
ESTUDIO DE LOS FRACTALES CLÁSICOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO ELEMENTAL

Mayra Alejandra Quiroga Quintero



Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Facultad de Ciencias y Educación
Proyecto Curricular de Matemáticas
Bogotá D.C.
2016

ESTUDIO DE LOS FRACTALES CLÁSICOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO ELEMENTAL

Mayra Alejandra Quiroga Quintero

Director:

Alvaro Arturo Sanjuán Cuellar



UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
PROYECTO CURRICULAR DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ
2016

*Dedicado a
Dios y a mi familia*

Agradecimientos

Primero quiero dar gracias a Dios por darme todas las bendiciones que siempre me da. Agradecerle a mis padres Clarena Quintero y Jesús Quiroga porque tengo su amor y apoyo para cada meta que me propongo. A mis hermanos Sebastián Quiroga y Carolina Quiroga quienes este día pueden ver los frutos de una semilla sembrada con esfuerzo e ilusión por todo el apoyo que me dieron juntos.

Gracias a mi familia por estar pendiente de cada paso que dí en esta carrera, pero en especial a mi prima Sol de Amor Vasquéz quien siempre me alento a seguir y no rendirme.

Gracias a mi mejor amigo y mi pareja Eduard Medina porque con su compañía que enriquece dio una voz de aliento a esta difícil etapa de mi vida de esposa y estudiante y quien en estos momentos da todo por mi.

A mis profesores a lo largo de toda la carrera por sus enseñanzas. En especial a mi director Arturo Sanjuán que por su paciencia, su dedicación y su capacidad de enfrentar todos los retos me dieron la confianza necesaria para que yo también creyera en mis posibilidades.

A cada compañero que conocí en este trayecto y a los que además de compañeros son mis amigos ahora porque de ellos también aprendí a hacer mejor persona.

Finalmente a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas por haberme aceptado ser parte de ella para poder estudiar mi carrera. ¡Muchas gracias a todos!

Resumen

En el presente trabajo demostramos que pueden existir ejemplos que van en contra de nuestra intuición, como lo es el conjunto de Cantor que es un conjunto con tantos puntos como un segmento pero con longitud nula, un conjunto con longitud positiva pero que no tiene ningún segmento en él como el conjunto de Smith-Volterra y que podemos cubrir un área con longitudes como lo hace la curva que llena el espacio. Además de eso cada uno de ellos es un fractal y para cada uno se hizo una simulación en el programa Sage.

Abstract

In this work we prove that there may be counterintuitive examples, a set with many points as a segment but with zero length as the Cantor set, a set with positive length but has no segment of it as the set of Smith-Volterra and we can cover an area with lengths as does the space filling curve. Besides that each is a fractal and each was simulated in the Sage program.

Índice general

Agradecimientos	IV
Resumen	V
Lista de figuras	II
Introducción	1
Objetivos	2
Objetivo General	2
Objetivos Específicos	2
1. Análisis del Conjunto de Cantor	3
1.1. Conjunto de Cantor	3
Construcción Geométrica	3
C como expresión ternaria	5
1.2. Conjunto de Smith-Volterra	13

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	II
2. Curvas que llenan el espacio	16
2.1. Convergencia	16
2.2. Curva de I.J Schoenberg	18
3. Conclusiones	24
Apéndices	25
Programas	25
Programas	25
Referencias	29

Índice de figuras

1.1. El conjunto de Cantor nivel 7	13
1.2. Conjunto de Smith Volterra nivel 7	15
2.1. Función ϕ	19
2.2. Función periódica	20
2.3. Iteraciones f_1, f_2	21
2.4. Iteraciones Space Filling Curve	23

Fractal es una palabra que utilizó B. Mandelbrot entre 1977 y 1982 para darle nombre a una gran familia de objetos que han tenido un papel histórico en el desarrollo de la matemática pura. Esto separó la matemática clásica del siglo XIX de la matemática moderna del siglo XX. La matemática moderna empezó con la teoría de conjuntos de Cantor en 1883 [4, pág 18].

Cantor encontró un conjunto que tiene la cardinalidad de los reales pero no contiene ningún segmento y además tiene medida o longitud como la de un punto. Este conjunto es un fractal de dimensión fractal aproximada 0,6309 [4, pág 113].

Peano por su parte encontró una curva descrita por longitudes que logran tener imagen en todo el plano, la curva que llena el espacio es un fractal de dimensión fractal 2 [4, pág 87].

En este trabajo demostraremos algunas propiedades analíticas y topológicas del conjunto de Cantor, Smith Volterra, haremos una curva que llene el espacio dada por I.J Schoenberg y finalmente se ilustrarán con simulaciones en Sage.

Objetivo General

Estudiar algunos fractales clásicos del análisis matemático elemental como lo son el Conjunto de Cantor, el conjunto de Smith-Volterra y la curva que llena el espacio.

Objetivos Específicos

- 1) Encontrar los fundamentos teóricos del análisis matemático que necesitamos para demostrar las propiedades.
- 2) Analizar algunas de las propiedades analíticas y topológicas del conjunto de Cantor y del conjunto de Smith-Volterra y además estudiar un ejemplo de una curva que llena el espacio.
- 3) Simular los conjuntos y la curva que llena el espacio en un lenguaje de programación para así comprobar cada una de las construcciones.

CAPÍTULO 1

Análisis del Conjunto de Cantor

George Cantor nació el 3 de marzo de 1845, en San Peterbusgo, Rusia, y murió el 6 de enero de 1918, en Halle, Alemania. Gracias a sus investigaciones sobre los conjuntos infinitos, fue el primero en formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales) [3, pág 349].

El presente Capítulo se basará en el estudio de los fractales clásicos del análisis matemático elemental como específicamente el conjunto de Cantor y el conjunto de Smith-Volterra, donde se analizarán algunas propiedades topológicas y analíticas. Así, se podrán comparar observando semejanzas y diferencias de cada uno de dichos conjuntos.

1.1. Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor fue propuesto por George Cantor en 1883 [4, pág 18]. Se puede construir de dos formas: geoméricamente y usando la expansión ternaria.

Construcción Geométrica

Tomemos el intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Se divide y se elimina el tercio del medio, es decir quitándole el intervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Luego quitamos de los dos segmentos restantes sus respectivos tercios [5, pág 45]. En otras palabras,

$$C_0 = [0, 1]$$

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Continuamos así sucesivamente y se obtiene una sucesión de conjuntos compactos C_k tales que:

- a) $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$;
- b) C_k es la unión de 2^k intervalos, cada uno de longitud $\frac{1}{3^k}$

El conjunto

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$$

donde

$$C_k = \bigcup_{j=0}^{2^k-1} I_j^k$$

y

$$I_j^k = \left[\frac{j}{3^k}, \frac{j+1}{3^k} \right],$$

se llama conjunto de Cantor.

Un conjunto C es cerrado en $\mathbb{R}^n$ si su complementario $\mathbb{R}^n \setminus C$ es abierto. En particular, un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es un conjunto cerrado [1, pág 63]. Además la reunión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada y la intersección arbitraria de cerrados es cerrada [1, pág 61]. Con este argumento y de la siguiente manera se demostrará que el Conjunto de Cantor es cerrado como sigue.

Proposición 1.1. [1, pág 218] *El conjunto de Cantor es cerrado.*

Demostración. Por definición $C_k = \bigcup_{j=0}^{2^k-1} I_j^k$, cada I_j^k es cerrado y la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada. Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, C_k es cerrado y a su vez por definición $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ y como C es la intersección arbitraria de conjuntos cerrados por tanto C es cerrado. ■

Para demostrar que un conjunto C es acotado si existe una bola que lo contenga, es decir, existe $a \in \mathbb{R}$, y $r > 0$ tales que $A \subseteq B(a, r)$ para el conjunto de Cantor tenemos que si $r = 1$ entonces $B(a, 1) \subseteq C$ por tanto será acotado. Los conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ son caracterizados por el teorema de Heine-Borel de acuerdo a [1, pág 72]. Que dice, si para un conjunto $C \subset \mathbb{R}$ se tiene que C es cerrado y acotado entonces C será compacto.

Proposición 1.2. [5, pág 45] El conjunto de Cantor es compacto.

Demostración. Como C es cerrado y acotado por el teorema de Heine Borel[1, pág 72] es compacto. ■

Un conjunto de $\mathbb{R}$ se llama perfecto si $C = C'$, esto es, si C es un conjunto cerrado que carece de puntos aislados. el conjunto de Cantor cumple estas hipótesis como se demuestra a continuación.

Proposición 1.3. [5, pág 45] C no contiene ningún punto aislado.

Demostración. Sea $x \in C$ y M un segmento que contiene a x . Sea $I_n = I_j^k$ el intervalo de C_k que contiene a x . Si tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ para que $I_N \subset M$ y sea x_N un extremo de I_N tal que $x_N \neq x$. De la construcción de C se deduce que $x_n \in C$ por lo que x es un punto de acumulación y como x es arbitrario se concluye que C no contiene ningún punto aislado. ■

C como expresión ternaria

Todos los números reales se pueden representar en varias bases, la más empleada es la base decimal pero una caracterización del conjunto de Cantor es usando expresión ternaria. Es decir, cada elemento del conjunto C puede ser expresado en base 3 donde solo se utilice $\{0, 2\}$ como se verá a continuación.

Proposición 1.4. [1, pág 218] $x \in C$ si y sólo si $x = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{3^i}$ con $\alpha_i \in \{0, 2\}$.

Demostración. Vamos a demostrar la necesidad. Si $x \in C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ en particular $x \in C_k$. Sea $I_j^k = [\frac{j-1}{3^k}, \frac{j}{3^k}]$ uno de los 2^k subintervalos cerrados que ocurren en C_k . Se supone que la expansión ternaria tiene la forma

$$0.\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k\beta_{k+1}\beta_{k+2} \cdots$$

lo cual escribiendo la descomposición aditiva de la base

$$\frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{\beta_{k+1}}{3^{k+1}} + \frac{\beta_{k+2}}{3^{k+2}} + \cdots$$

Ahora, si se divide en tres partes iguales el intervalo I_j^k se obtiene

$$\left[\frac{j-1}{3^k}, \frac{3j-2}{3^{k+1}} \right], \left[\frac{3j-2}{3^{k+1}}, \frac{3j-1}{3^{k+1}} \right], \left[\frac{3j-1}{3^{k+1}}, \frac{j}{3^k} \right]$$

ya que

$$\begin{aligned} \frac{j-1}{3^k} + \frac{1}{3^{k+1}} &= \frac{3j-3+1}{3^{k+1}} = \frac{3j-2}{3^{k+1}} \\ \frac{j-1}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} &= \frac{3j-3+2}{3^{k+1}} = \frac{3j-1}{3^{k+1}}. \end{aligned}$$

De esta manera, $\beta_{k+1} = 0$ en $\left[\frac{j-1}{3^k}, \frac{3j-2}{3^{k+1}}\right]$ donde se toma la expresión $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k022\cdots$ para el punto $\frac{3j-2}{3^{k+1}}$ en lugar de la expresión $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k100\cdots$. Así se llega que para $\left(\frac{3j-2}{3^{k+1}}, \frac{3j-1}{3^{k+1}}\right)$ el $\beta_{k+1} = 1$ y para $\left[\frac{3j-1}{3^{k+1}}, \frac{j}{3^k}\right]$ el $\beta_{k+1} = 2$ se tiene la expresión $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k200\cdots$ para $\frac{3j-1}{3^{k+1}}$ en lugar de la $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k122\cdots$. Por tanto al quitar el intervalo $\left(\frac{3j-2}{3^{k+1}}, \frac{3j-1}{3^{k+1}}\right)$ el $\beta_{k+1} \neq 1$. Es decir, en los puntos con expansión ternaria

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k1000\cdots.$$

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k1222\cdots.$$

puede tener otra representación dada por

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k0222\cdots.$$

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k2000\cdots.$$

respectivamente. Así los elementos de C_{k+1} tienen la expansión ternaria deseada.

Ahora demostraremos la suficiencia. Supongamos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$ con $\alpha_n \in \{0, 2\}$ y veamos que $x \in$

$\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, es decir, $x \in C_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces basta demostrar que $x \in \left[\frac{j}{3^k}, \frac{j+1}{3^k}\right]$. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$ y sabemos que $\alpha_n \leq 2$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si tomamos

$$\begin{aligned} \frac{j}{3^k} &= \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{0}{3^{k+1}} + \frac{0}{3^{k+2}} + \cdots \\ &= \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \cdots \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} = x \end{aligned}$$

y a su vez tenemos que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} \\ &\leq \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} + \frac{2}{3^{k+2}} + \frac{2}{3^{k+3}} \cdots \\ &= \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} \left(1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i\right) \\ &= \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} \left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{3}{3^{k+1}} \\
&= \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{1}{3^k} \\
&= \frac{j}{3^k} + \frac{1}{3^k} \\
&= \frac{j+1}{3^k}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x \in \left[\frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \cdots, \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \cdots + \frac{\alpha_k}{3^k} + \frac{1}{3^k} \right]$$

Así,

$$x \in \left[\frac{j}{3^k}, \frac{j+1}{3^k} \right] \subset \bigcup_{j=0}^{2^k-1} \left[\frac{j}{3^k}, \frac{j+1}{3^k} \right] = C_k.$$

Como k es arbitrario entonces

$$x \in \bigcap C_k = C.$$

■

Ningún segmento es de la forma $\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right)$ donde k y m son enteros positivos, tiene un punto en común con C . Se demostrará que como todo segmento (α, β) contiene a un segmento $\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m} \right)$ entonces C no contiene ningún segmento.

Definición. [5, pág 45] Un conjunto S en un espacio métrico es totalmente desconectado si para algún par de elementos distintos $x, y \in S$, existen conjuntos separados A con $x \in A$ y B con $y \in B$ tal que $S = A \cup B$.

Proposición 1.5. [5, pág 45] C es totalmente desconectado.

Demostración. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \beta$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\frac{1}{3^m} < \frac{\beta - \alpha}{6} \quad (1.1)$$

Por otro lado existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{3k+1}{3^m} &> \alpha \\
\frac{3^m \alpha - 1}{3} &< k
\end{aligned}$$

entonces se escoge $k = k_{\alpha, m} = \left\lceil \frac{3^m \alpha - 1}{3} \right\rceil + 1$ el menor entero k tal que se cumpla $k > \frac{3^m \alpha - 1}{3}$. De esta manera

$$\begin{aligned} k - 1 &\leq \frac{3^m \alpha - 1}{3} \\ \frac{3k - 2}{3^m} &\leq \alpha \end{aligned}$$

Reemplazando en (1.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{6}{3^m} + \frac{3k - 2}{3^m} &< \beta \\ \frac{3k - 2 + 6}{3^m} &< \beta \\ \frac{3k + 4}{3^m} &< \beta \\ \frac{3k + 2}{3^m} &< \frac{3k + 4}{3^m} < \beta \end{aligned}$$

entonces se concluye que

$$\alpha < \frac{3k + 1}{3^m} < \frac{3k + 2}{3^m} < \beta$$

Así C es totalmente desconectado. ■

Otra forma de ver que el conjunto de Cantor no contiene ningún intervalo es por la expresión ternaria. En efecto,

Proposición 1.6. *C no contiene ningún intervalo.*

Demostración. Sea $(\alpha, \beta) \subseteq C$ con $\beta < \alpha$ y tal que $\alpha = 0.a_1a_2a_3 \cdots_{(3)}$ y $\beta = 0.b_1b_2b_3 \cdots_{(3)}$ están descritos en base ternaria y si tenemos además $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$ y $b_{n+1} > a_{n+1}$ entonces el intervalo (α, β) tiene un elemento de la forma

$$x_0 = 0.a_1a_2 \cdots a_n 1 a_{n+2}$$

haciendo $a_{n+3} = a_{n+4} = \cdots = b_{n+3} = b_{n+4} = \cdots = 0$ luego es claro que x_0 no pertenece al conjunto de Cantor por tanto $(\alpha, \beta) \not\subseteq C$. ■

Otra de las importantes propiedades del conjunto de Cantor se enuncia primero con la siguiente definición. Un conjunto se dice que es infinito numerable si es coordinable con el conjunto de todos los enteros positivos y además un conjunto es numerable si es o bien finito o bien infinito numerable. Un conjunto que no sea numerable se llama no numerable [1, pág 47]. Para demostrar que el conjunto de Cantor es no numerable se necesita de la siguientes proposiciones

Proposición 1.7. [5, pág 43] *Si un conjunto X tiene puntos de acumulación entonces X es un conjunto infinito.*

Demostración. Supongamos que X es un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y para $x_1 \in X$ sea $\epsilon_1 > 0$ existe $B_{\epsilon_1}(x_1)$ tal que $B_{\epsilon_1}^*(x_1) \cap X \neq \emptyset$, y así para $x_i \in X$ sea $\epsilon_i > 0$ existe $B_{\epsilon_i}(x_i)$ tal que $B_{\epsilon_i}^*(x_i) \cap X \neq \emptyset$. Si $\epsilon_i = \frac{|x_i - x_j|}{2}$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ con $i \neq j$ entonces tomamos $\min\{\epsilon_i\}$ por consiguiente $B_\epsilon(x_i) \cap X = \emptyset$ lo cual es una contradicción. ■

Ahora como ya se vio anteriormente que C es perfecto se puede ver la siguiente demostración:

Proposición 1.8. [5, pág 44] Si un conjunto $P \subset \mathbb{R}^k$ es perfecto, entonces P es no numerable.

Demostración. Como P tiene puntos de acumulación entonces por la proposición anterior debe ser infinito. Supongamos que P es numerable entonces se representan sus puntos por $x_1, x_2, \dots$ y se construirá una sucesión $\{V_n\}$ de vecindades como sigue: Si $x \in P$ y U es un abierto en $\mathbb{R}^k$ tal que $U \cap P \neq \emptyset$ entonces existe V vecindad en $\mathbb{R}^k$ tal que:

- a) $V \cap P \neq \emptyset$
- b) $V \subset U$
- c) $x \notin \overline{V}$.

Ahora si se aplica lo anterior a un punto x_1 y $U = \mathbb{R}^k$ para obtener la vecindad V_1 que satisface

- a) $V_1 \cap P \neq \emptyset$
- b) $V_1 \subset \mathbb{R}^k$
- c) $x_1 \notin \overline{V_1}$.

Si se aplica lo anterior a x_2 y V_1 para obtener la vecindad V_2 que satisface

- a) $V_2 \cap P \neq \emptyset$
- b) $V_2 \subset V_1$
- c) $x_2 \notin \overline{V_2}$.

De manera general, aplicamos a x_n y V_{n-1} para obtener la vecindad V_n tal que satisface

- a) $V_n \cap P \neq \emptyset$
- b) $V_n \subset V_{n-1}$
- c) $x_n \notin \overline{V_n}$.

Como todo punto de P es un punto de acumulación de P , hay una vecindad V_{n+1} tal que

- a) $V_{n+1} \cap P \neq \emptyset$
- b) $V_{n+1} \subset V_n$
- c) $x_n \notin \overline{V_{n+1}}$.

Por a), V_{n+1} satisface la hipótesis inductiva y puede realizarse la construcción. Se toma $K_n = \overline{V_n} \cap P$ y como $\overline{V_n}$ es acotado por cada V_{n-1} y además cerrado entonces $\overline{V_n}$ es compacto. Como $x_n \notin K_{n+1}$ ningún punto de P pertenece a $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Como $K_n \subset P$, esto significa que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ es vacío. Pero todo K_n es no vacío por a) y además $K_{n+1} \subset K_n$ por tanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. ■

Para así asegurar que

Corolario 1.1. [1, pág 218] El conjunto de cantor C es no numerable.

Demostración. Directamente de la proposición (1.8) como C es perfecto entonces C es no numerable. ■

También emplearemos para demostrar que C es no numerable la representación de los reales en base 3, utilizando el teorema diagonal de Cantor que dice que todo conjunto que tenga un subconjunto infinito numerable es necesariamente infinito. Con esto se puede describir un conjunto infinito como lo es C , encontrando un subconjunto infinito numerable en él.

Proposición 1.9. [5, pág 32] Sea A el conjunto de todas las sucesiones cuyos elementos son los dígitos 0 y 2. Este conjunto A , es no numerable.

Demostración. Sea E un subconjunto numerable de A y supongamos E es definido por las sucesiones $s_1, s_2, s_3 \dots$. Construimos una sucesión s de la siguiente manera: si en s_n el dígito en la posición n es 2, hacemos que el término n -ésimo de s sea 0, y viceversa. La sucesión s es diferente a E , ya que, cada elemento de E difiere en al menos un lugar. Por tanto, $s \notin E$. Pero $s \in A$ ya que s está escrito en términos de 0, 2, por lo que E es subconjunto propio de A . Con esto hemos demostrado que todo subconjunto numerable de A es subconjunto propio de A . Así A es no numerable porque de otro modo A sería un subconjunto propio de A , lo que es una contradicción. ■

La idea de la demostración anterior se debe a George Cantor y se llama proceso diagonal de Cantor quien la utilizó para probar que el conjunto de los números reales es no numerable demostrando que el intervalo $[0, 1]$ es no numerable suponiendo que es numerable y llegando a una contradicción.

Corolario 1.2. C es no numerable.

Demostración. Se deduce directamente de la proposición anterior si tomamos A como el conjunto de todos los elementos del conjunto de Cantor escritos en expresión ternaria con 0, 2. ■

Ahora todo conjunto numerable tiene medida cero. Pero hay conjuntos no numerables (de hecho, perfectos) de medida cero. Puede tomarse por ejemplo C y ver que dicho conjunto tiene medida cero como se hará a continuación.

Definición. [1, pág 207] Un conjunto S de números reales posee medida cero. Si para cada $\epsilon > 0$, existe un recubrimiento numerable de S por medio de intervalos abiertos, tales que la suma de sus longitudes sea menor que ϵ .

Si designamos a los intervalos por medio de (a_k, b_k) la definición necesita que

$$S \subset \bigcup_k (a_k, b_k).$$

Y

$$\sum_k (b_k - a_k) < \epsilon.$$

Si la colección de intervalos es finita, el índice k recorre un conjunto finito. Si la colección es infinita numerable entonces k irá de 1 a ∞ , y la suma de las longitudes está dada por una serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) = 0.$$

Proposición 1.10. [1, pág 218] El conjunto de Cantor tiene medida nula.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^k < \epsilon$. Por la construcción del conjunto C existe una sucesión de conjuntos disjuntos C_k cuya intersección es C , donde cada C_k es la unión de una familia finita de 2^k intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$ cada uno. si tomamos $I_k = [a_k, b_k]$ se tiene que $C \subset C_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} I_i$. Es decir, que la suma de sus longitudes,

$$\sum_{i=1}^{2^k} (b_i - a_i) = \frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Así $\left(\frac{2}{3}\right)^k < \epsilon$, entonces C es de medida cero. ■

La siguiente proposición es otra manera de ver que el conjunto de Cantor tiene medida cero.

Proposición 1.11. [5, pág 334] El conjunto de Cantor C tiene medida cero.

Demostración. El complemento del conjunto de Cantor está dado por $C^c : [0, 1] - C$ y su medida sería

$$\mu(C^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

Sea

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \\ A + 1 &= 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \\ A + 1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i. \end{aligned}$$

Esto es una serie geométrica con razón $\frac{2}{3} < 1$ y por lo tanto converge a

$$A + 1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

de donde $A = 3 - 1 = 2$ y entonces

$$\mu(C^c) = \frac{1}{2}A = 1$$

Además por definición $\mu([0, 1]) = 1$ Por tanto,

$$\mu(C) = 1 - \mu(C^c) = 1 - 1 = 0.$$

■

Ahora conocemos que el conjunto de Cantor es un fractal. Para encontrar la Dimensión fractal [4, pág 113] sabemos el conjunto está formado por dos divisiones que son semejantes al total y que son de razón $1/3$. En este caso, la potencia adecuada es: $\left(\frac{1}{3}\right)^D + \left(\frac{1}{3}\right)^D = 1$ entonces $\frac{2}{3^D}$ y se tiene que $3^D = 2$ y por tanto $D = \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309 \dots$.

En resumen, se demostró que el conjunto de Cantor es cerrado, acotado por ende compacto. Sus elementos se pueden describir en base ternaria. Es perfecto, es totalmente desconectado, es no numerable y además tiene medida cero. Si se consideran dos de sus propiedades: Que C es no numerable, en otras palabras tiene tantos elementos como los reales y además C tiene medida cero, es decir, su medida es como la medida de un punto esto es contraintuitivo.

Observando el conjunto gráficamente como en la Figura 1.1 se puede ver la construcción del conjunto de Cantor hasta la iteración 7. Es decir C_7 y además algunos de los puntos que pertenecen a C .

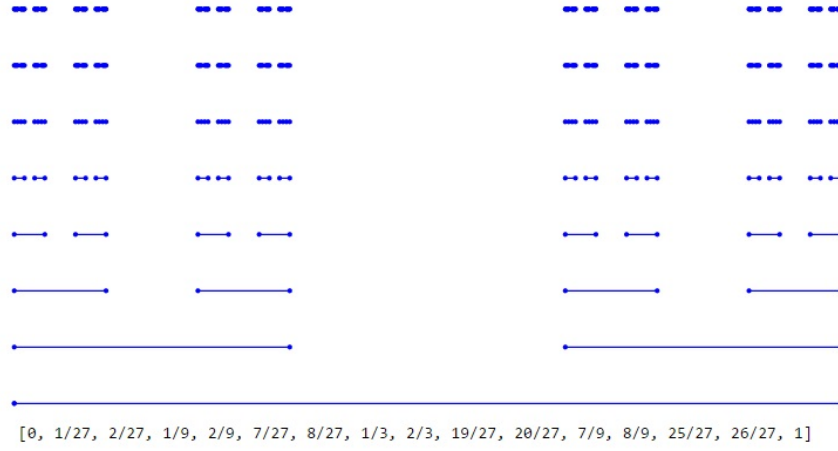


Figura 1.1: El conjunto de Cantor nivel 7

1.2. Conjunto de Smith-Volterra

Similar al conjunto de Cantor se construye el conjunto de Smith-Volterra tal que el proceso consiste en tomar el intervalo $I = [0, 1]$ en el primer paso se elimina el intervalo central de longitud $\frac{1}{4}$. Es decir, se quita un $\frac{1}{8}$ a cada lado del punto central $\frac{1}{2}$. Por ejemplo:

$$S_0 = [0, 1]$$

$$S_1 = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right]$$

$$S_2 = \left[0, \frac{5}{32}\right] \cup \left[\frac{7}{32}, \frac{12}{32}\right] \cup \left[\frac{20}{32}, \frac{25}{32}\right] \cup \left[\frac{27}{32}, 1\right]$$

y así inductivamente se obtuvo una sucesión de conjuntos compactos S_k tales que:

- a) $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$;
- b) Se elimina de cada uno de los 2^{k-1} intervalos restantes un subintervalo centrado en él de longitud $\frac{1}{2^{2k}}$.

Si S_n es una unión disjunta de intervalos $S_n = \bigcup_k [a_k, b_k]$,

$$S_{n+1} = \bigcup_k \left(\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{1}{2^{2n+3}} \right] \cup \left[\frac{a_k + b_k}{2} + \frac{1}{2^{2n+3}}, b_k \right] \right)$$

se llama conjunto de Smith-Volterra a $S = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n$

Proposición 1.12. [1, pág 72] S es compacto.

Demostración. Por construcción como S es cerrado y acotado, por el teorema de Heine-Borel [1, pág 72] es compacto. ■

El conjunto de Smith-Volterra, al igual que el conjunto de Cantor, es un conjunto perfecto. En efecto,

Proposición 1.13. [5, pág 45] El conjunto de S es un conjunto perfecto. Es decir, es cerrado y todos sus puntos son de acumulación.

Demostración. Dado cualquier $x \in S$, entonces $x \in S_k$ para algún k . En particular x pertenece a uno de los intervalos de S_k . Consideremos $x_k \in S$ como el extremo más cercano a x en este intervalo tal que $x_k \neq x$. Nosotros tenemos que

$$|x - x_k| < \frac{1}{2^{2k}} < \frac{1}{k}.$$

Dado cualquier k nosotros podemos encontrar al menos un $x_k \in S$ tal que $|x - x_k| < \frac{1}{k}$ y $x_k \neq x$. Por lo tanto x es un punto de acumulación y como x es arbitrario se concluye que S no contiene ningún punto aislado. Es decir, todos sus puntos son de acumulación y como S es cerrado se tiene que S es perfecto. ■

El conjunto de Smith-Volterra no tiene ningún intervalo contenido en él. Se demostrará como sigue:

Proposición 1.14. [5, pág 45] S es totalmente desconectado

Demostración. Dado $x, y \in S$ con $x < y$ por la propiedad arquimediana existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| < \frac{1}{2^{2n}}$ como $x, y \in S_n$ entonces x, y pertenecen a diferentes intervalos cerrados de S_n . Sea I un intervalo cerrado de S_n que contiene a x se sigue que $x \in S_n \cap I$ y $y \in S_n - I$ y además $S_n = (S_n \cap I) \cup (S_n - I)$. Por lo tanto S es totalmente desconectado. ■

Ya demostramos que el conjunto de Smith-Volterra es un conjunto perfecto, por ello se puede ver que es también no numerable.

Proposición 1.15. [5, pág 44] El conjunto S es no numerable

Demostración. Directamente de la proposición (1.8) como S es perfecto entonces S es no numerable. ■

Ya se sabe que todo conjunto numerable tiene medida cero. Pero hay conjuntos no numerables (de hecho, perfectos) de medida cero como el conjunto de Cantor, y hay conjuntos que son no numerables, perfectos, totalmente desconectados, que no contienen ningún segmento pero que tienen medida positiva. El conjunto de Smith-Volterra es un ejemplo de ello.

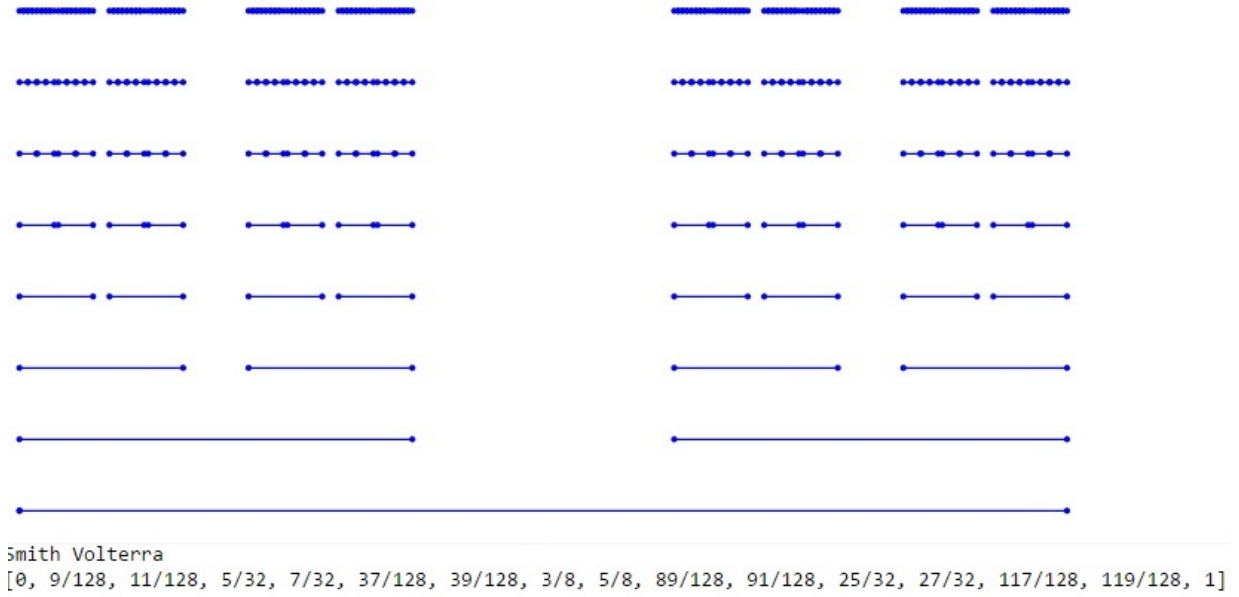


Figura 1.2: Conjunto de Smith Volterra nivel 7

Proposición 1.16. [1, pág 307] El conjunto de Smith-Volterra S tiene medida positiva.

Demostración. El complemento del conjunto de Smith-Volterra está dado por $S^c : [0, 1] - S$ y su medida sería

$$\mu(S^c) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2}.$$

Además por definición $\mu([0, 1]) = 1$ Por tanto,

$$\mu(S) = 1 - \mu(S^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

■

Ahora conocemos que el conjunto de Smith Volterra es también un fractal para encontrar su Dimensión fractal [4, pág 113] como sabemos el conjunto está formado por dos divisiones que son semejantes al total y que son de razón $\frac{1}{2}$. En este caso, la potencia adecuada es: $\left(\frac{1}{2}\right)^D + \left(\frac{1}{2}\right)^D = 1$ entonces $\frac{2}{2^D}$ y se tiene que $2^D = 2$ y por tanto $D = \log_2 2 = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$.

En conclusión el conjunto de Smith-Volterra puede verse a simple vista tener similitud con el conjunto de Cantor pero en su análisis tienen una diferencia muy importante que es su medida y que a diferencia de C el conjunto S tiene medida positiva. En la figura 1.2 se encuentra la construcción gráfica en el nivel 7, es decir, S_7 y alguno de los puntos que pertenecen a S .

Curvas que llenan el espacio

Las curvas que llenan el espacio fueron creadas por el matemático Giuseppe Peano quien nació el 27 de Agosto del año 1858 en Cuneo, Italia. En 1890, publicó un artículo en el que expone la construcción de una curva que tiene la propiedad de llenar todo el plano, es decir.

La construcción de las curvas que llenan el espacio se remonta al descubrimiento de George Cantor, acerca de que el intervalo $[0, 1]$ puede hacerse corresponder biyectivamente al cuadrado unidad. Surgió entonces en aquel tiempo la pregunta de que si tal correspondencia podría ser continua, a raíz de esto se buscó obtener una función continua y sobreyectiva de $[0, 1]$ en el cuadrado unidad y allí fue que Peano construyó la primera curva que cumplía tales características. Luego llegaron otros ejemplos como los de D. Hilbert en 1891; Moore en 1900; Lebesgue en 1904, entre otros.

2.1. Convergencia

Definición. [2, pág 33] Una sucesión (f_n) de funciones converge a f si para todo $\epsilon > 0$ y para $n \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n - f| < \epsilon$.

Por ejemplo, la sucesión $(f_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a $f = 0$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ por la propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon$ y, para $n \geq N$, tendremos $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$.

Y también si tomamos la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n$ tenemos que no es convergente. En efecto, supongamos que (f_n) converge a f y si tomamos $\epsilon = 1$ para obtener $N \in \mathbb{N}$ tal que $|(-1)^n - f| < 1$ para

$n \geq N$. Usando $n = 2N$ tenemos $|1 - f| < 1$ de donde $f > 0$ y también se tiene que $n = 2N + 1$ entonces $|-1 - f| < 1$ entonces se deduce que $f < 0$ lo que es una contradicción, así $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n$ no converge.

Teorema 2.1. [2, pág 33] Si una sucesión (f_n) converge a f y también converge a g con f, g funciones entonces $f = g$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ por la definición de convergencia existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|f_n - f| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq N_1$ y $|f_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq N_2$. Tomamos $N = \max\{N_1, N_2\}$ entonces

$$|f - g| = |f - f_n + f_n - g| \leq |f_n - f| + |f_n - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

luego $|f - g| \leq 0$. Es decir, $f = g$. ■

Si tenemos una sucesión dada (f_n) y se forma una nueva sucesión como sigue:

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ dado esto se tiene la definición:

Definición. [1, pág 226] Si tenemos una sucesión dada (f_n) le asociamos una sucesión (s_n) donde:

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n = \sum_{k=1}^n f_k$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ a s_n se le llama sumas parciales de la serie y notaremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k$$

como la serie infinita.

Si la sucesión s_n converge a s , este se llama suma de la serie y se escribe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Por ejemplo, si tenemos un número a escrito en su desarrollo decimal infinito como $0.a_0a_1a_2 \dots$ entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ converge en a .

Por otro lado, se dice que una serie $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absolutamente cuando la serie $s = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ es convergente. Y se dice que converge condicionalmente si $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge pero $s = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ diverge.

Además, si se tiene que $|x| < 1$ la serie $1 + x + x^2 + \dots$ converge y tiene suma $\frac{1}{1-x}$ y si $|x| \geq 1$ la serie diverge. Esto es la serie geométrica [1, pág 232]. Ahora veremos lo que es convergencia puntual y uniforme como sigue:

Definición. [1, pág 268].

- a) Una sucesión (f_n) de funciones converge puntualmente a un conjunto A si para cada $\epsilon > 0$ existe un $N_{(x,\epsilon)} \in \mathbb{N}$ se tiene que si $n > N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
- b) Una sucesión (f_n) de funciones converge uniformemente a un conjunto A si para cada $\epsilon > 0$ existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para cada $x \in A$.

Tenemos que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual pero la convergencia puntual no implica la convergencia uniforme ya que si por ejemplo, tomamos la sucesión f_n para todo $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

entonces f_n converge puntualmente. En efecto, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ y si fijamos un $x \neq 0$ en el intervalo $[0, 1]$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $f(x) = 0$, y por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Lo que quiere decir, para todo $x \in [0, 1]$ el $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ con $f(x) = 0$, así $f_n(x)$ converge puntualmente. Sin embargo f_n no converge uniformemente ya que, para $\epsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|f_n(x) - f(x)| < 1$ para cada $x \in [0, 1]$. Tenemos también $|f_n(x) - f(x)| < 0$ para todo $x \in [0, 1]$ por la convergencia puntual y $1 \neq 0$. así f_n no converge uniformemente.

El siguiente teorema es conocido como el criterio M-Weierstrass que es un resultado de la convergencia uniforme.

Teorema 2.2. [1, pág 272] Sea M_n una sucesión de números no negativos tales que

$$0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$$

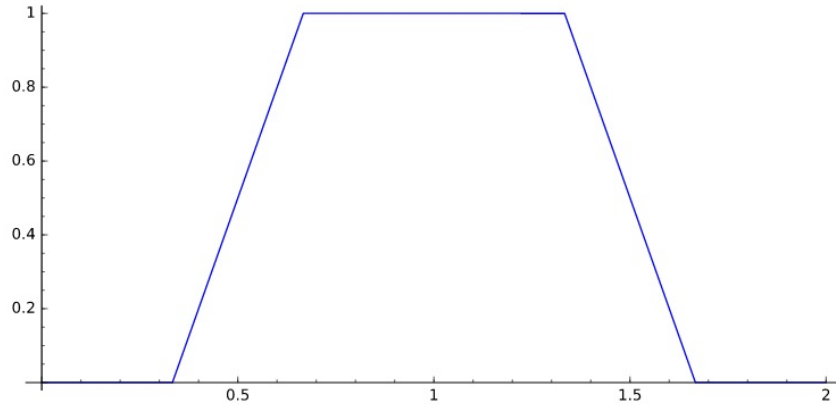
para $n = 1, 2, 3, \dots$ y cada x en un conjunto A . Entonces $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en A si $\sum M_n$ converge.

Además el siguiente teorema nos será de ayuda en la siguiente sección.

Teorema 2.3. [1, pág 272] Supongamos que $\sum f_n(x) = f(x)$ uniformemente en un conjunto A . Si cada f_n es continua en un punto $x_0 \in A$, entonces f también es continua en x_0 .

2.2. Curva de I.J Schoenberg

Peano en 1890 encontró una curva sobre $\mathbb{R}$ que pasa por todos los puntos del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. El siguiente ejemplo se debe a I.J. Schoenberg [1, pág 272]:

Figura 2.1: Función ϕ

Sea ϕ una función definida en el intervalo $[0, 2]$ como se muestra en la figura 2.1 por medio de:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ 3t - 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3} \\ -3t + 5 & \text{si } \frac{4}{3} \leq t \leq \frac{5}{3} \\ 0 & \text{si } \frac{5}{3} \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Luego se extiende la definición de ϕ a todo $\mathbb{R}$ por medio de la ecuación

$$\phi(t + 2) = \phi(t)$$

ϕ es periódica de periodo 2 y se puede ver en la Figura 2.2. Ahora se definen dos funciones f_1, f_2 por medio de dos series así como se muestran en la Figura 2.3.

$$f_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2}t)}{2^n}$$

y

$$f_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-1}t)}{2^n}$$

Es decir,

$$f_1(t) = \frac{\phi(t)}{2} + \frac{\phi(3^2t)}{2^2} + \frac{\phi(3^4t)}{2^4} + \dots$$

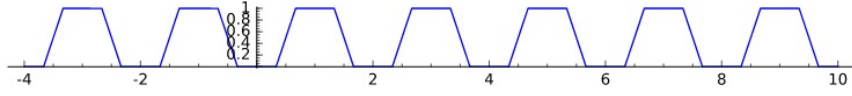


Figura 2.2: Función periódica

$$f_2(t) = \frac{\phi(3t)}{2^n} + \frac{\phi(3^3t)}{2^n} + \frac{\phi(3^5t)}{2^n} + \dots$$

Ambas series convergen absolutamente para cada real t y su convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$. En efecto, dado $|\phi(t)| \leq 1$ para todo t , aplicando el criterio de M de Weierstrass haciendo $M_n = \frac{1}{2^n}$. Como ϕ es continua en $\mathbb{R}$ el teorema 2.3 dice que si f_1, f_2 son también continuas en $\mathbb{R}$. Sea $f = (f_1, f_2)$ y Γ la imagen del intervalo unidad $[0, 1]$ por medio de f . Se debe demostrar que Γ llena el cuadrado unidad, es decir, $\Gamma = [0, 1] \times [0, 1]$.

Proposición 2.17. $\Gamma = [0, 1] \times [0, 1]$

Demostración. Se sabe que $0 \leq f_1(t) \leq 1$ y $0 \leq f_2(t) \leq 1$ para cada t ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Luego Γ es subconjunto de $[0, 1] \times [0, 1]$. Ahora se debe probar que para $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$ está en Γ . En efecto, si escribimos

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

y

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$$

en donde cada a_n, b_n es 0 o 1, es decir, cada número escrito en base binaria. Sea ahora

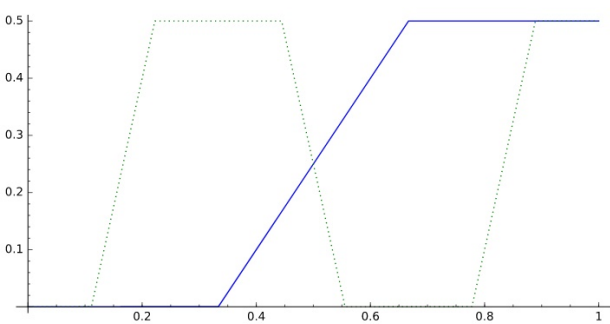
$$c = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}.$$

Donde $c_{2n-1} = a_n$ y $c_{2n} = b_n$ con $n = 1, 2, \dots$, es claro que $0 \leq c \leq 1$ ya que $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1$. Hay que ver $f_1(c) = a$ y $f_2(c) = b$ si se puede mostrar que

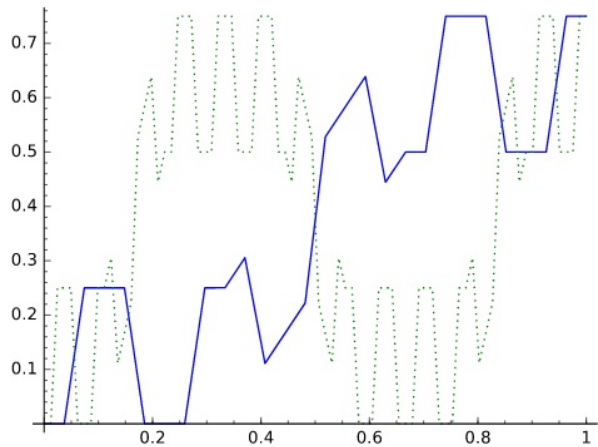
$$\phi(3^k c) = c_{k+1} \tag{2.1}$$

para cada $k = 1, 2, 3, \dots$ entonces se tendrá que $\phi(3^{2n-2} c) = c_{2n-1} = a_n$ y $\phi(3^{2n-1} c) = c_{2n} = b_n$ y esto dará $f_1(c) = a$ y $f_2(c) = b$. Para demostrar (2.1)

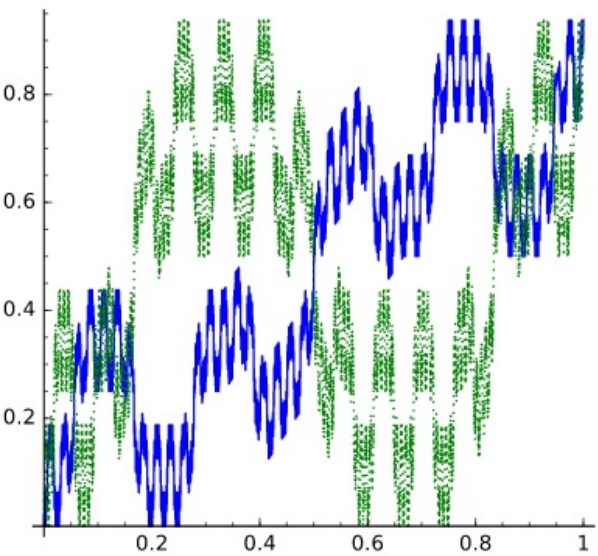
$$\begin{aligned} 3^k c &= 2 \sum_{n=1}^k \frac{c_n}{3^{n-k}} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{c_n}{3^{n-k}} \\ &= 2r + d_k. \end{aligned}$$



(a) Iteración 2



(b) Iteración 3



(c) Iteración 5

Figura 2.3: Iteraciones f_1, f_2

En donde $d_k = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n}$ y ya que ϕ tiene período 2 entonces

$$\begin{aligned}\phi(3^k c) &= \phi(2r + d_k) \\ &= \phi(d_k).\end{aligned}$$

Si $C_{k+1} = 0$ entonces

$$0 \leq d_k = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n} \leq 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}.$$

Por la definición de ϕ se tiene que $\phi(d_k) = 0$ por consiguiente $\phi(3^k c) = 0 = c_{k+1}$ Ahora si $C_{k+1} = 1$ entonces

$$0 \leq \frac{2}{3} \leq d_k = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n+k}}{3^n} \leq 3.$$

Por la definición de ϕ se tiene que $\phi(d_k) = 1$ por consiguiente $\phi(3^k c) = 1 = c_{k+1}$. Así, queda demostrado que

$$\phi(3^k c) = c_{k+1}.$$

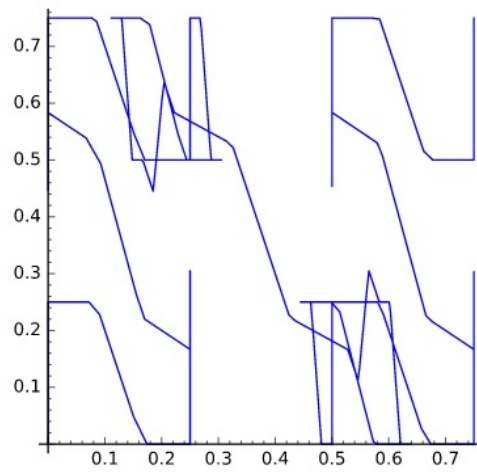
Es decir,

$$\begin{aligned}f_1(c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-2})}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = a \\ f_2(c) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(3^{2n-1})}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{2n}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = b.\end{aligned}$$

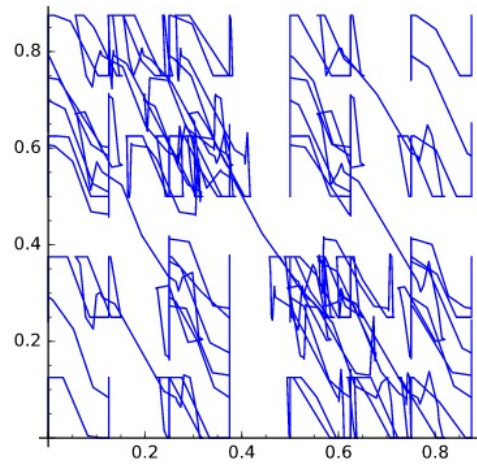
■

En la figura 2.4 se puede ver algunas de las iteraciones de la imagen de las funciones f_1, f_2 y así es que se representa la curva que llena el espacio.

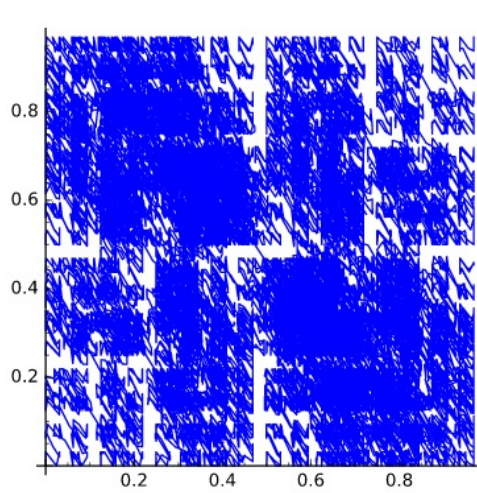
Conocemos que la curva que llena el espacio es un fractal para encontrar la Dimensión fractal [4, pág 113] entonces tenemos que $D = \log_{\sqrt{(2)}} 2 = \frac{\log 2}{\log(\sqrt{(2)})} = 2$.



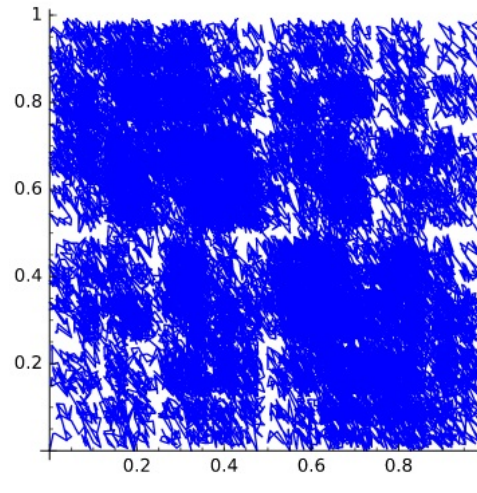
(a) Iteración 3



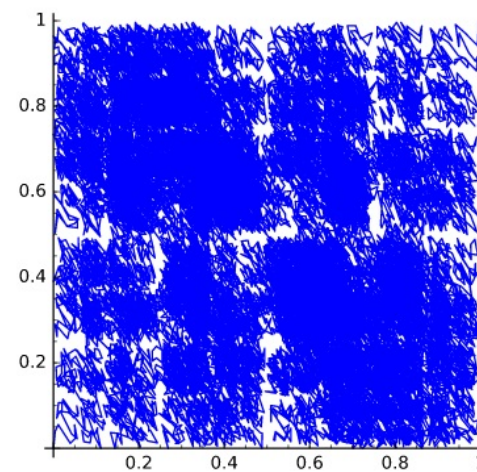
(b) Iteración 4



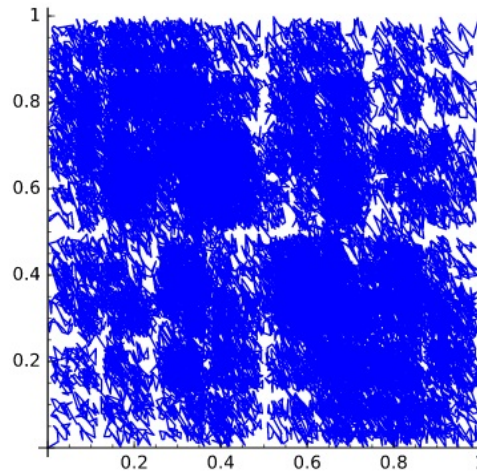
(c) Iteración 6



(d) Iteración 8



(e) Iteración 9



(f) Iteración 10

Figura 2.4: Iteraciones Space Filling Curve

CAPÍTULO 3

Conclusiones

1. Podemos concluir que existe un conjunto con tantos puntos como un segmento(o una recta) pero su longitud(medida) es nula, tanto como la de un punto. (Conjunto de Cantor)
2. Existe un conjunto con la cardinalidad de los reales pero que no tiene ningún segmento en él y además de longitud(medida) positiva. Es decir, es un conjunto que tiene longitud pero no tiene ningún segmento. (Conjunto de Smith-Volterra)
3. Los fractales no se pueden describir con la geometría euclidiana y siempre encontramos una auto-similitud en cada uno de ellos.
4. En general sabemos que las curvas por ser unidimensionales es imposible que cubran un área. Sin embargo las curvas que llenan el espacio son capaces de llenar un espacio o cualquier región del plano en este caso el cuadrado unidad.

Cantor Set

```
#cantor
def cantor(n):
    if n==0:
        x=[0,1]
        return x
    if n>0:
        w=cantor(0)
        for i in [1..n]:
            x=[0..2^(i+1)-1]
            for j in range(len(w)):
                x[j]=w[j]

            #print(x)
            c=len(w)
            #print(c)
            for j in range(len(w)):
                if j%2 ==1:
                    continue
                else:
                    p=w[j]+w[j+1]
                    x[c]=(p*3^i+1)/(2*3^i)
                    x[c+1]=(p*3^i-1)/(2*3^i)
                    c=c+2

            #print(x)
            for i in range(len(x)):
                for j in range(len(x)-1):
                    if x[j]>x[j+1]:
                        aux=x[j]
                        x[j]=x[j+1]
                        x[j+1]=aux

            #print(x)
```

```
        w=x

    return x

def graficar2(n):
    g=line([(0,0),(0,0)])
    f=point((0,0))
    for i in [0..n]:
        for j in range(len(cantor(i))):

            f=f+point((cantor(i)[j],i))
            q=2^(i+1)
            j=0
            while j<q:
                g=g+line([(cantor(i)[j],i),(cantor(i)[j+1],i)])
                j=j+2

    print("Cantor")
    print cantor(n)
    return f+g

show(graficar2(7),axes= False)
```

Smith-Volterra Cantor

```

# Smith Volterra
def s(n):
    if n==0:
        x=[0,1]
        return x
    if n>0:
        w=s(0)
        for i in [1..n]:
            x=[0..2^(i+1)-1]
            for j in range(len(w)):
                x[j]=w[j]

            #print(x)
            c=len(w)
            #print(c)
            for j in range(len(w)):
                if j%2 ==1:
                    continue

                else:
                    p=w[j]+w[j+1]
                    x[c]=(p*(2)^(2*i)-1)/(2^(2*i+1))
                    x[c+1]=(p*(2)^(2*i)+1)/(2^(2*i+1))
                    c=c+2

            #print(x)
            for i in range(len(x)):
                for j in range(len(x)-1):
                    if x[j]>x[j+1]:
                        aux=x[j]
                        x[j]=x[j+1]
                        x[j+1]=aux

            #print(x)
            w=x
        return x

#s(0)
def graficar1(n):
    g=line([(0,0),(0,0)])
    f=point((0,0))
    for i in [0..n]:
        for j in range(len(s(i))):
            f=f+point((s(i)[j],i))

            q=2^(i+1)
            j=0
            while j<q:
                g=g+line([(s(i)[j],i),(s(i)[j+1],i)])
                j=j+2

    print("Smith Volterra")
    print s(n)
    return f+g

```

```
show(graficar1(7), axes= False)
```

Space Filling Curve

```

var('k, n, N')
f = Piecewise([[(0,1/3),0], [(1/3,2/3),3*x - 1], [(2/3,4/3),1], [(4/3,5/3), -3*x + 5], [(5/3,2),
,0]], x)
def ff(x):
    if (x >= 0 and x<= 1/3):
        return 0.0
    elif (x>=1/3 and x<=2/3):
        return 3*x - 1
    elif (x>=2/3 and x<= 4/3):
        return 1.0
    elif (x>=4/3 and x<=5/3):
        return -3*x + 5
    elif (x>=5/3 and x<=2):
        return 0.0
    else:
        return 0.0
def phi(x):
    k = floor((2 + x)/2) - 1
    newx = x - 2*k
    return ff(newx)
plot(ff,(0,2))
plot(lambda x: phi(x),(-4,10), aspect_ratio = 1)
def f_1(x, N):
    g = 0
    for i in range(N):
        g = g + phi(3**(2*i-2)*x)/(2**i)
    return g
def f_2(x, N):
    g = 0
    for i in range(N):
        g = g + phi(3**(2*i-1)*x)/(2**i)
    return g

@interact
def _(n = slider(2,8,1)):
    dib1 = plot(lambda x: f_1(x, n), (0,1), aspect_ratio = 1, plot_points = 300)
    dib2 = plot(lambda x: f_2(x, n), (0,1), aspect_ratio = 1, plot_points = 300, color = '
green')
    show(dib1 + dib2)

@interact
def spacefillingcurve(n = slider(3, 10, 1), pts = 500):
    a = parametric_plot([lambda x: f_1(x, n), lambda x: f_2(x, n)], (0, 1), plot_points = pts,
        aspect_ratio = 1)
    show(a)

```

Bibliografía

- [1] T.M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974.
- [2] Richard R. Goldberg. *Methods of the real analysis*. Jhon Wiley and sons Inc, 1976.
- [3] Ivor Grattan-Guinness. *Towards a Biography of Georg Cantor*. Annals of Science 27: 345–391.
- [4] B. Mandelbrot. *La geometría fractal de la naturaleza*. Tusquests Editores S.A., 1 edition, 1997.
- [5] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill International Editions, 3 edition, 1976.