Algunas Aplicaciones del Número de Giros en el Plano

Oscar David Manrique Roballo
Trabajo de Grado

Director:
Arturo Sanjuán

Proyecto Curricular de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2015

Algunas Aplicaciones del Número de Giros En el Plano

Oscar David Manrique Roballo

Trabajo de Grado

Director:
Arturo Sanjuán

Proyecto Curricular de Matemáticas
Facultad de Ciencias y Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.

2015

Vo. Bo. Arturo Sanjuán
Director
Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Vo. Bo Carlos Orlando Ochoa Castillo
Evaluador
Universidad Distrital Francisco José De Caldas

Para mi familia
Por su apoyo incondicional
Para mi pareja sentimental Angie
Por su valiosa compañia

Agradecimientos

A la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por abrirme las puertas, formarme como persona. A todos sus docentes y en especial a el profesor Arturo Sanjuán por sus valiosas enseñanzas.

Índice general

Introducción

El grado topológico es una fuerte herramienta matemática para solucionar una variedad de problemas. Por ejemplo, es muy útil para solucionar ecuaciones. Es decir, nos permite determinar en ocaciones la existencia de soluciones. En este trabajo se estudiará el grado topológico en el plano, que es equivalente a estudiar el número de giros de una curva continua cerrada en $\mathbb{C}$. Usando el número de Giros se demostrará el Teorema Fundamental Del Álgebra y el Teorema Del Punto Fijo de Brower.

Se abordará el número de giros asumiendo, en primer lugar, que la curva cerrada debe ser diferenciable. En muchas ocasiones se da el caso que la curva no es diferenciable, entonces es necesario introducir el Teorema De Stone-Weierstrass para poder aproximar la curva a través de polinomios trigonométricos. Así los polinomios son diferenciables y se puede aplicar la teoría previa.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo se estudiarán algunos conceptos sobre análisis y topología, que serán útiles para el desarrollo del trabajo.

1.1. Preliminares Topológicos y Análiticos

El siguiente teorema caracteriza la continuidad en espacios métricos. se usa para demostrar el importante hecho que la compacidad es un invariante topológico.

Teorema 1.1. [2, pág 30] Una función $f : X \to Y$ de un espacio métrico (X, d_1) a un espacio métrico (Y, d_2) es continua en $x_0 \in X$ si y solo si para todo $x_n \in X$ tal que $x_n \to x_0$ entonces $f(x_n) \to f(x_0)$

Por su parte, el siguiente teorema es importante para alcanzar los objetivos propuestos. [8, pág 226]

Teorema 1.2. (Teorema de el Valor Medio) si f es una función continua en todo un intervalo cerrado $[a, b]$ que tiene derivada en cada punto del intervalo abierto (a, b), existe por lo menos un punto c interior a (a, b) donde se cumple

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Teorema 1.3. Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Tenemos entonces si $f'(x) = 0$ para todo x del intervalo (a, b), f es constante en $[a, b]$ [8, Pág 228]

Demostración. Supongamos que $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[x, y]$, obtenemos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \quad \text{con} \quad x < c < y$$

Se toma $x = a$, $f'(c) = 0$ luego $f(y) = f(a)$ para todo y en el intervalo $[a, b]$, por lo tanto f es constante en $[a, b]$ □

Las siguientes definiciones fueron tomadas de [2, Pág 77].

Definición 1.1. (Compacidad). Un espacio métrico X se dice que es compacto si toda sucesión en X admite una subsucesión convergente.

Definición 1.2. (Conjunto Acotado.) Un conjunto $S \subset X$ se dice acotado en un espacio métrico (X, d) si existe un $M > 0$ tal que para todo $x, y \in S$ se tiene que $d_X(x, y) < M$

El siguiente teorema muestra que la compacidad es un invariante topológico

Teorema 1.4. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua entonces la imagen de un subconjunto compacto S de X bajo f es compacto. [2, Pág 81]

Demostración. Como $f(S) = \{y \in Y : \text{existe} \quad x \in S \quad \text{con} \quad f(x) = y\}$, por definición de compacidad es suficiente demostrar que toda sucesión (y_n) en la imagen $f(S) \subset Y$ tiene una subsucesión en $f(S)$. Sea $y_n \in f(S)$, puesto que $y_n = f(x_n)$ para algún x_n en S. Como S es compacto entonces (x_n) contiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente en S. Además f es continua entonces por Teorema 1.1 la imagen de (x_{n_k}) es una subsucesión de (y_n) que converge en $f(S)$. □

La adherencia también se puede caracterizar por sucesiones. [2, Pág 30]

Proposición 1.1. Sea S un subconjunto de un espacio métrico (X, d_X) y $\bar{S}$ su clausura, si existe una sucesión $(x_n) \in S$ tal que $x_n \to x$ entonces $x \in \bar{S}$

La siguiente es una consecuencia de la defindición 1.1.

Teorema 1.5. Un subconjunto compacto S de un espacio métrico es cerrado y acotado. [2, Pág 77]

Demostración. Para todo x en $\bar{S}$ existe una sucesión (x_n) en S tal que $x_n \to x$. S es un conjunto compacto entonces $x \in S$, luego S es cerrado por proposición 1.1. Ahora se demostará que S esta acotado. Si S no estuviera acotado, entonces S contiene una sucesión (y_n) tal que $d(y_n, b) > n$ con b cualquier elemento fijo de S, esta sucesión no puede tener una subsucesión convergente. El conjunto S es compacto por lo tanto (y_n) debe tener una subsucesión convergente. Esto contradice que S no sea acotado. □

Las funciones continuas de un compacto a valor real tiene la siguiente propiedad.

Teorema 1.6. si f es una función continua de un subconjunto compacto S en $\mathbb{R}$ entonces toma un un mínimo y un máximo en algún punto de S. [2, Pág 81]

Demostración. Por teomera 1.4 $f(S)$ es compacto con $A \subset \mathbb{R}$, luego es cerrado y acotado por teorema 1.5. Como el conjunto $f(S)$ es cerrado y acotado se tiene que existen x, y tales que, $x = \text{mín}(f(S)) \in f(S)$ y $y = \text{máx}(f(S)) \in f(S)$ y la imagen inversa de estos dos puntos de S son puntos de S, con $f(x)$ es mínimo o máximo. □

Como consecuencia, tenemos.

Teorema 1.7. La distancia de un cerrado a un compacto en un espacio métrico adquiere un mínimo y un máximo. [6,pág 223].

De [5, Pág 148] Tomamos la siguiente definición.

Definición 1.3. (Conexidad.) Sea X, d_X un espacio métrico, una separación de X es un par de abiertos no vacíos A y B tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$ se dice que X es conexo si no existe ninguna separación de X.

Así como en la compacidad, tenemos.

Teorema 1.8. La conexidad es un invariante topológico. [5, Pág 150]

Demostración. Sea X un espacio conexo y $f : X \mapsto Y$ una función continua, supongamos que Y admite la separación $\{C, D\}$ con C, D subconjuntos abiertos de Y, por la continuidad de f tenemos que $f^{-1}(C)$ y $f^{-1}(D)$ son subconjuntos abiertos de X como C y D son diferenctes de vacío y f es sobreyectiva entonces $f^{-1}(C) \neq \emptyset$ $f^{-1}(D) \neq \emptyset$ además:

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) &= f^{-1}(C \cup D) \\ &= f^{-1}(Y) \\ &= X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) &= f^{-1}(C \cap D) \\ &= f^{-1}(\emptyset) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

luego $\{f^{-1}(C), f^{-1}(D)\}$ es una separación de X de modo que si Y no es conexo entonces para f continua $f^{-1}(Y) \subset X$ es no conexo. □

La siguiente definición de conexidad se da para un subespacio de un espacio métrico. [6, Pág 42]

Definición 1.4. Sea (X, d_X) un espacio métrico, A y B dos subconjuntos de X, se dice que son separados si y solo si $A \cap \bar{B} = \emptyset$ y $\bar{A} \cap B = \emptyset$.

El teorema que vemos en seguida es importante porque permite introducir la definición de conexidad para un subespacio de un espacio métrico.

Teorema 1.9. Sea (X, d_X) un espacio métrico, $C \subseteq X$ es un subespacio métrico conexo si y solo si no existen dos conjuntos separados A y B. (es decir $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{D} = \emptyset$ tales que $C = A \cup B$. [6, Pág 42]

Definición 1.5. Un intervalo en $\mathbb{R}$ se define como un subconjunto S de $\mathbb{R}$ que cumple lo siguiente: para $z \in \mathbb{R}$, si $x \in S$, $y \in S$ y $x < z < y$ entonces $z \in S$.

Teorema 1.10. Todo Subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si y solo si es un intervalo

Demostración. La demostración sigue las ideas de [6, Pág 42]. La necesidad se demostrará por contrarecíproco, sea $S \subset \mathbb{R}$, si existe un $x \in S$, $y \in S$ y algún $z \in (x, y)$ tal que $z \notin S$ entonces $S = A_z \cup B_z$ con,

$$A_z = S \cap (-\infty, z), \quad B_z = S \cap (z, \infty)$$

Como, $x \in S$ entonces $A_z \neq \emptyset$ y $y \in S$ tenemos que $B_z \neq \emptyset$, también observamos $\bar{B}_z = [z, \infty)$

$$A_z \cap \bar{B}_z = S \cap (-\infty, z) \cap [z, \infty) = \emptyset$$

Y $\bar{A}_z = (-\infty, z]$ de modo que

$$\bar{A}_z \cap B_z = (-\infty, z] \cap S \cap (z, \infty) = \emptyset$$

De aquí S es conexo.

Para Demostrar la suficiencia, supongase que S no es conexo. Entonces hay una separación, es decir para un par de abiertos no vacíos A y B, $A \cup B = S$ y $A \cap B = \emptyset$. sea $x \in A$, $y \in B$ sin perdida de generalidad suponemos que $x < y$, definimos:

$$z = \sup(A \cap [x, y])$$

Por la Proposición 1.1 , $z \in \bar{A}$ luego, $z \notin B$. En particular, $x \leq z < y$ así tenemos:
Si $z \notin A$ se deduce que $x < z < y$ con $z \notin S$ por otro lado si $z \in A$ entonces $z \notin \bar{B}$, en consecuencia existe z_1 tal que $z < z_1 < y$ y también $z_1 \notin B$ por tanto $x < z_1 < y$ y $z_1 \notin S$

□

Teorema 1.11. Sea $f : X \mapsto \mathbb{Z}$ con X un espacio métrico conexo y f diferenciable entonces f es una función constante

Demostración. Por Teorema 1.8 la conexidad de f es un invariante topológico entonces $f(X)$ es conexo para todo $x \in X$. Como todo subconjunto de $\mathbb{R}$ conexo es un intervalo por Teorema 1.10. Por hipótesis $f(X) \subset \mathbb{Z}$ la única forma de que un intervalo sea entero sería que f sea constante. Demostrando lo que se deseaba. □

Teorema 1.12. Teorema De Bolzano Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua de un intervalo cerrado $[a, b]$ sobre $\mathbb{R}$ y y_0 un real entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces existe un $c \in [a, b]$ al que $f(c) = y_0$

Demostración. El intervalo $[a, b]$ es conexo, como f es continua entonces $f([a, b])$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ por Teorema 1.8. En virtud del Teorema 1.10, todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo por lo tanto cualquier y_0 entre $f(a)$ y $f(b)$ está en $f([a, b])$, entonces $y_0 = f(c)$ para algun c entre a y b. □

Teorema 1.13. (Teorema Fundamental Del Cálculo). [8, pág 248] Sea f una función integrable en $[a, x]$ para cada x en $[a, b]$. Sea c tal que $a \leq c \leq b$ y definase una nueva función A del siguinte modo:

$$A(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{si} \quad a \leq x \leq b$$

Existe entonces la derivada $A'(x)$ en cada punto x del intervalo abierto (a, b) en el que f es continua, y para tal x tenemos

$$A'(x) = f(x).$$

Teorema 1.14. (Teorema Fundamental Del Cálculo Para Curvas En $\mathbb{C}$). [3, pág 96] Si f es una función continua sobre un conjunto abierto U, y tiene una primitiva g, esto es; g es derivable y $g' = f$. Sea a, b dos puntos de U, y sea γ una curva continuamente diferenciable definida en $[a, b] \to \mathbb{C}$ en U entonces

$$\int_\gamma f = g(b) - g(a)$$

El siguiente teorema es una consecuencia de la definición de continuidad.

Teorema 1.15. Si $f \geq 0$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y

$$\int_a^b f = 0$$

entonces f es identicamente cero en el intervalo $[a, b]$.

Demostración. Supongamos que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Como f es continua en $t_0 \in [a, b]$ con $f(t_0) \neq 0$, para $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$ de tal forma que $0 < |t - t_0| < \delta$ entonces

$$f(t) - f(t_0) < \epsilon$$

Esto es para todo $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ con $f(t) \geq 0$ tomando $\epsilon = \frac{f(t_0)}{2}$ se tiene que

$$\frac{1}{2}f(t_0) < f(t) < \frac{3}{2}f(t_0)$$

En particular si analizamos $\frac{1}{2}f(t_0) < f(t)$ tenemos que

$$0 \leq \frac{f(t_0)}{2}\int_a^b dt \leq 0$$

En efecto

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)f(t_0) = 0$$
$$f(t_0) = 0$$

Contradiciendo que $f(t_0) \neq 0$, luego f es identicamente cero en $[a, b]$ □

Definición 1.6. Una propiedad $P(n)$ se cumple para casi todo n si y solo si existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ entonces $P(n)$ es verdadera.

Proposición 1.2. Si a_n es una sucesión de $\mathbb{R}$ tal que $a_n \geq 0$ para todo n y $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ entonces $\alpha \geq 0$

Demostración. Como $a_n \to \alpha$ para casi todo n, existe un N_ϵ tal que para todo $n \geq N_\epsilon$ entonces

$$|a_n - \alpha| < \epsilon$$

como $a_n \geq 0$ para todo n, para un α fijo en particular tenemos

$$\begin{aligned} a_n - \alpha &< \epsilon \\ a_n &< \epsilon + \alpha. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.16. Sean a_n y b_n sucesiones en $\mathbb{C}$ tales que $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$. Suponga que $|\alpha| < |\beta|$ entonces $|a_n| < |b_n|$ para casi todo n.

Demostración. Supongamos que $|\alpha| < |\beta|$ y para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ y

$$|a_n| \geq |b_n|$$

Es decir, la anterior propiedad se cumple para infinitos n, luego existen subsucesiones a_{n_k} y b_{n_k}, tales que

$$|a_{n_k}| \geq |b_{n_k}|$$

para todo k, usando el criterio de comparación para sucesiones

$$\lim_{k\to\infty} |a_{n_k}| \geq \lim_{k\to\infty} |b_{n_k}|,$$

como las sucesiones $a_n \to \alpha$ y $b_n \to \beta$ entonces toda subsucesión $a_{n_k \to \alpha}$ y b_{n_k} convergen a α y β respectivamente, por tanto $|\alpha| > |\beta|$ contradiciendo que $|\alpha| < |\beta|$ de modo que $|a_n| < |b_n|$ para casi todo n

□

1.2. Algunos Ejemplos

En estos ejemplos se analizará si existe un $x \in \Omega$ tal que $f(x) = y$, con f una función continua de $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, y un elemento fijo de $\mathbb{R}^2$. Teniendo siempre presente que la existencia de x depende solamente de Ω y f.

Ejemplo 1.1. Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^3 - 1$. Para encontrar una solución hacemos uso de las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 1 \\ x^3 &= y + 1 \\ x &= \sqrt[3]{y+1} \end{aligned}$$

luego para un y fijo, nuestra solución esta dada por $x = \sqrt[3]{y+1}$.

Si cambiamos el dominio de nuestra f por

$$\begin{aligned} f : (3, \infty) &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 - 1 \end{aligned}$$

Y tomamos $y = 0$ decimos que no existe un $x \in (3, \infty)$ tal que $x^3 - 1 = 0$. Lo anterior muestra que la existencia del x depende de Ω.

Ejemplo 1.2. Se define $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \mapsto \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

Para encontrar una solución $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{sen} \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} &= \operatorname{arc\,sen} y \\ x &= \frac{1}{\operatorname{arc\,sen} y} \end{aligned}$$

donde y es un elemento del intervalo $[-1, 1]$.

Ejemplo 1.3. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 2x + y \\ 4x + 3y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se encotrará un $m \in \mathbb{R}^2$ de tal forma que $f(m) = n$ para un $n \in \mathbb{R}^2$ fijo, si $m = (x, y)$ se escribe como un sistema de ecuaciones lineales.

$$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \end{smallmatrix}\right)$$

Si la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ tiene inversa. Cuando $\det(A) = 0$ entonces el anterior sistema de ecuaciones tiene solución, por Teorema 2.20 de [8, p 81-82].

Como el determinante de la matriz A es diferente de cero entonces su inversa esta dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar A^{-1} a ambos lados de la igualdad

$$A^{-1}A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A^{-1}\left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \end{smallmatrix}\right)$$

Luego una solución del sistema de ecuaciones esta dado por

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \frac{3}{2}n_1 - \frac{1}{2}n_2 \\ -2n_1 + n_2 \end{smallmatrix}\right)$$

Es decir se encontró una solución $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ en función de $n = (n_1, n_2) \in \mathbb{R}^2$ fijo, tal que $f(m) = n$ es decir, como $\left(\begin{smallmatrix} \frac{3}{2}n_1 - \frac{1}{2}n_2 \\ -2n_1 + n_2 \end{smallmatrix}\right)$ se tiene que

$$f\left(\begin{smallmatrix} \frac{3}{2}n_1 - \frac{1}{2}n_2 \\ -2n_1 + n_2 \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} n_1 \\ n_2 \end{smallmatrix}\right)$$

Ejemplo 1.4. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to (xy, x^2) \end{aligned}$$

Se debe encontrar una solución $m = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, de tal forma que $f(m) = n$ para un $n \in \mathbb{R}^2$ fijo

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (xy, x^2) \\ (xy, x^2) &= (n_1, n_2) \end{aligned}$$

$$n_1 = xy \quad \text{y} \quad n_2 = x^2$$

De $n_2 = x^2$ se obtiene $x = \pm\sqrt{n_2}$ sustituyendo x de la última igualdad en $n_1 = xy$ se tiene $n_1 = \pm\sqrt{n_2} \cdot y$, una solución podría quedar expresada como $y = \dfrac{n_1}{\pm\sqrt{n_2}}$.

Luego $f(m) = n$ donde $m = (x, y) = \Bigg(\pm\sqrt{n_2}, \frac{n_1}{\pm\sqrt{n_2}}\Bigg)$.

Ejemplo 1.5. Si n es impar entonces $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ posee una solución real. Se define $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Si $P_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$ y $P_{2n}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ luego $p_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + p_{2n}(x)$. Puesto que

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{p_{2n(x)}}{x^{2n+1}} = 0.$$

Entonces para $\epsilon > 0$, existe un M_ϵ tal que si $|x| > M$

$$\left|\frac{P_{2n}(x)}{x^{2n+1}}\right| < \epsilon. \tag{1.1}$$

Si $\epsilon = 1$ existe un M_1 tal que si $x > M$ entonces

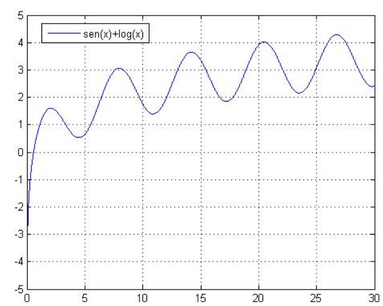
$$x^{2n+1} - P_{2n}(x) > 0,$$

también existe un $x < -M_1$ tal que $P_{2n}(x) > -x^{2n+1}$ esto es

$$-P_{2n}(x) < x^{2n+1}$$
$$x^{2n+1} - P_{2n}(x) < 0.$$

El polinomio $P(x)$ es continuo en $(-\infty, \infty)$ en particular en $[-M_1, M_1]$, además se demostro que existe un $m \in (-\infty, -M_1)$ y $n \in (M, \infty)$ tal que $P(m) < 0$ y $P(n) > 0$ entonces por Teorema de Bolzano existe un $c \in (-M_1, M_1)$ tal que $f(c) = 0$

Ejemplo 1.6. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x + \log x$.



Se demostrará que existe un $x \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = 0$. la idea es encontrar x_1 y x_2 tales que $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$ con $0 < x_1 < x_2$.
Como

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{sen} x + \log x = -\infty$$

para $M = 1$ existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < x < \delta_1$ entonces

$$\operatorname{sen} x + \log x < -1 < 0.$$

en particular para $x_1 = \frac{\delta_1}{2}$, entonces $f(x_1) < 0$.
También se tiene que

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x + \log x = +\infty$$

si $M = 1$ existe un $N_1 > 0$ tal que si $x > N_1$,

$$\operatorname{sen} x + \log x > 1 > 0.$$

Escogiendo a $x_2 = \max\{N_1, x_1\}$ por lo tanto $f(x_2) > 0$.

Como f es continua en $(0, \infty)$ en particular en $[x_1, x_2]$, $f(x_1) < 0$ y $f(x_2) > 0$, por el teorema de Bolzano existe un $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f(c) = 0$ que es lo que queriamos demostrar.

En los anteriores ejemplos se puede ver que solo interesa encontrar alguna manera de argumentar la existencia de la solución, sin necesidad de saber cuál es específicamente. En el campo de las aplicaciones es muy importante, pues se podría perder mucho esfuerzo y recursos si se busca algo que no existe. Otras ramas de la matemática como análisis numérico se encargan de encontrar estas soluciones, luego de estar concretamente determinada la existencia.

Es importante también tener en cuenta que esta rama de las matemáticas no se encarga de determinar cuantas soluciones existen y mucho menos dar caracterizaciones sobre la topología de las soluciones.

Finalmente se debe aclarar que no obtenemos "dependencia continua"de las soluciones con respecto a y. En el campo de los complejos existe un importante teorema que caracteriza los ceros de las funciones holomorfas.

Teorema 1.17 (7, Pág 208)**.** Sea Ω una región y f una funcion holomorfa, sea

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\},$$

entonces Se tienen dos casos. $Z(f) = \Omega$ luego f es identicamente cero, o $Z(f)$ no tiene puntos límetes en Ω.
Si el último caso se cumple entonces se dice que existe una correspondencia de cada $a \in Z(f)$ un único entero positivo m tal que

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad (z \in \Omega)$$

donde g es holomorfa y $g(a) \neq 0$ y además es $Z(f)$ contable.

CAPÍTULO 2

Número De Giros

En este capítulo se estudiará el número de giros, su definición y propiedades. En seguida se trabajará el teorema de Stone-Weierstrass, para poder abordar el número de giros sin necesidad de tener diferenciabilidad.

Definición 2.1. (Curva.) Una función continua γ de un intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{C}$ se llama curva en $\mathbb{C}$. Si γ es uno a uno se llama arco. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ entonces se dice que es una curva cerrada. [1, Pág 136]

Definición 2.2. (Número de Giros.) [1, Pág 201] Sea γ una curva cerrada continuamente diferenciable en el plano complejo, con un intervalo de parámetros $[0, 2\pi]$ se define el número de giros con centro en el origen como

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt.$$

Lema 2.1 (10, Pág 21)**.** $\mathrm{e}^z = 1$, si y solo si z es un múltiplo entero de $2\pi i$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{e}^z = 1$ se demostrará que z es un múltiplo entero de $2\pi i$. Como

$$\mathrm{e}^x \cos y + i\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = 1$$

Por lo tanto $\mathrm{e}^x \cos y = 1$, como $\mathrm{e}^x \neq 0$ debe ser $\operatorname{sen} y = 0$, $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Asi pues $\cos(k\pi) = (-1)^k$ pero

$$\mathrm{e}^x \cos(k\pi) = 1$$

Entonces para que $\cos(k\pi) = 1$ $k = 2n$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ como $\mathrm{e}^x > 0$ de modo que $\mathrm{e}^x \cos(2n\pi) = 1$ con $x = 0$ esto es z es un múltiplo entero de $2\pi i$.

Reciprocamente, para $z = 2\pi ni$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^z &= \mathrm{e}^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \\
&= \mathrm{e}^0(\cos(2\pi n) + i \operatorname{sen}(2\pi n)) \\
&= (\cos(2\pi n) + i \operatorname{sen}(2\pi n)) \quad n = 1, 2, \ldots \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 2.1. (6, Pág 201). El número de giros $\operatorname{Ind}(\gamma, a)$ es siempre un número entero.

Demostración. En virtud del Teorema Fundamental del Cálculo para curvas, existe una φ sobre $[0, 2\pi]$ dada por

$$\varphi(t) = \int_b^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds$$

Tal que $\varphi'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$. Se define ψ sobre $[0, 2\pi]$ por

$$\psi(t) = \gamma(t)\mathrm{e}^{-\varphi(t)}.$$

$\psi(t)$ es diferenciable luego

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) &= \gamma'\mathrm{e}^{-\varphi(t)} + \gamma(t)\mathrm{e}^{-\varphi(t)}(-\varphi'(t)) \\
&= \gamma'(t)\mathrm{e}^{-\varphi(t)} - \gamma(t)\mathrm{e}^{-\varphi(t)} \cdot \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \\
&= \gamma'(t)\mathrm{e}^{-\varphi(t)} - \gamma'(t)\mathrm{e}^{-\varphi(t)} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$\psi(t) = \gamma(t)\mathrm{e}^{-\varphi(t)}$$

Es constante por Teorema 1.3.

Por definición de φ tenemos que $\varphi(a) = 0$ luego $\psi(a) = \gamma(a)\mathrm{e}^{-\varphi(a)} = \gamma(a) = \gamma(b)$. La última iguadad se da porque γ es cerrada puesto que ψ es constante, $\psi(a) = \psi(b)$ entonces

$$
\begin{aligned}
\psi(a) &= (\gamma(b))\mathrm{e}^{-\varphi(b)} \\
&= \mathrm{e}^{-\varphi(b)} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Ahora se demestra que $\varphi(b) = 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}(\gamma, a)$ dado que,

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}(\gamma) &= \frac{2\pi i}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt \\ &= \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt \\ &= \int_a^b \varphi'(t)dt \\ &= \varphi(b) - \varphi(a) \\ &= \varphi(b) - 0 \\ &= \varphi(b) \end{aligned}$$

luego $\mathrm{e}^{2\pi i \cdot \mathrm{Ind}(\gamma,a)} = \mathrm{e}^{\varphi(b)} = 1$ por tanto $\mathrm{Ind}(\gamma)$ debe ser entero por Lema 2.1. □

Teorema 2.2 (6, Pág 201)**.** Sea γ una curva cerrada continuamente diferenciable en el plano complejo, con un intervalo de parámetros $[a, b]$ y admitase que $\gamma(t) \neq 0$ para cada $t \in [a, b]$ suponga que el rango de γ no intersecta al eje real negativo entonces $\mathrm{Ind}(\gamma) = 0$.

Demostración. Sea la función

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) + c}dt$$

Se demostrará que f es continua, para ello dado $\epsilon > 0$, sea $\delta = \dfrac{\epsilon \cdot 2\pi \cdot \text{mín}\left\{\frac{|\gamma(t)+c|^2}{2||\gamma+h||_\infty}\right\}}{||\gamma'||_\infty (b-a)}$ para $|h| < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(c+h) - f(c)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)+c+h}dt - \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)+c}dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)\gamma(t) + \gamma'(t)c - \gamma'(t)\gamma(t) - \gamma'(t)c - \gamma'(t)h}{(\gamma(t)+c+h)(\gamma(t)+c)}dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)h}{(\gamma(t)+c+h)(\gamma(t)+c)}dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)| \cdot |h|}{|\gamma(t)+c+h| \cdot |\gamma(t)+c|}dt \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto f es continua por teorema 2.1, el rango de f son los enteros, entonces f es constante por teorema 1.11.

Bastaría demostrar que

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)+c}dt = 0,$$

Dado $\epsilon > 0$, se toma $M = \max\left\{2||\gamma||_\infty, \frac{||\gamma'||(b-a)}{\epsilon\pi}\right\}$, si $c > M$ entonces

$$\begin{aligned}
|f(c) - 0| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)+c}dt\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)+c|}dt \\
&\leq \frac{||\gamma'||_\infty(b-a)}{2||\gamma||_\infty} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3 (6, Pág 201)**.** Sea γ_1 y γ_2 curvas cerradas continuamente diferenciables en el plano complejo con un intervalo de parametros $[0, 2\pi]$, $\gamma_1 \neq 0$ y $\gamma_2 \neq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ y

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)| \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

entonces $\mathrm{Ind}(\gamma_1) = \mathrm{Ind}(\gamma_2)$.

Demostración. Por hipótesis $|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)| < |\gamma_1(t)|$ para todo t en $[0, 2\pi]$, luego $\frac{|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|}{|\gamma_1(t)|} < \frac{|\gamma_1(t)|}{|\gamma_1(t)|} = 1$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|}{|\gamma_1(t)|} &= \left|\frac{\gamma_1(t) - \gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}\right| \\
&= \left|\frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1(t)} - \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}\right| \\
&= |1 - \gamma(t)| \\
&= 1
\end{aligned}$$

La última desigualdad se da al tomar $\gamma(t) = \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}$. Como $||1| - |\gamma(t)|| \leq |1 - \gamma(t)| < 1$ entonces

$$\begin{aligned}
1 - |\gamma(t)| &< 1 \\
-|\gamma(t)| &< 0.
\end{aligned}$$

Esto es, $|\gamma(t) > 0|$, es decir la curva no toca el eje real negativo, por Teorema 2.2 tenemos que $\mathrm{Ind}(\gamma(t)) = 0$. Puesto que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}(\gamma(t)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_2'(t)\gamma_1(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_2(t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2}dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1}dt \\
&= \mathrm{Ind}(\gamma_1(t)) - \mathrm{Ind}(\gamma_2(t))
\end{aligned}$$

entonces $\mathrm{Ind}(\gamma_1) = \mathrm{Ind}(\gamma_2)$. $\square$

Definición 2.3. Se dice que $\mathbb{T}$ es el circulo unidad en el plano complejo es decir, el conjunto de todos los números complejos de norma uno. [7, Pág 88]

Definición 2.4. (Función Periódica.) [7, Pág 88]. Si F es cualquier función sobre $\mathbb{T}$ y si f, con $f : \mathbb{T} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \mathrm{e}^{it}$ luego se dice que f es una función periódica, de periodo 2π.

Definición 2.5. (Polinomio trigonométrico.) [2, Pág 88] Un polinomio trigonométrico es una suma finita de la forma

$$P_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad t \in \mathbb{R}.$$

También se puede escribir como

$$P_n(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{int}.$$

La siguientes proposiciones nos permitirán empezar a construir la demostración del teorema de Stone-Weierstrass. Se inicia con la siguiente caracterización para un conjunto específico de polinomios trigonométricos.

Proposición 2.1. Sean $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ polinomios trigonométricos reales sobre $\mathbb{T}$, se define

$$\eta_k(\delta) = \sup\{Q_k(t) : \delta \leq |t| \leq \pi\}$$

Para todo $\delta > 0$, y

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(\delta) = 0$$

Entonces $Q_k(t) \to 0$ uniformemente sobre $A = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. [2, Pág 89]

Demostración. Dado $\delta > 0$ fijo arbitrario, para $\epsilon > 0$ existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq N_\epsilon$

$$\begin{aligned} |\eta_k(\delta)| &= |\sup\{Q_k(t) : \delta \geq |t| \geq \pi\}| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Si $m = \sup_{t\in A}\{Q_k(t)\}$ entonces $Q_k(t) < m$ para todo $t \in A$, en particular $|Q_k(t)| < \epsilon$ para $k \geq N_\epsilon$ de modo que $Q_k(t) \to 0$ uniformemente.

$\square$

La siguiente Proposición se deduce del hecho de la continuidad de f.

Proposición 2.2. Si f es continua en $\mathbb{T}$ entonces

$$\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Demostración. Se define

$$F(t) = \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(s)ds$$

Usando propiedades de la integral

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(s)ds \\ &= \int_{0}^{\pi+t} f(s)ds + \int_{-\pi+t}^{0} f(s)ds \\ &= \int_{0}^{\pi+t} f(s)ds - \int_{0}^{-\pi+t} f(s)ds. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, se concluye

$$\begin{aligned} F' &= f(\pi+t) - f(-\pi+t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por teorema 1.3 $F(t)$ es constante para todo $t \in T$ luego

$$\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

□

Se estudiará la siguiente sucesión de polinomios trigonométricos, fundamental para la demostración del teorema de Stone-Weierstrass.

Proposición 2.3 (7, Pág 90)**.** Si $Q_k(t)$ es una sucesión de polinomios trigonométricos definida por

$$Q_k(t) = c_k\left(\frac{\cos t + 1}{2}\right)^k$$

Entonces se tiene que

1. $Q_k(t)$ es una función no negativa.
2. Para todo $t \in [-\pi, \pi]$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos t + 1}{2}\right) > 0.$$
3. $Q_k(t)$ es decreciente en el intervalo $[0, \pi]$.

Demostración. Para mostrar (1), como $\cos(t)$ esta acotado por $-1 \leq \cos t \leq 1$, al sumarle uno siempre será no negativo, al elevarlo a un numero k sigue siendo no negativo.

la prueba de (2) es como sigue, se analiza por casos, si $t \in (-\pi, \pi)$ entonces $-1 \leq \cos t \leq 1$ luego $\cos t + 1 > 0$. Aplicando el Teorema 1.15 se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos t + 1}{2} \right) > 0,$$

ahora si $t = -\pi$ o $t = \pi$ se tiene por la continuidad de Q_k y por el Teorema 1.15 que $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos t+1}{2} \right) > 0$.

Para demostrar (3), $Q_k(t)$ es decreciente en $[0, \pi]$ si y solo si $Q_k(t+h) \leq Q_k(t)$ y $h > 0$ con t y $t + h$ en $[0, 2\pi]$, es decir $Q_k'(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Como $Q_k(t)$ es diferenciable entonces

$$Q_k'(t) = kc_k \left(\frac{\cos t + 1}{2} \right)^{k-1} \left(\frac{-\operatorname{sen} t}{2} \right)$$

Por (1) $kc_k \left(\frac{\cos t+1}{2} \right)^k$ es no negativa y $-\sin(t) \leq 0$ para todo $t \in [0, \pi]$, asi pues

$$Q_k'(t) \leq 0$$

demostrando lo que se deseaba en (3).

□

Queda solo demostrar los siguientes lemas, y el teorema de Stone-Weierstrass queda demostrado.

Lema 2.2 (7, Pág 90)**.** Si $Q_k(t)$ es una familia de polinomios trigonométricos sobre $\mathbb{T}$ que satisfacen las siguientes propiedades

a. $Q_k(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

b. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t) dt = 1$

c. para todo $\delta > 0$ $Q_k(t) \to 0$ uniformemente sobre $A = [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$

También sea

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1}$$

Entonces

$$\lim_{k \to \infty} ||f - P_k||_\infty = 0.$$

Demostración. Como

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

haciendo un cambio de variable $s' = t - s$, $ds' = -ds$

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi+t}^{-\pi+t} -f(s')Q_k(t-s')ds',$$

usando propiedades de la integral $-\int_b^a f = \int_a^b f$ y por Proposición 2.2

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi+t}^{-\pi+t} -f(s')Q_k(t-s')ds' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(s)Q_k(t-s)ds \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Como $Q_k(t)$ es un polinomio trigonométrico, se denota

$$Q_k(t) = a_{-N,k}e^{-(iNt)} + a_{-(N-1),k}e^{-(i(N-1)t)} + \ldots + a_{(N-1),k}e^{(i(N-1)t)} + a_{N,k}e^{(iNt)}$$

por tanto $Q_k(t)$ queda expresado como

$$Q_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}e^{int}.$$

Sustituyendo la última ecuación de $Q_k(t)$ en $P_k(t)$. Entonces $P_k(t)$ es un polinomio trigonométrico puesto que,

$$\begin{aligned} P_k(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}e^{in(t-s)}ds \\ &= \frac{a_{n,k}}{2\pi}\sum_{n=-N_k}^{N_k}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{in(t-s)}ds \\ &= \frac{a_{n,k}}{2\pi}\sum_{n=-N_k}^{N_k}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{int}e^{-ins}ds \\ &= \frac{a_{n,k}}{2\pi}\sum_{n=-N_k}^{N_k} e^{int}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds. \end{aligned}$$

Se toma

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds,$$

luego $P_k(t)$ queda expresado como

$$P_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} \frac{a_{n,k} b_n}{2\pi},$$

de modo que $P_k(t)$ es un polinomio trigonométrico. Sea la diferencia

$$P_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) Q_k(s) ds$$

entonces

$$\begin{aligned}
|P_k(t) - f(t)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) Q_k(s) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |(f(t-s) - f(t))| Q_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |(f(t-s) - f(t))| Q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{A} |(f(t-s) - f(t))| Q_k(s) ds
\end{aligned}$$

donde $A = [-\pi, \delta] \cup [\delta, \pi]$.

En primer lugar se analiza la integral sobre $[-\delta, \delta]$, como $f \in C(T)$ entonces f es uniformemente continua, dado un $\epsilon > 0$ si s y $t - s$ son números cualesquiera de $\mathbb{T}$ se tiene que

$$f(t-s) - f(t) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

usando la hipótesis (b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds &< \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} Q_k(s) ds \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Ahora se analiza la integral sobre $A = [-\pi, \delta] \cup [\delta, \pi]$. En la proposición 2.1 se define $\eta_k(\delta)$ entonces $Q_k(s) \leq \eta_k(s)$, $\mathbb{T}$ es compacto luego por Teorema 1.6 existe un máximo,

$$||f||_\infty = \max_{t \in A} \{f(t)\}$$

En virtud de (c) $Q_k(s) \to 0$ uniformemente sobre A, haciendo las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned}
\int_A |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) dt &\leq ||f||_\infty \eta_k(\delta) \\
&< \frac{\epsilon}{2},
\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos

$$
\begin{aligned}
|P_k(t)-f(t)| &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(t-s)-f(t)|Q_k(s)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{A}|f(t-s)-f(t)|Q_k(s)dt\\
&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\\
&=\epsilon.
\end{aligned}
$$

Luego $|P_k(t)-f(t)|\to 0$ cuando $k\to\infty$. Se tiene que

$$\max_{t\in[-\delta,\delta]}|P_k(t)-f(t)|<\epsilon.$$

Así mismo

$$\max_{t\in A}|P_k(t)-f(t)|<\epsilon.$$

Como

$$\max_{t\in T}|P_k(t)-f(t)|=\{\max_{t\in[-\delta,\delta]}|P_k(t)-f(t)|;\max_{t\in A}|P_k(t)-f(t)|\},$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty}||P_k-f||_\infty=0.$$

□

Lema 2.3 (7, Pág 90)**.** Sea

$$Q_k(t)=c_k\left(\frac{\cos t+1}{2}\right)^k$$

Con c_k de tal forma que (b) del lema 2.2 se mantenga entonces las siguientes proposiciones son ciertas

a. $Q_k(t)\geq 0$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

b. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_k(t)dt=1$.

c. para todo $\delta>0$ $Q_k(t)\to 0$ uniformemente sobre $A=[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

Demostración. $Q_k(t)\geq 0$ para todo $t\in\mathbb{R}$ es verdadera por (1) de la Proposición 2.3 luego [a] es verdadera.
Ahora se demuestra (c), Para mostrar que $Q_k(t)\to 0$ en $A=[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ por ser $Q_k(t)$ es una función par y usando (b) tenemos

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{2c_k}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt\\
&=\frac{c_k}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt.
\end{aligned}
$$

Como $0 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ y $\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{c_k}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt > \frac{c_k}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \operatorname{sen} t \\ =& \frac{2c_k}{\pi(k+1)}.\end{aligned}$$

De modo que $1 > \frac{2c_k}{\pi(k+1)}$ por lo tanto $c_k < \frac{\pi(k+1)}{2}$.
Por Proposicion 2.3 (3), $Q_k(t)$ es decreciente en $(0,\pi]$ entonces

$$\begin{aligned}c_k\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k &< \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \\ &< \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos \delta}{2}\right)^k.\end{aligned}$$

Es lo que se quería probar, de modo que $Q_k(t) \to 0$ uniformemente sobre $A = [-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$ para todo $\delta > 0$.

□

Teorema 2.4. (Teorema de Stone-Weierstrass.) [2, Pág 91] Si f es una función continua en $\mathbb{T}$ y $\epsilon > 0$ entonces existe un polinomio trigonométrico P_n tal que

$$||f - P_n||_\infty < \epsilon$$

.

Demostración. Por Lema 2.1 y Lema 2.2 existe un polinomio trigonométrico Q_k tal que

$$||f - Q_k||_\infty < \epsilon$$

. □

Teorema 2.5. Si f es una función a valor complejo continua en $\mathbb{T}$ y $\epsilon > 0$ entonces existe un polinomio trigonométrico P_n en $\mathbb{C}$ tal que

$$||f - P_n||_\infty < \epsilon.$$

Demostración. Sea $f(z) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$, en virtud del del teorema 2.5 para todo $\epsilon > 0$ existe un $g_1 \in P(\mathbb{T})$ y $g_2 \in P(\mathbb{T})$ tal que

$$\begin{aligned}||f_1 - g_1||_\infty &< \frac{\epsilon}{2} \\ ||f_2 - g_2||_\infty &< \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

De modo que

$$\begin{aligned}||f - g||_\infty &\leq ||f - g_1||_\infty + ||f - g_2||_\infty \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

□

La existencia de δ que da esta proposción es muy importante para el desarrollo de nuestra teoría

Proposición 2.4. Si γ es una curva cerrada en el plano complejo (no necesariamente diferenciable) definida en un intervalo de parametros $[0, 2\pi]$, tal que $\gamma(t) \neq 0$ para cada $t \in [0, 2\pi]$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t)| > \delta$

Demostración. γ es una funcion continua de $[0, 2\pi]$ en $\mathbb{C}$. Con $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, puesto que $[0, 2\pi]$ es compacto, por Teorema 1.4 $\gamma([0, 2\pi])$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, por Teorema 1.6 toma un mínimo.

La funcion $|\gamma(t)| : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^+$ es no negativa, $\gamma(t) \neq 0$ luego 0 es un mínimo con $|\gamma(t)| > 0$ de modo que existe un $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t)| > 0$. □

Si γ es una curva cerrada en el plano complejo definida en el intervalo $[0, 2\pi]$, tal que $\gamma(t) \neq 0$ para cada $t \in [0, 2\pi]$, por proposición 2.4 existe un $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t)| > \delta$; Por el teorema de Stone-Weierstrass para $\mathbb{C}$ existen P_1 y P_2 polinomios trigonométricos tales que $|P_j(t) - \gamma(t)| < \frac{\delta}{4}$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, asi estamos en condiciones de dar la siguiente definición.

Definición 2.6. Sea $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t)| > \delta$ para todo $t \in \mathbb{T}$ donde γ es una curva continua, si $|p(t) - \gamma(t)| < \frac{\delta}{4}$ entonces $\mathrm{Ind}P(t) = \mathrm{Ind}\gamma(t)$.

El siguiente teorema y corolario le da sentido a la definición 2.6.

Teorema 2.6 (6, pág 202)**.** Si γ es una curva cerrada en el plano complejo (no necesariamente diferenciable) definida en el intervalo $[0, 2\pi]$, tal que $\gamma(t) \neq 0$ para cada $t \in [0, 2\pi]$. Elíjase un $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t)| > \delta$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Si P_1 y P_2 son polinomios trigonométricos tales que $|P_j(t) - \gamma(t)| < \frac{\delta}{4}$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ entonces

$$\mathrm{Ind}(P_1(t)) = \mathrm{Ind}(P_2(t)).$$

Demostración. Usando desigualdad triangular y la hipótesis de $|P_1(t) - \gamma(t)| < \delta/4$

$$\begin{aligned} ||P_1(t)| - |\gamma(t)|| &\leq |P_1(t) - \gamma(t)| \\ |\gamma(t)| - |P_1(t)| &\leq |P_1(t) - \gamma(t)| \\ |\gamma(t)| - |P_1(t)| &< \frac{\delta}{4} \\ -|P_1(t)| &< \frac{\delta}{4} + |\gamma(t)|. \end{aligned}$$

Por propiedades de la desigualdad se tiene

$$\begin{aligned} |P_1(t)| &> |\gamma(t)| - \frac{\delta}{4} \\ &> \delta + \frac{\delta}{4} \\ &= \frac{3\delta}{4}. \end{aligned}$$

De nuevo usando la hipótesis $|P_1(t) - \gamma(t)| < \delta/4$ y $|P_2(t) - \gamma(t)| < \delta/4$, entonces

$$\begin{aligned}|P_1(t) - P_2(t)| &= |P_1(t) - \gamma(t) + \gamma(t) - P_2(t)| \\ &\leq |P_1(t) - \gamma(t)| + |\gamma(t) - P_2(t)| \\ &< \frac{\delta}{2} \\ &< \frac{3\delta}{4} \\ &< |P_1(t)|\end{aligned}$$

De modo que $\operatorname{Ind}(P_1(t)) = \operatorname{Ind}(P_2(t))$. □

Corolario 2.1 (1, pág 202)**.** Si $P_1(t)$ y $P_2(t)$ son polinomios trigonométricos que no cortan al eje real negativo y

$$|P_1(t) - P_2(t)| \leq |P_1(t)|$$

para todo t entonces $\operatorname{Ind}(P_1(t)) = \operatorname{Ind}(P_2(t)) = 0$.

Teorema 2.7. Si γ es una curva continua cerrada en el plano complejo (no necesariamente diferenciable) definida en un intervalo de parametros $[0, 2\pi]$, tal que $\gamma(t) \neq 0$ para cada $t \in [0, 2\pi]$ y supongase que el rango de γ no intersecta el eje real negativo entonces $\operatorname{Ind}(\gamma) = 0$

Demostración. Por Proposición 2.4 existe un $\delta_1 > 0$ tal que $|\gamma(t)| > \delta_1$, supongase que no toca el eje real negativo, como $\gamma(t)$ es continua entonces por Teorema 1.4 $\gamma([0, 2\pi])$ es compacto, en virtud del Teorema 1.7 existe un $\delta_2 > 0$ tal que $|\gamma(t) - x| \geq \delta_2$ para todo $x \in (-\infty, 0]$, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}|P(t) - x| &= |P(t) - \gamma(t) + \gamma(t) - x| \\ &\geq |\gamma(t) - x| - |P(t) - \gamma(t)| \\ &\geq \delta - \frac{\delta}{4} \\ &= \frac{3\delta}{4}.\end{aligned}$$

Puesto que los polinomios son continuos y diferenciables por teorema 2.2 $\operatorname{Ind}(P(t)) = 0$ y por definición 2.6 se concluye que $\operatorname{Ind}(\gamma(t)) = 0$. □

Teorema 2.8 (6, pág 202)**.** Sean γ_1 y γ_2 curvas continuas y cerradas en el plano complejo (no necesariamente diferenciables) que no pasan por cero. Suponga que

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_1(t)|$$

Entonces $\operatorname{Ind}(\gamma_1) = \operatorname{Ind}(\gamma_2)$.

Demostración. Si se supone que $|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| \leq |\gamma_1(t)|$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} |P_{1,n}(t) - P_{2,n}(t)| < \lim_{n\to\infty} |P_{1,n}(t)|.$$

Como son polinomios la anterior convergencia es uniforme, por Teorema 1.16

$$|P_{1,n}(t) - P_{2,n}(t)| < |P_{1,n}(t)|$$

Para casi todo n. Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe un $n_1(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1(\epsilon)$ la desigualdad anterior se cumple. Como convergencia uniforme implica convergencia puntual tenemos que dado $\epsilon > 0$ y $t \in \mathbb{T}$ existe un $n_2(\epsilon, t)$ tal que si $n \geq n_2(\epsilon, t)$ entonces

$$|P_{1,n}(t) - P_{2,n}(t)| < |P_{1,n}(t)| \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{T}$$

Por teorema 2.3 tenemos

$$\mathrm{Ind}(P_{1,n}(t)) = \mathrm{Ind}(P_{2,n}(t)) \tag{2.2}$$

En virtud del Teorema Stone-Weierstrass para $\mathbb{C}$, existe un $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_3$

$$|P_{1,n}(t) - \gamma_1(t)| < \frac{\delta}{4}.$$

De igual forma, existe un $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_3$

$$|P_{2,n}(t) - \gamma_2(t)| < \frac{\delta}{4}.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ entonces por definición 2.6 para todo $n \geq n_0$, se tiene

$$\mathrm{Ind}(P_{1,n}(t)) = \mathrm{Ind}(\gamma_1(t)), \qquad \mathrm{Ind}(P_{2,n}(t)) = \mathrm{Ind}(\gamma_2(t))$$

De modo que $\mathrm{Ind}(\gamma_1(t)) = \mathrm{Ind}(\gamma_2(t))$

$\square$

CAPÍTULO 3

Aplicaciones Del Número de Giros

Se desarrollarán las demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra y el Teorema del Punto Fijo de Brower usando el número de giros, siguiendo las ideas del libro "principios de análisis matemático"de Walter Rudin. [6, Pág 202]

Proposición 3.1. Sea $f(z)$ un polinomio con coeficientes complejos entonces existe un entero positivo n y un número complejo $c \neq 0$ tal que

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{-n} f(z) = c.$$

Demostración. Sea

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

Un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$, se tiene que

$$z^{-n} f(z) = a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}.$$

Como $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^{-n} = 0$ con n un entero positivo, entonces

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{-n} f(z) = a_n.$$

□

Teorema 3.1. (Teorema Fundamental Del Álgebra.) [6, pág 202] Sea f una función compleja continua definida en el plano complejo, n un entero positivo y $c \neq 0$ un número complejo tales que

$$\lim_{|z|\to\infty} z^{-n} f(z) = c$$

Entonces existe un $z \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = 0$.

Demostración. Si suponemos que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se define

$$\gamma_r(t) = f(r\mathrm{e}^{it}),$$

Con $0 \leq r < \infty$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$\mathrm{Ind}(\gamma_0(t)) = 0$ dado que $\gamma_0(t) = f(0)$, luego $\gamma_0(t)$ es una función constante, $\gamma_0'(t) = 0$.

Para demostrar que $\mathrm{Ind}(\gamma_r(t)) = n$, por hipótesis, dado un $\epsilon > 0$ existe un M_ϵ tal que para todo $|z| > M\epsilon$

$$||z|^{-n}|f(z)| - |c|| \leq |z|^{-n}|f(z) - c| < \epsilon.$$

Estimando $|f(z)|$ obtenemos

$$(|c| - \epsilon)|z|^n < |f(z)| < (|c| + \epsilon)|z|^n.$$

Tomando $\epsilon = \frac{|c|}{2}$, la anterior desigualdad queda expresada como

$$\frac{1}{2}|c||z|^n < |f(z)| < \frac{3}{2}|c||z|^n$$

De modo que para un $|z| > M_\epsilon$, $|f(z)| = z^n$. Se define $\eta_r(t) = r^n\mathrm{e}^{int}$, por definicion 2.2

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(\eta_r(t)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{r^n\mathrm{e}^{int}in}{r^n\mathrm{e}^{int}}dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} (in)dt \\ &= \frac{in2\pi}{2\pi i} \\ &= n.\end{aligned}$$

Queda por demostrar que $|\gamma_r(t) - \eta_r(t)| \leq \frac{\delta}{4}$ para r lo suficientemente grande y aplicando definición 2.5 se obtiene que $\mathrm{Ind}(\gamma_r(t)) = \mathrm{Ind}(\eta_r(t)) = n$.

Para un número complejo $c \neq 0$ y $r > M_\epsilon$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-n}\mathrm{e}^{-in\theta}f(r\mathrm{e}^{it}) = \lim_{r\to\infty} \eta_r(t)^{-1}\gamma_r(t) = c$$

$$\begin{aligned}|\eta_r(t)^{-1}\gamma_r(t) - c| &< \epsilon \\ |\gamma_r(t) - c\eta_r(t)| &< \epsilon|\eta_r(t)| \\ |\gamma_r(t) - c\eta_r(t)| &< \epsilon r^n.\end{aligned}$$

Luego para todo $\epsilon > 0$ existe un $r >> 1$ tal que

$$\begin{aligned}|\gamma_r(t) - c\eta_r(t)| &< \epsilon r^n\\ ||c\eta_r(t)| - \gamma_r(t)| &\leq \epsilon r^n\\ |c||\eta_r(t)| - |\gamma_r(t)| &\leq \epsilon r^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\gamma_r| &\geq |c||\eta_r(t)| - \epsilon r^n\\ &= |c|r^n - \epsilon r^n\\ &= (|c| - \epsilon)r^n.\end{aligned}$$

Si $\epsilon = \frac{|c|}{6}$ entonces $|\gamma_r(t)| \geq \frac{5}{6}r^n|c|$, por lo tanto $\delta = \frac{5}{6}r^n|c|$ concluyendo

$$|\gamma_r(t) - c\eta_r(t)| < \frac{|c|}{6}r^n < \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}r^n|c|\right) = \frac{\delta}{4}$$

De modo que,

$$\mathrm{Ind}(\gamma_r(t)) = \mathrm{Ind}(c\eta_r(t)) = \mathrm{Ind}(\eta_r(t)),$$

demostrando así que $\mathrm{Ind}(\gamma_r(t)) = n$.

Ahora se demostrará que $\mathrm{Ind}(\gamma_r(t))$ es continua para $r >> 1$. Para ello se define

$$g(r) = f(r\mathrm{e}^{it}).$$

Por la continuidad de f,

$$\begin{aligned}|\gamma_{r+h}(t) - \gamma_r(t)| &= |f((r+h)\mathrm{e}^{it}) - f(r\mathrm{e}^{it})|\\ &= |g(r+h) - g(r)|\\ &< \epsilon\\ &\leq |\gamma_r(t)|.\end{aligned}$$

Por tanto $\mathrm{Ind}(\gamma_{r+h}) = \mathrm{Ind}(\gamma_r)$. pues para $|h| < \delta$, $\mathrm{Ind}(\gamma_r)$ es continua.

Por Teorema 1.11 $\mathrm{Ind}(\gamma_r)$ es una función constante contradiciendo que $\mathrm{Ind}(\gamma_r) = 0$ y $\mathrm{Ind}(\gamma_r) = n$ luego $f(z) = 0$ para algún $z \in \mathbb{C}$. □

El siguiente lema es de vital importancia para la desmostración del Teorema de Brower

Lema 3.1. [6, pág 202] Sea $\bar{D}$ El disco unidad cerrado en el plano complejo. Si g es una aplicación continua de $\bar{D}$ en $\mathbb{T}$ entonces $g(z) = -z$ para cada $z \in \bar{D}$.

Demostración. Para $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$ se toma $\gamma_r(t) = g(r\mathrm{e}^{it})$ y $\psi(t) = \mathrm{e}^{-it}\gamma_1(t)$. Supongamos que $g(z) \neq -z$ para cada $z \in \mathbb{T}$, $\psi(t) \neq -1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$ puesto que $g(\mathrm{e}^{it}) \neq -\mathrm{e}^{it}$.

Puesto que $|\gamma_r(t)| = |g(r\mathrm{e}^{it})| = 1$. Como $|\gamma_r(t)| = |g(r\mathrm{e}^{it})| = 1$ entonces $\gamma_r(t)\mathrm{e}^{-}it$ no toca el eje real negativo, por teorema 2.7 $\mathrm{Ind}(\psi(t)) = 0$.

Como $\gamma_1(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{it}$ por teorema de Stone-Weierstrass

$$\begin{aligned}
|P_n(t)\mathrm{e}^{it} - \gamma_1(t)| &= |P_n(t)\mathrm{e}^{it} - \psi(t)\mathrm{e}^{it}| \\
&= |P_n(t) - \psi(t)| \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

De modo que $P_n(t)\mathrm{e}^{it} \to \gamma_1(t)$ uniformemente a partir de un $n > n_0$ se tiene que $\mathrm{Ind}(P_n) = 0$, por definición 2.2

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}(P_n\mathrm{e}^it) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{iP_n\mathrm{e}^{it} + P_n'\mathrm{e}^{it}}{P_n\mathrm{e}^{it}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{iP_n\mathrm{e}^{it}}{P_n\mathrm{e}^{it}}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{P_n'\mathrm{e}^{it}}{P_n\mathrm{e}^{it}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{P_n'}{P_n}dt \\
&= 1 + \mathrm{Ind}(P_n) \\
&= 1 + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{Ind}(\gamma_0) = g(0)$ y $g(0)$ es una función constante entonces $g'(0) = 0$, por definición 2.2 $\mathrm{Ind}(\gamma_0) = 0$. En el teorema 3.1 se demostró que $\mathrm{Ind}(\gamma)$ es una función continua, por lo tanto por teorema 1.11 $\mathrm{Ing}(\gamma)$ es una función constante, contradiciendo que $\mathrm{Ind}(\gamma_1) = 1$ y $\mathrm{Ind}(\gamma_0) = 0$ en efecto existe un $z \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = -z$. □

Teorema 3.2. (Teorema Del Punto Fijo De Brower.) [6, pág 203] Toda función continua de $\bar{D}$ en $\bar{D}$ tiene un $z \in \bar{D}$ tal que $f(z) = z$.

Demostración. Si se supone $f(z) \neq z$ para todo $z \in \bar{D}$. se construye una funcion $g(z)$ con la siguiente característica. A cada z en $\bar{D}$ el punto $g(z) \in \mathbb{T}$ que se localiza sobre el rayo l que parte de $f(z)$ y pasa por z. Entonces g mapea $\bar{D}$ en $\mathbb{T}$, $g(z) = z$ si $z \in \mathbb{T}$.

la dirección de la recta l esta dada por $z - f(z)$ luego la recta l' que contiene al rayo l esta dada por $l'(t) = z + t(z - f(z))$ definiendolo en función de z tenemos

$$g(z) = z + s(z)(z - f(z)).$$

Con $s(z)$ es la única raíz no negativa de cierta ecuación cuadratica cuyos coeficientes son funciones continuad de f y z, por la forma como se define g, tenemos que g es continua.

Tenemos que $s(z)$ es una raíz real, para demostrar esto

$$\begin{aligned}
|g(z)|^2 &= g(z)\overline{g(z)} \\
&= (z + s(z)(z - f(z)))\overline{(z + s(z)(z - f(z)))} \\
&= |z|^2 + 2s(z)z\overline{z} - s(z)z\overline{f(z)} + s(z)\overline{z}f(z) + |f(z) - z|^2 s^2(z) \\
&= |z|^2 + 2(|z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{f(z)}))s(z) + |f(z) - z|^2 s^2(z).
\end{aligned}$$

Puesto que $|g(z)|^2 = 1$ se tiene que

$$|z|^2 + 2(|z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{f(z)}))s(z) + |f(z) - z|^2 s^2(z) = 1$$
$$|f(z) - z|^2 s^2(z) + 2(|z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{f(z)}))s(z) + (|z|^2 - 1)$$

Calculando las raices de $s(z)$

$$s(z) = \frac{-(|z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{f(z)})) \pm \sqrt{(|z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{f(z)}))^2 + (1 - |z|^2)|z - f(z)^2|}}{|f(z) - z|}$$

Osea $(|z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{f(z)}))^2 + (1 - |z|^2)|z - f(z)^2|$ debe ser no negativa. Puesto que todo número real elevado al cuadrado es positivo entonces la primera parte de la anterior suma es no negativa además $|z| \leq 1$ luego la segunda parte también es no negativa, de modo que

$$(|z|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{f(z)}))^2 + (1 - |z|^2)|z - f(z)^2| \geq 0$$

Por lo tanto $s(z)$ es una raíz real, escogemos el signo positivo por la orientación del rayo. Como g es una función continua de $\bar{D}$ en $\mathbb{T}$ por Lema 3.1 existe un $z \in \mathbb{T}$ tal que $g(z) = -z$ contradiciendo que $g(z) = z$, entonces existe un $z \in \bar{D}$ tal que $f(z) = z$, que era lo que se deseaba demostrar. $\square$

Conclusiones

El Teorema de Stone-Weierstrass tiene una importancia vital para el estudio del número de giros, puesto que no siempre se tiene que una curva continua es diferenciable, pero el hecho que bajo ciertas condiciones es posible lograr aproximar una curva continua no diferenciable por medio de polinomios trigonométricos. Esto hace que la teoría se pueda extender y existan distintas aplicaciones a las demostraciones del Teoremas Fundamental del Álgebra y Teorema Del Punto Fijo De Brower.

Bibliografía

[1] Ahlfors Lars V., *Complex Analysis*, McGraw Hill , 1966.

[2] Kreiszig, E., *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, 1978.

[3] Lang, Serge, *Complex Analysis*, Springer 1998.

[4] Marsden, Jerrold E., Hoffman, Michael J., *Elementary Classical Analysis* 1987.

[5] Munkres, James R., *Topology*. Editorial Reverte, volumen 2, 1999.

[6] Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[7] Rudin, Walter, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987

[8] Tom, Apostol, *Calculus*. Editorial Reverte, volumen 1, 1999.

[9] Tom, Apostol, *Calculus*. Editorial Reverte, volumen 2, 1999.

[10] Tom, Apostol, *Mathematical Analysis*. Editorial Reverte, 1973.