UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS, MATEMÁTICAS

Teorema de Mittag-Leffler

Cristian Alejandro Pulido Quintero

4 de junio de 2015

En este documento se desarrolla la teoría y se exponen algunos ejemplos de como una función meromorfa puede expresarse por medio de las partes singulares de la función en cada polo de esta, el libro guiá para el desarrollo fue *Análisis de variable compleja*[1], con apoyo de otras fuentes, cada ejemplo ha sido representado con la ayuda de *sagemath.com*, se puede decir que aunque es posible representar funciones en fracciones simples, el reto esta en hacer coincidir la función con la suma de las partes singulares y otra entera, no siempre se puede establecer esta equivalencia de la misma forma.

1. PRELIMINARES

En esta sección se citaran algunos hechos que son necesarios para este trabajo.

Teorema 1 (Teorema 8.[1] pp.128). *Si $f(z)$ es analítica en una región Ω, que contiene a a, se tiene que*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{1!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + f_n(z)(z-a)^n, \quad (1.1)$$

donde $f_n(z)$ es analítica en Ω.

Ademas se puede acotar el termino $f_n(z)(z-a)^n$, en un disco C que ha de estar contenido en la región Ω, y su norma tiene un máximo M en C; si se nota por R el radio de C resulta que para $|z-a| < R$

$$|f_n(z)(z-a)^n| \leq \left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n \cdot \frac{MR}{R-|z-a|} \tag{1.2}$$

Corolario 1 (Corolario 1.18. [2] pp.109)**.** *Sea $z = a$ una singularidad aislada de f y sea $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ su desarrollo en serie de Laurent en $D(a; 0, R)$ para algún $R > 0$ entonces:*

- *a es una singularidad evitable si y solo si $a_n = 0$ para $n < 0$;*
- *a es un polo de orden k si y solo si $a_{-k} \neq 0$ y $a_n = 0$ para todo $n < -k$;*
- *a es una singularidad esencial si y solo si $a_n \neq 0$ para infinitos valores negativos de n.*

2. Fracciones simples

Con el estudio de las series de Laurent se tiene que si $f(z)$ es meromorfa en una región Ω, para cada polo b_ν le corresponde una parte singular de $f(z)$, que se reduce a un polinomio de la variable $1/(z-b_\nu)$ que es finita a menos que b_ν sea una singularidad esencial de f.
La pregunta ahora es, podemos representar a $f(z)$ con estas partes singulares por ejemplo

$$f(z) = \sum_\nu P_\nu\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right) + g(z)$$

donde $g(z)$ es analítica en Ω.

Ejemplo 1.

$$f(z) = \frac{z^3 - 3z + 7}{(z+1)(z-2)^2}$$

es meromorfa en $\mathbb{C} - (\{-1, 2\})$.

como -1 es un polo simple para calcular la parte singular de $f(z)$ en -1 simplemente hallamos el residuo de f en $z = -1$ (corolario 1)

$$Res_{z=-1} f(z) = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = 1$$

entonces su parte singular es $1/(z+1)$.
$f(z)$ tiene un polo de orden 2 en $z = 2$, entonces hallamos a_{-1} y a_{-2} de la serie de Laurent (corolario 1).

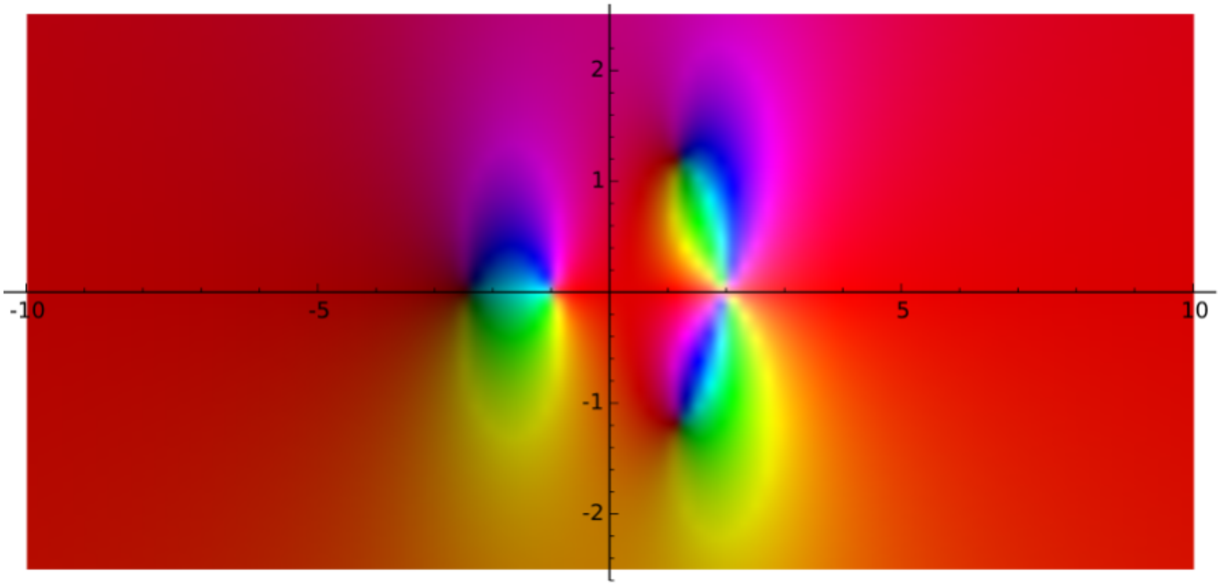

Figura 2.1: imagen producida por Sage

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-2)^{n+1}} dz$$

con γ una circunferencia centrada en 2 y que no pase por -1 tomemos por ejemplo γ con parametrización $z(t) = e^{it} + 2$ por tanto:

n	a_n
-1	2
-2	3

y la parte singular de $f(z)$ en $z = 2$ es

$$\frac{2}{z-2} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

De modo que si podemos expresar a $f(z)$ partiendo de sus partes singulares seria:

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-2} + \frac{3}{(z-2)^2} + g(z)$$

En este ejemplo podemos deducir que $g(z) = 1$, que en efecto es analítica en $\mathbb{C}$, tal vez podemos atribuir este hecho a que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ (en la figura 2.1 representado por el color rojo que bordea la gráfica), pero este hecho no es siempre cierto.

Con el anterior ejemplo nos damos cuenta que si es posible expresar una función meromorfa mediante sus partes singulares, pero puede suceder que la cantidad de polos de la función sea infinita numerable, por tanto no hay garantía de que la serie converja.
En este caso es necesario cambiar el método, como la idea es hacer que converja la serie podemos hacer un ligero cambio al n-esimo termino.
A continuación demostraremos que toda función meromorfa en $\mathbb{C}$ admite un desarrollo en fracciones simples.

Teorema 2 (Teorema 4.[1] pp.190)**.** *sea $\{b_\nu\}$ una sucesión de números con $\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \infty$, y sean $P_\nu(\zeta)$ polinomios sin termino constante. Existen entonces funciones meromorfas en todo el plano con polos en los puntos b_ν y partes singulares correspondientes $P_\nu[1/(z-b_\nu)]$. Ademas la función meromorfa mas general de esta clase puede escribirse en la forma*

$$f(z) = \sum_\nu \left[\boldsymbol{P}_\nu \left(\frac{1}{z-b_\nu} \right) - p_\nu(z) \right] + g(z) \tag{2.1}$$

donde los $p_\nu(z)$ son polinomios fijos escogidos adecuadamente y $g(z)$ es analítica en todo el plano.

Demostración. Partiendo de que $\mathbf{P}_\nu$ es un polinomio de variable ζ, y suponiendo que ningún $b_\nu = 0$ este sera una función analítica en $|z| < |b_\nu|$, así podemos hacer el desarrollo de la serie de taylor para $\mathbf{P}_\nu$ alrededor del cero (ecuación 1.1), y si truncamos en el termino n_ν podemos estimar la diferencia $\mathbf{P}_\nu - p_\nu$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\nu(\zeta) &= \mathbf{P}_\nu(0) + \mathbf{P'}_\nu(0)(z) + \ldots + \mathbf{P}_\nu^{(n)}(0)(z)^n + f_{n+1}(z)(z)^{n+1} \\ |f_{n+1}(z)(z)^{n+1}| &= |\mathbf{P}_\nu(\zeta) - p_\nu(z)| \end{aligned}$$

y usando la ecuación 1.2, si $|\mathbf{P}_\nu| \leq |M_\nu|$ para la circunferencia con centro cero y radio $|b_\nu|/4$

$$|\mathbf{P}_\nu(\zeta) - p_\nu(z)| \leq M_\nu \left(\frac{4|z|}{|b_\nu|} \right)^{n_\nu+1} \cdot \frac{|b_\nu|}{|b_\nu| - 4|z|}$$

De este modo si escogemos un n_ν lo suficientemente grande hará que la serie en 2.1 converja.
Ahora que sabemos que la serie converge verifiquemos su radio de convergencia.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[n_\nu]{\left| M_\nu \left(\frac{4z}{b_\nu} \right) \right|^{n_\nu+1}} \\ &= 4|z| \limsup_{\nu\to\infty} \frac{(M_\nu)^{1/n_\nu}}{|b_\nu|} \sqrt[n_\nu]{\left| \frac{4z}{b_\nu} \right|} \\ &= 4|z| \limsup_{\nu\to\infty} \frac{(M_\nu)^{1/n_\nu}}{|b_\nu|} \end{aligned}$$

Entonces convergerá en todo el plano si el limite superior es cero, lo cual es posible si escogemos a $n_\nu > log(M_\nu)$ ya que al cumplirse esta desigualdad se tendrá

$$(M_\nu)^{\frac{1}{n_\nu}} < M_\nu^{\frac{1}{log(M_\nu)}} = 10$$

y por lo tanto

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{(M_\nu)^{1/n_\nu}}{|b_\nu|} < 10 \limsup_{\nu\to\infty} \frac{1}{|b_\nu|}$$

que por hipótesis es cero.

Por la hipótesis del limite sabemos que dado $R > 0$ solo hay un numero finito de polos en $|z| \leq R$ y se verifica la desigualdad a partir de cierto termino.

Entonces en el compacto $|z| \leq |R|$ la serie converge absoluta y uniformemente (Teorema de Abel, [1],pp 178) excepto en los polos, por lo que R es arbitrario, la serie converge para todo $z \neq b_\nu$ y representa una función meromorfa en todo el plano. Ademas cada $\mathbf{P}_\nu(\zeta)$ es la parte singular en b_ν, en efecto, la sumatoria en la ecuación 2.1 tiene un polo en b_ν en el termino de $\mathbf{P}_\nu(\zeta)$ y en el resto de los términos su parte singular es cero, entonces solo basta hallar esta parte singular, supongamos primero que b_ν es un polo de orden m entonces el polinomio se puede escribir de la forma

$$\mathbf{P}_\nu(\zeta) = \sum_{k=-m}^{-1} \frac{c_k}{z - b_\nu}$$

con c_k constantes, asi hallando los coeficientes de la serie de Laurent

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\sum_{k=-m}^{-1} \frac{c_k}{z-b_\nu}}{(z-b_\nu)^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{k=-m}^{-1} c_k (z-b_\nu)^{k-n-1} dz \end{aligned}$$

así para $n < -m$ se tiene que $a_n = 0$ y para $n = -m$ en la integral queda un termino $c_m/(z - b_\nu)$ que es el numero de giros por lo tanto da c_m, y para el resto que tiene potencias negativas por ecuación 3.23 ([1],pp. 123) es igual a la derivada de orden uno menor a la potencia de la función constante c_k es igual a cero, así $a_n = c_n$ y entonces la parte singular es el mismo $\mathbf{P}_\nu(\zeta)$.

Como $f(z)$ debe ser una función meromorfa y la sumatoria es una meromorfa en el plano al sumar una función analítica, no afectara en las partes singulares de la suma, por tanto $g(z)$ debe ser una función entera. $\square$

3. Ejemplos

Ejemplo 2. La función

$$f(z) = \frac{2\pi}{e^{2\pi z} - 1}$$

tiene polos simples en los complejos de la forma $z = ni$ con $n \in \mathbb{Z}$ la parte singular en cada

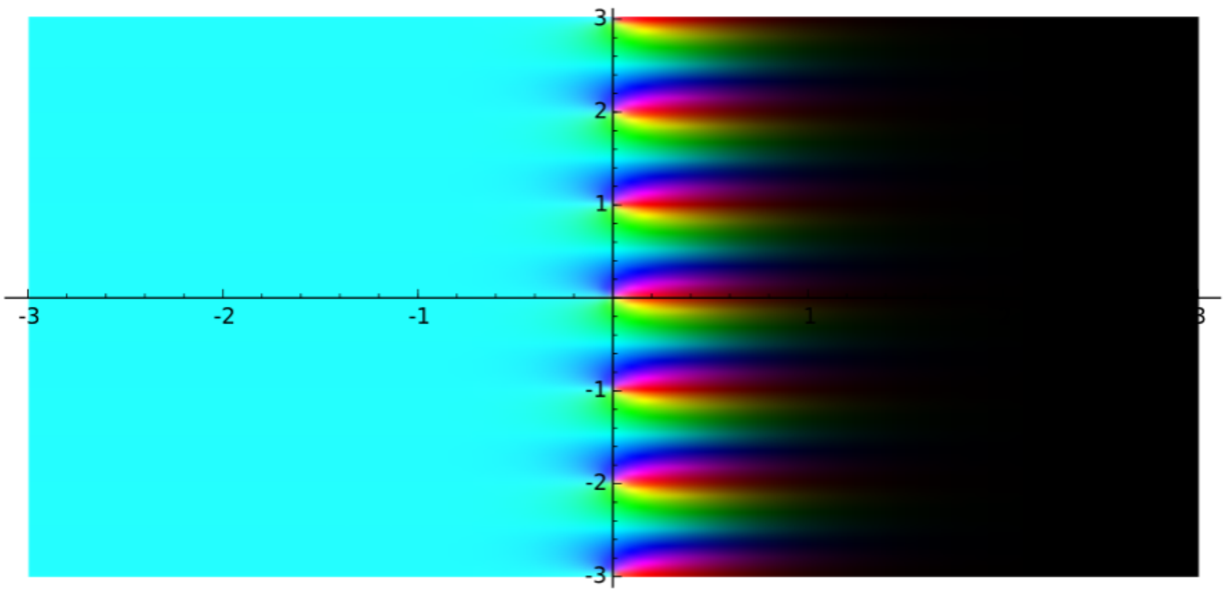

Figura 3.1: grafica ejemplo 2

$z = ni$ es:

$$\begin{aligned} Res_{z=ni} f(z) &= \frac{2\pi}{2\pi e^{2\pi(ni)}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así la parte singular es $1/(z - in)$, pero entonces la serie no converge. Entonces aplicando el teorema de Mittag-Leffler debemos maximizar $|1/(z - in)|$ para $|z| \leq n/4$, entonces este adquiere su valor máximo en la frontera y en el punto mas cercano a in que seria $in/4$, de modo que el valor máximo es $4/(3n)$, entonces podemos truncar el polinomio de Taylor de $1/(z - in)$ alrededor del cero en el termino cero ya que $0 > log(4/(3n))$ para infinitos valores de n.
Por lo tanto la serie convergente es:

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{z - in} + \frac{1}{in}$$

o de forma equivalente

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2}$$

Entonces $f(z)$ se puede expresar como

$$\frac{2\pi}{e^{2\pi z}-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2} + g(z)$$

donde $g(z)$ es entera, para hallar explícitamente esta función, se hace el siguiente análisis, primero $f(z)$ y la sumatoria son de periodo i entonces f no tiene limite en el eje imaginario, ademas el limite cuando $x \to \infty$ de $f(z)$ es cero, y la sumatoria para valores reales se puede acotar ([3], pp. 659) mediante

$$s(x) < \frac{1}{x} + \pi$$

entonces el limite cuando x tiende a infinito es π, ademas para los complejos tal que $0 \leq z \leq 1$ y $Re(z) \geq 1$ se tendrá que $|z| \leq 2|x|$ y

$$|z^2+n^2| \geq \frac{1}{2}(x^2+n^2)$$

lo que prueba que $|s(z)| \leq 4|s(x)|$ por tanto la sumatoria esta acotada, luego $g(z)$ debe ser acotada y por teorema de leuville ([1]) se reduce a una constante, que se halla con la relación $g(x) = f(x) - s(x)$ y el limite cuando $x \to \infty$ por tanto $g(z) = -\pi$, de este modo se obtiene que

$$\frac{2\pi}{e^{2\pi z}-1} = -\pi + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2}$$

Ejemplo 3. La función

$$f(z) = \frac{\pi^2}{sen^2(\pi z)}$$

tiene un polo de orden 2 en cada entero cuya parte singular es $1/(z-n)^2$, entonces al sumar todas sus partes singulares obtenemos que la serie converge comparándola con $1/n^2$, entonces podemos expresar a $f(z)$ como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z)$$

Para hallar $g(z)$ se sigue, tanto $f(z)$ como la sumatoria tienen periodo 1 luego $g(z)$ también debe tener este periodo, haciendo $z = x + iy$ por identidades se tiene que

$$|sen(\pi z)|^2 = (cosh(\pi y))^2 - (cos(\pi x))^2$$

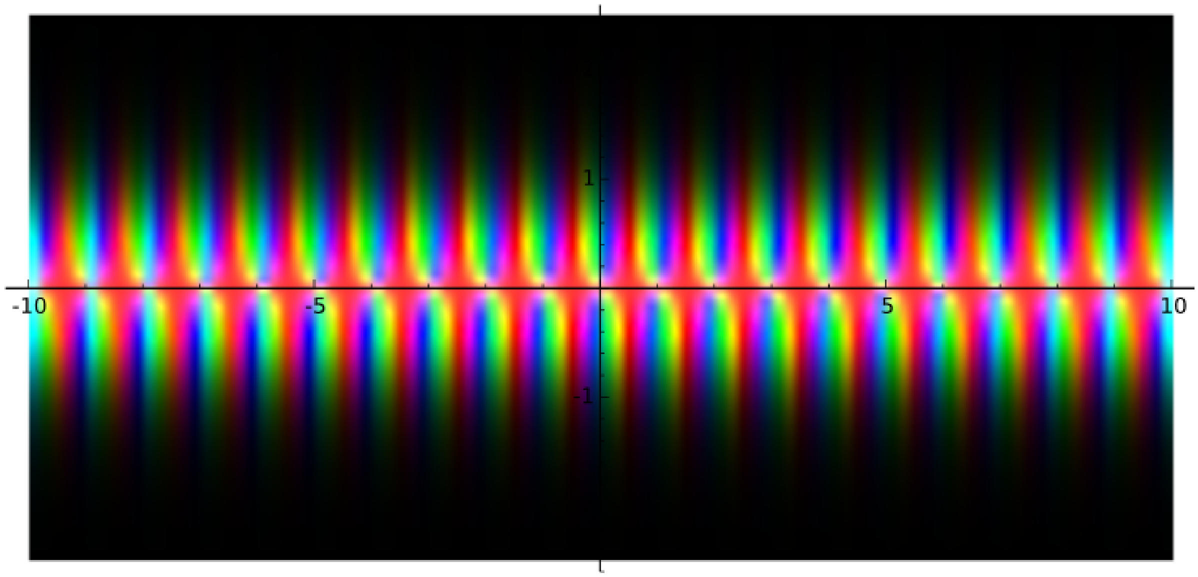

Figura 3.2: grafica ejemplo 3

de esta manera cuando $|y| \to \infty$, $|sen(\pi z)|^2 \to \infty$ y $f(z) \to 0$
En la sumatoria de igual manera si $|y| \to \infty$, esta tiende a cero, por lo tanto g tiene estas propiedades, por ultimo $|g(z)|$ esta acotado en un periodo real, de lo contrario no se cumpliría lo anterior, aplicando teorema de leuville, $g(z)$ a de ser constante, y ya que el limite es cero $g(z) = 0$.

$$\frac{\pi^2}{sen^2(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

4. Conclusión

Como conclusión se puede decir que teniendo la representación en fracciones simples de una función meromorfa, nos proporciona explícitamente sus componentes, como sus polos, cada parte singular, ordenes de los polos, también es posible hallar representaciones de otras funciones operando con las ya obtenidas por el hecho de que se sabe que la serie converge.

Referencias

[1] Ahlfors, Lars V. (1966). Analisis de Variable Compleja. Aguilar S.A Ediciones.

[2] Conway, J.B.(1978) Functions of One Complex Variable. (2nd ed.) Springer, New York.

[3] Henrici Peter.(1974) Applied and computational complex analysis. (vol 1). John Wiley & Sons, New York.

COEVALUACIÓN

Nombre del estudiante evaluador: ______________________________

Calificación[1]: ______________________________

Argumente brevemente su calificación:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Para evaluar el trabajo de su compañero tenga en cuenta los siguientes aspectos. **Originalidad:** El trabajo debe reflejar un ejercicio académico auténtico, no debe tener fragmentos argumentativos (demostraciones) copiados literalmente de libros o páginas internet. Puede tener demostraciones propias, demostraciones detalladas o reescrituras de demostraciones. El trabajo debe reflejar el esfuerzo personal de aprendizaje y la intención de comunicarlo. **Profundidad:** El trabajo tiene que demostrar la capacidad del estudiante para preguntar y abordar sus preguntas. ¿Considera ejemplos?, ¿implicaciones?, ¿analiza las condiciones del teorema?, ¿la veracidad de la recíproca?, ¿casos más generales?, etc. **Complejidad:** El trabajo debe tener ejemplos, demostraciones, implicaciones, etc. matemáticamente retadores de acuerdo al nivel del curso. **Representaciones:** El uso de representaciones puede aportar a la originalidad, profundidad y complejidad: simulaciones en geogebra, sage, Ipython, diagramas de demostraciones, etc. **Rigor:** El rigor lógico, matemático y de exposición es fundamental. Si el trabajo carece de rigor matemático no

[1] Sólo puede usar las siguientes notas: 10 (deficiente), 20 (insuficiente), 40 (bueno), 50 (excelente).

vale nada. **Redacción:** Claridad en la escritura general, buena redacción y ortografía. Uso de las tildes, las comas, los signos de puntuación. Pulcritud en la escritura de las demostraciones. El trabajo debe ser breve, alrededor de 4 páginas. **Citación:** Uso debido de las citas, tanto en la técnica del LaTeXcomo en la técnica de citar.