-diferenciable) en x_0, si existe $A \in L(X,Y)$, tal que*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = A(h) + \circ(\|h\|),$$

donde $r(h) = \circ(\|h\|)$ es tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

$A = f'(x_0)$ es llamada la $F-$derivada de f en x_0 y a la función $r(h)$ se le denomina el *resto* de la diferencial.

Si F es $F-$diferenciable en cada punto de U y $x \longrightarrow f'(x)$ como función de U en $L(X,Y)$ es continua en x_0, entonces decimos que f es *continuamente diferenciable* en x_0, y si f es continuamente diferenciable en cada punto, entonces decimos que f es continuamente diferenciable sobre U ($f \in C^1(U,Y)$). Además en la definición como $x_0 \in U$ y U es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r \subseteq U\}$, luego si $h \in X$ es tal que $\|h\| < r$ entonces $x_0 + h \in U$.

Muchas veces es conveniente escribir la condición de ser $F-$diferenciable en x_0, de la siguiente manera:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = A(h) + p(h)\|h\|,$$

donde

$$\lim_{h\to 0} p(h) = 0.$$

Lo que equivale a decir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Para esto basta definir $p(h)\|h\| = r(h)$, esto requiere que $p(0) = 0$ y que

$$\lim_{h\to 0} p(h) = 0,$$

es decir que p sea continua en 0 como función de h.

A continuación probaremos algunas propiedades de la derivada que aparecen enunciadas en [3, pág 2]. Pero cuyas demostraciones se obtuvieron de otras fuentes como es el caso de la siguiente proposición la cual se puede encontrar en [2, pág 65].

Proposición 1.1. *Si f es $F-$diferenciable en x_0, entonces $f'(x_0)$ se determina de manera única.*

Demostración. Sean $A, B \in L(X, Y)$ con las condiciones de la definición anterior. Como $x_0 \in U$, existe $r > 0$ tal que $\|h\| < r$ implica que $x_0 + h \in U$, luego

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A(h) + p_1(h)\|h\| = f(x_0) + B(h) + p_2(h)\|h\|$$

donde

$$\lim_{h\to 0} p_i(h) = 0, \qquad p_i(0) = 0, \qquad para \;\; i = 1, 2.$$

Es decir p_i es continua. Si $v = 0$ de X, entonces $A(0) = B(0) = 0$, por tanto sea $v \in X$, $v \neq 0$ entonces para todo real t, tal que $\|tv\| < r$ obtenemos que $x_0 + tu \in U$. Luego para $h = tv$ con $t \neq 0$, deducimos que

$$f(x_0) + A(tv) + p_1(tv)\|tv\| = f(x_0) + B(tv) + p_2(tv)\|tv\|.$$

Es decir,

$$A(tv) - B(tv) = p_1(tv)\|tv\| - p_2(tv)\|tv\|.$$

Para $t \neq 0$, obtenemos

$$t(A(v) - B(v)) = \frac{\|v\|}{\|v\|}(p_1(tv)\|tv\| - p_2(tv)\|tv\|).$$

Esto es

$$A(v) - B(v) = \frac{\|v\|}{t\|v\|}(p_1(tv)\|tv\| - p_2(tv)\|tv\|).$$

Luego por propiedades de la norma

$$A(v) - B(v) = \frac{\|v\|}{\|tv\|}(p_1(tv)\|tv\| - p_2(tv)\|tv\|) = \|v\|(p_1(tv) - p_2(tv)).$$

La parte izquierda no depende de t, y como $tv \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow 0$, sumado a que p_i es continua en 0 tenemos

$$A(v) - B(v) = \|v\| \lim_{t\to 0}(p_1(tv) - p_2(tv)) = 0.$$

Luego $A(v) = B(v)$ para todo $v \in X$. ■

La siguiente proposicion es un resultado similar al hecho que sucede con la derivada usual, en la que diferenciabilidad implica continuidad [2, pág 68].

Proposición 1.2. *Si $f : U \subset X \longrightarrow Y$ es $F-$diferenciable en x_0, entonces f debe ser continua en x_0.*

Demostración. Como f es diferenciable en x_0 existe $A \in L(X,Y)$ y $r(h)$, tales que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + A(h) + r(h), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Esto implica que

$$\lim_{h\to 0} \|r(h)\| = 0.$$

Como A es lineal continua, entonces A es continua en cero, por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(x_0+h) &= \lim_{h\to 0} (f(x_0) + A(h) + r(h)) \\ &= f(x_0) + \lim_{h\to 0} A(h) + \lim_{h\to 0} r(h) \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

Por tanto f es continua en x_0. ■

La siguiente proposición hace referencia al hecho de que la suma de dos funciones diferenciables es otra función diferenciable. De igual manera el producto de una función diferenciable por un escalar da como resultado una función diferenciable. [2, pág 75].

Proposición 1.3 (*Linealidad*)**.** *Sean X y Y espacios normados, $U \subseteq X$ abierto, $x_0 \in U$; $f, g : U \longrightarrow Y$, diferenciables en a. Entonces para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tenemos que la función*

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g : U &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \end{aligned}$$

es diferenciable en x_0 y $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

Demostración. Como f, g son diferenciables en x_0, existen $r_i(h)$, $i = 1, 2$ tales que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + r_1(h), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} = 0$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)(h) + r_2(h), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\|r_2(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Luego obtenemos

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(x_0+h) - (\alpha f + \beta g)(x_0) &= \alpha(f(x_0+h) - f(x_0)) + \beta(g(x_0+h) - g(x_0)) \\ &= \alpha(f'(x_0)h + r_1(h)) + \beta(g'(x_0)h + r_2(h)) \\ &= (\alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0))h + (\alpha r_1(h) + \beta r_2(h)) \\ &= (\alpha f' + \beta g')(x_0)h + (\alpha r_1(h) + \beta r_2(h)) \end{aligned}$$

donde
$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\alpha r_1(h)+\beta r_2(h)\|}{\|h\|}\leq |\alpha|\lim_{h\to 0}\frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|}+|\beta|\lim_{h\to 0}\frac{\|r_2(h)\|}{\|h\|}=0$$
Ademas $(\alpha f'+\beta g')(x_0)$ es lineal continua como función de h, por serlo $f'(x_0)$ y $g'(x_0)$. ■

Se puede probar fácilmente la propiedad para el producto enunciada a continuación [2, pág 78-79]

Proposición 1.4. *Sean X espacio normado, $Y=\mathbb{R}$, $U\subseteq X$ abierto, $x_0\in U$; $f,g:U\longrightarrow Y$, diferenciables en x_0. Entonces*

$$\begin{array}{rcl}(fg):U & \longrightarrow & Y\\ x & \longmapsto & (fg)(x)=f(x)g(x)\end{array}$$

es diferenciable en x_0 y $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

La siguiente proposición se conoce como la regla de la cadena"para la diferenciación. Se ocupa de la diferenciación de las funciones compuestas y es probablemente uno de las propiedades más importante acerca de derivados.Su aplicación será muy amplia ya sea a la hora de hacer cálculos o en demostraciones posteriores. [7, pág 105].

Proposición 1.5 (*Regla de la Cadena*)**.** *Sean X, Y, Z espacios normados, supongamos $U\subseteq X$, $V\subseteq Y$ conjuntos abiertos, y sean $f:U\longrightarrow V$, $V\longrightarrow Z$ tales que f es $F-$diferenciable en $x_0\in U$ y g es $F-$diferenciable en $f(x_0)\in V$, entonces*

$$\begin{array}{rcl}(g\circ f):U & \longrightarrow & Z\\ x & \longmapsto & (g\circ f)(x)=g(f(x))\end{array}$$

es diferenciable en x_0 y

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Demostración. Como f es $F-$diferenciable en x_0, existe $f'(x_0)\in L(X,Y)$ tal que

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+\circ(\|h\|).$$

Tomando $w=f(x_0)$ y $k=f(x_0+h)-f(x_0)$, y dado que g es $F-$diferenciable en $w=f(x_o)$, tenemos

$$\begin{aligned}g(f(x_0+h))-g(f(x_0)) &= g(w+k)-g(w)\\ &= g'(w)k+\circ(\|k\|)\\ &= g'(w)(f(x_0+h)-f(x_0))+\circ(\|k\|)\\ &= g'(w)(f'(x_0)h+\circ(\|h\|))+\circ(\|k\|)\\ &= g'(w)f'(x_0)h+g'(w)\circ(\|h\|)+\circ(\|k\|)\\ &= g'(f(x_0))f'(x_0)h+g'(f(x_0))\circ(\|h\|)+\circ(\|k\|)\end{aligned}$$

donde $g'(f(x_0))\circ(\|h\|)+\circ(\|k\|)$ debe ser el resto en h, en efecto, denotemos $r_1(h) = \circ(\|h\|)$ y $r_2(k) = \circ(\|k\|)$, luego

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} = 0, \qquad \lim_{k\to 0} \frac{\|r_2(k)\|}{\|k\|} = 0.$$

Ahora

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|g'(f(x_0))r_1(h) + r_2(k)\|}{\|h\|} \leq \lim_{h\to 0} \frac{\|g'(f(x_0))\|\|r_1(h)\|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{\|r_2(k)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|r_2(k)\|}{\|h\|}.$$

Por la continuidad de f en x_0 y como $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$, entonces $k \to 0$, cuando $h \to 0$, así que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|r_2(k)\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\|r_2(k)\|}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|} = \lim_{k\to 0} \frac{\|r_2(k)\|}{\|k\|} \frac{\|k\|}{\|h\|} = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|g'(f(x_0))r_1(h) + r_2(k)\|}{\|h\|} = 0$$

■

Definición (Derivada de Gateaux)**.** *[3, pág 2]. Sea $U \subset X$ un conjunto abierto, $x_0 \in U$; decimos que $f : U \longrightarrow Y$ es Gateaux Diferenciable (o G-diferenciable), si para todo $h \in X$, existe $df(x_0, h) \in Y$ tal que*

$$\|f(x_0 + th) - f(x_0) - tdf(x_0, h)\| = \circ(t),$$

donde $t \to 0$, para todo $(x_0 + th) \in U$. Llamamos a $df(x_0, h)$ la $G-$derivada de f en x_0.

La definición anterior equivale a decir que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

existe. Ademas si f es $G-$diferenciable en x_0, entonces $df(x_0, h)$ se determina de manera única debido a la unicidad del limite.

Proposición 1.6. *$df(x_0, th) = |t|df(x_0, h)$, para todo $t \in \mathbb{R}$*

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$ y $h \in X$. Si $t = 0$

$$df(x_0, t\lambda h) = df(x_0, 0) = 0,$$

luego sea $t \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} df(x_0, th) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda h) - f(x_0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{(f(x_0 + t\lambda h) - f(x_0))|t|}{\lambda|t|} \\ &= |t| \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x_0 + t\lambda h) - f(x_0)}{\lambda|t|} \\ &= |t|df(x_0, h) \end{aligned}$$

La ultima igualdad se debe a que $t\lambda \to 0$ cuando $t \to 0$ ■

El siguiente Teorema relaciona el hecho de ser $F-$diferenciable y $G-$diferenciable. [2, pág 67].

Teorema 1.2. *Si f es $F-$diferenciable en x_0, entonces f es $G-$diferenciable en x_0, con $df(x_0,h) = f'(x_0)h$, para todo $h \in X$.*

Demostración. Sea $h \in X$, $h \neq 0$, como $x_0 \in U$ y U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que si $t \in \mathbb{R}$ satisface $\|th\| \leq |t|\|h\| < \delta$, entonces $(x_0 + th) \in U$, y como f es $F-$diferenciable en x_0 existe $A \in L(X,Y)$, $A = f'(x_0)$ tal que

$$f(x_0+th) = f(x_0) + f'(x_0)(th) + r(th), \qquad \lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{\|th\|} = 0.$$

Para $t \neq 0$

$$\frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} - \frac{r(th)}{t} = f'(x_0)(h)$$

El lado derecho no depende de t, luego el limite cuando $t \to 0$ existe y es precisamente $f'(x_0)h$, esto es

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} - \frac{r(th)}{t} = f'(x_0)(h).$$

Ahora como

$$\lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = \frac{\|h\|}{\|h\|} \lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = \|h\| \lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t\|h\|} = \|h\| \lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{\mathrm{sgn}(t)\|th\|} = \frac{\|h\|}{\mathrm{sgn}(t)} \lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{\|th\|} = 0$$

entonces

$$df(x_0,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = f'(x_0)(h)$$

para toda $h \in X$. ∎

El recíproco del teorema anterior no es siempre cierto, un ejemplo de esto es:

Ejemplo. *Sea*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,z) & \longmapsto & f(x,z) = \begin{cases} \dfrac{xz^2}{x^2+z^2} & \textit{si } (x,z) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{si } (x,z) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

f es $G-$diferenciable en 0, pero no es $F-$diferenciable, en efecto: Veamos primero que f es $G-$diferenciable en 0, en toda dirección h.
Para $h = (h_1,h_2) = (0,0)$

$$df(x_0,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Para $h = (h_1,h_2) \neq (0,0)$

$$df(0,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th_1,th_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 h_1 h_2^2}{t^3(h_1^2+h_2^2)} = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2}.$$

el anterior limite existe pues $h_1, h_2 \neq 0$. Así que f es $G-$diferenciable.
Ahora veamos que f no es $F-$diferenciable en 0, para ellos supongamos que f fuera diferenciable en 0, como

$$f'(0,0)(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)}{t} = 0$$

y

$$f'(0,0)(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)}{t} = 0.$$

Sean $u, v \in \mathbb{R}$

$$f'(0,0)(u,v) = uf'(0,0)(1,0) + vf'(0,0)(0,1) = 0$$

es decir, $f'(0,0) = 0$, luego la aplicación lineal continua de la derivada de Fréchet es cero, así

$$\begin{aligned} f((0,0)+(h,k)) &= f(0,0) + 0 + r(h,k) \\ f(h,k) &= r(h,k) \end{aligned}$$

con

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} = \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0.$$

En $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|x\|_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ obtenemos que para $h = k \neq 0$

$$f(h,h) = r(h,h) = \frac{h^3}{2h^2} = \frac{1}{2}h$$

luego

$$\frac{r(h,h)}{\|(h,h)\|_1} = \frac{h}{2\sqrt{2}|h|} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Por tanto el limite cuando $h \to 0$ no existe, así que f no es $F-$diferenciable en $(0,0)$.

El siguiente Teorema nos presenta las condiciones necesarias bajo las cuales ser $G-$diferenciable implica ser $F-$diferenciable. ([3, pág 3].

Teorema 1.3. *Supongamos que $f : U \longrightarrow Y$ es $G-$diferenciable y que para todo $x \in U$, existe $A(x) \in L(X,Y)$ que satisface que*

$$df(x,h) = A(x)h$$

para toda $h \in X$. Ademas la función

$$\begin{aligned} f' : U &\longrightarrow L(X,Y) \\ x &\longmapsto A(x) \end{aligned}$$

es continua en x_0, entonces f es $F-$diferenciable en x_0, con $f'(x_0) = A(x_0)$.

Demostración. Sin perdida de generalidad asumamos que el segmento $\{x_0 + th : t \in [0,1]\}$ esta en U, por lema del Teorema de Hahn Banach [1, pág 3] existe $y^* \in Y^*$ con $\|y^*\| = 1$ tal que

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - A(x_0)h\|_Y = \langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0) - A(x_0)h\rangle. \tag{1.16}$$

Sea

$$\varphi(t) = \langle y^*, f(x_0 + th)\rangle \tag{1.17}$$

como y^* es lineal

$$\begin{aligned} |\langle y^*, f(x_0+h) - f(x_0) - A(x_0)h\rangle| &= |\langle y^*, f(x_0+h)\rangle - \langle y^*, f(x_0)\rangle - \langle y^*, A(x_0)h\rangle| \\ &= |\varphi(1) - \varphi(0) - \langle y^*, A(x_0)h\rangle|. \end{aligned}$$

Dado que y^* es continua, f es continua y compuesta de continuas es continua entonces φ es continua en $[0,1]$. Además como f es $G-$diferenciable

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \frac{\varphi(t+s)-\varphi(t)}{s} &= \lim_{s\to 0} \frac{\langle y^*, f(x_0+(t+s)h)\rangle - \langle y^*, f(x_0+th)\rangle}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \left\langle y^*, \frac{f(x_0+(t+s)h) - f(x_0+th)}{s} \right\rangle \\ &= \left\langle y^*, \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+(t+s)h) - f(x_0+th)}{s} \right\rangle \\ &= \langle y^*, df(x_0+th, h)\rangle \end{aligned}$$

luego φ es diferenciable en $(0,1)$, así que por el Teorema del Valor Medio existe $\xi \in (0,1)$ tal que

$$|\varphi(1) - \varphi(0) - \langle y^*, A(x_0)h\rangle| = |\varphi'(\xi) - \langle y^*, A(x_0)h\rangle|.$$

Por la diferenciabilidad de φ y la linealidad de y^* se tiene

$$\begin{aligned} |\varphi'(\xi) - \langle y^*, A(x_0)h\rangle| &= |\langle y^*, df(x_0+\xi h, h)\rangle - \langle y^*, A(x_0)h\rangle| \\ &= |\langle y^*, df(x_0+\xi h, h) - A(x_0)h\rangle| \end{aligned}$$

por hipótesis $df(x,h) = A(x)h$ para toda $h \in X$, así que

$$\begin{aligned} |\langle y^*, df(x_0+\xi h, h) - A(x_0)h\rangle| &= |\langle y^*, A(x_0+\xi h)h - A(x_0)h\rangle| \\ &= |\langle y^*, (A(x_0+\xi h) - A(x_0))h\rangle| \\ &\leq \|A(x_0+\xi h) - A(x_0)\|_L \|h\|_X \\ &= \|A(x_0+\xi h) - A(x_0)\|_L \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$. Luego

$$\|f(x_0+h) - f(x_0) - A(x_0)h\|_Y = \circ(\|h\|) \tag{1.18}$$

con $f'(x_0) = A(x_0)$. ■

A continuación vamos a presentar algunos ejemplos de funciones derivables en sentido de Fréchet y por tanto también Gateaux diferenciables.

Ejemplo. *a) Sean E, F espacios normados, $A \subseteq E$ abierto y $f : A \longrightarrow F$ tal que $f(x) = c$ constante, entonces f es diferenciable en A y $f'(x) = 0$, para todo $x \in A$. Es fácil ver esto, tomando $r(h) = 0$ se concluye, ya que $f(x+h) = c = f(x)$.*

b) Consideremos E espacio normado, $G = L(E,E)$ el espacio normado de las aplicaciones lineales continuas de E en E, con la norma

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \|T(x)\|. \tag{1.19}$$

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f : G &\longrightarrow G \\ L &\longmapsto \quad f(L) = L^2 = L \circ L \end{aligned}$$

f es diferenciable en L, para toda $L \in G$.
Solución: *Sean $L, H \in G$*

$$f(L+H) - f(L) = (L+H)^2 - L^2 = L^2 + HL + LH + H^2 - L^2 = HL + LH + H^2$$

Si tomamos

$$f'(L) : G \longrightarrow G \tag{1.20}$$

$$H \longmapsto f'(L)(H) = HL + LH. \tag{1.21}$$

Veamos que $f'(L)$ es lineal como función de H. Sean α, β escalares y $L, M \in G$, entonces

$$\begin{aligned} f'(\alpha L + \beta M)(H) &= H(\alpha L + \beta M) + (\alpha L + \beta M)H \\ &= \alpha HL + \beta HM + \alpha LH + \beta MH \\ &= \alpha(HL + LH) + \beta(HM + MH) \\ &= \alpha f'(L)(H) + \beta f'(M)(H). \end{aligned}$$

Ahora para ver la continuidad de $f'(L)$, apliquemos algunas propiedades de la norma

$$\begin{aligned} \|f'(L)(H)\| &= \|HL + LH\| \\ &\leq \|H\|\|L\| + \|L\|\|H\| \\ &= 2\|L\|\|H\| \end{aligned}$$

luego existe $a = 2\|L\|$ tal que $\|f'(L)(H)\| \leq a\|H\|$. Así por propiedad de las aplicaciones lineales (ver [2, pág 15-16]) $f'(L)$ es continua. Nos falta mostrar que si tomamos $r(H) = H^2$, tenemos que $\frac{\|r(H)\|}{\|H\|} \longrightarrow 0$ cuando $H \longrightarrow 0$, en efecto

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = \lim_{H\to 0} \frac{\|H^2\|}{\|H\|} = \lim_{H\to 0} \frac{\|HH\|}{\|H\|} \leq \lim_{H\to 0} \frac{\|H\|\|H\|}{\|H\|} = \lim_{H\to 0} \frac{\|H\|^2}{\|H\|} = \lim_{H\to 0} \|H\| = 0.$$

Así $f(L+H) - f(L) = f'(L)(H) + H^2$, por tanto f es diferenciable en todo $L \in G$.

c) Sea E espacio vectorial normado, la norma $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ no es diferenciable en 0. En efecto si la norma fuese diferenciable en 0, existiría $L \in L(E, \mathbb{R})$ y $r(h)$ tal que

$$\|h\| = \|0\| + L(h) + r(h) = L(h) + r(h), \quad \text{con} \quad \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Entonces dado que L es lineal

$$\begin{aligned} 2\|h\| &= \|h\| + \|-h\| \\ &= L(h) + r(h) + L(-h) + r(-h) \\ &= L(h-h) + r(h) + r(-h) \\ &= L(0) + r(h) + r(-h) \\ &= r(h) + r(-h). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h) + r(-h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{2\|h\|}{\|h\|} = 2.$$

Pero también tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h) + r(-h)}{\|h\|} = 0$$

lo que es una contradicción, luego la norma no es diferenciable en 0.

d) *Consideremos el espacio vectorial* $E = M_{n\times n}$ *sobre* $\mathbb{R}$, *dotado de la norma*

$$\|L\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Lx\|.$$

y sea

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ L &\longmapsto f(L) = LL^t \end{aligned}$$

Entonces f *es diferenciable para toda* $L \in G$ *y* $f'(L)(H) = LH^t + HL^t$.
Sean $L, H \in M_{n\times n}$, *entonces*

$$f(L+H) - f(L) = (L+H)(L+H)^t - LL^t = LH^t + HL^T + HH^t.$$

Luego tomando $r(H) = HH^t$

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = \lim_{H\to 0} \frac{\|HH^t\|}{\|H\|} \leq \lim_{H\to 0} \frac{\|H\|\|H^t\|}{\|H\|} = \lim_{H\to 0} \frac{\|H\|\|H\|}{\|H\|} = \lim_{H\to 0} \|H\| = 0.$$

así que $r(H) = HH^t$ *es el resto. Ver que* $f'(L)(H) = LH^t + HL^t$ *es lineal es muy sencillo, y como la dimensión de el espacio vectorial de las matrices cuadradas es* n^2 *finito, entonces todo operador lineal es acotado y por tanto continuo (ver [6, pág 96-97])*

1.3. Principio de Contracciones

Ahora Interrumpimos nuestra discusión de la diferenciación para introducir la siguiente definición que hace referencia a aquellas funciones que contraen las distancias entre los puntos de un espacio métrico. En general toda esta sección puede encontrarse en [7, pág 220,221].

Definición. *Sea X un espacio métrico con métrica d. Si $\varphi : X \to X$ y si existe un $c \in (0,1)$ tal que*

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x,y)$$

para todo $x, y \in X$, entonces se dice que $\varphi : X \to X$ es una contracción.

Teorema 1.4. *Sea $\varphi : X \to X$ una contracción. Entonces φ es continua.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Como $\varphi : X \to X$ es una contracción entonces existe un $c \in (0,1)$ tal que

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x,y)$$

Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ se tiene que si $d(x,y) < \delta$ entonces

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq cd(x,y) < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon$$

Lo que demuestra que φ es continua. ■

De hecho la continuidad de φ es uniforme ya que δ depende exclusivamente de ϵ. El siguiente teorema es también llamado el Teorema del Punto Fijo, el cual es válido en espacios métricos completos arbitrarias. Se utilizará en la prueba del teorema de la función inversa. [7, pág 220,221].

Teorema 1.5 (Principio de Contracciones)**.** *Si X es un espacio métrico completo, y si $\varphi : X \to X$ es una contracción, existe entonces un único $x \in X$ tal que $\varphi(x) = x$.*

Demostración. Para demostrar la unicidad supongamos que existen $x, y \in X$ tales que $\varphi(x) = x$ y $\varphi(y) = y$ entonces por la definición de contracción existe $c \in (0,1)$ tal que

$$d(x,y) \leq cd(x,y)$$

lo cual es posible solo si $d(x,y) = 0$ y como d es métrica esto sucede solo si $x = y$.
Para demostrar la existencia, sea $x_0 \in X$, y definamos la sucesión (x_n) en X de manera recurrente, de la forma

$$x_1 = \varphi(x_0), \qquad x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.22}$$

Sea $c \in (0,1)$ como en la definición de contracción, entonces para $n \geq 1$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi(x_n), \varphi(x_{n-1})) \leq cd(x_n, x_{n-1}) \tag{1.23}$$

Aplicando inducción probaremos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.24}$$

En efecto, para $n = 0$ se tiene $d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x_0)$. Para $n = 1$, se tiene por (1.23) que $d(x_2, x_1) \leq cd(x_1, x_0)$. Supongamos que $d(x_{n+1}, x_n) \leq c^n d(x_1, x_0)$ y veamos que se cumple para $n + 1$.

$$d(x_{(n+1)+1}, x_{n+1}) \leq c^n d(x_{n+1}, x_n) \leq cc^n d(x_1, x_0) = c^{n+1} d(x_1, x_0) \tag{1.25}$$

Si $m > n \geq 1$, se deduce que

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d(x_i, x_{i-1}) \\
&= d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_m, x_{m-1}) \\
&\leq (c^n + c^{n+1} + c^{n+2} + \cdots + c^{m-1}) d(x_1, x_0) \\
&= \frac{c^n(1 - c^{n-m})}{1 - c} d(x_1, x_0) \\
&\leq \frac{c^n}{1 - c} d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

Las dos últimas desigualdades se basan en [7, pág 61]. Como $c \in (0,1)$, entonces si $n \to \infty$ se tendra que $c^n \to 0$, por lo tanto x_n es de Cauchy y como X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$. Es decir, dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$. A partir de lo anterior demostremos que x es punto fijo

$$\begin{aligned}
d(x, \varphi(x)) &\leq d(x, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, \varphi(x)) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + d(\varphi(x_N), \varphi(x)) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + c(d(x_N, x)) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + c\frac{\epsilon}{2} \\
&= c\epsilon \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

La última desigualdad se tiene ya que $c \in (0,1)$. ■

Ejemplo. *Sea $X = \mathbb{R}$, con la métrica usual de $\mathbb{R}$. Definimos $\varphi : X \to X$ por*

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

entonces φ es una contracción, ya que

$$\begin{aligned}
d(\varphi(x), \varphi(y)) &= \left| \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} |x - y| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} d(x, y)
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}$ es completo, apliquemos la construcción de la demostración del Principio de Contracción (también llamado Teorema del Punto Fijo de Banach) para encontrar el punto fijo.
Sea $x_0 = 1$, luego

$$\varphi(x_0) = \varphi(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = x_1$$

$$\varphi(x_1) = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = x_2$$

$$\varphi(x_2) = \varphi\left(\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = x_2$$

así sucesivamente hasta

$$\varphi(x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}} = x_{n+1}.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}} = 0.$$

Por tanto el único punto fijo es $x = 0$

Ejemplo. *Sea* $T : [1, 2] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$T(x) = \sqrt[3]{1+x}$$

Luego, sean $x, y \in [1, 2]$. *Por el Teorema de Valor Medio [7, pág 108] existe* $c \in (1, 2)$ *tal que*

$$T(x) - T(y) = T'(c)(x - y)$$

Como $T'(c) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}$ *y dado que* $1 < c < 2$, *se tiene que*

$$\sqrt[3]{2^2} < \sqrt[3]{(c+1)^2} < \sqrt[3]{3^2}.$$

Así

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}} \geq \frac{1}{3\sqrt[3]{(c+1)^2}}$$

con lo que

$$T'(c) \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}}.$$

Como

$$3\sqrt[3]{2^2} > 1,$$

tenemos que

$$\alpha = \frac{1}{3\sqrt[3]{2^2}} < 1.$$

Además

$$T([1, 2]) \subseteq [1, 2]$$

En efecto, sea $y \in T([1, 2])$ *esto es* $y = \sqrt[3]{1+x_0}$, *para algún* $x_0 \in [1, 2]$. *De donde* $1 \leq 1 + x_0 \leq 2$ *y por tanto*

$$1 \leq (1 + x_0)^{\frac{1}{3}} \leq 2^{\frac{1}{3}} \leq 2.$$

Entonces

$$|T(x)-T(y)| = |T'(c)(x-y)| \leq \alpha|x-y|$$

con $\alpha \in (0,1)$, *por tanto* T *es una contracción.*

Dado que todo cerrado contenido en un espacio métrico completo es completo, podemos aplicar el Principio de Contracción que nos garantiza la existencia de un único punto fijo en $[1,2]$, *para hallar dicho punto podríamos utilizar la construcción del Teorema del Punto Fijo o simplemente solucionar la ecuación* $x^3 - x - 1$, *de la cual obtenemos que el punto fijo es*

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{69}}{18}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{\sqrt{69}}{18}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

En el siguiente teorema aplicaremos el Principio de Contracciones para demostrar que la imagen de un conjunto abierto bajo una función φ, la cual es una perturbación de la función identidad por una contracción, es abierto. Este teorema será de vital importancia para la demostración del teorema de Función Inversa en dimensión infinita, por lo que se presenta su demostración detallada obtenida de [2, pág 277].

Teorema 1.6 (Perturbación de la identidad)**.** *Sea* E *espacio de Banach,* $A \subset E$ *abierto,* $f : E \longrightarrow E$ *contracción,* $\varphi : A \longrightarrow E$, *de la forma* $\varphi(x) = x + f(x)$. *Entonces* φ *es un homeomorfismo de* A *sobre* $\varphi(A)$ *y* $\varphi(A)$ *es abierto en* E

Demostración. φ es aplicación continua de A sobre $\varphi(A)$, pues dado que f es contracción, para $x, y \in A$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in (0,1)$ tal que

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \lambda\|x-y\|. \tag{1.26}$$

Ahora para todo $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{1+\lambda}$, tenemos que si $\|x-y\| < \delta$ entonces

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| = \|x+f(x)-y-f(y)\| \leq \|x-y\| + \|f(x)-f(y)\| < \delta + \lambda\|x-y\| < \delta(1+\lambda) = \epsilon.$$

De (1.26) podemos ver también que

$$-\lambda\|x-y\| \leq -\|f(x)-f(y)\| \qquad (x, y \in A), \tag{1.27}$$

luego

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x)-\varphi(y)\| &= \|x+f(x)-y-f(y)\| \\
&= \|x-y-(f(y)-f(x))\| \\
&\geq \|x-y\| - \|(f(x)-f(y))\| \\
&\geq \|x-y\| - \lambda\|x-y\| \\
&= (1-\lambda)\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Como $(1-\lambda) > 0$, entonces si $x \neq y$,

$$\|\varphi(x)-\varphi(y)\| \geq (1-\lambda)\|x-y\| > 0$$

así que φ es inyectiva. Además $\varphi^{-1} : \varphi(A) \longrightarrow A$ es continua. Aún mas, si $z = \varphi(x), w = \varphi(y)$, vemos que

$$\|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(w)\| \leq \frac{1}{1-\lambda}\|z - w\|,$$

es decir, φ^{-1} es uniformemente continua. Por todo esto, φ es homeomorfismo de A sobre $\varphi(A)$. Ahora veamos que $\varphi(A)$ es abierto. Sea $b \in \varphi(A)$, luego existe $a \in A$ tal que $b = \varphi(a) = a + f(a)$. Como A es abierto, existe $r > 0$ suficientemente pequeño tal que $\overline{B}_r(a) = \{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \subset A$, de aquí que

$$B_\delta(b) = \{y \in E : \|y - b\| \leq \delta\} \subset \varphi(A), \qquad con \quad \delta = (1-\lambda)r.$$

Sea $y \in B_\delta(b)$, veamos que existe $x \in A$ tal que $y = \varphi(x)$. Si $g(y, \cdot)$ es la función

$$\begin{array}{rcl} g(y,\cdot) : A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(y,x) = y - f(x) \end{array}$$

como $\overline{B}_r(a)$ es cerrado y E es espacio de Banach y por tanto completo, entonces $\overline{B}_r(a)$ es espacio métrico completo con la norma de E restringida a $\overline{B}_r(a)$, entonces:

a) Sea $x \in \overline{B}_r(a)$,

$$\begin{array}{rcl} \|g(y,x) - a\| & = & \|y - f(x) - a\| \\ & \leq & \|y - f(a) - a\| + \|f(a) - f(x)\| \\ & = & \|y - (f(a) + a)\| + \|f(a) - f(x)\| \\ & = & \|y - b\| + \|f(a) - f(x)\| \\ & \leq & \delta + \lambda\|a - x\| \\ & \leq & \delta + \lambda r \\ & = & (1-\lambda)r + \lambda r \\ & = & r. \end{array}$$

Luego, $\|g(y,x) - a\| \leq r$ para toda $x \in \overline{B}_r(a)$, es decir $g(y, \overline{B}_r(a)) \subset \overline{B}_r(a)$.

b) Sean $x, z \in \overline{B}_r(a)$,

$$\begin{array}{rcl} \|g(y,x) - g(y,z)\| & = & \|y - f(x) - y + f(z)\| \\ & = & \|f(z) - f(x)\| \\ & \leq & \lambda\|z - x\|. \end{array}$$

Como $\lambda \in (0,1)$, entonces $g(y,\cdot)$ es contracción de $\overline{B}_r(a)$ en si mismo.

Por tanto, en virtud del principio de contracción (Teorema 1.5), $g(y,\cdot)$ posee un único punto fijo, digamos x. Es decir $g(y,x) = x$, luego $y - f(x) = x$, por lo tanto $y = f(x) + x = \varphi(x) \in \varphi(A)$, luego $\varphi(A)$ es abierto. ■

CAPÍTULO 2

Teorema de la Función Inversa e Implícita

2.1. Casos de Dimensión Finita

La siguiente definición trata sobre la convexidad de conjuntos. Un conjunto es convexo cuando el segmento que une cualquier par de puntos del conjunto está completamente contenido en el conjunto. El hecho de que cada $n-$bola en $\mathbb{R}^n$ sea convexa será de gran utilidad en la demostración del Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}^n$, por lo cual se presenta demostrada como ejemplo. [7, pág 31].

Definición. *Un conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ se dice convexo si para cada para de puntos $x, y \in E$ y cada número real θ que satisfaga $0 \leq \theta \leq 1$, se verifica que*

$$\theta x + (1-\theta)y \in E. \tag{2.1}$$

Ejemplo. *Cada $n-$bola en $\mathbb{R}^n$ es convexa. En efecto, sea $B_r(p)$ una $n-$bola en $\mathbb{R}^n$ y sean $x, y \in B_r(p)$. Consideremos $\theta(x) + (1-\theta)y$ donde $0 \leq \theta \leq 1$ entonces,*

$$\begin{aligned} \|\theta(x) + (1-\theta)y - p\| &= \|\theta(x) + (1-\theta)y - p + \theta p - \theta p\| \\ &= \|\theta(x-p) + (1-\theta)(y-p)\| \\ &\leq \theta\|(x-p)\| + (1-\theta)\|(y-p)\| \\ &< \theta r + (1-\theta)r \\ &= r \end{aligned}$$

así $\theta(x) + (1-\theta)y \in B_r(p)$ para $0 \leq \theta \leq 1$.

En la demostración del siguiente teorema se utiliza la desigualdad del Valor Medio para Funciones Vectoriales, el cual puede encontrarse en [7, pág 113]. La utilidad del teorema que se demostrará a continuación radica en la demostración de el Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}^n$, permitiéndonos obtener la desigualdad necesaria para garantizar que la función construida sea una contracción. [7, pág 218].

Teorema 2.7. *Supongamos que $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto conexo, $f : E \to \mathbb{R}^m$, f es diferenciable en E y existe un numero real M tal que*

$$\|f'(x)\| \leq M \tag{2.2}$$

para cada $x \in E$. Entonces

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \tag{2.3}$$

para todo $a \in E$, $b \in E$.

Demostración. Sean $a \in E$, $b \in E$ fijos. Definamos

$$\gamma(t) = (1 - t)a + tb. \tag{2.4}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(t) \in E$.Como E es convexo $\gamma(t) \in E$ si $0 \leq t \leq 1$. Haciendo

$$g(t) = f(\gamma(t))$$

Como $\gamma'(t) = b - a$, entonces por regla de la cadena tenemos que

$$g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) = f'(\gamma(t))(b - a)$$

así por (2.2) existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|g'(t)| = |f'(\gamma(t))(b - a)| \leq \|f'(\gamma(t))\||(b - a)| \leq M|b - a|$$

para $\gamma(t) \in E$, es decir para todo $t \in [0, 1]$. Por la desigualdad del Valor Medio para Funciones Vectoriales tenemos que

$$|g(1) - g(0)| \leq M|b - a| \tag{2.5}$$

Pero $g(0) = f(\gamma(0)) = f(a)$ y $g(1) = f(\gamma(1)) = f(b)$. Así que

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \tag{2.6}$$

para todo $a \in E$, $b \in E$. ■

No toda función puede ser invertida sin ambigüedades. Consideremos, por ejemplo, $y = f(x) = x^2$. Para una y dada hay dos x que le corresponden. Aún peor es el caso de $y = g(x) = \sin x$. Tales funciones no tienen inversas; por lo menos, no a menos que restrinjamos de alguna manera el dominio de la función. Sería bueno tener un criterio para decir si una función f tiene inversa, que además nos proporcione un método para encontrar la derivada de una función inversa en relación con la derivada de la función original. De ahí la importancia de el Teorema de la Función Inversa. [8, pág 32].

Teorema 2.8 (TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA EN $\mathbb{R}$). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable continua en (a,b). Supongamos que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) \neq 0$. y que f es monótona en $(c-\delta, c+\delta)$ esto es que existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ en $(c-\delta, c+\delta)$ o $f'(x) < 0$ en $(c-\delta, c+\delta)$. Entonces existe f^{-1} en $(c-\delta, c+\delta)$ derivable con*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(c)}$$

para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$, $y = f(x)$.

Demostración. Supongamos que c es un punto en (a,b) en el que $f'(c) \neq 0$ y sea $y = f(c)$. Veamos que f^{-1} existe, en efecto supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $f'(x) > 0$ en $(c-\delta, c+\delta)$ y sean $x_1 \in (c-\delta, c+\delta)$, $x_2 \in (c-\delta, c+\delta)$ luego si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ y si $x_2 < x_1$ entonces $f(x_2) < f(x_1)$. Por tanto si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esto es, f es inyectiva. Por lo que f^{-1} existe en $(c-\delta, c+\delta)$ y por el Teorema del Valor Intermedio, como f es continua en $[c-\delta, c+\delta]$ y $f(c-\delta) \neq f(c+\delta)$ entonces f toma todos los valores entre $f(c-\delta)$y $f(c+\delta)$ en el intervalo $[c-\delta, c+\delta]$. Así el dominio de f^{-1} sera $[f(c-\delta), f(c+\delta)]$ y el rango es $[c-\delta, c+\delta]$. Veamos ahora que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(c)}.$$

Como

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

podríamos aplicar regla de la cadena para obtener

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot f^{-1}(y) = 1.$$

De modo que

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Pero esto no es una demostración de que f^{-1} sea derivable, puesto que la regla de la cadena solo puede aplicarse si de ante mano se sabe que f^{-1} es derivable. Así que para la demostración debemos ver que

$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(c)}.$$

Tomemos $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)$, como $c = f^{-1}(y)$ entonces $h = f^{-1}(y+k) - c$ es decir, $c+h = f^{-1}(y+k)$. Así $f(c+h) = y+k$, que equivale a $f(c+h) - f(c) = k$. Si $k \neq 0$, $f(c+h) \neq f(c)$ y como f es estrictamente creciente en $(c-\delta, c+\delta)$ entonces $h \neq 0$. Así

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(c+h) - f(c)} = \frac{1}{\frac{f(c+h) - f(c)}{h}}. \tag{2.7}$$

Para continuar la demostración veamos que f^{-1} es continua en $[f(c-\delta), f(c+\delta)]$. Sea $y_0 \in (f(c-\delta), f(c+\delta))$ debemos ver que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $y \in (y_0 - \delta_0, y_0 + \delta_0)$ entonces $f^{-1}(y) \in$

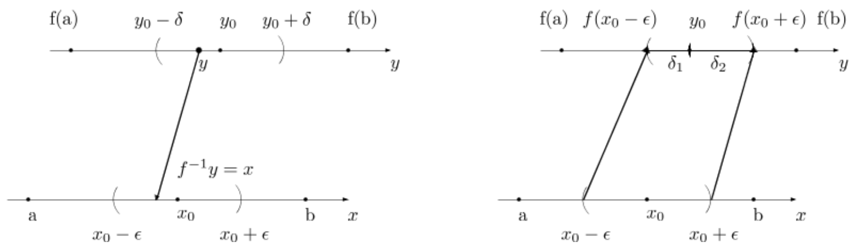

Figura 2.1: **Teorema de la Función Inversa**

$((f^{-1}(y_0)-\epsilon, f^{-1}(y_0)+\epsilon))$ (fig 2.1). En efecto, tomemos $x_0 = f^{-1}(y_0)$ luego $f(x_0) = y_0$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_0 - \epsilon$ y $x_0 + \epsilon$ están en $[c-\delta, c+\delta]$ y sean

$$\delta_1 = y_o - f(x_0 - \epsilon), \qquad \delta_2 = f(x_0+\epsilon) - y_0$$

como f determina una correspondencia uno a uno entre $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ y $(y_0-\delta_1, y_0+\delta_2) = (f(x_0-\epsilon), f(x_0+\epsilon))$. Entonces f^{-1} envía al intervalo $(y_0-\delta_1, y_0+\delta_2)$ en $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$. Así que si δ_0 denota el menor entre δ_1 y δ_2 entonces siempre que $y \in (y_0-\delta_0, y_0+\delta_0)$, f^{-1} estará en $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon) = (f^{-1}(y_0)-\epsilon, f^{-1}(y_0)+\epsilon)$, luego f^{-1} es continua en $[f(c-\delta), f(c+\delta)]$.
Aplicando la continuidad de f^{-1} en (2.7) tenemos que cuando $k \to 0$, $f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \to 0$. Por tanto $h \to 0$ cuando $k \to 0$ y como $f'(c)$ existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c).$$

Así

$$\lim_{k\to 0} \frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k} = \frac{1}{\lim_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}} = \frac{1}{f'(c)} \tag{2.8}$$

por tanto

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(c)}$$

La demostración suponiendo que la función es estrictamente decrecientes es similar. ■

Ejemplo. *Consideremos la función*

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

tomando $c = 1$, tenemos que $f'(1) = 2 \neq 0$. Además $f'(x) > 0$ en $(0,2)$ luego existe

$$\begin{aligned} f^{-1} : (0,4) &\longrightarrow (0,2) \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

con

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo. *El proceso de inversión se puede aplicar a las funciones trigonométricas, por ejemplo en el caso de la función* $\sin(x)$ *para determinar una inversa única consideremos el intervalo* $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *en el cual la derivada del* $\sin(x)$ *es positiva, es decir el* $\sin(x)$ *en este intervalo es estrictamente creciente y toma todos los valores entre* $(-1,1)$*. Tomando* $c = 0$ *tenemos que* $\cos(0) = 1 \neq 0$*, así que existe*

$$\begin{aligned} f : (-1,1) &\longrightarrow \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\longmapsto \arcsin(x) \end{aligned}$$

con

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(c)} = \frac{1}{\cos(c)}.$$

A continuación presentamos el Teorema de la Función Inversa en varias variables. De estos teoremas se observará que una función inversa f^{-1} puede existir aun siendo $\det f'(a) = 0$. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x^3$ entonces $f'(0) = 0$, pero f tiene la función inversa $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Sin embargo, si $\det f'(a) = 0$, entonces f^{-1} no puede ser diferenciable en $f(a)$. Para probarlo observemos que $f \circ f^{-1}(x) = x$. Si f^{-1} fuera diferenciable en $f(a)$, la regla de la cadena daría $f'(a)f^{-1}(f(a)) = I$, y por consiguiente $\det f'(a) \det f^{-1}(f(a)) = 1$, lo que contradice que $\det f'(a) = 0$. [8, pág 37].

Es así que el próximo teorema establece, que una aplicación continua diferenciable f es invertible en una vecindad de cualquier punto x en el cual es invertible la transformación lineal $f'(x)$.Su demostración se encuentra en [7, pág 221].

Teorema 2.9 (Teorema de la Función Inversa en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea* $V \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto, y* $f \in C^1(V, \mathbb{R}^n)$*. Supongamos que* $f'(a)$ *es invertible para algún* $a \in V$ *y que* $b = f(a)$*. Entonces*

a) existen conjuntos abiertos U *y* S *en* $\mathbb{R}^n$ *tales que* $a \in U, b \in S$*,* f *es inyectiva en* U *y* $f(U) = S$

b) si g *es la inversa de* f *(que existe por el item a), definida en* $f(U)$ *por*

$$g(f(x)) = x \qquad (x \in U),$$

entonces, $g \in C^1(f(U), \mathbb{R}^n)$*, con*

$$(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$$

Demostración. a) Elijamos λ de manera que

$$\lambda = \frac{1}{2\|f'(a)^{-1}\|} \tag{2.9}$$

como f' es continua en $a \in V$, existe $\delta_\lambda > 0$, tal que

$$\|f'(a) - f'(x)\| < \lambda \tag{2.10}$$

siempre que

$$\|a-x\|<\delta \qquad (x\in B_\delta(a)\subseteq V).$$

Asociemos a cada $y\in\mathbb{R}^n$ una función φ, definida por

$$\varphi_y(x)=x+f'(a)^{-1}(y-f(x)) \qquad (x\in V). \tag{2.11}$$

Si $f(x)=y$ entonces $\varphi_y(x)=x$, es decir x es punto fijo bajo φ_y, de igual modo, si x es punto fijo bajo φ_y entonces $f(x)=y$. Ahora bien,

$$\varphi_y'(x)=I-f'(a)^{-1}f'(x)=f'(a)^{-1}(f'(a)-f'(x)).$$

Entonces,

$$\|\varphi_y'(x)\|=\|f'(a)^{-1}(f'(a)-f'(x))\|=\|f'(a)^{-1}\|\|(f'(a)-f'(x))\|<\frac{\lambda}{2\lambda}=\frac{1}{2}$$

para todo $x\in B_\delta(a)$. Como toda $n-$bola de $\mathbb{R}^n$ es convexa podemos aplicar el Teorema 2.7. Luego

$$|\varphi_y(z)-\varphi_y(w)|\leq\frac{1}{2}|z-w| \tag{2.12}$$

para todo z y w en $\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(a)$. Por tanto φ_y es una contracción de $\overline{B}_\delta(a)$ en $\mathbb{R}^n$ y como todo cerrado contenido en un espacio métrico completo es completo, podemos aplicar el Principio de Contracciones. Así existe un único $x\in\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(a)$ tal que $\varphi_y(x)=x$, por tanto $f(x)=y$ a los más para un $x\in\overline{B}_{\frac{\delta}{2}}(a)$, tomando $U=B_\delta(a)$ se concluye que f es inyectiva en U.

Para demostrar que $f(U)=S$ es abierto, tomemos $y\in f(U)$. Entonces $y=f(x)$ para algún $x\in U$ y sea $r>0$, $r=\frac{\delta-d(a,x)}{2}$ tal que

$$\overline{B}_r(x)\subseteq U.$$

Se mostrará que

$$B_{\lambda r}(y)\subseteq f(U).$$

Sea $z\in B_{\lambda r}(y)$ y φ como en 2.11, entonces

$$\begin{aligned}
|\varphi_z(x)-x| &= |x+(f'(a))^{-1}(z-f(x))-x|\\
&= |(f'(a))^{-1}(z-f(x))|\\
&= \|(f'(a))^{-1}\||z-y|\\
&< \|(f'(a))^{-1}\|\lambda r\\
&= \frac{1}{2\lambda}\lambda r\\
&= \frac{r}{2}
\end{aligned}$$

Si $w \in \overline{B}_r(x)$, entonces

$$\begin{aligned} |\varphi_z(w) - x| &\leq |\varphi_z(w) - \varphi_z(x)| + |\varphi_z(x) - x| \\ &< \frac{1}{2}|w - x| + \frac{r}{2} \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Luego $\varphi_z(w) \in B_r(x)$, así que φ_z es una contracción de $\overline{B}_r(x)$ en $\overline{B}_r(x)$ y aplicando el Principio de Contracciones obtenemos que φ_z tiene un único punto fijo, digamos $w' \in \overline{B}_r(x) \subseteq U$. Como $\varphi_z(w') = w'$, $f(w') = z$. Entonces $z \in f(U)$. Dado que z fue arbitrario

$$B_{\lambda r}(y) \subseteq f(U),$$

por lo que $f(U) = S$ es abierto.

b) Mostraremos ahora que la función inversa

$$g : f(U) \to U$$

es diferenciable. Sean $y \in f(U)$, $y + k \in f(U)$, entonces existen x, $x + h$ en U tal que $y = f(x)$, $y + k = f(x + h)$. Con φ como en (2.11) se tiene

$$\begin{aligned} \varphi_y(x + h) - \varphi_y(x) &= x + h + f'(a)^{-1}(y - f(x + h)) - x - f'(a)^{-1}(y - f(x)) \\ &= h - f'(a)^{-1}(f(x + h) - y) \\ &= h - f'(a)^{-1}k \end{aligned}$$

Por (2.12) se tiene

$$|h - f'(a)^{-1}k| = |\varphi_y(x + h) - \varphi_y(x)| \leq \frac{1}{2}|h|. \tag{2.13}$$

Por la desigualdad triangular

$$||h| - |f'(a)^{-1}k|| \leq |h - f'(a)^{-1}k| \leq \frac{1}{2}|h|. \tag{2.14}$$

Luego

$$\frac{1}{2}|h| \leq |h| - |f'(a)^{-1}k| \leq \frac{1}{2}|h|.$$

Así

$$|f'(a)^{-1}k| \geq \frac{1}{2}|h|. \tag{2.15}$$

De (2.9) y por propiedades de la norma obtenemos que

$$|h| \leq 2\|f'(a)^{-1}\||k| = \lambda^{-1}|k| \tag{2.16}$$

Dado que $f'(a)$ es invertible y $f(x)$ es una aplicación lineal en $\mathbb{R}^n$, aplicando el Teorema 1.1 y (2.9), (2.10) tenemos que $f'(x)$ es invertible, con inversa $f'(x)^{-1} = T$. Como

$$h = g(y + k) - g(y)$$

entonces

$$\begin{aligned} g(y+k)-g(y)-Tk &= h-Tk \\ &= h-T(f(x+h)-f(x)) \\ &= -T(f(x+h)-f(x)-f'(x)h). \end{aligned}$$

(2.16) implica que

$$\frac{|g(y+k)-g(y)-Tk|}{|k|} \leq \frac{\|T\|}{\lambda}\frac{|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|}{|h|} \tag{2.17}$$

Cuando $k \to 0$ podemos ver en (2.16) que $h \to 0$, entonces por la continuidad de f tenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|T\|}{\lambda}\frac{|f(x+h)-f(x)-f'(x)h|}{|h|} = 0.$$

Por consiguiente

$$\lim_{k\to 0}\frac{|g(y+k)-g(y)-Tk|}{|k|} = 0,$$

lo que demuestra que $g'(y) = T = f'(x)^{-1}$, lo cual es

$$(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}. \tag{2.18}$$

Como g es diferenciable entonces g es una función continua de $f(U)$ sobre U. Además f es continua de U en Ω y la inversión es una función continua de Ω en Ω. luego por el Teorema 1.1 y (2.18) podemos concluir que $g \in C^1(f(U), \mathbb{R}^n)$.

■

En el teorema anterior vimos que $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo. Además si escribimos la ecuación $y = f(x)$ en función de las componentes, llegamos a la siguiente interpretación de la conclusión del teorema: El sistema de n ecuaciones

$$y_i = f(x_1, \ldots, x_n) \quad (1 \leq i \leq n)$$

puede ser resuelto para $x_1, \ldots, x_n$ en función de $y_1, \ldots, y_n$ si restringimos x y y a vecindades suficientemente pequeñas de a y b; las soluciones son únicas y continuamente diferenciables.

Ejemplo. *Sea f la función*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = (y^2 - x^2, 2xy) \end{aligned}$$

Entonces

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} -2x & 2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

luego $Jf(x,y) = -4(x^2+y^2)$. *Si* $(x,y) \neq (0,0)$ *existen abiertos* U *y* S *en* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $(x,y) \in U$ *y* $f : U \longrightarrow f(U) = S$ *es difeomorfismo (*f *y* f^{-1} *son continuamente diferenciables)* C^∞ *de* U *sobre* S*, como*

$$(f^{-1})'(f(x,y)) = (f'(x,y))^{-1}$$

obtenemos

$$f^{-1}(f(x,y)) = -\frac{1}{2(x^2+y^2)} \begin{bmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{bmatrix}$$

Ejemplo. *Sea la función*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = e^x(\cos y, \sin y) \end{array}$$

por lo que

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$

así que $Jf(x,y) = e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} \neq 0$ *en todo punto de* $\mathbb{R}^2$ *y el Teorema de la Función Inversa dice que en dichos puntos* f *admite una inversa local.*
Ahora para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *se tiene que*

$$f(x, y+2\pi) = (e^x \cos(y+2\pi), e^x \sin(y+2\pi)) = (e^x \cos y, e^x \sin y) = f(x,y).$$

Esto implica que f *no es inyectiva en todo punto de* $\mathbb{R}^2$*, por lo tanto no es difeomorfismo global.*

Para el caso del Teorema de la Función Implícita primero aclaremos un poco la notación. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, escribiremos $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en vez de $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$. Cada $A \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^n)$ puede separarse en dos transformaciones lineales A_x, A_y definidas por

$$A_x h = A(h,0), \qquad A_y k = A(0,k) \qquad (h \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}^m). \tag{2.19}$$

Luego $A_x \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $A_y \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y

$$A(h,k) = A_x h + A_y k. \tag{2.20}$$

Si f es una función real continuamente diferenciable en el plano, entonces $f(x,y) = 0$ puede resolverse para y en términos de x en una vecindad de cualquier punto (a,b) en el cual $f(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. De la misma manera se puede resolver para x en términos de y cerca de (a,b) si $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ en (a,b). La anterior proposición ilustra el caso mas simple del teorema de la Función Implícita (el caso $m = n = 1$). Su demostración se basa fuertemente en el hecho de que las transformaciones continuamente diferenciables en la mayoría de los casos se comportan localmente como sus derivadas. La demostración del siguiente teorema es una adaptación de la demostración que aparece en [9, pág 281].

Teorema 2.10 (Teorema de la Función Implícita en el caso $n = 1$)**.** *Sea* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *abierto y* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *función con derivadas parciales continuas* f_x*,* f_y *en* U*. Sea* $(a,b) \in U$ *tal que* $f(a,b) = 0$ *y* $f_x \neq 0$*. Entonces existe una vecindad* V *de* b *en* $\mathbb{R}$ *y una función*

$$g : V \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.21}$$

tal que g es continuamente diferenciable en V, $g(b) = a$ y $f(g(y), y) = 0$ para toda $y \in V$. Además

$$g'(y) = -\frac{f_y(g(y), y)}{f_x(g(y), y)}. \tag{2.22}$$

Demostración. Definamos $F : U \subseteq \mathbb{R}^2$, dada por

$$F(x, y) = (f(x, y), y). \tag{2.23}$$

Entonces $F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Denotando $(f(x, y), y) = (f_1, f_2)$ la matriz de derivadas parciales de F es

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego $\det A(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ que por hipótesis es diferente de cero, así que $\det A(a, b) \neq 0$. Por tanto $F'(a, b)$ es invertible entonces, por el Teorema de la Función Inversa existen abiertos U', V en $\mathbb{R}^2$ con $(a, b) \in U$ y $(0, y) \in V$ tal que $F : U' \longrightarrow V$ es invertible.
Si G es la inversa de F, $G : V \longrightarrow U'$, $G \in C^1(V, \mathbb{R}^2)$ y $G = (g_1, g_2)$, para algunas funciones de valor real g_1, g_1 definidas sobre una vecindad de

$$F(a, b) = (f(a, b), b) = (0, b).$$

Como G y F son inversas una de la otra

$$\begin{aligned} (x, y) &= F(G(x, y)) && (2.24) \\ &= F(g_1(x, y), g_2(x, y)) && (2.25) \\ &= (f(g_1(x, y), g_2(x, y)), g_2(x, y)) && (2.26) \end{aligned}$$

así que

$$f(g_1(x, y), g_2(x, y)) = x$$

y

$$g_2(x, y) = y$$

luego

$$f(g_1(x, y), y) = x.$$

Esto es valido para todo (x, y) en un entorno abierto de $(0, b)$. Por tanto para $(x, y) = (0, b)$

$$f(g_1(0, b), b) = 0.$$

Tomando $g(y) = g_1(0, b)$ con dominio V entorno de b, y además g es continuamente diferenciable en V.
Remplazando se obtiene

$$f(g(y), y) = 0.$$

Ahora aplicando regla de la cadena

$$f'(g(y), y) = f_x(g(y), y)g'(y) + f_y(g(y), y) = 0.$$

Así
$$g'(y) = -\frac{f_y(g(y),y)}{f_x(g(y),y)}.$$
■

Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Si se elige (a,b) tal que $f(a,b) = 0$ y se toma $a = 1$ o -1, es imposible encontrar una función g en términos de x definida en un intervalo abierto que contenga a a. El ejemplo anterior, además de plantear la importancia de suponer $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$, nos ilustra sobre la equivalencia de los dos Teoremas trabajados en este capitulo.

En el siguiente Teorema se plantea un criterio simple para decir cuando, en general, se puede hallar tal función en el caso mas general para dimensión finita. Su demostración aparece en [7, pág 223].

Teorema 2.11 (Teorema de la Función Implícita en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ abierto, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable, tal que $f(a,b) = 0$ para algún punto $(a,b) \in E$. Escribamos $A = f'(a,b)$ y supongamos A_x invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ y $W \subseteq \mathbb{R}^m$ con $(a,b) \in U$ y $b \in W$, que tienen la siguiente propiedad:*

A cada $\mathbf{y} \in W$ le corresponde un único $\mathbf{x} \in U$, tal que
$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in U \quad y \quad f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{2.27}$$

Definiendo $\mathbf{x}$ como $g(\mathbf{y})$ entonces $g \in C^1(W,\mathbb{R}^n)$, $g(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$,
$$f(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = 0 \qquad (\mathbf{y} \in W), \tag{2.28}$$

y
$$g'(\mathbf{b}) = -(A_x)^{-1}A_y. \tag{2.29}$$

Demostración. Sea $F : E \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ dada por
$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (f(\mathbf{x},\mathbf{y}), y) \qquad ((\mathbf{x},\mathbf{y}) \in E). \tag{2.30}$$

Entonces $F \in C^1(E,\mathbb{R}^{n+m})$. Por otra parte, por la Definición 1.2 de derivada y dado que $f(a,b) = 0$ tenemos que
$$f((\mathbf{a},\mathbf{b}) + (h,k)) - f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}+h,\mathbf{b}+k) = f'(\mathbf{a},\mathbf{b})(h,k) + r(h,k) = A(h,k) + r(h,k) \tag{2.31}$$

donde $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|r(h,k)\|}{\|(h,k)\|} = (0,0)$. Ahora
$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}+h,\mathbf{b}+k) - F(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= (f(\mathbf{a}+h,\mathbf{b}+k),\mathbf{b}+k) - (f(\mathbf{a},\mathbf{b}),\mathbf{b}) \\ &= (f(\mathbf{a}+h,\mathbf{b}+k),\mathbf{b}+k) - (0,\mathbf{b}) \\ &= (f(\mathbf{a}+h,\mathbf{b}+k),k) \\ &= (A(h,k) + r(h,k)),k) \\ &= (A(h,k),k) + (r(h,k)),0) \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|(r(h,k),0)\|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left\| \left(\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}, 0 \right) \right\| = (0,0).$$

Entonces

$$\begin{aligned} F'(a,b) : \mathbb{R}^{n+m} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ (h,k) &\longmapsto F'(a,b)(h,k) = (A(h,k),k). \end{aligned}$$

Si $(A(h,k),k) = (0,0)$ entonces $A(h,k) = 0$ y $k = 0$ así que por (2.20) $A(h,0) + A(0,k) = 0$, de donde $A(h,0) = 0$ y como A_x es invertible tenemos que

$$h = -(A_x)^{-1} A_y k = 0.$$

Es decir $F'(\mathbf{a},\mathbf{b})(h,k) = (0,0)$ solo si $(h,k) = (0,0)$, esto es solo si $N(F'(\mathbf{a},\mathbf{b})) = \{(0,0)\}$ luego $F'(\mathbf{a},\mathbf{b})$ es inyectiva y por tanto invertible. Por el Teorema de la Función inversa existen conjuntos abiertos U y V en $\mathbb{R}^{n+m}$ con $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in U$ y $(0,\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tal que $F : U \longmapsto V$ es inyectiva.
Sea

$$W = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : (0,\mathbf{y}) \in V\}$$

luego $\mathbf{b} \in W$ y veamos que W es abierto, para esto supongamos que W no es abierto, luego existe $y_0 \in W$ tal que para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(y_0) \subsetneq W$. Por definición de W, $(0,y_0) \in V$ y como y_0 no es punto interior de W entonces $B_r(0,y_0) \subsetneq V$ luego V no es abierto. Así, si V es abierto tendrá que ser W abierto.
Ahora si $\mathbf{y} \in W$, entonces $(0,\mathbf{y}) \in V$. Luego $(0,\mathbf{y}) = F(\mathbf{x},\mathbf{y})$ para algún $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in U$, luego por definición de F

$$(f(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}) = F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (0,\mathbf{y}).$$

Así que para $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in U$,

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.$$

Luego la existencia queda demostrada. Para ver que $\mathbf{x}$ es único para ese $\mathbf{y}$, supongamos que $(\mathbf{x}',\mathbf{y}) \in U$ y $f(\mathbf{x}',\mathbf{y}) = 0$. Entonces

$$F(\mathbf{x}',\mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}',\mathbf{y}),\mathbf{y}) = (f(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}) = F(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

como F es inyectiva entonces $x = x'$, así x es único.

Definamos ahora $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ para $\mathbf{y} \in W$ de manera que $(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}) \in U$ y $f(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = 0$. Entonces

$$F(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = (f(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}),\mathbf{y}) = (0,\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in W.) \tag{2.32}$$

Como $F : U \longrightarrow V$ es invertible, el Teorema de la Función Inversa (2.9) también asegura que si $G : V \longrightarrow U$ es la inversa de F entonces $G \in C^1(V,\mathbb{R}^{n+m})$ y por (2.32)

$$(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = G(0,\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{y} \in W.)$$

como G es continuamente diferenciable entonces g tambien lo es.

Finalmente para calcular $g'(\mathbf{b})$, escribamos

$$\Phi(\mathbf{y}) = (g(\mathbf{y}),\mathbf{y})$$

luego

$$\Phi'(\mathbf{y})k = (g'(\mathbf{y})k, k) \tag{2.33}$$

para $\mathbf{y} \in W$, $k \in \mathbb{R}^m$. Por (2.28) se tiene que

$$f(\Phi(\mathbf{y})) = 0. \tag{2.34}$$

Aplicando regla de cadena obtenemos

$$(f(\Phi(\mathbf{y})))' = f'(\Phi(\mathbf{y}))\Phi'(\mathbf{y}) = 0.$$

Cuando $\mathbf{y} = b$ tenemos

$$f'(\Phi(\mathbf{y})) = f'(\Phi(\mathbf{b})) = f'(g(\mathbf{b}), \mathbf{b}) = f'(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = A.$$

Por tanto

$$A\Phi'(\mathbf{b}) = 0. \tag{2.35}$$

Por (2.20) y (2.33)

$$A_x g'(\mathbf{b})k + A_y k = A(g'(\mathbf{b})k, k) = A\Phi'(\mathbf{b})k = 0 \qquad (k \in \mathbb{R}^m). \tag{2.36}$$

Entonces

$$A_x g'(\mathbf{b}) + A_y = 0. \tag{2.37}$$

Como A_x es invertible

$$g'(\mathbf{b}) = -A_y(A_x)^{-1}. \tag{2.38}$$

■

La suposición de que A_x es invertible significa que la matriz $n \times n$ de las derivadas parciales de f

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

evaluada en (a, b) define un operador lineal invertible en $\mathbb{R}^n$, dicho de otra manera sus vectores columna son independientes o de manera equivalente su determinante es diferente de cero. En el caso $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la matriz de derivadas es el vector fila que representa el gradiente.

Ejemplo. *1) Tomemos $n = 2$, $m = 3$ y consideremos la función $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con $f = (f_1, f_2)$ dada por*

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= 2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3 \\ f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) &= x_2 \cos x_1 - 6x_1 + 2y_1 - y_3. \end{aligned}$$

Si $a = (0, 1)$ y $b = (3, 2, 7)$, entonces $f(a, b) = 0$. Ademas la matriz de derivadas parciales de f es

$$\begin{bmatrix} 2e^{x_1} & y_1 & x_2 & -4 & 0 \\ x_2 \sin x_1 - 6 & \cos x_1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de la transformación $A = f'(a,b)$ *es*

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En consecuencia

$$[A_x] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad [A_x] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\det[A_x] = 20 \neq 0$ *entonces* A_x *es invertible. Luego el Teorema de la Función Implícita asegura la existencia de una función continuamente diferenciable* g *definida en una vecindad de* $(3,2,7)$*, tal que* $g(3,2,7) = (0,1)$ *y* $f(g(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = 0$*. Además por* (2.29) *podemos calcular* $g'(3,2,7)$

$$\begin{aligned} [g'(3,2,7)] = -[(A_x)^{-1}][A_y] &= -[A_x]^{-1}[A_y] \\ &= -\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{20} \\ \frac{-1}{2} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En términos de las derivadas parciales, esto es

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1} = \frac{1}{4} \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y_2} = \frac{1}{5} \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y_3} = \frac{-3}{20}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y_1} = \frac{-1}{2} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y_2} = \frac{6}{5} \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y_3} = \frac{1}{10}.$$

Ejemplo. *En el teorema de la función implícita, es importante reconocer la necesidad de tomar vecindades suficientemente pequeñas. Por ejemplo,consideremos la ecuación*

$$x^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Esto es, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*,esta dada por* $F(x,z) = x^2 + z^2 - 1$*. Aquí* $\frac{\partial F}{\partial z}(x,z) = 2z$*, de modo que aplicamos el teorema de la Función Implícita a un punto* (x_0, z_0) *que satisfaga* $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ *y* $z_0 \neq 0$*. Así, cerca de dichos puntos,* z *es una función única de* x*. Esta función es* $z = \sqrt{1-x^2}$ *si* $z_0 > 0$ *y* $z = -\sqrt{1-x^2}$ *si* $z_0 < 0$*. Luego* z *está definida sólo para* $|x| < 1$ *(*U *no debe ser muy grande) y* z *es única sólo cerca de* z_0 *(*V *no debe ser muy grande). Estos hechos, y el que no exista* $\frac{dz}{dx}$ *en* $z_0 = 0$*, son claros debido a que* $x^2 + z^2 = 1$ *representa un círculo en el plano* xz*.*
Además $F(x, z(x)) = 0$*, así que por regla de la cadena*

$$\begin{aligned} F_x(x, z(x)) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-2x}{2z}.$$

2.2. Casos de Dimensión Infinita

Los teoremas y definiciones aquí mencionados se presentan debido a que serán de gran utilidad en las demostraciones de el Teorema de la Función Inversa e Implícita en espacios de Banach. El primero de ellos es el Teorema de l Desigualdad del Valor Medio, cuya demostración se obtuvo de [2, pág 197].

Teorema 2.12 (Desigualdad del Valor Medio)**.** *Sean E, F espacios normados, $A \in E$ abierto, $f : A \longrightarrow F$ diferenciable en A. Si $a, b \in A$ son tales que $[a, b] \subset A$, entonces:*

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\| &\leq \|b - a\| \sup\{\|f'(x)\| : x \in (a, b)\} \quad (2.39)\\ &= \|b - a\| \sup\{\|f'(a + t(b - a))\| : t \in (0, 1)\}. \quad (2.40) \end{aligned}$$

Demostración. Si $M = \sup\{\|f'(x)\| : x \in (a, b)\} = \infty$ entonces la desigualdad es inmediata. Supongamos entonces que $M = \sup\{\|f'(x)\| : x \in (a, b)\} < \infty$. Definamos

$$\begin{aligned} \psi : [0,1] &\longrightarrow E\\ t &\longmapsto \psi(t) = a + t(b - a). \end{aligned}$$

Luego $\psi([0, 1]) = [a, b]$ y ψ es diferenciable en $(0, 1)$, ya que para $h \in [0, 1]$, $\psi(t + h) - \psi(t) = h(b - a)$, esto es $\psi'(t) = (b - a)$. Consideremos la función $\varphi = f \circ \psi : [0, 1] \longrightarrow F$, luego φ es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$ pues por regla de la cadena obtenemos que

$$\varphi'(t) = f'(\psi(t)) \circ \psi'(t) = f'(a + t(b - a)) \circ (b - a).$$

Luego

$$\begin{aligned} \|\varphi'(t)\| &= \|f'(\psi(t)) \circ \psi'(t)\|\\ &= \|f'(a + t(b - a)) \circ (b - a)\|\\ &\leq \|f'(a + t(b - a))\|\| \circ (b - a)\|\\ &\leq \|b - a\| \sup\{\|f'(x)\| : x \in (a, b)\}\\ &= \|b - a\|M\\ &\leq M \end{aligned}$$

para todo $t \in (0, 1)$. Por una consecuencia de el Teorema del Valor Medio ([2, pág 196]) tenemos que $\|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq \|b - a\|M$. Como $\varphi(1) = f(\psi(1)) = f(b)$, $\varphi(0) = f(\psi(0)) = f(a)$, entonces podemos concluir finalmente

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\|M = \|b - a\| \sup\{\|f'(a + t(b - a))\| : t \in (0, 1)\}. \quad (2.41)$$

■

Las aplicaciones lineales continuas son de vital importancia en cualquier trabajo de análisis que se realice, un ejemplo claro de esto es la importancia que tendrá el siguiente teorema en la demostración del Teorema de la Función Inversa en dimensión infinita. Por este motivo presentamos su demostración, en la cual utilizaremos algunos conceptos y resultados sin demostrar que fácilmente pueden encontrarse en [2, pág 15 a 19].

Teorema 2.13. *Sean E, F espacios vectoriales normados $T : E \longrightarrow F$ aplicación lineal sobreyectiva. T es un homeomorfismo lineal de E sobre F, si y sólo si existen $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que*

$$\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta\|x\| \qquad (\forall x \in E). \tag{2.42}$$

Demostración. Como T es homeomorfismo lineal, T y T^{-1} son continuas; luego existe $a > 0$ tal que

$$\|T^{-1}(y)\| \leq a\|y\| \tag{2.43}$$

para todo $y \in F$, (aquí hemos aplicamos el Teorema (1,28) de [2, pág 15].

Como T es homeomorfismo, existe un único $x \in E$ tal que $y = T(x)$, obteniendo $\|x\| \leq a\|T(x)\|$; luego existe $\alpha = a^{-1} > 0$, para el cual

$$\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \tag{2.44}$$

para todo $x \in E$. Ahora por la misma justificación que utilizamos en (2.43), la continuidad de T implica la existencia de $\beta > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq \beta\|x\| \tag{2.45}$$

para todo $x \in E$. Las desigualdades (2.44) y (2.45) implican que

$$\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta\|x\| \tag{2.46}$$

para todo $x \in E$. Supongamos ahora que tenemos $\alpha\|x\| \leq \|T(x)\| \leq \beta\|x\|$, para todo $x \in E$. La parte izquierda de la desigualdad implica que si $x \neq 0$, tendremos $0 < \|x\| \leq \|T(x)\|$, entonces $T(x) \neq 0$, luego el nucleo de T esta compuesto solo por el cero, es decir T es inyectiva. Ahora como T es inyectiva y sobreyectiva entonces T^{-1} existe y es continua ya que $x = T^{-1}(y)$ para un único $y \in F$. Así que dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$. Si $\|x - y\| < \delta$ entonces $\|T^{-1}(x) - T^{-1}(y)\| = \|x - y\| < \epsilon$. La parte derecha de la desigualdad muestra que además T es continua (por Teorema (1,28) de [2, pág 15]). ■

El siguiente Teorema puede considerarse como la versión mas general de el Teorema de la Función Inversa en espacios de Banach. Su demostración es la segunda parte de el Teorema de la Función Inversa que aparece en [2, pág 285].

Teorema 2.14. *Sean E espacio de Banach, $A \subset E$ un conjunto abierto, $f : A \longrightarrow E$, $0 \in A$ tal que $f \in C^k$, $k \geq 1$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = I_E = I$. Entonces, existe V abierto, $a \in V \subset A$ tal que*

$$f : V \longrightarrow f(V)$$

es un difeomorfismo de clase C^k. Además

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1},$$

con $y = f(x) \in f(V)$.

Demostración. Como f es diferenciable en 0 y $f(0) = 0$, para $x \in A$

$$\begin{aligned} f(0+x) - f(0) &= f'(0)x + r(x) \\ f(x) &= x + r(x) \end{aligned}$$

luego $r(x) = f(x) - x$ es de clase C^k en A y

$$r'(0) = f'(0) - I = 0.$$

Sea λ, $0 < \lambda < 1$, $\|f'(0)\| = \|I\| = 1$. Como $r \in C^k$ entonces de la continuidad de r' en cero, obtenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ entonces $\|r'(x)\| < \lambda$. Ademas como $0 \in A$ y A es abierto, para δ suficientemente pequeño

$$D = \overline{B}_\delta(0) = \{x \in X : \|x\| \leq \delta\} \subset A.$$

Por la desigualdad del valor medio si $x, y \in D = \overline{B}_\delta(0)$, entonces

$$\|r(x) - r(y)\| \leq \|x - y\| \sup\{\|r'(z)\| : z \in [x, y]\}.$$

Si $\|x\| \leq \delta$ y $\|y\| \leq \delta$ entonces $\|r'(x)\| < \lambda$ y $\|r'(y)\| < \lambda$, por lo tanto $\sup\{\|r'(z)\| : z \in [x, y]\} < \lambda$. Así

$$\|r(x) - r(y)\| < \lambda\|x - y\|.$$

Luego r es una contracción de D en D, pues $\lambda \in (0, 1)$. Aplicando el Teorema de la Perturbación de la Idéntica, como $f(x) = x + r(x)$ entonces f es un homeomorfismo del abierto $B_\delta(0) = \{x \in X : \|x\| < \delta\} \subset A$ sobre $f(B_\delta(0))$ y $f(B_\delta(0))$ es abierto en D.

Como $f' : A \longrightarrow L(E, F)$ es continua y como $f'(0) = I \in \varrho$ con $\varrho = \{L \in L(E, E) : L$ es homeomorfismo lineal $\}$ el cual es abierto, entonces $\delta > 0$ puede escogerse tal que $f'(x)$ sea invertible para todo $x \in B_\delta(0)$. Sea

$$g = f^{-1} : W = f(B_\delta(0)) \longrightarrow V = B_\delta(0)$$

el homeomorfismo inverso de f. Veamos que g es diferenciable en cada $y = f(x) \in W$. Si g fuera diferenciable existiría $g'(y)$, como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x = I(x)$$

por regla de la cadena tenemos que

$$g'(y) = g'(f(x)) = (f'(x))^{-1}.$$

Como $(f'(x))^{-1}$ es lineal continua, escribimos

$$g(y + k) = g(y) + (f'(x))^{-1}k + s(k).$$

Luego debemos demostrar que

$$\lim_{k \to 0} \frac{s(k)}{\|k\|} = 0.$$

Para ello, sea $f(x + h) = y + k$, entonces como f es homeomorfismo de V sobre $f(V) = W$, tendremos que

$$k = f(x + h) - f(x) \longrightarrow 0 \;\; \textit{si y solo si} \;\; h \longrightarrow 0.$$

Por otra parte

$$\begin{array}{rcl} h = g(y+k) - x & = & g(y+k) - g(y) \\ & = & g(y) + (f'(x))^{-1}k + s(k) - g(y) \\ & = & (f'(x))^{-1}k + s(k) \\ & = & (f'(x))^{-1}(f(x+h) - f(x)) + s(k) \\ & = & (f'(x))^{-1}(f'(x)h + r(h)) + s(k) \\ & = & h + (f'(x))^{-1}r(h)) + s(k), \end{array}$$

luego $s(k) = h - (h + (f'(x))^{-1}r(h))) = -(f'(x))^{-1}r(h)$. Por tanto

$$\frac{s(k)}{\|k\|} = -\frac{\|h\|(f'(x))^{-1}r(h)}{\|k\|\|h\|}$$

Como $f'(x) : E \longrightarrow E = F$ es homeomorfismo lineal, por (2.13) existen $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que

$$2\alpha\|z\| \leq \|f'(x)(z)\| \leq \beta\|z\| \qquad (\forall z \in E).$$

Dado este α, existe $\delta > 0$, tal que $\|h\| < \delta$. Escogemos el $\delta > 0$ común para que lo anterior sea valido. Así que

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0, \quad \|r(h)\| < \alpha\|h\|.$$

Luego

$$\begin{array}{rcl} \|k\| & = & \|f(x+h) - f(x)\| \\ & = & \|f'(x)h + r(h)\| \\ & \geq & \|f'(x)h\| - \|r(h)\| \\ & \geq & 2\alpha\|h\| - \alpha\|h\| \\ & = & \alpha\|h\|. \end{array}$$

Entonces $\|k\| \geq \alpha\|h\|$. Es decir que $\alpha \leq \frac{\|k\|}{\|h\|}$, por tanto

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \dfrac{\|s(k)\|}{\|k\|} \\ & = & \dfrac{\|h\|}{\|k\|}\left\|(f'(x))^{-1}\left(\dfrac{r(h)}{\|h\|}\right)\right\| \\ & \leq & \dfrac{1}{\alpha}\left\|(f'(x))^{-1}\left(\dfrac{r(h)}{\|h\|}\right)\right\|. \end{array}$$

La continuidad de $(f'(x))^{-1}$ implica la existencia de $c > 0$ tal que

$$\|(f'(x))^{-1}(z)\| \leq c\|z\|, \qquad (\forall z \in F).$$

Luego

$$\frac{1}{\alpha}\left\|(f'(x))^{-1}\left(\frac{r(h)}{\|h\|}\right)\right\| \leq \frac{c}{\alpha}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}.$$

Así
$$0 \leq \frac{\|s(k)\|}{\|k\|} = \frac{\|s(f(x+h)-f(x))\|}{\|kf(x+h)-f(x)\|} \leq \frac{c}{\alpha}\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}.$$
Como
$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$
y $h \to 0$ si y solo si $k \to 0$, entonces
$$\lim_{k\to 0}\frac{s(k)}{\|k\|} = 0.$$
Por lo tanto, g es diferenciable en y y $g'(y) = (f'(x))^{-1}$ donde $y = f(x) \in W = f(V)$. Luego $f : V \longrightarrow f(V)$ es un difeormorfismo con f de clase C^k. Falta ver que g es también de clase C^k $(k \geq 1)$. Como $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ y $g' = Inv \circ f' \circ g$ es continua por ser compuesta de continuas, entonces g es de clase C^1. Si f es de clase C^1. Ahora si f es de clase C^2 entonces Inv, g, f' son de clase C^1 y por tanto g es de clase C^2. Por inducción si f es de clase C^k tendremos que g es de clase C^k. ■

Como se menciono anteriormente vamos a enunciar el Teorema de la Función Inversa que aparece en [2, pág 285], cuya demostración vamos a unir con el enunciado que se demostró en 2.14.

Teorema 2.15 (Teorema de la Función Inversa). *Sean E y F espacios de Banach, $A \subset E$ un conjunto abierto y $f \in C^k(A, F)$, $(k \geq 1)$. Supongamos $a \in A$ tal que $f'(a) : E \longrightarrow F$ es homeomorfismo lineal. Entonces existe V abierto, $a \in V \subset A$ tal que*
$$f : V \longrightarrow f(V)$$
es un difeomorfismo de clase C^k. Además
$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1},$$
con $y = f(x) \in f(V)$.

Demostración. Sea $T = f'(a)$, como T es homeomorfismo lineal de E sobre F, entonces
$$\begin{array}{rcl}(T^{-1}\circ f) : A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & (T^{-1}\circ f)(x) = T^{-1}(f(x)).\end{array}$$
Para $x = a$ tenemos
$$(T^{-1}\circ f)'(a) = [T^{-1}(f(a))]'$$
como T^{-1} es lineal continua entonces para $h \in E$ tenemos
$$\begin{array}{rcl}T^{-1}(f(a)+h) - T^{-1}(f(a)) & = & T^{-1}(f(a)) + T^{-1}(h) - T^{-1}(f(a)) \\ & = & T^{-1}(h)\end{array}$$

tomando $r(h) = 0$ tenemos que $(T^{-1})'(f(a)) = T^{-1}$. Luego

$$(T^{-1} \circ f)'(a) = (T^{-1})'(f(a))f'(a) = T^{-1}f'(a) = I_E$$

así podemos ver que $(T^{-1} \circ f)$ es localmente invertible de clase C^k. Además como

$$f = T \circ (T^{-1} \circ f),$$

entonces f también lo es. Esto reduce el teorema al caso:

$$f : A \longrightarrow E \qquad f'(a) = I_E.$$

Sea $f(a) = b$, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \tau_a : E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \tau_a(x) = x + a \end{array}$$

es homeomorfismo de clase C^k. En efecto, sean $x, h \in E$, entonces

$$\tau_a(x + h) - \tau_a(x) = x + h + a - x - a = h$$

tomando $r(h) = 0$ se tiene $\tau_a'(x) = I_E$. Además

$$\begin{array}{rcl} \tau_{-b} : F & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & \tau_{-b}(y) = y - b \end{array}$$

también es un homeomorfismo de clase C^k con

$$\tau_{-b}(y + h) - \tau_{-b}(y) = y + h - b - y + b = h.$$

Tomando $r(h) = 0$ se tiene $\tau_{-b}'(y) = I_F$. Consideremos

$$B = \{v - a : v \in A\} = \tau_{-a}(A)$$

como τ_{-a} es homeomorfismo y A es abierto entonces B es abierto. Además $a \in A$ luego $a - a = 0 \in B$ y

$$f_1 = \tau_{-b} \circ f \circ \tau_a : B \longrightarrow E,$$

es tal que

$$f_1(z) = \tau_{-b} \circ f(\tau_a(z)) = \tau_{-b}(f(a + z)) = f(a + z) - b.$$

Luego $f_1(0) = 0$ y como τ_{-b}, τ_a, f son aplicaciones de clase C^k entonces f_1 también lo es. Si f_1 es localmente invertible, de clase C^k, se deduce que f lo es ya que

$$\begin{array}{rcl} \tau_b \circ f_1 \circ \tau_{-a}(z) & = & \tau_b(f_1(z - a)) \\ & = & \tau_b(f(a + z - a) - b) \\ & = & \tau_b(f(z) - b) \\ & = & f(z) - b + b \\ & = & f(z). \end{array}$$

Estos comentarios reducen el teorema al caso

$$E = F, f(0) = 0, f'(0) = I_E = I.$$

Es decir el Teorema se reduce al caso de (2.14), por tanto ya esta demostrado. ■

Se sabe que el teorema de la función implícita para funciones de varias variables juega un papel importante en muchas ramas de las matemáticas como variedades diferenciales, la Geometría Diferencial, la Topología Diferencial, etc. Su extensión en espacios de dimensión infinita también es extremadamente importante en el análisis no lineal, así como en el estudio de las variedades de dimensión infinita. En nuestro caso será el teorema más importante a la hora de realizar la descripción del Método de Continuidad, que es el tema central de este trabajo. Su demostración se realizará según las sugerencias del autor del libro guía [3, pág 12]

Teorema 2.16 (Teorema de la Función Implícita)**.** *Sean X, Y, Z espacios de Banach, $U \subset X \times Y$ es un conjunto abierto. Supongamos que $f \in C(U, Z)$ tiene una $F-$derivada, sin perdida de generalidad, y, y que $f_y \in C(U, L(Y, Z))$. Para un punto $(x_0, y_0) \in U$, si tenemos*

$$\begin{gathered} f(x_0, y_0) = 0, \\ f_y^{-1}(x_0, y_0) \in L(Z, Y); \end{gathered}$$

entonces existe $r, r_1 > 0$, y un único $u \in C(B_r(x_0), B_{r_1}(y_0))$, tal que

$$\begin{cases} B_r(x_0) \times B_{r_1}(y_0) \subset U, \\ u(x_0) = y_0, \\ f(x, u(x)) = 0 \quad \forall x \in B_r(x_0). \end{cases}$$

Además, si $f \in C^1(U, Z)$, entonces $u \in C^1(B_r(x_0, Y)$, y

$$u'(x) = -f_y^{-1}(x_0, u(x_0)) \circ f_x(x, u(x)) \quad \forall x \in B_r(x_0).$$

Demostración. Mediante la sustitución $f(x, y)$ por $f_y^{-1}(x_0, y_0) \circ f(x + x_0 + y_0)$, podemos asumir sin perdida de generalidad que $Z = Y, x_0 = y_0 = 0$ y $f_y(0, 0) = I_y$.
Vamos a encontrar la solución $y = u(x) \in B_{r_1}(0)$ de la ecuación

$$f(x, y) = 0 \qquad (\forall x \in B_r(0)).$$

Tomando

$$R(x, y) = y - f(x, y). \tag{2.47}$$

Esto se reduce a encontrar en punto fijo de $R(x, \cdot)$ para toda $x \in B_r(0)$.

Vamos a aplicar el Teorema de Contracción a $R(x, \cdot)$. Veamos primero que en efecto tenemos una función de contracción

$$\|R(x, y_1) - R(x, y_2)\| = \|y_1 - f(x, y_1) - y_2 + f(x, y_2)\| = \|(y_1 - y_2) - (f(x, y_1) - f(x, y_2))\|.$$

Como f_y es continua, por el Teorema Fundamental del Calculo en Espacios de Banach ([2, p. 235]) y la Regla de la Cadena tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(y_1-y_2)-(f(x,y_1)-f(x,y_2))\| &= \left\|(y_1-y_2)-\int_0^1 \frac{d}{dt}f(x,ty_1+(1-t)y_2)\,dt\right\| \\
&= \left\|(y_1-y_2)-(y_1-y_2)\int_0^1 f_y f(x,ty_1+(1-t)y_2)\,dt\right\| \\
&= \left\|(y_1-y_2)\left[1-\int_0^1 f_y f(x,ty_1+(1-t)y_2)\,dt\right]\right\|.
\end{aligned}$$

Como la función identidad es continua entonces lo anterior es igual a

$$\left\|(y_1-y_2)\left[\int_0^1 I_y - f_y f(x,ty_1+(1-t)y_2)\,dt\right]\right\|.$$

Luego por desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\left\|(y_1-y_2)\left[\int_0^1 I_y - f_y f(x,ty_1+(1-t)y_2)\,dt\right]\right\| &\le \|(y_1-y_2)\|\left\|\left[\int_0^1 I_y - f_y f(x,ty_1+(1-t)y_2)\,dt\right]\right\| \\
&\le \|(y_1-y_2)\|\int_0^1 \|I_y - f_y f(x,ty_1+(1-t)y_2)\|\,dt
\end{aligned}$$

por tanto

$$\|R(x,y_1)-R(x,y_2)\| \le \|(y_1-y_2)\|\int_0^1 \|I_y - f_y f(x,ty_1+(1-t)y_2)\|\,dt.$$

Nuevamente, como f_y es continua, existen $r, r_1 > 0$ tales que

$$\|R(x,y_1)-R(x,y_2)\| < \frac{1}{2}\|(y_1-y_2)\| \tag{2.48}$$

para toda $(x,y_i) \in B_r(0)\times B_{r_1}(0), i=1,2$. Es decir $R(x,\cdot)$ es una contracción.

Verificaremos ahora que efectivamente $R(x,\cdot) : \overline{B}_{r_1}(0) \longrightarrow \overline{B}_{r_1}(0)$. Sea $y \in \overline{B}_{r_1}(0)$, por definición de $R(x,\cdot)$ y por (2.48) tenemos

$$\begin{aligned}
\|R(x,y)\| &\le \|R(x,0)\| + \|R(x,y)-R(x,0)\| \\
&= \|f(x,0)\| + \|R(x,y)-R(x,0)\| \\
&< \|f(x,0)\| + \frac{1}{2}\|y\|.
\end{aligned}$$

Para $r > 0$ suficientemente pequeño

$$\|f(x,0)\| < \frac{1}{2}r_1, \qquad (\forall x \in \overline{B}_r(0)),$$

se sigue que

$$\|R(x,y)\| < \frac{1}{2}r_1 + \frac{1}{2}\|y\| = r_1 + \|y\| \le r_1$$

para todo $(x,y) \in B_r(0)\times B_{r_1}(0)$. Esto es $R(x,y) \in \overline{B}_{r_1}(0)$ y como $\overline{B}_{r_1}(0)$ es un cerrado que esta contenido en un espacio métrico completo entonces es completo, luego podemos aplicar el principio de contracciones

(Teorema 1.5). Así existe un único $y \in \overline{B}_{r_1}(0)$ tal que $R(x,y) = y$. Por definición de $R(x,\cdot)$ esto es que para toda $x \in \overline{B}_r(0)$ existe un único $y \in \overline{B}_{r_1}(0)$ tal que $f(x,y) = 0$. Denotemos la solución y como $u(x)$.

Veamos que $u \in C(B_r, Y)$. Por (2.47) y (2.48)

$$\begin{aligned}
\|u(x) - u(x')\| &= \|R(x,u(x)) - R(x',u(x'))\| \\
&= \|R(x,u(x)) - R(x',u(x)) + R(x',u(x)) - R(x',u(x'))\| \\
&\leq \|R(x',u(x)) - R(x',u(x'))\| + \|R(x,u(x)) - R(x',u(x))\| \\
&< \frac{1}{2}\|u(x) - u(x')\| + \|R(x,u(x)) - R(x',u(x))\|.
\end{aligned}$$

Así

$$\|u(x) - u(x')\| - \frac{1}{2}\|u(x) - u(x')\| < \|R(x,u(x)) - R(x',u(x))\|.$$

Es decir,

$$\|u(x) - u(x')\| < 2\|R(x,u(x)) - R(x',u(x))\|.$$

Como f es continua entonces $R \in C(U,Y)$. Así

$$u(x') \to u(x) \tag{2.49}$$

cuando $x' \to x$, es decir $u(x)$ es continua.

Si $f \in C^1(U,Y)$ queremos ahora probar que $u \in C^1$. Primero aplicando en Teorema Fundamental del Calculo en Espacios de Banach ([2, p. 235]) a la función $g : [0,1] \longrightarrow Y$ tal que

$$g(t) = f(tx + (1-t)x', u(x))$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\|u(x) - u(x')\| &< 2\|R(x,u(x)) - R(x',u(x))\| \\
&= \|u(x) - f(x,u(x)) - u(x) + f(x',u(x)) \\
&= \|f(x,u(x)) - f(x',u(x)\| \\
&= 2\left\|\int_0^1 f'(tx + (1-t)x', u(x))\,dt\right\| \\
&= 2\left\|\int_0^1 f_x(tx + (1-t)x', u(x))(x - x')\,dt\right\| \\
&\leq 2\|(x - x')\| \int_0^1 \|f_x(tx + (1-t)x', u(x))\|\,dt.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\|u(x+h) - u(x)\| &< 2\|(x+h-x)\| \int_0^1 \|f_x(t(x+h) + (1-t)x, u(x+h))\|\,dt \\
&= 2\|h\| \int_0^1 \|f_x(th + x, u(x+h))\|\,dt
\end{aligned}$$

Luego

$$\|u(x+h) - u(x)\| = O(\|h\|)$$

cuando $\|h\| \to 0$. Para $(x+h, u(x+h)) \in B_r(0) \times B_{r_1}(0)$

$$f(x+h, u(x+h)) = f(x, u(x)) = 0.$$

De donde

$$f(x+h, u(x+h)) - f(x, u(x+h)) + [f(x, u(x+h)) - f(x, u(x))] = 0.$$

A su vez

$$f_x(x, u(x+h))h + \circ(\|h\|) + f_y(x, u(x))(u(x+h) - u(x)) + \circ(\|h\|) = 0.$$

Aplicando $f_y^{-1}(x, u(x))$ tenemos

$$f_y^{-1}(x, u(x)) f_x(x, u(x+h))h + f_y^{-1}(x, u(x)) f_y(x, u(x))(u(x+h) - u(x)) = \circ(\|h\|).$$

Por tanto,

$$u(x+h) - u(x) + f_y^{-1}(x, u(x)) f_x(x, u(x+h))h = \circ(\|h\|).$$

Es decir $u \in C^1$, y

$$u'(x) = -f_y^{-1}(x, u(x)) f_x(x, u(x)).$$

■

Ejemplo. *Tomemos el problema de contorno no lineal [4, p.148]*

$$x'' + \mu x + f(x) = 0, \quad x(0) = x(1) = 0 \tag{2.50}$$

en $J = [0,1]$. Asumiendo que $f \in C^1(\mathbb{R})$ y $f(0) = 0$, para aplicar el Teorema de la Función Implícita tomemos $X = \mathbb{R}, Z = C(J)$,

$$Y = C_0^2(J) = \{y \in C^2(J) : y(0) = y(1) = 0\}$$

con $|y| = |y''|_0$ y $F(\mu, x) = D^2x + \mu x + f(x)$, donde $D^2x = x''$. Debido a que $D^2 \in L(Y, Z)$, tenemos

$$F_x(\mu, x)y = D^2y + \mu y + f'(x)y.$$

Luego

$$F_x(\mu, 0)y = D^2y + \mu y + f'(0)y = D^2y + (\mu + f'(0))y.$$

Veamos que $F_x(\mu_0, 0)$ es homeomorfismo si y solo si $\mu_0 + f'(0) \neq m^2\pi^2$ para toda $m \in \mathbb{N}$. En efecto, sabemos que $F_x(\mu, 0)$ es lineal continua debido a que es suma de lineales continuas, además la linealidad de la derivada garantiza que la inversa es continua. Para ver la inyectividad es suficiente mostrar que $F_x(\mu, x)y = 0$ sii $y = 0$.

$$D^2y + (\mu + f'(0))y = 0.$$

Es equivalente a

$$y'' + (\mu + f'(0))y = 0.$$

Cuyo polinomio característico es

$$m^2 + (\mu + f'(0)) = 0.$$

Que tiene dos raíces complejas conjugadas

$$m_1 = \sqrt{(\mu + f'(0))}i \quad y \quad m_2 = -\sqrt{(\mu + f'(0))}i.$$

Así que la solución general es

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{(\mu + f'(0))}t) + C_2 \sin(\sqrt{(\mu + f'(0))}t).$$

Aplicando las condiciones de frontera de la hipótesis, es decir el hecho de que $y(0) = y(1) = 0$, *tenemos*

$$y(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) \quad = \quad 0$$

esto es $C_1 = 0$. *Así que*

$$y(1) = C_2 \sin(\sqrt{(\mu + f'(0))}) \quad = \quad 0$$

Como

$$\mu + f'(0) \neq m^2\pi^2,$$

para toda $m \in \mathbb{N}$, *tendremos que* $\sin(\sqrt{(\mu + f'(0))}) \neq 0$. *Por tanto debe ser* $C_2 = 0$, *esto es* $y(t) = 0$. *La sobreyectidad se sigue del Teorema de Existencia y Unicidad aplicado a la ecuación*

$$y'' + (\mu + f'(0))y = f. \tag{2.51}$$

Luego tenemos todas las condiciones para aplicar el Teorema de la Función Implícita. Así existe un intervalo $(\mu_0 - r, \mu_0 + r)$ *tal que* $x = 0$ *es la única solución pequeña de (2.50) para* μ *en este intervalo.*

CAPÍTULO 3

Método de Continuidad

Para comprender mejor el Método de Continuidad vamos a dar una serie de definiciones y teoremas que serán de gran utilidad, debido a su importancia daremos la demostración de cada uno de ellos. La primera definición caracteriza una de las propiedades mas importantes de los operadores lineales: La compacidad. [6, pág 405].

Definición. *Sean X y Y espacios normados. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es llamado operador lineal compacto si T es lineal y para cada subconjunto acotado M de X, la imagen $T(M)$ es relativamnete compacta, esto es que la adherencia de M es compacta.*

El término compacto sugerido por la definición, no es el único. Anteriormente, se decía completamente continuo para hacer referencia a compacto. Suponemos que esta terminología se debía al hecho de que un operador lineal compacto es siempre continuo, mientras que lo contrario en general no es cierto. A partir de la definición de la compacidad de un conjunto obtenemos el siguiente criterio útil para los operadores. [6, pág 407].

Teorema 3.17 (Criterio de Compacidad). *Sean X y Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es compacto si y solo si envía cada sucesión acotada (x_n) en X en una sucesión (Tx_n) en Y que tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Supongamos que T es compacto y (x_n) acotada, luego por definición de operador compacto es $(\overline{Tx_n})$ compacta en Y y por tanto tiene una subsucesion convergente.

Supongamos ahora que cada sucesión acotada (x_n) en X tiene una subsucesión (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) converge en Y. Consideremos cualquier subconjunto acotado $B \subset X$ vamos a ver que $T(B)$ es relativamente compacto, es decir que $\overline{T(B)}$ es compacto. Sea (y_n) una sucesión en $T(B)$, entonces $y_n = Tx_n$ para algún x_n en B. Como B es acotado, (x_n) es acotada. Ahora por hipótesis, (Tx_n) contiene una subsucesión (Tx_{n_k}) convergente en Y. Como (y_n) fue arbitraria entonces $\overline{T(B)}$ es compacto, esto es por definición que T es compacto. ■

Definición. *Sean X, Y espacios vectoriales normados con normas $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Y$, respectivamente, y supongamos que $X \subseteq Y$. Decimos que X esta inmerso de forma compacta en Y si:*

- *X está inmerso continuamente en Y. Es decir, hay una constante $c > 0$ tal que*

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$$

  para toda $x \in X$.

- *La inmersión de X en Y es un operador compacto. Si cada sucesión acotada en X tiene una subsucesión que es convergente en Y.*

La siguiente definición trata sobre una importante propiedad de los espacios topologicos: La conexidad. Esta propiedad Hace referencia a que un espacio topológico (X, τ) es conexo si X no es unión de dos subconjuntos no vacíos y separados. En caso contrario diremos que X es no conexo. [7, pág 42].

Definición. *Un espacio topológico (X, τ) se dice conexo si y solo si para todo $A, B \in X$, no vacíos, disjuntos tales que $A \cup B = X$ se tiene que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ ó $\overline{B} \cap A \neq \emptyset$.*

El siguiente teorema nos permite ver bajo que condiciones topológicas si $E \subseteq X, E \neq \emptyset$ y ademas E es abierto y cerrado podemos concluir que E sea igual a todo el espacio. Este teorema será fundamental para el Método de Continuidad.

Teorema 3.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico, $E \subseteq X$. Supongamos que $E \neq \emptyset$, E abierto y cerrado y (X, τ) conexo, entonces $E = X$.*

Demostración. Sea $E \subseteq X$ abierto y cerrado, luego $E^c = X - E$ es abierto y cerrado, además

$$E \cap E^c = \emptyset \quad y \quad E \cup E^c = X.$$

Vamos a ver que $\{E, E^c\} = \{\emptyset, X\}$ y como $E \neq \emptyset$ se tendrá que $E = X$. Para ello supongamos que $\{E, E^c\} \neq \{\emptyset, X\}$. Esto es que E y E^c son no vacíos. Como X es conexo tendremos que

$$\overline{E} \cap E^c \neq \emptyset \quad o \quad E \cup \overline{E^c} \neq \emptyset.$$

Además como E y E^c son cerrados entonces

$$\overline{E} = E \quad y \quad \overline{E^c} = E^c.$$

Luego obtenemos que

$$E \cap E^c \neq \emptyset,$$

lo que es una contradicción ya que E y E^c son disjuntos. Así $\{E, E^c\} = \{\emptyset, X\}$ y como $E \neq \emptyset$ entonces $E = X$. ■

Continuemos este capitulo con un teorema muy conocido y utilizado en análisis, que relaciona los conjuntos cerrados y la convergencia. Se necesitará más adelante, por lo que la demostración se presenta de manera detallada como en [6, pág 30].

Teorema 3.19. *Sea M un subconjunto no vacío de un espacio metrico (X,d) y $\overline{M}$ su adherencia, entonces:*

a) $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión (x_n) en M tal que $x_n \longrightarrow x$.

b) M es cerrado si y sólo si el hecho de que $x_n \in M$ y $x_n \longrightarrow x$ implica que $x \in M$.

Demostración. a) Sea $x \in \overline{M}$, entonces, si $x \in M$ la sucesión de tipo $(x, x, \ldots)$ claramente converge a x. Si $x \notin M$ entonces, por definición de la adherencia, x es punto de acumulación de M, esto es para todo $r > 0$, $M \cap (B_r(x) - \{x\}) \neq \emptyset$. Por tanto para cada $n = 1, 2, \ldots$ la bola $B_{\frac{1}{n}}(x)$ contiene un x_n en M, y $x_n \longrightarrow x$, ya que $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.
Recíprocamente, si $x_n \in M$ y $x_n \longrightarrow x$, entonces $x \in M$ o cada vecindad de x contiene puntos $x_n \neq x$. Es decir, x es punto de acumulación de M. Así $x \in \overline{M}$.

b) M es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$, luego b) se sigue directamente de a).

■

El siguiente teorema introduce una desigualdad que se utilizará en varias ocasiones cuando realicemos la demostración de el Teorema de la Función Implícita Global. Su demostración hace uso de las propiedades de la integral, el Teorema Fundamental de el Calculo y algunas técnicas de soluciones de ecuaciones lineales de primer orden. La demostración se obtuvo de [5, pág 651].

Teorema 3.20 (Desigualdad de Gronwall-Bellman)**.** *Sean $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $\mu : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y no negativa. Si una función continua $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface*

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s) y(s)\, ds \tag{3.1}$$

para $a \leq t \leq b$, entonces sobre el mismo intervalo

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s) e^{\int_s^t \mu(\tau)\, d\tau}\, ds. \tag{3.2}$$

En particular, si $\lambda(t) = \lambda$ es una constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau)\, d\tau}.$$

Si, en adición, $\mu(t) = \mu \geq 0$ es una constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda e^{\mu(t-a)}.$$

Demostración. Por hipótesis $v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0$. Sea $z(t) = \int_a^t \mu(s) y(s)\, ds$ luego z es diferenciable y por el Teorema Fundamental del Calculo

$$\dot{z} = \mu(t) y(t)$$

la cual podemos escribir como

$$\dot{z} = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t).$$

Esta ecuación es lineal de primer orden, y su factor integrante es

$$\phi(t,a) = e^{-\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}.$$

Multiplicando por este factor integrante obtenemos

$$e^{-\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}(\dot{z} - \mu(t)z(t)) = e^{-\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t)).$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dt}(e^{-\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}z(t)) = e^{-\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t)).$$

Integrando de a hasta t obtenemos

$$e^{-\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}z(t) = \int_a^t e^{-\int_a^s \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))\,ds.$$

Luego

$$z(t) = e^{\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}\int_a^t e^{-\int_a^s \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))\,ds.$$

Aplicando las propiedades de la integral tenemos que

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_a^t e^{\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}e^{-\int_a^s \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))\,ds \\ &= \int_a^t e^{\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau - \int_a^s \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))\,ds \\ &= \int_a^t e^{\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau + \int_s^a \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))\,ds \\ &= \int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))\,ds. \end{aligned}$$

Como μ es no negativa entonces el término

$$\int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}\mu(s)v(s)\,ds$$

es no negativo y por tanto

$$z(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}\mu(s)\lambda(s)\,ds.$$

Dado que $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$, entonces

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}\mu(s)\lambda(s)\,ds,$$

lo que termina la demostración del caso general. En el caso especial en el que $\lambda(t) = \lambda$ es constante tenemos que

$$y(t) \leq \lambda + \lambda\int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}\mu(s)\,ds.$$

Puede notarse que

$$\frac{d}{ds}e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau} = \frac{d}{ds}e^{-\int_t^s \mu(\tau)\,d\tau} = -\mu(s)e^{-\int_t^s \mu(\tau)\,d\tau} = -\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}.$$

Usando esto en la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \lambda - \lambda\int_a^t \frac{d}{ds}e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}\,ds \\ &= \lambda - \lambda\left\{e^{\int_s^t \mu(\tau)\,d\tau}\right\}_{s=a}^{s=t} \\ &= \lambda - \lambda[e^0 - e^{\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau}] \\ &= \lambda - \lambda + \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau} \\ &= \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau)\,d\tau} \end{aligned}$$

Cuando además $\mu(t) = \mu \geq 0$ es contante obtenemos por integración

$$y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu\,d\tau} = \lambda e^{\mu(t-a)}.$$

■

3.1. Descripción del Método

El Método que presentaremos a continuación es la razón de ser de este trabajo. Hemos demostrado anteriormente la utilidad de el Teorema de la Función Implícita en la existencia de soluciones para pequeñas perturbaciones de una ecuación determinada que tiene una solución conocida. En cuanto a las grandes perturbaciones, este Teorema no es suficiente, hay que añadir nuevos ingredientes. El Método de Continuidad es un principio general meramente analítico, que puede ser aplicado para probar la existencia de soluciones para una gran variedad de ecuaciones no lineales. Su descripción se realiza como en [3, pág 23].

Sean X y Y espacios de Banach y $f : X \longrightarrow Y$ de clase C^1. Encontrar la solución de la ecuación:

$$f(x) = 0.$$

Vamos a introducir un parámetro $t \in [0,1]$ y una función

$$F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$$

tal que ambas, F y F_x son continuas. Además

$$F(1,x) = f(x).$$

Asumimos que existe $x_0 \in X$ que satisface $F(0,x_0) = 0$, queremos extender la solución x_0 de la ecuación

$$F(0,x) = 0$$

a una solución de

$$F(1,x)=0.$$

Para este propósito, definimos el conjunto

$$S=\{t\in[0,1]:F(t,x)=0\ \ es\ \ solucionable\}.$$

Luego lo que necesitamos probar es que S es no vacío, abierto y cerrado, para así aplicar el teorema (3.18), por el cual será $S=[0,1]$.

Claramente S es no vació, ya que asumimos que existe $x_0\in X$ que satisface $F(0,x_0)=0$, es decir $0\in S$. Ahora para ver que es abierto tomemos $U\subseteq[0,1]\times X$ un conjunto abierto, sabemos por el planteamiento del método que $F\in C(U,Y)$ y $F_x\in C(U,L(X,Y))$. Si podemos probar que para todo $t_0\in S$, existe $x_{t_0}\in X$ el cual resuelve $F(t_0,x_{t_0})=0$, tal que $F_x^{-1}(t_0,x_{t_0})\in L(Y,X)$, entonces por el Teorema de la Función Implícita (2.16) existen $r,r_1>0$ y un único $u\in C(B_r(t_0),B_{r_1}(x_{t_0}))$ tal que $B_r(t_0)\times B_{r_1}(x_{t_0})\subset U$, es decir $B_r(t_0)\subset[0,1]$. Además también por el TFI $u(t_0)=x_{t_0}$ y $F(t,u(t))=0$ para todo $t\in B_r(t_0)$. Luego hemos probado que para todo $t_0\in S$ existe $r>0$ tal que $B_r(t_0)\subset S$, por tanto S es abierto.
Veamos ahora que S es cerrado: Usualmente esto depende de las estimaciones previas para el conjunto solución $\{x\in X:\exists t\in S,\ tal\ \ que\ \ F(t,x)=0\}$. Para la mayoría de problemas de Ecuaciones Diferenciales Parciales esto requiere conocimientos especiales, características especiales de las ecuaciones y técnicas de análisis fuertes.
Presentaremos dos maneras diferentes de probar que S es cerrado:

a) Si existe un espacio de Banacha X_1, el cual esta inmerso compactamente en X, y una constante $c>0$ tal que

$$\|x_t\|_{X_1}\leq c$$

para todo $t\in S$, donde x_t es una solución de $F(t,x)=0$, entonces S es cerrado.
En efecto, sea $t_n\subset S$, tal que $t_n\longrightarrow t^*$ y t^*esta en $[0,1]$. Por hipótesis existe una constante $c>0$ tal que

$$\|x_{t_n}\|_{X_1}\leq c.$$

donde x_{t_n} es solución de $F(t,x)=0$. Como la inmersión de X_1 en X es compacta y x_{t_n} es acotada en X_1 entonces tiene una subsucesión convergente a un punto $x^*\in X$. De la continuidad de F se sigue que $F(t^*,x^*)=0$, esto prueba que $t^*\in S$ por tanto por la parte (b) del teorema (3.19) se tiene que S es cerrado.

b) Sí para todo $t\in S$, existe una única solución local x_t de la ecuación $F(t,\cdot)=0$ y si existe $c>0$ tal que

$$\|\dot{x}_t\|_X\leq c,$$

donde x'_t es la derivada de x_t, entonces S es cerrado.
En efecto, sea (t_n) una sucesión en un intervalo abierto contenido en S la cual es creciente y converge por la izquierda a t^*. Como toda sucesión convergente es de Cauchy se tiene que dado $\epsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n,m\geq N$ entonces $\|t_n-t_m\|<\epsilon$. Debido a que la sucesión es creciente para

$n \geq m \geq N$ será $(t_n - t_m) < \epsilon$. Entonces por el Teorema Fundamental del Calculo en espacios de Banach y como la derivada de x_t es acotada

$$\|x_{t_n} - x_{t_m}\| = \left\| \int_{t_m}^{t_n} \dot{x}_t \, dt \right\| \leq \int_{t_m}^{t_n} \|\dot{x}_t\| \, dt = \|\dot{x}_t\| \int_{t_m}^{t_n} dt \leq c(t_n - t_m) < \epsilon$$

es decir x_{t_n} es una sucesión de Cauchy en X, como X es un espacio de Banach tendremos que x_{t_n} es convergente digamos a $x^* \in X$. De la misma manera que cuando probamos que S es abierto, si el Teorema de la Función Implícita es aplicable a (t^*, x^*) tendremos que $t^* \in S$ y por tanto S es cerrado.

Como aplicación de el Método de Continuidad presentamos el siguiente teorema denominado Teorema de la Función Implícita Global, cuya demostración hace un fuerte uso del método a manera estrictamente analítica. [3, pág 23].

Teorema 3.21. *(Teorema de la Función Implícita Global) Sean X, Y espacios de Banach y sea $f \in C^1(X, Y)$ con $f'(x)^{-1} \in L(Y, X)$ para todo $x \in X$. Si existen constantes $A, B > 0$ tal que*

$$\|f'(x)^{-1}\| \leq A\|x\| + B \tag{3.3}$$

Para toda $x \in X$. Entonces f es difeomorfismo.

Demostración. 1. Sobreyectividad: Queremos probar que para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ que satisface

$$f(x) = y.$$

Para toda $x_0 \in X$ definamos

$$F : [0, 1] \times X \to Y$$

como sigue

$$F(t, x) = f(x) - [(1 - t)f(x_0) + ty].$$

Sea $S = \{t \in [0, 1] : F(t, \cdot) = 0 \text{ } \textit{es solucionable}\}$, como

$$\begin{aligned} F(0, x) = f(x) - (1 - 0)f(x_0) - 0y &= 0 \\ f(x) - f(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

tenemos que para $x = x_0$, $F(0, x) = 0$ tiene solución, es decir $0 \in S$. Además

$$F_x{}^{-1}(t, x) = f'(x)^{-1}$$

y $f'(x)^{-1} \in L(Y, X)$, entonces $F_x{}^{-1}(t, x) \in L(Y, X)$. Dado que $f \in C^1(X, Y)$ tendremos que $F \in C^1(X, Y)$. Por la manera en que hemos definido el conjunto S tenemos que para todo $t_0 \in S$ existe $x_0 \in X$ tal que $F(t_0, x_0) = 0$ y además $F_x{}^{-1}(t, x) \in L(Y, X)$. Luego por el Teorema de la Función Implícita existen $r, r_1 > 0$ y un único $u \in C(B_r(t_0), B_{r_1}(x_0))$ tal que $B_r(t_0) \times B_{r_1}(x_0) \subset U$, donde $U \subset [0, 1] \times X$ es abierto. Es decir $B_r(t_0) \subset [0, 1]$. Además el TFI también implica que $u(t_0) = x_0$ y $f(t, u(t)) = 0$ para todo $t \in B_r(t_0)$. Luego hemos probado que para todo $t_0 \in S$ existe $r > 0$ tal que $B_r(t_0) \subset S$. Esto es que S es abierto. Para aplicar el Método de Continuidad falta ver que S es cerrado, en efecto, en un intervalo (a, b) de S existe una rama de soluciones x_t que satisfacen

$$F(t, x_t) = 0$$

para todo $t \in (a, b)$, luego como

$$F(t, x) + [(1-t)f(x_0) + ty] = f(x).$$

entonces,

$$f'(x_t)\dot{x}_t = y - f(x_0).$$

Luego aplicando la hipótesis para $A, B > 0$

$$\|\dot{x}_t\| \leq \|f'(x_t)^{-1}\| \|y - f(x_0)\| \leq (A\|x_t\| + B)\|y - f(x_0)\|. \tag{3.4}$$

Sea $c = \dfrac{a+b}{2}$, por propiedades de la norma tenemos que

$$\left\| \int_c^t \dot{x}_s \, ds \right\| \leq \int_c^t \|\dot{x}_s\| \, ds \leq \int_c^t (A\|x_s\| + B)\|y - f(x_0)\| \, ds$$

aplicando la desigualdad triangular

$$|\|x_t\| - \|x_c\|| \leq \|x_t - x_c\| \leq \int_c^t (A\|x_s\| + B)\|y - f(x_0)\| \, ds$$

como $t > c$,

$$\|x_t\| \quad \leq \quad \|x_c\| + \int_c^t (A\|x_s\| + B)\|y - f(x_0)\| \, ds$$

Aplicando la Desigualdad de Gronwall, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|x_t\| \leq C \tag{3.5}$$

Sustituyendo (3.5) en (3.4) tenemos

$$\|\dot{x}_t\| \leq (AC + B)\|y - f(x_0)\|.$$

Tomando $(AC + B)\|y - f(x_0)\| = C_1$ obtenemos

$$\|\dot{x}_t\| \leq C_1$$

para todo $t \in (a, b)$. Así hemos demostrado que S es cerrado, luego aplicando el Método de Continuidad será $S = [0, 1]$ con lo que $F(1, x) = 0$ tiene solución y tendremos que

$$f(x) - (1-1)f(x_0) - y = 0 \rightarrow f(x) = y \tag{3.6}$$

tiene solución para todo $y \in Y$ esto es f es sobreyectiva.

2) Inyectividad: Realizaremos la demostración por contradicción. Supongamos que f no es inyectiva, luego existe $y \in Y$ y $x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_i) = y$, para $i = 0, 1$. Sea

$$\gamma : [0,1] \to X$$

el segmento que conecta esos dos puntos definida como

$$\gamma(s) = (1-s)x_0 + sx_1$$

con $s \in [0,1]$. De esta manera $f \circ \gamma$ es un lazo que pasa por y.

Si pudiéramos encontrar

$$x : [0,1] \to X$$

que satisfaga $x(i) = x_i$ para $i = 0, 1$; y $(f \circ x)(s) = f(x(s)) = y$, para todo $s \in [0,1]$. Esto sería contradictorio con el hecho de que f es un homeomorfismo local.

Definamos $I = [0,1]$,

$$C_0(I,X) = \{u \in C(I,X) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

y

$$T : I \times C_0(I,X) \to C_0(I,Y)$$

como

$$T(t, u(s)) = f(\gamma(s) + u(s)) - ty - (1-t)f(\gamma(s)).$$

Lo que queremos es resolver

$$T(t,u) = 0.$$

Podemos ver que

$$T(0,0) = f(\gamma(s) + 0) - 0y - (1-0)f(\gamma(s)) = f(\gamma(s)) - f(\gamma(s)) = 0$$

y si tenemos $u \in C_0(I,X)$ tal que $T(1, u(\cdot)) = 0$, entonces

$$f(\gamma(s) + u(s)) = y.$$

Luego $x(s) = u(s) + \gamma(s)$ es quien necesitamos para obtener $f(x(s)) = y$, para todo $s \in [0,1]$.

Debido a la linealidad de la derivada

$$T_u(t,u) = f'(\gamma(\cdot) + u(\cdot)) \in L(C_0(I,X), C_0(I,Y)). \tag{3.7}$$

Ahora como $f'(x)^{-1}$ es lineal continua entonces es acotada, luego $T_u(t,u)^{-1}$ es lineal y acotada, además $T \in C^1$ ya que $f \in C^1$. Sea

$$S = \{t \in [0,1] : T(t,u) = 0 \ \ \textit{es solucionable}\}.$$

Por el Teorema de la Función Implícita existen $r, r_1 > 0$ y un único $u \in C(B_r(t_0), B_{r_1}(u_0))$ tal que $B_r(t_0) \times B_{r_1}(u_0) \subset U$, con U abierto contenido en $[0,1] \times X$, es decir $B_r(t_0) \subset [0,1]$. Además el Teorema de la Función Implícita también implica que $v(t_0) = u_0$ y $T(t, v(t)) = 0$ para todo

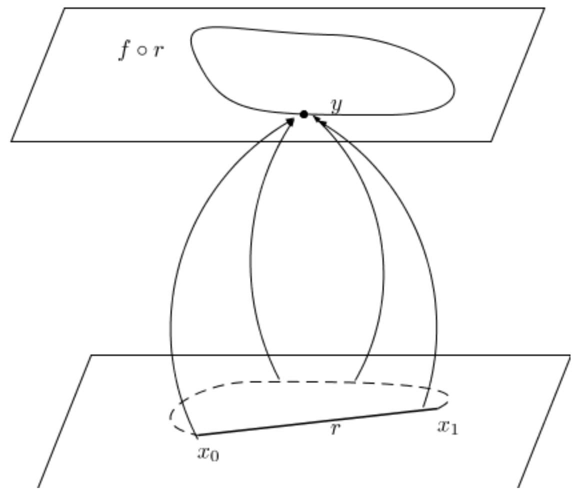

Figura 3.1: **Implicita Global [3, pág 26].**

$t \in B_r(t_0)$. Por tanto S es abierto.
Sea $u_t(s)$ una solución en $t \in S$. Entonces

$$f'(\gamma(s) + u_t(s)) \cdot \dot{u}_t(s) - y + f(\gamma(s)) = 0,$$

donde $\dot{u}_t$ denota la derivada con respecto a t. Luego

$$\dot{u}_t(s) = (f'(\gamma(s) + u_t(s)))^{-1}(y - f(\gamma(s)))$$

Aplicando la hipótesis obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|\dot{u}_t(s)\|_X &= \|(f'(\gamma(s) + u_t(s)))^{-1}(y - f(\gamma(s))\| \\
&\leq \|(f'(\gamma(s) + u_t(s)))^{-1}\|_X \|(y - f(\gamma(s))\|_Y \\
&\leq (A\|\gamma(s) + u_t(s)\|_X + B)\|(y - f(\gamma(s))\|_Y \\
&\leq (A\|\gamma(s)\| + A\|u_t(s)\| + B)\|(y - f(\gamma(s))\|_Y.
\end{aligned}$$

Dado que

$$\|\gamma(s)\| = \|(1 - s)x_0 + sx_1\| \leq \|(1 - s)x_0\| + \|sx_1\| \leq \|x_0\| + \|x_1\|$$

con $s \in [0, 1]$ y tomando $B_1 = A\|\gamma(s)\| + B$, tenemos que $B_1 > 0$ y

$$\|\dot{u}_t(s)\|_X \leq (A\|u_t(s)\|_X + B_1)\|(y - f(\gamma(s))\|_Y$$

donde B_1 depende solo de B y x_0, x_1. Tomando el sup obtenemos

$$\sup \|\dot{u}_t(s)\| \leq \sup((A\|u_t(s)\| + B_1)\|y - f(\gamma(s))\|.$$

Por tanto

$$\|\dot{u}_t\|_{C_{0(I,X)}} \leq (A\|u_t\|_{C_{0(I,X)}} + B_1)\|y - f \circ \gamma\|_{C_{0(I,Y)}}.$$

Tomando nuevamente $c = \dfrac{a+b}{2}$ tenemos que

$$\left\|\int_c^t \dot{u}_s\, ds\right\| \leq \int_c^t \|\dot{u}_s\|\, ds \leq \int_c^t (A\|u_s\| + B_1)\|y - f \circ \gamma\|\, ds$$

así que por desigualdad triangular

$$|\|u_t\| - \|u_c\|| \leq \|u_t - u_c\| \leq \int_c^t (A\|u_s\| + B_1)\|y - f \circ \gamma\|\, ds$$

como $t > c$,

$$\|u_t\| \quad \leq \quad \|u_c\| + \int_c^t (A\|u_s\| + B)\|y - f \circ \gamma\|\, ds.$$

Aplicando la Desigualdad de Gronwall, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u_t\| \leq C \tag{3.8}$$

luego

$$\|\dot{u}_t\| \leq (AC + B_1)\|y - f \circ \gamma\|$$

tomando $(AC + B_1)\|y - f \circ \gamma\| = C_1$ obtenemos

$$\|\dot{x}_t\| \leq C_1$$

para todo $t \in (a, b)$. Así hemos demostrado que S es cerrado, luego aplicando el Método de Continuidad sera $S = [0, 1]$ con lo que $T(1, u) = 0$ tiene solución y tendremos que

$$f(\gamma(s) + u(s)) = y$$

así para $s = 0, 1$, erá $\gamma(s) = x_0, x_1$ respectivamente, además por definición sabemos que $u(0) = u(1) = 0$ por tanto

$$f(x_0) = y, \qquad f(x_1) = y$$

lo que es una contradicción entonces f debe ser inyectiva.

■

Los siguientes son ejemplos de Ecuaciones no lineales que se resuelven por el Método de Continuidad. Los detalles de la solución permiten darle continuidad a el trabajo de grado en la maestría, ya que requieren elementos muy avanzados de análisis. Se dejarán enunciados como lemas.

Lema 3.1. *Supongamos $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1)$, donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado de contorno suave. Asumamos que existen constantes $C > 0$, que satisfacen*

1) Existe una función creciente $c : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ *tal que*

$$|f(x,\eta,\xi)| \leq c(|\eta|)(1+|\xi|^2)$$

para todo $(x,\eta,\xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$.

2)

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,\eta,\xi) \leq 0.$$

3) Asumamos que existe $M > 0$ *tal que*

$$f(x,\eta,\xi) = \begin{cases} < 0, & si\ \eta > M \\ > 0, & si\ \eta < -M. \end{cases}$$

Asumamos $\phi \in C^{2,\gamma}$, *para algún* $\gamma \in (0,1)$. *Entonces la ecuación*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u(x),\triangledown u(x)), \ x \in \Omega \\ u|_{\partial}\Omega = \phi \end{cases} \tag{3.9}$$

posee una única solución en $C^{2,\gamma}$.

Lema 3.2. *Bajo el supuesto* (3), *si* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *es una solución de* (3.9), *entonces*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \text{máx}\left\{\max_{\partial\Omega}|\phi(x)|, M\right\}.$$

CAPÍTULO 4

Conclusiones

El primero y el paso más fácil en el estudio de un problema no lineal es linealizarlo. Es decir, aproximar el problema no lineal inicial por uno lineal. Ecuaciones diferenciales no lineales y ecuaciones integrales no lineales puede ser vistas como ecuaciones no lineales en determinados espacios de funciones. Al tratar con sus linealizaciones, regresamos a cálculo diferencial en espacios de dimensión infinita. El Teorema de la Función Implícita para espacios de dimensión finita ha demostrado ser muy útil en todas las teorías diferenciales: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Geometría Diferencial, Topología Diferencial, Grupos de Lie, etc. La versión del Teorema de la Función Implícita en dimensión infinita es aún mas útil, un ejemplo claro de esto, es su importancia en la construcción del Método de Continuidad, principio general meramente analítico, que puede ser aplicado para probar la existencia de soluciones para una gran variedad de ecuaciones no lineales. Existen otras aplicaciones del TFI no mencionadas en el trabajo como los son: las Ecuaciones en Derivadas Parciales y otros campos; En particular, en la existencia local, de la estabilidad, en la bifurcación y en el Problema de la Perturbación. Aplicaciones que pueden desarrollarse mas adelante en estudios de maestría.

El Teorema de la Función Implícita Global es un claro ejemplo de la aplicabilidad del método de continuidad para garantizar la solución de $f(x) = y$ y $T(1, u) = 0$ y así demostrar la inyectividad y sobreyectividad. Este Método nos brinda herramientas generales que podemos aplicar a la hora de demostrar la existencia de soluciones. Por este motivo, en muchas ocasiones durante la descripción del método se menciona que en los casos en que sea posible demostrar determinadas condiciones se puede aplicar alguno de los Teoremas que se trataron durante el trabajo, como es el caso de el Teorema de la Función Implícita en espacios de Banach.

Los preliminares teóricos presentados en el inicio del trabajo como Derivabilidad y Principio de Contracciones fueron fundamentales para comprender el Teorema de la Función Implícita e Inversa y por ende para la construcción del Método de Continuidad. En estos preliminares se expusieron Teoremas de gran importancia cuya demostración también aparece en el trabajo.

Bibliografía

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations.* Springer, 2011.

[2] José Francisco Caicedo. *Cálculo Avanzado.* Universidad Nacional de Colombia, 2005.

[3] Kung Ching Chang. *Methods in Nonlinear Analysis.* Springer, 2005.

[4] K1aus Deim1ing. *Nonlinear Functional Analysis.* Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

[5] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems.* Prentice Hall , New Jersey, 1996.

[6] Erwin Kreyszig. *Introductory Funcional Analysis whit Aplications.* University of Windsor, 1978.

[7] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1976.

[8] Michael Spivak. *Cálculo en Variedades.* Reverté, S.A, Barcelona, 1988.

[9] Jerrold E. Marsden; Anthony J. Tromba. *Cálculo Vectorial.* Addison- Wesley Iberoamerica, Wilmington E.U.A., 1991.