UNA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO

Cristian Andrés Mora León.
Trabajo de Grado.

Director:
Arturo Sanjuan.

Proyecto Curricular de Matemáticas.
Facultad de Ciencias y Educación.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
Bogotá D.C.
2015

Para mi dicha,
mi vida,
para el pequeño Juan Andrés.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a todos mis compañeros y profesores de pregrado por su ayuda y acompañamiento en este proceso, en especial al profesor Arturo Sanjuan, sin su apoyo ni su constante cooperación no habría sido posible el desarrollo del presente trabajo. A mis padres y hermanos por su carácter incondicional y a Samuel por hacer más feliz cada uno de mis días desde su llegada. A Paola, por enseñarme lo bonito y valioso de la vida y por regalarme a quien más amo. A todos quienes han creído en mi, esto es para ustedes.

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado tiene como objetivo exponer una reconstrucción detallada del teorema del número primo. Para dicho fin se hará uso de la variable compleja y el análisis matemático como principales herramientas.

El estudio para el teorema del número primo se basa en la restauración de los artículos "*Simple analytic proof of the prime number theorem*" [7, p. 693-696] y "*On Newman's quick way to the prime number theorem*"[5, p. 108-115] de los autores D.J Newman y J. Korevaar respectivamente, cuyo análisis y observación se encuentran con mayor detalle en el libro Complex Analysis de Serge Lang [6]

Algunos de los temas más importantes a tratarse son las propiedades anlíticas de funciones especiales como la función Zeta de Riemann y la función Gamma, así como el Lema Principal. Por otra parte se introducirán funciones usadas a menudo en la teoría anlítica de números como las funciones Φ y ϕ.

Capítulo 2

PRELIMINARES

A continuación se hará la exposición de conceptos que serán fundamentales para el desarrollo del presente trabajo de grado. Esto con el objetivo de reconstruir una demostración del Teorema del Número Primo.

Definición 2.1 (Arcoconexidad)**.** *Un conjunto U se dice conexo si dados dos puntos $\alpha, \beta \in U$ existe una curva continua (camino) en U que une a α con β [6, p. 88]*

Definición 2.2 (Conjunto Simplemente Conexo)**.** *Un conjunto abierto U se dice simplemento conexo, si es conexo y además si cada curva continua cerrada simple es homotópica a un punto. Dicho de otra forma, cada curva cerrada simple en U puede contraerse hasta ser un punto.[6, p. 118]*

Definición 2.3 (Definición del Logaritmo)**.** *Sea U un conjunto abierto simplemente conexo que no contiene al cero. Fijemos un punto $z_0 \in U$. Sea w_0 un número complejo tal que*

$$e^{w_0} = z_0$$

Se define

$$Logz = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta$$

Entonces $Logz$ (el cual depende de la escogencia de z_0 y w_0 únicamente) es una primitiva de $\frac{1}{z}$ en U, y cualquier otra primitiva difiere de esta por una constante. [6, p. 120]

Definición 2.4. *Sea U un conjunto simplemente conexo que no contiene al cero. Sea α un número complejo diferente de cero. Fijemos una determinación para el logaritmo en U. Con respecto a esta determinación, se define*

$$z^{\alpha} = e^{\alpha Logz}$$

Entonces z^{α} es analítica en U. [6, p. 122]

El logaritmo es una herramienta elemental en el tratamiendo de funciones y números complejos, su utilidad no radica solamente en la aplicación como función inversa de la función exponencial, sino también constituye un método en la obtención de sucesiones complejas y series de funciones con dominio complejo. En virtud de lo anterior, se hacen las siguientes definiciones.

Definición 2.5 (Logarítmo Principal). *Para un complejo en* $\mathbb{C} - \{Re(z \leq 0)\}$*, se define el logarítmo principal el número complejo*

$$\log(z) = \ln|z| + iarg(z)$$

Es decir el logarítmo principal está caracterizado por las condiciones: $\log(z) \in Log(z)$ *y* $-\pi < Im \log(z) < \pi$*. [6, p. 123]*

Definición 2.6 (Productos Infinitos). *Sea* $\{U_n\}$ *una sucesión de número complejos diferentes de cero. Decimos que el producto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} U_n$$

converge absolutamente si $\lim U_n = 1$ *y si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log U_n$$

converge absolutamente, es decir $\sum_{n=1}^{\infty} |\log U_n|$ *converge. [6, p. 372]*

Haciendo una extensión a la Definición 1.3, veamos que si para un número finito de n tomamos una determinación de $\log U_n$, y además si U_n es suficientemente grande, entonces la sucesión U_n puede ser escrita como $U_n = 1 - \alpha_n$, donde $|\alpha_n| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así $\log U_n = \log(1 - \alpha_n)$. Bajo la condición de convergencia absoluta, se deduce que la serie

$$\sum \log U_n = \sum \log(1 - \alpha_n)$$

converge, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{N} \log U_n$$

poseen un límite. Dado que la función exponencial es continua, podemos exponenciar las sumas parciales y vemos que:

$$e^{(\sum \log U_n)} = \prod_{n=1}^{\infty} U_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} U_n$$

existe.

Un mecanismo importante para el tratamiento de series es la condición de Cauchy para series y el teorema enunciado por Weierstrass, conocido en el análisis complejo como criterio M de Weierstrass, cuyas implicaciones son importantes para el desarrollo del presente trabajo y por lo tanto se enuncian las siguientes definiciones y teoremas.

Teorema 2.7. *(Condición de Cauchy para series). La serie* $\sum a_n$ *converge si y solo si, para cada* $\epsilon > 0$ *existe un entero* N *tal que si* $n > N$ *implica*

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

para $p = 1, 2, \ldots$*. [3, p. 227]*

Teorema 2.8. *(Condición de Cauchy para la convergencia uniforme de series). La serie infinita* $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente en algún conjunto* S *si y solo si, para cada* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n > N$ *implica*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \epsilon$$

para $p = 1, 2, \ldots$ *y para cada* $x \in S$*. [3, p. 271]*

Teorema 2.9. *(Criterio M de Weierstrass). Sea* M_n *una sucesión de números no negativos tal que:*

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n \quad para\, n = 1, 2, \ldots \ y \ cada\, x \in S$$

entonces $\sum f_n(x)$ *converge uniformemente en* S *si* $\sum M_n$ *converge. [3, p. 271]*

Demostración. Si $\sum M_n$ converge, entonces por el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de series, para $\epsilon > 0$ arbitrario,

$$\left| \sum_{i=n}^{m} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n}^{m} M_i \leq \epsilon \quad (x \in S)$$

para m y n suficientemente grandes. Aplicando la condición de Cauchy para series, la conclusión se tiene. $\square$

Teorema 2.10. *(Criterio de Dirichlet para convergencia uniforme de series). Designemos por medio de* $F_n(x)$ *la n-ésima suma parcial de la serie* $\sum f_n(x)$ *en donde cada* f_n *es una función compleja definida en un cierto conjunto* S*. Supongamos que* F_n *es uniformemente acotada en* S*. Sea* g_n *una sucesión de funciones reales tales que* $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ *para cada* $x \in S$ *y para cada* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *y supongamos que* $g_n \to 0$ *uniformemente en* S*. Entonces la serie* $\sum f_n(x) g_n(x)$ *converge uniformemente en* S*. [3, p. 280]*

Teorema 2.11. *Sunpongamos que*

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

Hagamos

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|$$

Entonces $f_n \to f$ *uniformemente si y sólo si* $M_n \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*. [9, p. 158]*

Teorema 2.12. *(Criterio de la Integral) Sea* f *una función positiva decreciente para todo real* $x \geq 1$*. Para cada* $n \geq 1$*, sea:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \ y \ t_n = \int_1^n f(x)\, dx$$

entonces ambas sucesiones $\{S_n\}$ *y* $\{t_n\}$ *convergen o ambas divergen. [4, p. 485]*

Teorema 2.13. *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *converge si y solo si* $s > 1$*.[4, p. 485]*

Demostración. Tomando $f(x) = x^{-s}$, se tiene

$$\int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases} \frac{n^{1-s}-1}{1-s} & \text{si} \quad s \neq 1 \\ \\ \log(n) & \text{si} \quad s = 1 \end{cases}$$

Si $s < 1$ entonces $0 < 1 - s$, y por lo tanto $1 < n^{1-s}$ es decir la sucesión $\left(n^{1-s}\right)$ diverge, y por lo tanto para un valor de s fijo la sucesión $t_n = \frac{n^{1-s}-1}{1-s} \to \infty$ y la serie diverge. Para el caso $s = 1$ obtenemos la serie armónica, y dicha serie también es divergente.
Recíprocamente, si $s < 1$ entonces $n^{1-s} \to 0$ cuando $n \to \infty$, así $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx$ converge. Luego, por el criterio de la integral la serie converge. □

Teorema 2.14. *(Teorema del paso al límite). Suponemos que $a_n > 0$ y $b_n > 0$ para todo $n \geq 1$, y que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Entonces $\sum a_n$ converge si y sólo si $\sum b_n$ converge. [4, p. 483]

Teorema 2.15. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas sobre un conjunto abierto U. Sea $f_n = 1 + h_n$ y asumamos que la serie*

$$\sum h_n(z)$$

converge uniformemente y absolutamente sobre U. Sea K un subconjunto compacto de U que no contiene ninguno de los ceros de las funciones f_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el producto $\prod f_n$ converge a una función analítica f en U, además para $z \in K$ tenemos

$$\frac{f'}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n(z)}$$

y la convergencia es absoluta y uniforme sobre K. [6, p. 374]

Definición 2.16. *Si f, g son funciones de variable real x, para un x suficientemente grande y g positiva, escribimos*

$$f = O(g)$$

si existe una constante $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq Cg(x)$, para todo $x \geq x_0$ fijo.
[6, p. 440, 441]

Teorema 2.17. *Sean f, g analíticas en un dominio D tal que $f(z) = g(z)$ sobre un conjunto el cual tiene un punto de acumulación en D. Entonces $f = g$ sobre todo el dominio D. [1, p. 127]*

Demostración. Sea $F(z) = f(z) - g(z)$ y supongamos que $f(\beta) \neq g(\beta)$ para algún $\beta \in D$. Sea $\alpha \in D$ tal que $\alpha \neq \beta$, y considerese la linea poligonal continua $\gamma(t)$ contenida en D que une a α con β, parametrizada en el intervalo $[a, b]$.
Sea S en conjunto de puntos de $a \leq t \leq b$ tales que F y todas sus derivadas se anulan en el punto $z = \gamma(t)$, esto es, $t \in S$ si y sólo si

$$F^{(k)}[\gamma(t)] = 0$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$. El conjunto S es no vacío, pues $t = a$ se encuentra en S, y por lo tanto S tiene un extremo superior t_0. Por la definición de punto límite, existe una sucesión (t_n) de puntos de S tal que

$t_n \to t_0$. Puesto que las derivadas son continuas,

$$F^{(k)}\left[\gamma(t_0)\right] = \lim_{n\to\infty} F^{(k)}\left[\gamma(t_n)\right] = 0$$

La validez de esta última igualdad se debe a que todos los puntos t_n están en S. Esto demuestra que F se anula juntamente con todas sus derivadas en el punto $z_0 = \gamma\left(t_0\right)$, y por lo tanto, el punto t_0 se halla en S. Como $F\left(\beta\right) \neq 0$, concluimos que $t_0 < b$.

El desarrollo de Taylor de $F\left(z\right)$ según las potencias de $z - z_0$, donde $z_0 = \gamma\left(t_0\right)$, muestra que $F(z)$ es idénticamente nula en un entorno de z_0. Para $\epsilon > 0$ todo t tal que $|t - t_0| < \epsilon$ se encuentra en S. Esto contradice el hecho de que t_0 sea el extremo superior de S. Por consiguiente, no hay ningún punto β tal que $f\left(\beta\right) \neq g\left(\beta\right)$ y el teorema queda demostrado.

$\square$

Capítulo 3

FUNCIONES ESPECIALES

El objetivo central del presente capítulo es estudiar la función Zeta de Riemann, enfatizar en algunas de sus propiedades y por último enunciar la Hipótesis de Riemann. La función Zeta de Riemann tiene un importante significado para la Teoría de Números por su relación con la distribución de los números primos.

3.1. Función Zeta de Riemann

Teorema 3.1. *Sea $s \in \mathbb{C}$. Para $Re(s) > 1$ la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

converge absolutamente y uniformemente para $Re(s) \geq 1 + \delta$ para $\delta > 0$ fijo.[6, p. 157, 441]

Demostración.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n^s}\right| &= \left|\frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| \\
&= \left|e^{-(\sigma+it)\log n}\right| \\
&= \left|e^{-\sigma\log n}e^{-it\log n}\right| \\
&= \left|e^{-\sigma\log n}\right|\left|e^{-it\log n}\right| \\
&= \left|e^{-\sigma\log n}\right| \\
&= \frac{1}{n^\sigma}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}$ y como $\sigma > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right|$ converge absolutamente.
Por otra parte, sea $\delta > 0$ tal que $1 + \delta \leq \sigma$, así $n^{1+\delta} \leq n^\sigma$ y por ende

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}$$

y por el criterio M de Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ converge uniformemente para $s \in \mathbb{C}$ tal que $Re(s) \geq 1+\delta$ $\square$

El teorema anterior es antecedente a una coherente definición de la función Zeta de Riemann, que se hará a continuación.

Definición 3.2. *(Función Zeta de Riemann)*
En la región $U = \{s \in \mathbb{C}|Re(s) > 1\}$ se define

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

[6, p. 367]

Es importante entonces observar las regiones en donde la función Zeta converge y el tipo de convergencia que se define en ella, más adelante veremos que la función Zeta también podrá ser evaluado para todo s tal que $Re(s) < 1$ por medio de su ecuación funcional que será obtenida a través de la continuación analítica.

Teorema 3.3. *La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ no converge uniformemente cuando $Re(s) \in (1, 1+\delta)$ para algún δ fijo.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ converge uniformemente cuando $Re(s) \in (1, 1+\delta)$ a una función $f(s)$ para algún $\delta > 0$ fijo. Sea $\{S_n\}$ la sucesión de sumas parciales para $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Por el teorema 1.10, existe

$$M_n = \sup_{\{s\in\mathbb{C}|Re(s)\in(1,1+\delta)\}} |S_n - f(s)|$$

el cual tiende a cero, cuando n tiene a infinito. Es decir que

$$\lim_{n\to\infty}\sup|S_n - f(s)| = \sup\left|\lim_{n\to\infty}S_n - f(s)\right| = 0.$$

Pero como

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{Re(s)}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1+t}} \quad \text{con} \;\; t \in (0,\delta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Es decir que $|f(s)| \to 0$. Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} M_n &= \lim\sup|S_n| \\
&= 1
\end{aligned}$$

Esto contradice el hecho de que $M_n \to 0$.

$\square$

Euler fue el primer matemático en observar una relación entre la función Zeta de Riemann y los números primos, el siguiente teorema describe dicha relación y la identidad es conocida como el producto de Euler. [6]

Teorema 3.4.

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

para $Re(s) > 1$ y $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números primos. [6, p. 441]

Demostración. Sea $p \in \mathbb{P}$ fijo. Obervamos que $\left|\frac{1}{p^s}\right| < 1$. Entonces por la serie geométrica se obtiene la siguiente identidad

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

Ahora, la productoria para todos los valores de p será de la forma:

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right)\cdots$$

Por el teorema fundamental de la aritmética cada número natural $n = \prod_{i\in I} p_i$ donde $p_i \in \mathbb{P}$ e I es un conjunto finito de subíndices. Entonces para cada término de la sumatoria en la función Zeta existe un conjunto de primos $p_1, \ldots, p_k$ tal que

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{p_1^s p_2^{2s} \cdots p_k^{ks}}$$

y a su vez cada producto de un conjunto de primos representa un término de la función Zeta. Por lo tanto,

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

$\square$

Notemos ahora, que por el teorema anterior es necesario que la productoria $\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ sea convergente absolutamente para $Re(s) > 1$, y uniformemente para $Re(s) \geq 1 + \delta$ con $\delta > 0$ fijo. En efecto, ya que $\lim_{p\to\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1$ y además $\sum_{p\in\mathbb{P}} \left|\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right| < +\infty$ gracias a la definición 1.3 la conclusión se tiene.

Con el objetivo ahora de encontrar algunos valores a los cuales converge la función Zeta para determinados s se hace la siguiente definición.

Definición 3.5. *(Números de Bernoulli) Los números de Bernoulli B_k están dados por la serie*

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}$$

[6, p. 46]

Observese ahora que

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{z}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1}=\frac{z}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}=\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}$$

Es decir

$$\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}$$

Por lo tanto

$$1=\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\right)$$

Realizando el producto de Cauchy para series observamos entonces que

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\ \text{ donde }\ C_n=\sum_{k=0}^{n}B_k\frac{z^kz^{n-k}}{k!\,(n-k+1)!}$$

La fórmula para C_n da lugar a una recursión para los términos B_k.

$C_0=B_0z^0=1$ se deduce $\boldsymbol{B_0=1}$

$C_1=\dfrac{B_0z}{2!}+\dfrac{B_1z}{1!}=0z$ se deduce $\boldsymbol{B_1=-\frac{1}{2}}$

$C_2=\dfrac{B_0z^2}{3!}+\dfrac{B_1z^2}{2!}+\dfrac{B_2z^2}{2!}=0z^2$ se deduce $\boldsymbol{B_2=\frac{1}{6}}$

$C_3=\dfrac{B_0z^3}{4!}+\dfrac{B_1z^3}{3!}+\dfrac{B_2z^3}{2!2!}+\dfrac{B_3z^3}{3!}=0z^3$ se deduce $\boldsymbol{B_3=0}$

$\vdots$

Teorema 3.6. *Los términos $B_n=0$ si n es impar distinto de uno.*

[6, p. 46]

Demostración. Se sabe que $B_0 = 1$, luego

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

sea $f(z)$ como sigue

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

calculando ahora

$$\begin{aligned} f(z) - f(-z) &= \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} - \left(\frac{-z}{e^{-z} - 1} - \frac{z}{2} \right) \\ &= \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} + \frac{z}{e^{-z} - 1} + \frac{z}{2} \\ &= z + \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{e^{-z} - 1} \\ &= z + \frac{ze^{-z} - z + ze^z - z}{1 - e^z - e^{-z} + 1} \\ &= z + z \left[\frac{e^{-z} + e^z - 2}{-e^{-z} - e^z + 2} \right] = z - z = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte, debido a como está definida $f(z)$ también se debe tener que

$$\sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{(-z)^n}{n!} = 0$$

La igualdad se tiene para los n pares, pero para los n impares se obtiene entonces que

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n+1} \frac{(z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

Luego, $B_{2n+1} = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ □

Teorema 3.7. *Sea k un entero par positivo, entonces*

$$2\zeta(k) = -\frac{B_k}{k!} (2\pi i)^k$$

[6, p. 381]

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Es posible reescribir a f como

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{2}{e^z - 1} + 1 \right) = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2} \frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}}$$

Tomando ahora $z = 2\pi i z$, se tiene que

$$\pi z cot\left(\pi z\right) = \pi z \frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{\left(2\pi i z\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{\left(2\pi\right)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n}$$

Por otra parte se tiene la identidad

$$\pi cot\left(\pi z\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

Mutiplicando por z y reescribiendo la sumatoria para los n negativos se obtiene

$$\begin{aligned}
\pi z cot\left(\pi z\right) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z-n} + \frac{z}{z+n}\right) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z^2}{z^2-n^2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z^2}{n^2} \frac{1}{1-(z^2/n^2)} \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{n^{2m}}
\end{aligned}$$

De todo lo anterior tenemos entonces la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{\left(2\pi\right)^{2n}}{(2n)!} B_{2n} z^{2n} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{n^{2m}}$$

Comparando coeficientes necesariamente se tiene que

$$2\zeta(2n) = -\frac{B_{2n}}{(2n)!} \left(2\pi i\right)^{2n}$$

que era lo que se quería mostrar. □

Gracias a lo anterior, es posible encontrar puntualmente los valores a los que converge la función Zeta de Riemman para los z enteros, por ejemplo

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{B_2}{2(2!)} \left(2\pi i\right)^2 = \frac{\pi^2}{6} \\
\zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = -\frac{B_4}{2(4!)} \left(2\pi i\right)^4 = \frac{\pi^4}{90} \\
\zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = -\frac{B_6}{2(6!)} \left(2\pi i\right)^6 = \frac{\pi^6}{945} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Teorema 3.8.

$$\left(1-2^{1-z}\right)\zeta(z) = 1^{-z} - 2^{-z} + 3^{-z} - \cdots$$

y la serie representa una función analítica para Re(z) > 0.[1, p. 178]

Demostración. Los términos al lado derecho de la igualdad pueden ser escritos como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$.
Dicha serie a su vez puede ser escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{iy}}$$

donde $z = x + iy$. Sea $g_n(x) = \frac{1}{n^x}$ y $f_n(y) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{iy}}$ donde $x \in \mathbb{R}^+$ y $y \in \mathbb{R}$.
Dado que $n^x \leq (n+1)^x$ implica que $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leq \dfrac{1}{n^x}$, además de $|f_n(y)| = \left|n^{-iy}\right| = \left|e^{-iy\ln(n)}\right| = 1$ se deduce que $|f_n(y)| \leq 1$ y como $g_n \to 0$ uniformemente para cada $x \geq \delta$ para un $\delta > 0$ fijo, entonces se verifican las hipótesis del criterio de Dirichlet para la convergencia uniforme de series (Teorema 0.9). Así la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}$ converge uniformemente para $Re(z) > 0$
Por otra parte parte para verificar la igualdad se toman sumas parciales hasta N, así:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^z} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^z} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^z} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^z} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^z} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} - \frac{2}{2^z}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^z}\left(1 - \frac{2}{2^z}\right)
\end{aligned}$$

Por el teorema de Weiestras de convergencia uniforme de funciones analíticas, la funciíon es anaílitca para $Re(z) > 0$ y cuando $N \to \infty$ la igualdad se sigue.

$\square$

Del teorema anterior es inmediata la identidad

$$\zeta(z) = \frac{1^{-z} - 2^{-z} + 3^{-z} - \cdots}{1 - 2^{1-z}}$$

para $z \neq 1$. Es decir, la fórmula proporciona la continuación analítica para la función Zeta de Riemann en $Re(z) > 0$

3.2. Función Gamma

Los siguientes son teoremas que garantizan la existencia de la función Gamma definida como productoria infinita.

Teorema 3.9. *El producto infinito* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *con* $1+a_n \neq 0$ *converge simultaneamente con la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ *cuyos términos representan los valores de la rama principal del logaritmo. [1, p. 192]*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, se toma una determinación de $\log(1+a_n)$ en la rama principal. Supongase que $\sum_{n=1}^{\infty}\log(1+a_n)$ converge. Entonces las sumas parciales $\sum_{n=1}^{N}\log(1+a_n)$ poseen un límite L. Por la continuidad de la función exponencial se tiene que:

$$\lim_{N\to\infty} e^{\left(\sum_{n=1}^{N}\log(1+a_n)\right)} = e^L$$
$$\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = e^L$$

Es decir que el límite existe. Recíprocamente si suponemos que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = L = e^{L'}$, el proceso es análogo. □

Teorema 3.10. *La productoria* $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ *converge absolutamente si y sólo si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *converge. [1, p. 192]*

Demostración. La convergencia absoluta de la productoria $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ es equivalente a la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|\log(1+a_n)|$ por la definición . Por el teorema del paso al límite (Teorema 2.14), lo anterior es equivalente a demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\log(1+a_n)|}{|a_n|} = 1$$

En efecto, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces el límite anterior puede reformularse de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 0}\left|\frac{\log(1+z)}{z}\right| &= \lim_{z\to 0}\left|\frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}}{z}\right| \\
&= \lim_{z\to 0}\left|\frac{z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots}{z}\right| \\
&= \lim_{z\to 0}\left|1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}-\frac{z^3}{4}+\cdots\right| \\
&= \left|1-\lim_{z\to 0}\frac{z}{2}+\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{3}-\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{4}+\cdots\right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Luego la productoria $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge absolutamente si y sólo si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge.

□

Conocer los ceros de una función es una herramienta esencial en el tratamiendo de las funciones en la teoría de la variable compleja. La función más simple cuyos ceros son todos los enteros es la función sen(πz). Sea $G(z) = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}$. Evidentemente, $G(z)$ tiene imagen cero para todos los enteros negativos. Consecuentemente la función $G(-z)$ tiene imagen cero para todos los enteros positivos.

Por la definición de $G(z)$ es claro que los ceros de la función $G(z-1)$ serán los mismos que $G(z)$ incluyendo al cero. $G(z-1)$ puede ser escrita como

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z)$$

donde $\gamma(z)$ está por determinarse, el siguiente teorema entrega una expresión para dicha función.

Teorema 3.11. *El valor de $\gamma(z)$ es constante y está determinado por*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)\right)$$

[1, p. 198,199]

Demostración. De la igualdad anterior se obtiene que

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(z-1)}{n}\right)e^{\frac{1-z}{n}} = ze^{\gamma(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{\frac{-z}{n}}.$$

Tomando logaritmo a ambos lados de la igualdad se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{(z-1)}{n}\right)+\frac{1-z}{n} = \log(z)+\gamma(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}$$

luego derivando se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}.$$

Reemplazando n por $n+1$ en la serie de la izquierda

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)
\end{aligned}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ es una serie telescópica y tiene como límite 1, por lo tanto $\gamma'(z) = 0$. Es decir que $\gamma(z) = \gamma$ es una constante.
Tomando $z = 1$, se deduce que

$$1 = G(0) = e^{\gamma} G(1)$$

luego

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{\frac{-1}{n}}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\log \left(e^{-\gamma} \right) &= \log \left(\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{\frac{-1}{n}} \right) \\
-\gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(\frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log (n+1) - \log (n) - \frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[\log(n) - \log(1) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \log(n)\right]$$

□

Observación. *γ es llamada la constante de Euler-Mascheroni. Apareció por primera vez en un escrito de Leonhard Euler en 1734, llamado De Progressionibus harmonicis observationes, calculando los primeros 6 dígitos para la constante. Por otra parte 56 años después Lorenzo Mascheroni calcularía los primeros 19 dígitos. A la fecha no se conoce si la constante γ es irracional o racional, es más no se ha podido demostrar que sea un número algebraico o trascendente. [1, p. 199]*

Definición 3.12. *Se define la Función Gamma como:*

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}.$$

[1, p. 199]

Una de las propiedades más utilizadas de la Función Gamma es

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

esto es consecuencia directa de la definición y de la unicidad de la constante γ. Existe un gran número de propiedades asociadas a esta función, algunas escapan al objetivo del presente trabajo.

Teorema 3.13.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

. [6, p. 415][1, p. 198]

Demostración. Vemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi z) &= \pi z\prod_{n\neq 0}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n} \\
&= \pi z\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{z/n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right) \\
&= \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Por otra parte vemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) = \Gamma(1-z) &= \Gamma(z)\left(-z\Gamma(-z)\right) \\
&= \left(\frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{z/n}\right) - z\left(\frac{-e^{\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{-z/n}\right) \\
&= z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Es decir que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

□

Los teoremas posteriores se hacen con el fin de hacer posible la extender la Función Zeta de Riemann a todo el plano complejo.

Teorema 3.14.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx$$

para $Re(z) > 1$[2, p. 2,3,4]

Demostración. Se tiene que $e^{-x} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ y así:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_n^\infty \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}\, dx.$$

Haciendo el cambio de variable $h = \frac{x}{n}$ y por lo danto $dx = ndh$ se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx = \lim_{n\to\infty} n^z \int_0^1 (1-h)^n\, h^{z-1}\, dh$$

ahora aplicando la fórmula de integración por partes con $u = (1-h)^n$ y $dv = h^{z-1}dh$ y por ende $du = -n(1-h)^{n-1}$ y $v = \dfrac{h^z}{z}$ se deduce

$$\int_0^1 (1-h)^n\, h^{z-1}\, dh = \left[(1-h)^n \frac{h^z}{z}\right]_0^1 + \int_0^1 (1-h)^{n-1}\, h^z\, dh$$

Realizando partes nuevamente con $u = (1-h)^{n-1}$ y $dv = h^z dh$ y por ende $du = -(n-1)(1-h)^{n-2}$ y $v = \dfrac{h^{z+1}}{z+1}$ se deduce

$$\int_0^1 (1-h)^{n-1}\, h^z\, dh = \left[(1-h)^{n-1} \frac{h^{z+1}}{z+1}\right]_0^1 + \frac{(n-1)}{z+1} \int_0^1 (1-h)^{n-1}\, h^z\, dh$$

Observese que los términos entre los paréntesis cuadrados siempre es cero. Haciendo el proceso n-veces se tendrá que:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx = \lim_{n\to\infty} n^z \frac{n}{z} \frac{n-1}{z+1} \frac{n-2}{z+2} \cdots \frac{2}{z+n-1} \frac{1}{z+n}$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z\left(\frac{z+1}{1}\right)\cdots\left(\frac{z+n}{n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

Además como $n^x = e^{z\log(n)}$, y $\gamma = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log(n)$, entonces $n^z = e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma\right)}$. Esto implica que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\gamma z}\frac{e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}}{z\,(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)}\\
&= \lim_{n\to\infty} e^{-\gamma z}\left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{e^z}{1+z}\right)\left(\frac{e^{z/2}}{1+\frac{z}{2}}\right)\cdots\left(\frac{e^{z/n}}{1+\frac{z}{n}}\right)\\
&= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{z/n}}{\left(1+\frac{z}{n}\right)}\\
&= \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{z/n}\\
&= \Gamma(z)
\end{aligned}$$

Esto completa la prueba. $\square$

Nótese que si en la anterior ecuación se hace el cambio de variable de x por nx, en la integral se obtiene

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^\infty (nx)^{z-1}\,e^{-nx}n\,dx\\
&= n^z\int_0^\infty x^{z-1}e^{-nx}\,dx\\
\frac{1}{n^z}\Gamma(z) &= \int_0^\infty x^{z-1}e^{-nx}\,dx
\end{aligned}$$

Sumando con respecto a n

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty (nx)^{z-1}\,e^{-nx}n\,dx\\
\zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^\infty x^{z-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n\right)dx\\
&= \int_0^\infty x^{z-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n-1\right)dx\\
&= \int_0^\infty x^{z-1}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-1\right)dx\\
&= \int_0^\infty x^{z-1}\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)dx\\
&= \int_0^\infty x^{z-1}\left(\frac{1}{e^{x}-1}\right)dx
\end{aligned}$$

Teorema 3.15. *Para $Re(z) > 1$*

$$\zeta(s) = \frac{-\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz$$

donde $(-z)^{z-1}$ es definido en el complemento del eje de los reales positivos como $e^{(s-1)\log(-z)}$ con $-\pi < Im \log(-z) < \pi$. [1, p. 214]

Demostración. Consideramos un camino de integración:

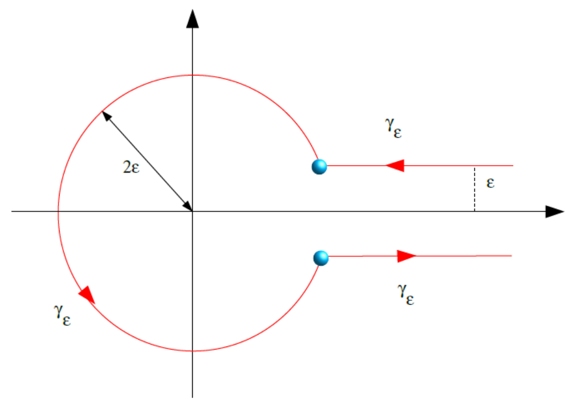

Figura 3.1: Camino de integración, imagen tomada de [8, p. 41]

La integral no depende de $0 < \epsilon < 1$ que se elija. La integral será cero si no contiene ningún polo por el Teorema de Cauchy, pero para aplicar dicho teorema es necesario que la función tienda rápidamente a cero, y además que el camino no encierre multiplos de $2\pi i$.

$$(-z)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-z)}$$

Además, $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$, así:

$$\lim_{\epsilon \to -0} (\arg(z)) = -\pi \text{ y } \lim_{\epsilon \to +0} (\arg(z)) = +\pi$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz &= -\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{-(s-1)\pi i}}{e^x - 1}\, dx + \int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^{(s-1)\pi i}}{e^x - 1}\, dx \\
&= \left(-e^{-(s-1)\pi i} + e^{(s-1)\pi i}\right)\left(\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx\right) \\
&= \left(-e^{-(s-1)\pi i} + e^{(s-1)\pi i}\right)\zeta(s)\Gamma(s) \\
&= 2i \operatorname{sen}((s-1)\pi)\zeta(s)\Gamma(z)
\end{aligned}$$

Pero $\operatorname{sen}((s-1)\pi) = -\operatorname{sen}(s\pi)$ y además $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen}(s\pi)}$. Por lo tanto la anterior igualdad toma la forma

$$\int_C \frac{(-z)^{s-1}}{e^z - 1}\, dz = 2i\left(\frac{-\pi}{\Gamma(s)\Gamma(s-1)}\right)\zeta(s)\Gamma(s)$$

despejando $\zeta(z)$ la conclusión se sigue. $\square$

3.3. Hipótesis de Riemann

Se concluye este capítulo con la hipótesis de Riemann. Los ceros no triviales de la función se encuentran en la llamada banda crítica $0 \leq Re(z) \leq 1$. El famoso matemático Riemann, conjeturó algo que hasta la fecha no se ha demostrado ni refutado, declaró que los ceros no triviales de la Función Zeta se encuentran sobre la linea crítica $Re(z) = \frac{1}{2}$. Existe una fórmula $N(T)$ que fue demostrada en 1975 por Norman Levinson, la cual relaciona el número de ceros en $0 \leq t \leq T$ [1, p. 218]

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

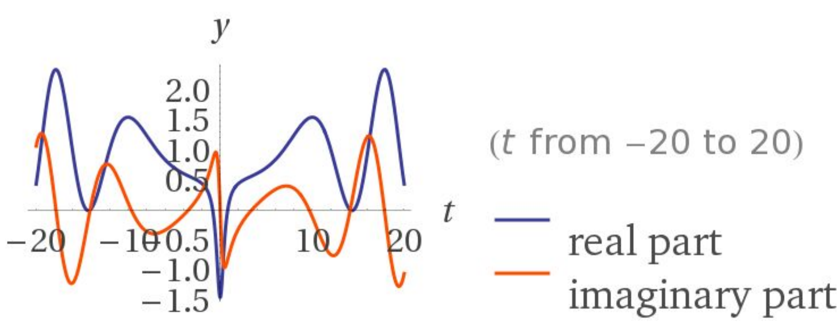

Figura 3.2: Grafica de $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ tomada de wolframalpha.com

Capítulo 4

TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO

El objetivo fundamental del siguiente capítulo es la demostración del teorema del número primo.

4.1. Propiedades analíticas de las funciones $\phi(x)$ y $\Phi(s)$

Definición 4.1. *Se definen las funciones*

$$\phi(x) = \sum_{p \leq x} \log p \qquad \Phi(s) = \sum_{p} \frac{\log p}{p^s}$$

para $Re(s > 1)$.
[6, p. 443]

La sumatoria definida en $\Phi(s)$ converge uniformemente y absolutamente para $Re(s) \geq 1 + \delta$ para $\delta > 0$ fijo, por el mismo argumento de la función Zeta.

Teorema 4.2. *La función Φ es meromorfa para $Re(s) > \frac{1}{2}$. Además, para $Re(s) > 1$, tenemos que $\zeta(s) \neq 0$ y*

$$\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$$

no tiene polos para $Re(s) > 1$. [6, p. 443]

Demostración. Para $Re(s) > 1$ tenemos que

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\cdots\right)^{-1} \neq 0$$

Se observará que

$$\frac{-\zeta'}{\zeta(s)} = \sum_{p} \frac{\log p}{p^s - 1}.$$

En efecto, se reconoce a $\frac{\zeta'}{\zeta(s)}$ como una derivada logarítmica, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{-\zeta'}{\zeta(s)} &= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\log \zeta(s)\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial s}\left(\log\left(\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=1}^{N}\log\left(1-p_n^{-s}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Obteniendo una expresión para la derivada

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left(\log\left(1-p_n^{-s}\right)\right) &= \frac{1}{1-p_n^{-s}}.p_n^{-s}\left(\log\left(p_n\right)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\log\left(\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right)\right) \\
&= \frac{\frac{p_n^{-s}}{p_n^{s}}}{\frac{1}{p_n^{-s}}-\frac{p_n^{-s}}{p_n^{-s}}}\log\left(p_n\right) \\
&= \frac{\log\left(p_n\right)}{p_n^s-1}
\end{aligned}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
\frac{-\zeta'}{\zeta(s)} &= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=1}^{N}\log\left(1-p_n^{-s}\right)\right) \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log\left(p\right)}{p^s-1}.
\end{aligned}
$$

Por otra parte, ya que $\left|\frac{1}{p^s}\right| < 1$ para todo $p \in \mathbb{P}$ y $Re(s) > 1$, usando la serie geometríca se obtiene la expresión

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p^s-1} &= \frac{1}{p^s}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\\
&= \frac{1}{p^s}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right)\\
&= \frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots.
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{-\zeta'}{\zeta(s)} &= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log(p)}{p^s-1} = \sum_{p\in\mathbb{P}}\log p\left(\frac{1}{p^s-1}\right)\\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\log p\left(\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\cdots\right)\\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^s}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^{2s}}+\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{\log p}{p^{3s}}+\cdots\\
&= \Phi(s)+\sum_{p\in\mathbb{P}}\log p\left(\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\frac{1}{p^{4s}}+\cdots\right)\\
&= \Phi(s)+\sum_{p} h_p(s)
\end{aligned}
$$

donde $|h_p(s)| \leq C\dfrac{\log p}{|p^{2s}|}$, para alguna constante C. Pero la serie $\sum \dfrac{\log n}{n^{2s}}$converge absolutamente y uniformemente para $Re(s) \geq \frac{1}{2}+\delta$ con $\delta > 0$ fijo. Entonces del teorema 2.8 y de la expresión hallada para $\dfrac{-\zeta'}{\zeta(s)}$ se concluye que Φ es meromorfa en $Re(s) > \frac{1}{2}$, tiene un polo en $s = 1$ y los mismos ceros que ζ, pero no otros polos en esta región.
Queda por probar que $\zeta(s)$ no tiene ceros en $Re(s) = 1$.
Observese que

$$
\begin{aligned}
\log(\zeta(s)) &= \log\left(\prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right)\\
&= -\sum_{p}\log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)
\end{aligned}
$$

Usando la expansión en series de potencias para logarítmo se deduce,

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{p\in\mathbb{P}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(-1+1-\frac{1}{p^s}\right)^m}{m} \\
&= \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\zeta(s) = \exp\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}\right).
$$

Sea $s = \sigma + it$, entonces

$$
\begin{aligned}
Re\left(\frac{1}{mp^{ms}}\right) &= Re\left(\frac{1}{mp^{m(\sigma+it)}}\right) \\
&= \frac{1}{m} Re\left(p^{-m\sigma-imt}\right) \\
&= \frac{p^{-m\sigma}}{m} Re\left(p^{-imt}\right) \\
&= \frac{p^{-m\sigma}}{m} Re\left(e^{-imt(\log p)}\right) \\
&= \frac{p^{-m\sigma}}{m} Re\left(\cos(mt\log p) + i\sin(mt\log p)\right) \\
&= \frac{\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}}
\end{aligned}
$$

Asumiendo que $|\zeta(s)| = \zeta\left(Re(s)\right)$, se obtiene

$$
|\zeta(s)| = \exp\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right)
$$

Por propiedades de la función exponencial se sigue que

$$
\zeta^3(\sigma)\left|\zeta(\sigma+it)\right|^4\left|\zeta(\sigma+2it)\right| = \exp\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3+4\cos(mt\log p)+2\cos(2mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right)
$$

De la positividad

$$\begin{aligned}3+4\cos(\theta)+\cos(2\theta) &= 3+4\cos(\theta)+\left(\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)\right)\\ &= 3+4\cos(\theta)+\cos^2(\theta)-\left(1-\cos^2(\theta)\right)\\ &= 2+4\cos(\theta)+2\cos^2(\theta)\\ &= 2\left(1+2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)\right)\\ &= 2\left(1+\cos(\theta)\right)^2\geq 0.\end{aligned}$$

Luego, ya que $e^0=1$

$$\zeta^3(\sigma)\left|\zeta(\sigma+it)\right|^4\left|\zeta(\sigma+2it)\right|\geq 1$$

para $Re(s)>1$.
Sea $t\neq 0$ fijo. Supongamos que $\zeta\left(1+it\right)=0$. Entonces para $\sigma>1$ y $\sigma\to 1$, $\zeta^3(\sigma)=O\left(\frac{1}{(\sigma-1)^3}\right)$, $\zeta\left(\sigma+2it\right)=O(1)$ y $\zeta\left(\sigma+it\right)=O\left(\sigma-1\right)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\zeta^3(\sigma)\left|\zeta(\sigma+it)\right|^4\left|\zeta(\sigma+2it)\right| &= O\left(\frac{1}{\left(\sigma-1\right)^3}\right)O(1)O\left(\sigma-1\right)^4\\ &= O(\sigma-1).\end{aligned}$$

Es decir que

$$\sigma(\sigma-1)\geq 1$$

Lo cual contradice lo supuesto inicialmente para σ y el teorema queda probado.

□

El teorema siguiente será conveniente para encontrar una expresión integral para la función Φ definida anteriormente.

Teorema 4.3. *Para $Re(s)>1$ se tiene que*

$$\Phi(s)=s\int_1^\infty\frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

[6, p 444]

Demostración. Considerese el conjunto $\mathbb{P}$ de números primos, que generan la partición natural

$$[1,\infty)=[1,p_1)\cup[p_1,p_2)\cup[p_2,p_3)\cup\cdots\cup[p_n,p_{n+1})\cup\cdots$$

reordenando el intervalo $[1,\infty)$ se obtiene

$$\int_1^\infty\frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx=\int_1^{p_1}\frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{p_n}^{p_{n+1}}\frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx.$$

Pero $\phi(x) = 0$ para $x \in [1, p_1)$, entonces

$$\int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx$$

El valor de $\phi(x)$ depende del valor de x, pero en todo caso estará definida por una sumatoria de logarítmos que resulta constante considerando el diferencial en la variable x, luego

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{\phi(p_n)}{x^{s+1}}\,dx \\
&= \sum_{n=1}^\infty \phi(p_n) \int_{p_n}^{p_{n+1}} x^{-s-1}\,dx \\
&= \sum_{n=1}^\infty \phi(p_n) \left[\frac{x^{-s}}{-s}\right]_{p_n}^{p_{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \phi(p_n) \left(\frac{p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}}{s}\right).
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
s\int_1^\infty \frac{\phi(x)}{x^{s+1}} &= \sum_{n=1}^\infty \phi(p_n)\left(p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \phi(p_n)\left(p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}\right)
\end{aligned}$$

Pero $\phi(p_n) = \sum_{j=1}^n \log(p_j)$. Los términos de la sumatoria son de la forma $p_k^{-s}\log(p_m)$, los únicos que no se anulan son aquellos para los cuales $k = m$, por lo tanto

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \phi(p_n)\left(p_n^{-s} - p_{n+1}^{-s}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \frac{\log(p_n)}{p_n^s} = \Phi(s).$$

□

4.2. Lema Principal

Con el propósito de establecer una conexión entre las propiedades analíticas de las funciones estudiadas anteriormente y las aplicaciones de dichas funciones en la teoría de números, se enunciará uno de los teoremas fundamentales, llamado Lema Principal, que implicará el Teorema del Número Primo.
El siguiente teorema es una acotación para la función ϕ enunciado por Chebyshev.

Teorema 4.4.

$$\phi(x) = O(x)$$

[6, p. 446]

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\begin{aligned} 2^{2n} = (1+1)^{2n} &= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} 1^{2n-j} 1^j \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \geq \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Pero

$$\binom{2n}{j} = \frac{2n!}{n!n!} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!}$$

Considerando la productoria de primos hasta $2n$ se obtiene la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n!} &\geq \frac{\prod\limits_{p\leq 2n}}{\prod\limits_{p\leq n}} \\ &= exp\left(\sum_{p\leq 2n} \log p - \sum_{p\leq n} \log p\right) \\ &= e^{\phi(2n)-\phi(n)} \end{aligned}$$

Tomando logarítmo se obtiene la desigualdad

$$\phi(2n) - \phi(n) \leq 2n\log(2).$$

Sea $x = 2n$. Si x se incrementa en una unidad, entonces $\phi(x)$ se incrementa a lo sumo por $\log(x+1)$, esto es $O(\log(x))$, donde la constante $C > \log(2)$ y para todo $x \leq x_0(C)$ se obtiene

$$\phi(x) - \phi(x/2) \leq Cx.$$

Aplicando la desigualdad en la sucesión $x, x/2, x/2^2, x/2^3, \ldots, x/2^r$

$$\begin{gathered} \phi(x) - \phi(x/2) \leq Cx \\ \phi(x/2) - \phi(x/2^2) \leq Cx/2 \\ \phi(x/2^2) - \phi(x/2^3) \leq Cx/2^2 \\ \vdots \end{gathered}$$

Sumando término a término

$$\phi(x) - \phi\left(\lim_{n\to\infty} x/2^n\right) \leq 2Cx$$

Por lo tanto

$$\phi(x) \leq 2Cx + O(1)$$

o equivalentemente

$$|\phi(x)| \leq C' |x|$$

para alguna constante C' $\square$

Teorema 4.5. *(Lema Principal)*
Sea f acotada, continua a trozos para los reales no negativos. Sea $g(z)$ definida por

$$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

para $Re(z) > 0$. Si g se extiende a una función analítica para $Re(z) > 0$ entonces

$$\int_0^\infty f(t)\,dt \text{ existe y es igual a } g(0)$$

[6, p. 449-452]

Demostración. Para $T > 0$ se define

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt$$

La función g_T es entera como consecuencia directa de su definición por medio de una integral y mediante la diferenciación bajo el signo de la integral adquiere la propiedad de ser derivable en todo el plano complejo. Se verá que

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = g(0)$$

Sea $\delta > 0$ y C el camino que consiste en el segmento de recta $Re(z) = -\delta$ y el arco de círculo $|z| = R$ para $Re(z) \geq -\delta$, como se muestra en la figura

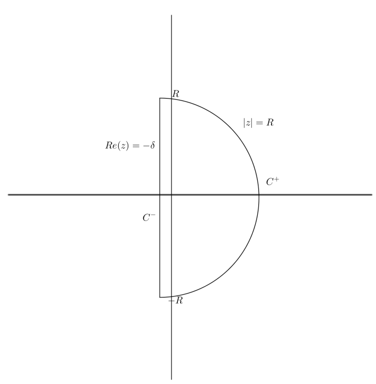

Figura 4.1: Camino de integración

Bajo la hipótesis que g se extiende a una función analítica para $Re(z) \geq 0$, existe δ suficientemente pequeño tal que g es analítica en la región acotada por C, y sobre su frontera. Sea

$$G(Z) = (g(z) - g_t(z))\, e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$$

Nótese que las funciones $[g(z) - g_T(z)]$ y $\left[e^{Tz}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\right]$ son ambas analíticas para $Re(z) \geq 0$ y debido a que el producto de funciones analíticas es también una función analítica, entonces $G(z)$ es también analítica para $Re(z) \geq 0$. Aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$G(0) = g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (g(z) - g_t(z))\, e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C H_T(z)\, dz,$$

donde $H_T(z)$ abrevia la expresión bajo la integral. Sea B una cota para f, esto es $|f(t)| \leq B$ para todo $t \geq 0$.
A partir de ahora el teorema se dividirá en pequeños subteoremas

(1.) Sea C^+ el semicírculo $|z| = R$ y $Re(z) \geq 0$. entonces

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} H_T(Z)\, dz\right| \leq \frac{2B}{R}$$

Demostración. *(1)*

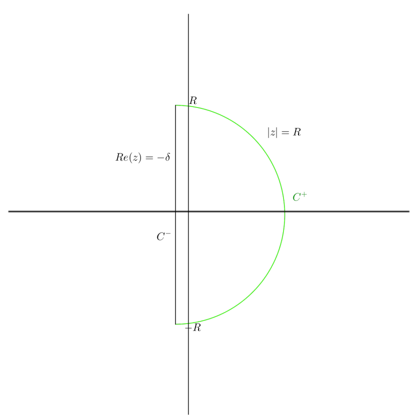

Figura 4.2: Camino de integración para C^+

Nótese que para $Re(z) > 0$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
|g(z)-g_T(z)| = \left|\int_T^\infty f(t)e^{-zt}\,dt\right| &\leq B\int_T^\infty \left|e^{-zt}\right|\,dt \\
&= \int_T^\infty e^{-Re(z)t}\,dt \\
&= \frac{-B}{Re(z)}\left[e^{-Re(z)t}\right]_T^\infty \\
&= \frac{B}{Re(z)}e^{-Re(z)T}
\end{aligned}
$$

y como $|z| = R$, *donde* $z = \sigma + it$

$$
\begin{aligned}
\left|e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| &= \frac{e^{Re(z)T}}{R^3}\left|R^2+z^2\right| \\
&= \frac{e^{Re(z)T}}{R^3}\left|\sigma^2+t^2+\sigma^2-t^2+2abi\right| \\
&= \frac{2e^{Re(z)T}}{R^3}\left|a^2+iab\right| \\
&= \frac{2e^{Re(z)T}}{R^3}\sqrt{a^4+a^2b^2} \\
&= \frac{2\left|a\right|e^{Re(z)T}}{R^3}\sqrt{a^2+b^2} \\
&= \frac{2\left|a\right|e^{Re(z)T}}{R^3}R \\
&= \frac{2\left|Re(z)\right|e^{Re(z)T}}{R^2}
\end{aligned}
$$

Tomando el producto de las anteriores estimaciones y multiplicando por el largo del semicírculo πR *obtenemos que*

$$
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} H_T(Z)\,dz\right| \leq \frac{2B}{R}
$$

Sea C^- la parte del camino C con $Re(z) < 0$. Se quiere estimar

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\left(g(z)-g_t(z)\right)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}
$$

para lo anterior, se estimarán por separado las expresiones para g y g_T

(2.)

$$
\boldsymbol{\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} g_T(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leq \frac{B}{R}}
$$

Demostración. *(2)*

Sea S^- el semicirculo con $|z| = R$ y $Re(z) < 0$.

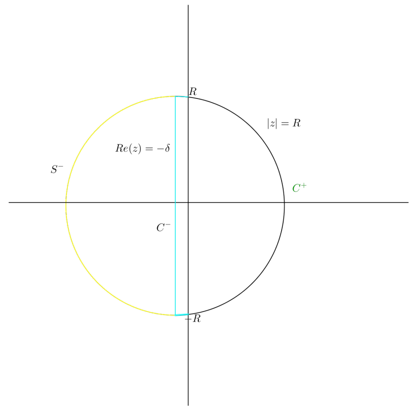

Figura 4.3: Camino de integración para C^+

Dado que g_T es entera, podemos reemplazar C^- por S^- en la integral sin cambiar su valor, ya que el integrando no tiene polos a la izquierda del eje y.
Para estimar bajo la integral sobre S^-. Tenemos

$$
\begin{aligned}
|g_T(z)| = \left| \int_0^T f(t) e^{-zt}\, dt \right| &\leq B \int_0^T e^{-Re(z)t}\, dt \\
&\leq \frac{Be^{-Re(z)T}}{-Re(z)}
\end{aligned}
$$

Para el otro factor utilizamos la estimación previamente hallada. Tomando el producto de las dos estimaciones y multiplicando por el largo del semicírculo πR, hallamos que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} g_T(z) e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{B}{R}$$

(3.)

$$\boldsymbol{\int_{C^-} g(z) e^{Tz} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \to 0 \textbf{ cuando } T \to \infty}$$

Demostración. *(3)*
La expresión bajo la integral puede reescribirse como

$$g(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}=h(z)e^{Tz},$$

nótese que $h(z)$ es indepentiende de T. Dado algún subconjunto compacto K definido en la región $Re(z)<0$ la función $e^{Tz}\to 0$ uniformemente para $z\in K$ cuando $T\to\infty$. La conclusión se obtiene de forma inmediata.

Continuando ahora con la prueba del Lema Principal. Sea $\epsilon>0$, tal que $\frac{2B}{R}<\epsilon$ para un R fijo. De la parte (3.) tenemos

$$\left|\int_{C^-} g(z)e^{Tz}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\to 0 \textbf{ cuando } T\to\infty\right|<\epsilon$$

Entonces por (1), (2), (3) se obtiene la desigualdad

$$|g(0)-g_T(0)|<3\epsilon$$

Lo cual indica que

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0)=g(0)$$

989 □

El siguiente teorema es una aplicación del Lema Principal.

Teorema 4.6. *La integral*

$$\int_1^\infty \frac{\phi(x)-x}{x^2}\,dx$$

converge.
[6, p. 447, 448]

Demostración. Sea

$$f(t)=\phi(e^t)e^{-t}-1=\frac{\phi(e^t)-e^t}{e^t}$$

La función f es continua a trozos, y es acotada por el teorema 3.4. Haciendo la sustitución $x=e^t$ y $dx=e^tdt$, se obtiene

$$\int_1^\infty \frac{\phi(x)-x}{x^2}\,dx=\int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Es suficiente probar entonces que la integral de la derecha converge. Por el Lema Principal, es preciso probar que la transformación $\int_0^\infty f(t)\,dt$ converge para $Re(z)\geq 0$. En efecto, sea

$$g(z)=\frac{\Phi(z+1)}{z+1}-\frac{1}{z}.$$

Usando la fórmula de la integral otorgada en el teorema 3.3

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} &= \frac{s\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\phi(x)}{x^{s+1}}\,dx}{s} - \int_1^{\infty} \frac{x}{x^{s+1}} \\
&= \int_1^{\infty} \frac{\phi(x)-x}{x^{s+1}}\,dx.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\Phi(z+1)}{z} - \frac{1}{z} &= \int_1^{\infty} \frac{\phi(x)-x}{x^{z+2}}\,dx \\
&= \int_1^{\infty} \frac{\phi\left(e^t\right)-e^t}{\left(e^t\right)^{z+2}} e^t\,dt \\
&= \int_1^{\infty} \frac{\phi\left(e^t\right)-e^t}{e^t} e^{-zt}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}\,dt
\end{aligned}
$$

Es decir que $g(z)$ es una representación para la función $f(t)$ por el teorema 3.3 la conclusión se sigue.

$\square$

Definición 4.7. *Sean f_1 y f_2 funciones definidas para todo $x \geq x_0$, para algún x_0. Se dice que f_1 es asintónticamente igual a f_2 ($f_1 \sim f_2$), si y sólo si*

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)/f_2(x) = 1$$

Teorema 4.8.

$$\phi(x) \sim x$$

[6, p. 448, 449]

El objetivo del teorema es demostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = 1$$

Por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ existe $x_0(\epsilon)$ tal que si $x \geq x_0(\epsilon)$ entonces

$$\left|\frac{\phi(x)}{x} - 1\right| < \epsilon$$

de donde

$$
\begin{gathered}
|\phi(x) - x| < \epsilon x \\
-\epsilon x < \phi(x) - x < \epsilon x \\
-\epsilon x + x < \phi(x) < \epsilon x + x \\
x(1-\epsilon) < \phi(x) < x(\epsilon + 1)
\end{gathered}
$$

Es decir que para $\lambda > 1$, existe $M > 0$ tal que si $x > M$ entonces $\phi(x) < \lambda x$. Así, si $x \in \{x|\phi(x) \geq \lambda x\}$ entonces $0 \leq x \leq M$.
Por otra parte, si $0 < \lambda < 1$, existe $M > 0$ tal que si $x > M$ entonces $\phi(x) > \lambda x$. Así, si $x \in \{x|\phi(x) \leq \lambda x\}$ entonces $0 \leq x \leq M$.

Demostración. La afirmación del teorema es lógicamente equivalente a la combinación de las siguientes dos proposiciones:

1. Dado $\lambda > 1$, el conjunto de las x tal que $\phi(x) \geq \lambda x$ es acotado.

2. Dado $0 < \lambda < 1$, el conjunto de las x tal que $\phi(x) \leq \lambda x$ es acotado.

Supóngase que la primera afirmación es falsa. Entonces existe $\lambda > 1$ tal que para un x arbitrariamente grande se tiene $\phi(x)/x \geq \lambda$. Dado que ϕ es monótona creciente, obtenemos para tal x que

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\phi(t) - t}{t^2}\, dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt$$

Haciendo la transformación $s = t/x$ y $dt = xds$ en la última integral se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt &= \int_1^{\lambda} \frac{\lambda x - sx}{s^2 x^2}\, xds \\
&= \int_1^{\lambda} \frac{(\lambda - s)\, x^2}{s^2 x^2}\, ds \\
&= \int_1^{\lambda} \frac{\lambda - s}{s^2}\, ds > 0
\end{aligned}$$

El número que representa la última integral es independiente de x. Dado que la última desigualdad se establece para x suficientemente grande, se sigue que la integral del teorema 3.6 no converge, esto es una contradicción.
Ahora supongase que la segunda afirmación es falsa, entonces dado que la función $\phi(x)$ es monótona creciente se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_x^{\lambda x} \frac{\phi(t) - t}{t^2}\, dt &\leq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt \\
-\int_{\lambda x}^{x} \frac{\phi(t) - t}{t^2}\, dt &\leq -\int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt \\
\int_{\lambda x}^{x} \frac{\phi(t) - t}{t^2}\, dt &\geq \int_{\lambda x}^{x} \frac{\lambda x - t}{t^2}\, dt
\end{aligned}$$

Realizando la misma transformación anterior obtenemos que

$$\int_{\lambda x}^{x} \frac{\phi(t) - t}{t^2}\, dt \geq \int_{\lambda}^{1} \frac{\lambda - s}{s^2}\, ds > 0.$$

Nuevamente el número que representa la última integral es independiente de x. Dado que la última desigualdad se establece para x suficientemente grande, se sigue que la integral del teorema 3.6 no converge, esto es una contradicción y el teorema queda probado.

$\square$

Definición 4.9. *Se define la función $\pi(x)$ como la cantidad de primos menores o iguales que x.*

Teorema 4.10. *(Teorema del Número Primo)*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

[6, p. 449]

Demostración. Se desea estimar el valor de $\phi(x)$

$$\phi(x) = \sum_{p\leq x} \log p \leq \sum_{p\leq x} \log x = \log(x) \sum_{p\leq x} (1) = \pi(x) \log x;$$

dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \phi(x) &\geq \sum_{p\leq x} \log p - \sum_{p\leq x^{1-\epsilon}} \log p \\ &= \sum_{x^{1-\epsilon}\leq p\leq x} \log p \end{aligned}$$

de la expresión $x^{1-\epsilon} \leq p$ se obtiene que

$$(1-\epsilon)\log(x) \leq \log(p)$$

de donde

$$\begin{aligned} \phi(x) &\geq \sum_{x^{1-\epsilon}\leq p\leq x} (1-\epsilon)\log x \\ &= (1-\epsilon)\log x \sum_{x^{1-\epsilon}\leq p\leq x} (1) \\ &= (1-\epsilon)\log x \left[\pi(x) - \pi\left(x^{1-\epsilon}\right)\right] \\ &\geq (1-\epsilon)\log x \left[\pi(x) + O\left(x^{1-\epsilon}\right)\right]. \end{aligned}$$

Luego se recibe la desigualdad

$$(1-\epsilon)\log x \left[\pi(x) + O\left(x^{1-\epsilon}\right)\right] \leq \phi(x) \leq \pi(x)\log(x)$$

usando el hecho de que $\phi(x) \sim x$ por el teorema 3.10.

$$(1-\epsilon)\log x \left[\pi(x) + O\left(x^{1-\epsilon}\right)\right] \leq x \leq \pi(x)\log(x)$$

$$(1-\epsilon)\left[\pi(x) + O\left(x^{1-\epsilon}\right)\right] \leq \frac{x}{\log(x)} \leq \pi(x).$$

Existe una constante C tal que

$$(1-\epsilon)\,C\pi(x) \leq \frac{x}{\log(x)} \leq \pi(x).$$

cuando $\epsilon \to 0$ y $x \to \infty$ se concluye la prueba del teorema del número primo.

$\square$

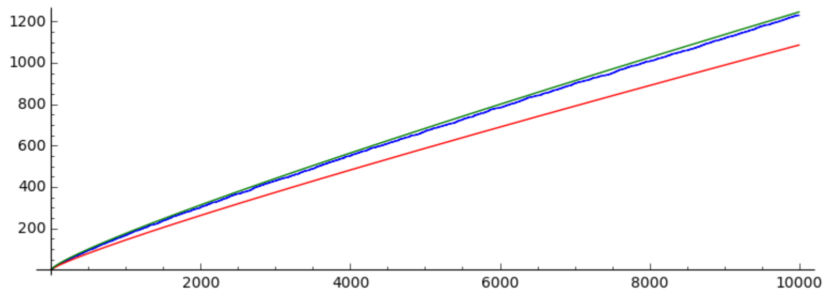

Figura 4.4: Imagen realizada en Sage, $\pi(x)$ en azul y $\dfrac{x}{\log x}$ en rojo

Capítulo 5

CONCLUSIONES

El teorema del número primo entrega una descripción general de como estań distribuidos los números primos en el conjunto de los números naturales. Contribuye a establecer la cantidad de primos que hay hasta un número natural k suficientemente grande por medio de la fórmula $\dfrac{k}{\log k}$.

La extensión analítica para la función $g(z) = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt$ (conocida en el ámbito real como la transformada de Laplace) para $Re(z) \geq 0$ en el Lema Principal 4.5 es crucial para el desenlace del presente trabajo de grado, ya que por medio de ésta se establecen representaciones útiles para las funciones $\Phi(s)$ y $\phi(x)$ usadas como herramientas indispensables en la demostración del teorema del número primo.

Bibliografía

[1] L.V. Ahlfors. *COMPLEX ANALYSIS*. 1966.

[2] G.E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1999.

[3] T.M. Apostol. *Análisis matemático*. Reverté, 1996.

[4] T.M. Apostol and F.V. Cantarell. *Calculus. 1, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal*. Calculus. Reverté, 2005.

[5] J. Korevaar. On newman's quick way to the prime number theorem. 1982.

[6] S. Lang. *Complex Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1999.

[7] D.J. Newman. Simple analytic proof of the prime number theorem. 1980.

[8] Pedro Pablo Perez. *DEA*. Universidad Autonoma de Madrid, 2008.

[9] W. Rudin and Miguel Irán Alcerreca Sánchez. *Principios de análisis matemático*. McGraw-Hill, 1990.