UNA APLICACIÓN DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE A UNA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINEAL

Trabajo de grado
Matemáticas

Alexis Yesid Tarazona Rincón

Director: Arturo Sanjuán

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2015

A Diana Milena López porque en la calle codo a codo, somos mucho más que dos (Benedetti).

Agradecimientos

Primero me gustaría agradecer sinceramente al director de este trabajo de grado Arturo Sanjuán. Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su paciencia y su motivación han sido fundamentales para mi formación, Él ha inculcado en mi responsabilidad y rigor académico, a su manera se ha ganado mi lealtad y admiración, así como también me siento en deuda con él por todo lo recibido en sus clases y durante este trabajo.

Quiero agradecer especialmente a mi amada compañera de vida, mi esposa Diana López, la ayuda que me has brindado ha sido sumamente importante, has estado a mi lado inclusive en los momentos y situaciones mas tormentosas siempre ayudándome. No fue sencillo culminar esta etapa, sin embargo tu amor, tu comprensión, paciencia y fortaleza permitieron que pudiese llegar al final. Como en todo lo que escribo, estás presente en mi mente y en el alma de estas líneas. Contigo aprendo constantemente. Amo vivir y ser contigo. Amo saber que tu compañía se extenderá mucho más allá de este período, llegando incluso a lo que hemos imaginado: a viejitos. Te amo vida mía, porque eres mi amor, mi cómplice y mi todo.

También a mi familia, papá, mamá hermanos (Flor, Milena, Ferney) y sobrino (Yefferson), fuente de apoyo constante e incondicional en toda mi carrera. A ustedes Baudilio y Emma que me enseñaron que aun en las dificultades económicas se es posible triunfar.

Finalmente quiero agradecer a la Universidad Distrital, al Proyecto Curricular de Matemáticas, a los docentes que hicieron parte de este proceso principalmente al profesor Oriol Mora quien con sus amplios consejos y conocimientos lograron que me enamorara mas de esta carrera.

Índice general

INTRODUCCIÓN

Podemos enmarcar el problema de la cuerda vibrante y su desarrollo en los siglos XVII, XVIII y XIX. El matemático ingles Brook Taylor (1685-1731) fue el primero en dar una solución formal, aunque errónea, del problema de las cuerdas vibrantes. Este problema se plantea como una ecuación con derivadas parciales de segundo orden de la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Posteriormente D'Alembert y Euler en 1747 establecen una solución general de la siguiente manera, $u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$; donde f y g son funciones arbitrarias.

La confusión se acentuó cuando Daniel Bernoulli [1753] afirma, por razones físicas, que una solución general de la ecuación de onda podría ser expresada por una fórmula, la serie trigonométrica infinita

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/L)\cos(n\pi\alpha t/L).$$

Sin embargo, Daniel Bernoulli no dio ningún método para el cálculo del coeficiente a_n. Para ese entonces dichas solución no podía ser la misma que la solución de Euler y D'Alembert. Ahora sabemos que su intuición era correcta y que la forma de la ecuación de onda es representable por una serie trigonométrica. Sin embargo, esto se consigue hasta entrado el siglo XIX cuando gracias a los trabajos de de Lagrange (1759) y Fourier (1807) se consigue una comprensión clara de las series trigonométricas. Logrando así establecer que las dos soluciones coinciden.

Este trabajo de desarrolla esencialmente en cuatro capítulos. En el primer capitulo se encuentran algunos preliminares del análisis funcional tales como derivada de Frechet y Gateaux, espacios L^p, espacios de Sobolev, funciones convexas, topología débil, entre otras. Los resultados aquí presentados en su mayoría se presentan sin demostración a menos que sean de vital importancia para nuestro propósito, esto con el animo de no extendernos en el trabajo.Las demostraciones podemos encontrarlas en los diferentes libros que se relacionaron en la bibliografía. En el segundo capítulo se desarrollan los conceptos generales de la ecuación de onda y el problema homogéneo. En el tercero se desarrolla el problema no lineal y algunos estimadores para el operador $\Box$ y $\Box^{-1}$.Finalmente se desarrolla en el capítulo cuatro el Teorema fundamental de este trabajo que demuestra la existencia de una solución débil no trivial al problema planteado

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Derivada de Fréchet

Sean X, Y, Z espacios de Banach, con norma notada en ambos $\|\cdot\|$.

Definición (Derivada de Fréchet)**.** *Sea $U \subset X$ un conjunto abierto, $x_0 \in U$; decimos que $f : U \longrightarrow Y$ es Fréchet Diferenciable (o F-diferenciable) en x_0, si existe $A \in L(X, Y)$, tal que*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A(h) + \circ(\|h\|),$$

donde $r(h) = \circ(\|h\|)$ es tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

$A = f'(a)$ es llamada la $F-$derivada de f en x_0 y a la función $r(h)$ se le denomina el *resto* de la diferencial.

Si F es $F-$diferenciable en cada punto de U y $x \longrightarrow f'(x)$ como función de U en $L(X, Y)$ es continua en x_0, entonces decimos que f es *continuamente diferenciable* en x_0, y si f es continuamente diferenciable en cada punto, entonces decimos que f es continuamente diferenciable sobre U ($f \in C^1(u, y)$). Además en la definición se entiende que como $x_0 \in U$ y U es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r \subseteq U\}$. Luego si $h \in X$ es tal que $\|h\| < r$ entonces $x_0 + h \in U$.

Es conveniente escribir la condición de ser $F-$diferenciable en x_0, de la siguiente manera:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A(h) + p(h)\|h\|, \qquad \text{donde } \lim_{h \to 0} p(h) = 0.$$

lo que es equivalente a decir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-A(h)\|}{\|h\|}=0.$$

1.2. Derivada de Gateaux

Definición (Derivada de Gateaux)**.** *Sea $U\subset X$ un conjunto abierto, $x_0\in U$; decimos que $f:U\longrightarrow Y$ es Gateaux Diferenciable (o G-diferenciable), si para todo $h\in X$, existe $df(x_0,h)\in Y$ tal que*

$$\|f(x_0+th)-f(x_0)-tdf(x_0,h)\|=\circ(t),$$

donde $t\to 0$, para todo $(x_0+th)\in U$. Llamamos a $df(x_0,h)$ la $G-$derivada de f en x_0.

La definición anterior equivale a decir que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$

existe.

Si f es $G-$diferenciable en x_0, entonces $df(x_0,h)$ se determina de manera única debido a la unicidad del limite.

Veamos algunos resultados importantes tomados de [6, p.23] que relacionan el hecho de ser $F-$diferenciable y $G-$diferenciable:

Teorema 1.1. *Si f es $F-$diferenciable en x_0, entonces f es $G-$diferenciable en x_0, con $df(x_0,h)=f'(x_0)h$, para todo $h\in X$.*

El recíproco del teorema anterior no es siempre cierto, veamos la condición necesaria para que esto se de:

Teorema 1.2. *Supongase que $f:U\longrightarrow Y$ es $G-$diferenciable, y que para todo $x\in U$, existe $A(x)\in L(X,Y)$ que satisface que $df(x,h)=A(x)h$ para toda $h\in X$ y ademas la función*

$$\begin{aligned} f':U &\longrightarrow L(X,Y)\\ x &\longmapsto A(x)\end{aligned}$$

es continua en x_0, entonces f es $F-$diferenciable en x_0, con $f'(x_0)=A(x_0)$.

Demostración. Ver por ejemplo [6, p. 3]. ■

1.3. Los espacios L^p

En lo que sigue, Ω designa un abierto de $\mathbb{R}^n$ dotado de la medida de Lebesgue. Supondremos que se está familiarizado con nociones de funciones integrables y funciones medibles; ver, por ejemplo [3]. Se designa $L^1(\Omega)$ el espacio de las funciones integrables de Ω en $\mathbb{R}$. Cuando no hay ambigüedad se escribe L^1 en lugar de $L^1(\Omega)$, y $\int f$ en lugar de $\int_\Omega f(x)dx$. También se usa la notación

$$||f||_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx = \int |f|.$$

Como es habitual, se identifican dos funciones de L^1 que coinciden c.t.p. (son iguales excepto en un conjunto de medida cero).

Definición. *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < \infty$; se define*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \textit{ medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

y se nota la norma como

$$||f||_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Definición. *Se define:*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \textit{ medible y existe una constante } C \textit{ tal que } |f(x)| \leq C \textit{ c.t.p. en } \Omega\}$$

con la norma

$$||f||_{L^\infty} = \inf\{C; |f(x)| \leq C \textit{ c.t.p en } \Omega\}.$$

Nota. Si $f \in L^\infty$, entonces $|f(x)| \leq ||f||_\infty$ c.t.p en Ω.

Definición. *Sea $1 \leq p < \infty$; se dice q el exponente conjugado de p si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 1.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, donde $p \geq 1$, q y p exponentes conjugados. Entonces $fg \in L^1$ y $||fg|| \leq ||f||_{L^p}||g||_{L^q}$.*

Demostración. Ver por ejemplo [3, p. 56]. ■

Teorema 1.4 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Si f y h son funciones en L^p, $p \geq 1$, entonces $f + g$ están en L^p y*

$$||f + h||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||h||_{L^p}.$$

Demostración. Ver por ejemplo [3, p. 57]. ■

1.4. Espacios de Hilbert

Definición. *Sea H un espacio vectorial. Un producto interno (u, v) es una forma bilinial de $H \times H$ en $\mathbb{R}$, simétrica, definida positiva, es decir $(u, v) \geq 0, \forall u \in H$ y $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$.*

Teorema 1.5 (Desigualdad de Cauchy Schwarz)**.** *Si H es un espacio vectorial con producto interno, entonces es valida la siguiente desigualdad*

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2} \qquad \forall u, v \in H.$$

Demostración. Ver por ejemplo [5, p. 7] ■

Definición. *Un espacio de **Hilbert** es un espacio con producto interno $(H, (\cdot))$ que es completo para la norma definida por ese producto interno.*

1.5. Espacios de Sobolev

En el resto de este tema, Ω denotará un abierto no vació de $\mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p \leq \infty$.

Definición. *Sea $\varphi \in C(\Omega)$. Llamamos soporte de φ (denotado $\operatorname{supp} \varphi$), a la adherencia del conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$.*

El conjunto $\operatorname{supp} \varphi$ es un cerrado contenido en $\overline{\Omega}$.

Definición. *Diremos que la función φ tiene soporte compacto si el conjunto $\operatorname{supp} \varphi$ es compacto. Para el caso nuestro este será un cerrado y acotado por el Teorema de Heine-Borel [5, p. 27].*

1.5.1. Concepto de derivada débil

Definición. *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, decimos que $g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada débil de u con respecto a x_i si*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega) \tag{1.1}$$

Nota. $g_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $\nabla v = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$. La función v_i es única.

1.5.2. Los Espacios de Sobolev $W^{1,p}(\Omega), H^1(\Omega), W^{1,p}_0(\Omega), H^1_0(\Omega)$

Definición. *El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ es definido por:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists g_1, ..., g_N \in L^p(\Omega) \text{ tal que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega) \quad \forall i = 1, ..., N \end{array} \right\} \tag{1.2}$$

En otras palabras $W^{1,p}(\Omega)$ consiste de todas las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que para cada $i = 1, ..., N$ existe la derivada débil con respecto a x_i y $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$.

Se define el espacio

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega). \tag{1.3}$$

El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ está equipado con la norma

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p, \tag{1.4}$$

la cual es equivalente a la norma

$$\left(||u||_p^p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty. \tag{1.5}$$

Nota. $|| \cdot ||_p = || \cdot ||_{L^p}$ y seguirá siendo notada así en adelante.

El espacio $H^1(\Omega)$ es equipado con el producto escalar

$$(u, v)_{L^2} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2} = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \tag{1.6}$$

y la norma asociada es:

$$||u||_{H^1} = \left(||u||_2^2 + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_2^2 \right)^{1/2}. \tag{1.7}$$

Proposición 1.1. *El espacio $W^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración. 1. $|| \cdot ||_{W^{1,p}}$ es una norma.

i) Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u \in L^p(\Omega)$ y ademas $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$, asi $||u||_p \geq 0$ y $||\frac{\partial u}{\partial x_i}|| \geq 0$ luego $||u||_{W^{1,p}} \geq 0$.

ii) Supongamos $||u||_{w^{1,p}} = 0$ entonces

$$||u||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|\right|_p = 0 \tag{1.8}$$

como los dos miembros de la ecuación (1.8) son términos no negativos se tiene que $||u||_p = 0$ y $\sum_{i=1}^{N} ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_p = 0$. Como $|| \cdot ||_p$ es una norma entonces debe ser $u = 0$ c.t.p en Ω.

iii) Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} ||\lambda u||_{W^{1,p}} &= ||\lambda u||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial \lambda u}{\partial x_i}\right|\right|_p \\ &= |\lambda| ||u||_p + |\lambda| \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_p \\ &= |\lambda| ||u||_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

porque $||\cdot||_p$ es una norma y $|\lambda|$ es constante en la suma.

iv) Desigualdad triangular.
Sea $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} ||u+v||_{W^{1,p}} &= ||u+v||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial (u+v)}{\partial x_i}\right|\right|_p & (1.9) \\ &= ||u+v||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right|_p & (1.10) \\ &\leq ||u||_p + ||v||_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right|_p + \sum_{i=1}^{N} \left|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\right|_p & (1.11) \\ &= ||u||_{W^{1,p}} + ||v||_{W^{1,p}} & (1.12) \end{aligned}$$

en donde se aplico la desigualdad de Minkowski para pasar de 1.10 a 1.11. En conclusión $||u+v||_{W^{1,p}} \leq ||u||_{W^{1,p}} + ||v||_{W^{1,p}}$ y por lo tanto queda demostrado que $||\cdot||_{W^{1,p}}$ es una norma.

2. $W^{1,p}(\Omega)$ es completo.

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W^{1,p}$ entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\frac{\partial u_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq N)$ son sucesiones de Cauchy en $L^p(\Omega)$.

Como $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach (Teorema de Fischer–Riesz)[4, p. 93], existen $u, u_1, ..., u_N \in L^p(\Omega)$ tal que:

$$u_n \longrightarrow u \in L^p(\Omega) \tag{1.13}$$

y

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow u_i \in L^p(\Omega) \quad (i = 1, ..., N). \tag{1.14}$$

Por lo tanto, bastara ver que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i$ $(i = 1, ..., N)$.

En efecto, sea $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, entonces:

$$\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega u_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\ dx \tag{1.15}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\ dx \tag{1.16}$$

$$= -\int_\Omega u_i\varphi\ dx \tag{1.17}$$

donde se hizo huso del Teorema de Convergencia Dominada [4, p. 90] en (1.15) y también se aplica la hipótesis de que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $W^{1,p}(\Omega)$.
De esta manera $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $u_n \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ que es precisamente lo que se quería mostrar.

■

Nota. De la proposición anterior se deduce que, $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Definición. *Sea $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(\Omega)$ a la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. De igual modo, denotamos:*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega). \tag{1.18}$$

El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ es equipado con la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ (1.4) y el espacio $H_0^1(\Omega)$ es equipado con el producto escalar de $H^1(\Omega)$ (1.6).

Ejemplo. *Sea $I = (-1,1)$. Compruebe que*

i) La función $u(x) = \dfrac{1}{2}(|x| + x)$ pertenece a $W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leq p < \infty$ y que $u' = h$ donde

$$h(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 0 & si\ -1 < x < 0. \end{cases}$$

ii) La función h no pertenece a $W^{1,p}(I)$ $\forall <\leq p < \infty$.

Solución:

i) Tenemos que

$$W^{1,p}(I) = \left\{u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I gu\ \forall\varphi \in C_c^1(I)\right\}.$$

Dado que toda función continua es medible tenemos que $u(x)$ es medible.

Podemos expresar u como sigue

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}.$$

Además

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |u(x)|^p dx &= \int_{-1}^{0} |u(x)|^p dx + \int_{0}^{1} |u(x)|^p dx \\
&= \int_{-1}^{0} 0^p dx + \int_{0}^{1} x^p dx \\
&= \int_{0}^{1} x^p dx \\
&= \frac{x^{p+1}}{(p+1)} < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $u \in L^p(I)$.

resta ver que para $h = u'$

$$\int_I u\varphi' = -\int_I h\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Esto es

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{0} u(x)\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} u(x)\varphi'(x)dx \\
&= \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\
&= x\varphi(x)\,\Big|_0^1 - \int_0^1 h(x)\varphi(x)dx \\
&= -\int_0^1 \varphi(x)dx \\
&= -\int_0^1 h(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Así que $u \in W^{1,p}(I)$.

ii) Para demostrar que h no pertenece a $W^{1,p}(I)$ $\forall <\leq p < \infty$ basta encontrar una función $\varphi \in C_c^1(I)$ tal que

$$\int_I h\varphi \neq -\int_I g\varphi.$$

En efecto, sea $\varphi \in C_c^1(I)$ entonces

$$\int_{-1}^{1} h\varphi' = \int_0^1 \varphi' dx = \varphi(1) - \varphi(0) = -\varphi(0)$$

porque φ es de soporte compacto.

Por lo tanto si existiese $g = h'$ tendría que ocurrir

$$\int_I g\varphi = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Tomando φ tal que $\varphi(0) = 0$, $g = 0$ c.t.p en I pero si $\varphi(0) \neq 0$ entonces no se cumple la igualdad y así h no pertenece a $W^{1,p}(I)$ $\forall <\leq p < \infty$.

1.6. Espacios de Hölder Continuas

Denotamos con $\overline{\mathbb{M}}$ a la variedad producto $[0, \pi] \times \mathbb{T}$, identificable con $\overline{\Omega}$ y definimos en $\overline{\mathbb{M}}$, el espacio de las funciones Hölder continuas de orden $\alpha \in (0, 1)$ como el conjunto de todas las funciones $u \in C(\overline{\mathbb{M}})$ tales que

$$|u|_{C^\alpha} := \sup \left\{ \frac{|u(x,t) - u(y,s)|}{(|x-y| + |s-y|)^\alpha};\ (x,t),(y,s) \in \mathbb{M} \text{ y } (x,t) \neq (y,s) \right\} < \infty$$

Dotamos a C^α con la norma

$$||u||_{C^\alpha} = ||u||_{L^\infty} + |u|_{C^\alpha}.$$

Con la norma $||u||_{C^\alpha}$, C^α es un espacio de Banach (ver demostración por ejemplo en [7, p. 6-8]).

1.7. Funciones Convexas Conjugadas

Consideremos funciones φ definidas sobre un conjunto X y con valores en $8 - \infty, +\infty]$; es decir φ puede toma el valor de $+\infty$, pero el $-\infty$ queda excluido. Se designa con $D(\varphi)$ el dominio de φ es decir el conjunto

$$D(\varphi) = \{x \in E; \varphi(x) < +\infty\} \tag{1.19}$$

Definición. *Definimos el epigrafo de φ como el conjunto*

$$epi\ \varphi = \{[x, \lambda] \in E \times \mathbb{R}; \varphi(x) \leq \lambda\}. \tag{1.20}$$

Se supone ahora que X es un espacio topológico.

1.7.1. Semicontinuidad Inferior

La instauración de la teoría de funciones de variable real por parte de Baire, Borel y Lebesgue, a comienzos del siglo veinte, dio lugar simultáneamente a la introducción de nociones matemáticas designadas por propiedades topológicas radicalmente nuevas. Estas nociones se convertirían en objetos naturales del "nuevo análisis" en la medida que los matemáticos fueron descubriendo que sus propiedades tenían aplicaciones fecundas en varios campos matemáticos. Una de estas nuevas nociones fue la "semicontinuidad", la cual, en un principio, aparecía como una simple noción auxiliar utilizada en la demostración de los teoremas que caracterizaban las funciones de las clases de Baire ([10, p. 78]). Hoy sabemos que la noción de semicontinuidad ha sido considerada en diversas conceptualizaciones del análisis clásico y del análisis funcional. En nuestro trabajo el concepto de semicontinuidad constituye el soporte teórico usado por Fréchet para definir y caracterizar la transformada de Fréchet.

Definición. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y sea $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$. La función φ se dice semicontinuo inferiormente(s.c.i.) en x_0 si la imagen inversa de cualquier semiabierto de la forma $(r, +\infty]$, con $\varphi(x_0) \in (r, +\infty]$ contiene un abierto $U \subseteq X$ que contiene a x_0.*

Esto es:

$$\varphi(x_0) \in (r, +\infty] \rightarrow \exists U \in \tau; x_0 \in U \subseteq \overleftarrow{\varphi}(r, +\infty] \tag{1.21}$$

Como en el caso de la continuidad, una función φ es semicontinua inferiormente sobre un espacio topológico X, si esta es semicontinua inferiormente en cada punto de X.

Se presentan algunos hechos elementales conocidos sobre funciones semicontinuas inferiormente los cuales fueron tomados de [4, p. 10-11]

Proposición 1.2. *Si φ es s.c.i., entonces epi φ es cerrado en $V \times \mathbb{R}$ y recíprocamente.*

Proposición 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico , un funcional $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ es semicontinuo inferiormente en el punto $x_0 \in X$ si*

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Demostración. Supongamos φ semicontinua inferiormente en $x_0 \in X$.

Tenemos que

$$\liminf_{x \to x_0} = \sup_{r>0} \inf_{x \ inB_r(x_0)} \varphi(x).$$

Por la definición de semicontinuidad inferior, para cada $\epsilon > 0$, existe r_ϵ (depende de ϵ) tal que

$$\varphi(x_0) - \epsilon < \varphi(x) \quad \forall x \in B_{r_\epsilon}(x_0)$$

o

$$\varphi(x_0) - \epsilon < \inf_{x \in B_{r_\epsilon}(x_0)} \varphi(x)$$

esto implica que

$$\varphi(x_0) \leq \sup_{r} \inf_{x \in B_r(x_0)} \varphi(x)$$

es decir

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Si suponemos ahora que φ no es semicontinua inferiormente en x_0, es decir para cada $t < \varphi(x_0)$ y cada $r > 0$, existe un $x' \in B_r(x_0)$ tal que $\varphi(x') < t$.

Ahora, para cada $r > 0$,

$$\inf_{x \in B_r(x_0)} \varphi(x) < t.$$

Pero,

$$t < \varphi(x_0) \leq \sup_{r>0} \inf_{x \in B_r(x_0)} \varphi(x) < t$$

lo cual es absurdo, por lo tanto φ debe ser semicontinua inferiormente. ∎

El siguiente teorema nos proporciona la condición necesaria para que una función sea semicontinua inferiormente por sucesiones:

Teorema 1.6. *Si (X, d) es un espacio métrico y $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función, entonces φ es semicontinua inferiormente si y solo si la sucesión convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X implica que*

$$\varphi(\lim x_n) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

El Teorema 1.6 nos indica que φ es secuencialmente semicontinuo inferiormente.

Demostración. Prosigamos como sigue:

i) Supongamos que φ es semicontinua inferiormente y que $x_n \longrightarrow x_0$. Es decir, si $t < \varphi(x_0)$, por ser φ semicontinua inferiormente $\overleftarrow{\varphi}(t, \infty] \in \tau$.

   Como ademas $x_0 \in \overleftarrow{\varphi}(t, \infty]$ y $x_n \longrightarrow x_0$ entonces, existe N_t tal que si $n \geq N_t$ entonces $x_n \in \overleftarrow{\varphi}(t, \infty]$. Esto es, si $n \geq N_t$ entonces $\varphi(x_n) > t$.

   Lo anterior implica que $\liminf \varphi(x_n) > t$. Pero esto es verdad para todo $t < \varphi(x_0)$ así que

$$\varphi(x_0) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

ii) Supongamos ahora que $x_n \longrightarrow x_0$ y que $\varphi(x_0) \leq \liminf \varphi(x_n)$ y veamos que φ es semicontinua inferiormente.

En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$ y sea $U = \overleftarrow{\varphi}(-\infty, t)$. Si $x_0 \in \overline{U}$, existe una sucesión (x_n) en U tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Por hipótesis tenemos que $\varphi(x_0) \leq \liminf \varphi(x)$, entonces, por la definición de U se tiene que $\varphi(x_n) \leq t \ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego $\varphi(x_0) \leq t$.

Es decir $x_0 \in U$ lo que muestra que $\overline{U} = U$ por lo cual U es cerrado y su complemento $X - U$ sera abierto, pero $X - U = \overleftarrow{\varphi}(t, +\infty]$ lo que termina la prueba.

■

Como ventaja de haber introducido el concepto de semicontinuidad secuencial, tenemos el siguiente teorema tomado de [2, p.14]

Teorema 1.7. *Sean X un espacio topológico compacto, y φ una función s.c.i. en X entonces φ alcanza su mínimo en X.*

Demostración. Dividamos la prueba en dos partes:

i) Veamos primero que φ es acotado inferiormente.

En efecto, supongamos que no lo es, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $\varphi(x_n) < -n$.

Estos x_n forman una sucesión en X que por hipótesis sabemos que es compacto y por lo tanto existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) la cual es convergente en X.

Es decir, existe $x_0 \in X$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x_0$, pero φ es s.c.i. así que

$$\varphi(x_{n_k}) \geq \varphi(x_0)$$

para casi todo n, lo que implica que $\varphi(x_{n_k})$ seria acotada inferiormente, lo cual es una contradicción y así φ es acotada inferiormente.

ii) En la primera parte se mostró que φ es acotada inferiormente así que $\inf \varphi(x)$ existe. Llamemos $a = \inf \varphi(x)$. Demostremos ahora que este es adquirido en X.

Como $a \in \overline{\varphi(X)}$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(x_n) \longrightarrow a$. Por hipótesis tenemos que X es compacto. Así que sin perdida de generalidad podemos suponer que $x_n \longrightarrow x_0$, por ser φ s.c.i. $\underline{\lim}\varphi(x_n) = a \geq \varphi(x_0)$ pero, a es el ínf, así que tendrá que ser $a = \varphi(x_0)$, es decir $a \in X$.

■

1.7.2. Funciones Convexas

Se supone ahora que X es un espacio vectorial.

Definición. *Una función* $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ *se dice convexa si*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in X,\ \forall t \in (0,1) \tag{1.22}$$

Podemos nombrar algunas propiedades fundamentales de las funciones convexas, para esto, la siguiente

Proposición 1.4.

a) Si φ *es una función convexa, epi* φ *es un conjunto convexo en* $X \times \mathbb{R}$ *y recíprocamente.*

b) si φ_1, φ_2 *son funciones convexas, entonces* $\varphi_1 + \varphi_2$ *es convexa.*

c) si $(\varphi_i)_{i \in I}$ *es una familia de funciones convexas, entonces la envolvente superior* $(\sup_i \varphi_i)$ *es convexa.*

Demostración. a) Supongamos φ convexa y veamos que epi $\varphi = \{[x, \lambda] \in X \times \mathbb{R}; \varphi(x) \leq \lambda\}$ es convexo.

Recordemos que un conjunto S se dice convexo cuando $\forall x, y \in S$ y $\forall t \in (0,1)$ se cumple que $(tx + (1-t)y) \in S$.

Tomemos $[x, \lambda_1], [y, \lambda_2] \in$ epi φ entonces

$$\varphi(x) \leq \lambda_1, \quad \varphi(y) \leq \lambda_2. \tag{1.23}$$

Ahora, sea $t \in (0,1)$,

$$t[x, \lambda_1] + (1-t)[y, \lambda_2] = [tx + (1-t)y, t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2] \tag{1.24}$$

como φ es convexa,

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \tag{1.25}$$

$$\leq t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2 \tag{1.26}$$

Luego (1.24) pertenece a epi φ. Es decir, éste es convexo.

b) Supongamos φ_1, φ_2 convexas entonces:

$$\begin{aligned}
(\varphi_1 + \varphi_2)(tx + (1-t)y) &= \varphi_1(tx + (1-t)y) + \varphi_2(tx + (1-t)y) \\
&\leq t\varphi_1(x) + (1-t)\varphi_1(y) + t\varphi_2(x) + (1-t)\varphi_2(y) \\
&= t(\varphi_1 + \varphi_2)(x) + (1-t)(\varphi_1 + \varphi_2)(y)
\end{aligned}$$

Luego $\varphi_1 + \varphi_2$ es convexa.

∎

Ejemplo. *La función G definida por $G(u) = \dfrac{1}{p}|u|^p$ es estrictamente convexa.*

Solución: *Sean $u, v \in H^{1,2}([0,\pi] \times \mathbb{R})$, $u \neq v$ y $t \in (0,1)$ entonces:*

$$\begin{aligned} G(tu + (1-t)v) &= \frac{1}{p}|tu + (1-t)v|^p \\ &\leq \frac{1}{p}\left(|tu|^p + |(1-t)v|^p\right) \\ &= \frac{1}{p}|t|^p|u|^p + \frac{1}{p}\left(|(1-t)|^p|v|^p\right) \end{aligned}$$

como $t \in (0,1)$ entonces obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{p}|t|^p|u|^p + \frac{1}{p}\left(|(1-t)|^p|v|^p\right) &< \frac{1}{p}|t|^p|u|^p + \frac{1}{p}\left(|(1-t)||v|^p\right) \\ &= t\frac{1}{p}|u|^p + (1-t)\frac{1}{p}|v|^p \\ &= tG(u) + (1-t)G(v). \end{aligned}$$

Es decir

$$G(tu + (1-t)v) < tG(u) + (1-t)G(v)$$

y por lo tanto G es estrictamente convexa.

1.7.3. Transformada de Legendre-Frenchel

En lo que sigue, V denota un espacio de Banach.

Definición. *Un hiperplano afín es un es un subconjunto de la forma*

$$H = \{x \in V; f(x) = \alpha\} \tag{1.27}$$

donde f es un funcional lineal en V, no idénticamente nulo y $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante. Escribimos $H = [f = \alpha]$ y llamamos $f = \alpha$ la ecuación de H.

Ejemplo.

- *Un hiperplano en $\mathbb{R}$ es el conjunto de puntos satisfaciendo la ecuación de la forma $ax = c$, por tanto un punto.*
- *Un hiperplano en el plano es una recta.*
- *Un hiperplano en el espacio es un plano.*

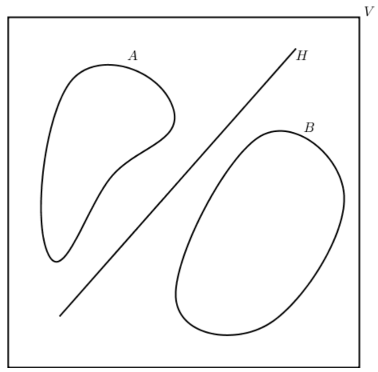

Figura 1.1: **Hiperplano que separa** A **y** B

Proposición 1.5. *El hiperplano* $H = [f = \alpha]$ *es cerrado si y solamente si* f *es continuo.*

Definición. *Sean* A, B *subconjuntos de* V *se dice que el hiperplano* $H = [f = \alpha]$ *separa* A *y* B *si*

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B. \tag{1.28}$$

Se dice que H *separa* A *y* B *en el sentido estricto si existe* $\epsilon > 0$ *tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall x \in B. \tag{1.29}$$

Podemos ver la Figura 1.1 para hacernos una idea geométrica.

Con el animo de enunciar y demostrar el Teorema de Hahn-Banach, primera forma geométrica presentamos primero los siguientes dos lemas tomados de [**?**, p. 5-7]Brezis.

Lema 1.1. *Sea* $C \subset V$ *un conjunto abierto convexo tal que* $0 \in C$. *Para cada* $x \in V$ *se define*

$$p_C(x) = \inf\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\} \tag{1.30}$$

p_C *es llamado el funcional de Minkowski de* C.

Entonces p *verifica:*

$$p(\lambda x) \quad = \quad \lambda p(x) \quad x \in V \ y \ \forall \lambda > 0 \tag{1.31}$$

$$p(x+y) \quad \leq \quad p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in V. \tag{1.32}$$

Además, existe M *tal que*

$$0 \leq p(x) \leq M||x|| \quad \forall x \in V \tag{1.33}$$

y

$$C = \{x \in V; p(x) < 1\}. \tag{1.34}$$

Demostración. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad x \in V$ y $\forall \lambda > 0$.

En efecto, sea $\lambda > 0$ entonces

$$
\begin{aligned}
p_C(\lambda x) &= \text{ínf}\left\{t; \frac{\lambda}{t}x \in C\right\} \\
&= \lambda\,\text{ínf}\left\{\frac{t}{\lambda}; \frac{\lambda}{t}x \in C\right\} \\
&= \lambda p_C(x).
\end{aligned}
$$

Para mostrar la propiedad 1.32 asociemos a cada $x \in V$ el conjunto

$$
H_C(x) = \{t > 0; t^{-1}x \in C\}. \tag{1.35}
$$

Como $0 \in C$ entonces $H_C(x) \neq \emptyset$.

Supongamos $t \in H_C(x)$ y $s > t$, así $t^{-1}x \in C$ y como C es convexo tenemos

$$
\frac{t}{s}t^{-1}x + \left(1 - \frac{t}{s}0\right) = \frac{1}{s}x \in C
$$

es decir $s \in H_C(x)$.

Supongamos ahora que $p_C(x) < s$, $p_C(y) < t$, y pongamos $u = s + t$. Entonces

$$
s^{-1}x \in C \quad \text{y} \quad t^{-1}y \in C
$$

la convexidad de C nos garantiza que

$$
\frac{s}{u}s^{-1}x + \frac{t}{u}t^{-1}y = u^{-1}(x + y) \in C.
$$

Por lo que

$$
p_C(x + y) \leq u = s + t,
$$

tomando ahora el ínfimo con respecto a s y t obtenemos

$$
p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y).
$$

Mostremos ahora 1.33.

Como C es un con junto abierto que contiene a 0 entonces para $r > 0$, $B(r, 0) \subset C$, luego como $p_C(x) = \text{ínf}\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\}$ entonces

$$
p_C(x) \leq \frac{1}{r}||x|| \quad \forall x \in V.
$$

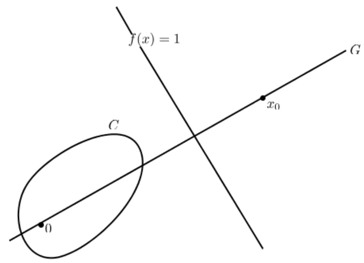

Figura 1.2: **Idea geométrica del lema 1.2**

Finalmente probemos 1.34.

Primero, supongamos que $x \in C$, como C es abierto, dado $\epsilon > 0$ entonces $B(\epsilon, x) \subset C$, luego $(1+\epsilon)x \in C$ para ϵ lo suficientemente pequeño y por lo tanto

$$p_C(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon} < 1.$$

Recíprocamente, si $p_c(x) < 1$, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $\alpha^{-1}x \in C$, como C es convexo y $0 \in C$ entonces para el mismo α tenemos

$$\alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 = x \in C$$

lo que muestra que

$$C = \{x \in V; p_C(x) < 1\}.$$

■

Lema 1.2. *Sea $C \subset V$ un conjunto abierto no vació y Convexo y sea $x_0 \in V$ con $x_0 \notin C$. Entonces existe $f \in V*$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in C$. En particular, el hiperplano $[F = f(x_0)]$ separa $\{x_0\}$ y C.*

Demostración. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $0 \in C$, y sean G el subespacio generado por x_0 y el funcional $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$g(tx_0) = t,\ \ t \in \mathbb{R}$$

ahora, por la definición de $p_C(x)$ y la suposición de que $x_0 \notin C$ tenemos

$$g(x) \leq p_C(x) \ \ \forall x \in G.$$

En virtud del teorema de Hahn-Banach (ver por ejemplo [8, p. 214]) sabemos que existe una extensión lineal f de g que satisface

$$f(x) \leq p_C(x) \ \ \forall x \in V.$$

Según la propiedad (2.58), $f(x)$ toma valores menores a 1 en el conjunto C y un valor mayor o igual a 1 en x_0.

En particular, $f(x_0) = 1$ y además, por (2.57), f es continua. Es decir

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in C.$$

■

El siguiente teorema nos muestra una de las propiedades de los conjuntos convexos, tomado de [4, p. 5].

Teorema 1.8 (**Hahn-Banach, primera forma geométrica**). *Sean $A \subset V$ y $B \subset V$ dos conjuntos convexos no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$, y supongamos A abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado f que separa A y B.*

Demostración. Sea $C = A - B$, como A y B son convexos por hipótesis entonces C es convexo. Podemos ademas escribir C como sigue

$$C = \cup_{y \in B}(A - y)$$

y dado que A es abierto entonces C es abierto.

Por otro lado, $0 \notin C$ ya que $A \cap B = \emptyset$, aplicando el lema 1.2, tenemos que existe $f \in V^*$ tal que

$$f(z) < 0 \quad \forall z \in C.$$

Esto es,

$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A, \; \forall y \in B.$$

Ahora, fijando $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se satisfaga

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y)$$

y claramente el hiperplano $[f = \alpha]$ separa A y B. ■

El siguiente teorema al igual que el Teorema de Hahn-Banach en su primera forma geométrica nos muestra una de las propiedades fundamentales de los conjuntos convexos, con una hipótesis adicional de compacidad y cerradura. Tomado de [4, p. 7].

Teorema 1.9 (**Hahn-Banach, segunda forma geométrica**). *Sean $A \subset B$ y $B \subset V$ dos conjuntos convexos no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$. Asumamos que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado que separa estrictamente A y B.*

Demostración. Ver por ejemplo ([4, p. 7]). ∎

Definición (Transformada de Legendre-Frenchel). *Para una función* $G : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$, *tal que* $G \not\equiv +\infty$, *es decir* $D(G) \neq \emptyset$, *no necesariamente convexa, la función* $G^* : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$, *dada por*

$$G^*(v^*) = \sup_{v \in V} \{\langle v^*, v\rangle - G(v)\} \tag{1.36}$$

define la Transformada de Legendre-Frenchel de G.

Nota.

1. Notese que G^* es una función convexa s.c.i. En efecto, para cada $v \in V$ fijo, la función $v^* \longrightarrow \langle v^*, v\rangle - G(v)$ es una función lineal continua afín, y por lo tanto la envolvente superior (como v recorre V) es convexa y s.c.i.

2. Por la definición de G^* se tiene que $\langle v^*, v\rangle \leq G^*(v^*) + G(v)$.

La siguiente proposición muestra que la definición de la Transformada de Legendre-Frenchel tiene sentido. Tomada de [4, p. 12].

Proposición 1.6. *Supongase que* $G : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ *es convexa, s.c.i. y* $G \not\equiv +\infty$. *Entonces* $G^* \not\equiv +\infty$ *y en particular* G *es acotada inferiormente por una función continua afín.*

Demostración. Sea $v_0 \in D(G)$ y sea $\lambda_0 \leq G(v_0)$. Podemos aplicar el Teorema 1.7.3 (Hahn Banach segunda forma geométrica) en el espacio $V \times \mathbb{R}$, tomando a =epi G que por la Proposición 1.7.1 sabemos que es cerrado y $B = \{[v_0, \lambda_0]\}$ que es compacto pues consta de un solo punto. Así, existe un hiperplano cerrado $H = [\Phi = \alpha]$ en $V \times \mathbb{R}$ que separa estrictamente A y B (ver figura 1.7.3).

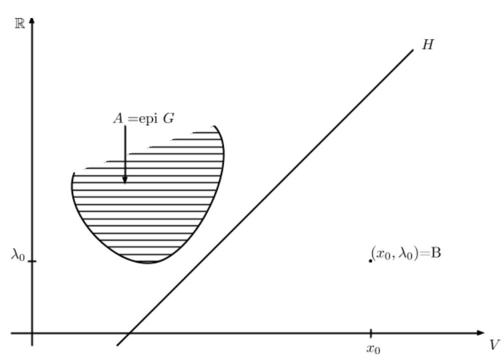

Figura 1.3: **Esquema geométrico de la Proposición 1.6**

Notese que la f unción $v \in V \longrightarrow \Phi([v, 0])$ es una forma lineal continua en V y así podemos escoger algún $v^* \in V^*$ tal que $\Phi([v, 0]) = \langle v^*, v\rangle$.

Tomando $k = \Phi([0, 1])$ tenemos

$$\Phi([v,\lambda]) = \langle V^*, v\rangle + k\lambda \ \ \forall [v.\lambda] \in V \times \mathbb{R}.$$

Escribiendo $\Phi > \alpha$ sobre A y $\Phi < \alpha$ sobre B, obtenemos

$$\langle v^*, v\rangle + k\lambda > \alpha \ \ \forall [v,\lambda] \in \text{epi } G$$

y

$$\langle v^*, v_0\rangle + k\lambda_0 < \alpha.$$

En particular,

$$\langle v^*, v\rangle + kG(v) > \alpha \ \ \forall v \in D(G). \tag{1.37}$$

Así,

$$\langle v^*, v_0\rangle + kG(v_0) > \alpha > \langle v^*, v_0\rangle + k\lambda_0.$$

Lo que muestra que $k > 0$ y por 2.16

$$\left\langle -\frac{1}{k}v^*, v\right\rangle - G(v) < -\frac{\alpha}{k} \ \ \forall v \in D(G)$$

y por lo tanto

$$G^*\left(-\frac{1}{k}v^*\right) < +\infty.$$

■

Una caracterización de la Transformada de Legendre-Frenchel es mostrada en el siguiente Lema tomado de [14, p. 59].

Lema 1.3. *Supongase $G : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ semicontinua inferiormente y convexa. Si G es (Gateaux) diferenciable en v, entonces $\partial G(v) = \{DG(v)\}$. Recíprocamente, si G es localmente acotada cerca a v y si $\partial G(v) = \{v^*\}$ es único valor, entonces G es Gateaux diferenciable en v con $D_wG(v) = \langle w, v^*\rangle$ para todo $w \in V$.*

Demostración. Si G es Gateaux diferenciable en u es claro que $G'(u) \in \partial G(u)$; sean $v \in V$ y $w = v - u$, tenemos

$$\begin{aligned} G(u+w) - G(u) &\geq G'(u;w) = \langle w, G'(u)\rangle \\ G(v) - G(u) &\geq \langle v-u, G'(u)\rangle. \end{aligned}$$

Alternativamente si $u^* \in \partial G(u)$, tendríamos que para todo $w \in V$ y para todo $\lambda > 0$:

$$G(u + \lambda w) - G(u) \geq \lambda \langle w, u^* \rangle$$

dividiendo por λ y tomando el limite se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle w, G'(u) \rangle &\geq \langle w, u^* \rangle \\ \langle w, G'(u) - u^* \rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

Como w es cualquier punto de V, $u^* = G'(u)$.

Recíprocamente, como G es convexa, se tiene que para todo $v \in V$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$G(u) + \lambda G'(u; v) \leq G(u + \lambda v).$$

Geométricamente, esto significa que en $V \times \mathbb{R}$, la linea recta:

$$\mathcal{L} = \{(u + \lambda v, G(u) + \lambda G'(u; v)); \lambda \in \mathbb{R}\},$$

no pasa por el interior de epi G. Pero el interior del epi G es un conjunto abierto y convexo porque epi G es convexo, este es no vació porque G es continua y finita. Por el teorema de Hahn-Banach, existe un hiperplano afín cerrado $\mathcal{K}$ que contiene a $\mathcal{L}$ que no intercepta al interior de epi G. Es fácil ver que $\mathcal{K}$ es el grafo de una función continua afín casi toda parte excepto en G y exacto en u.

Como u^* fue supuesto único, la pendiente de $\mathcal{K}$ es u^* y como $\mathcal{K}$ contiene a $\mathbb{L}$:

$$G'(u; v) 0 \langle v, u^* \rangle$$

lo que prueba que G es Gateaux-diferenciable en u con diferencial u^*. ■

El siguiente teorema tomado de [4, p. 13] muestra la condición necesaria para que la doble transformada de Frenchel de una función sea ella misma.

Teorema 1.10 (Frenchel-Moreau). *Si $G : V \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ es una función convexa, s.c.i. y $G \not\equiv +\infty$ entonces $G^{**} = G$.*

Demostración. Dividimos la prueba en dos partes:

1. Supongamos que $G \geq 0$ y recordemos la definición de

$$G^{**}(v) = \sup_{v^* \in V^*} \{\langle v^*, v\rangle - G^*(v^*)\}.$$

Tenemos además que

$$\langle v^*, v\rangle - G^*(v^*) \leq G(v)$$

y como v^* recorre todo V^*, entonces

$$\sup_{v^* \in V^*} \{\langle v^*, v\rangle - G^*(v^*)\} \leq G(v)$$

es decir $G^{**} \leq G$.

Con el fin de probar la desigualdad $G \leq G^{**}$, supongamos por contradicción que no se cumple esto, es decir existe $v_0 \in V$ tal que $G^{**} < G(v_0)$.

Podríamos tener el caso en que $G(v_0) = +\infty$ pero $G^{**}(v_0)$ es siempre finita por hipótesis .

Ahora, por la Proposición 1.7.1 tenemos que epi G es un conjunto cerrado en $V \times \mathbb{R}$, así que si aplicando el Teorema 1.7.3 tomando $A =$epi G y $B = \{[v_0, G^{**}(v_0)]\}$ quien es trivialmente compacto, tenemos que existen (como en la demostración de la Proposición 1.6) $v^* \in V$, $k, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle v^*, v\rangle + k\lambda > \alpha \quad \forall [v, \lambda] \in \text{epi } G, \tag{1.38}$$

$$\langle v^*, v_0\rangle + kG^{**}(v_0) < \alpha. \tag{1.39}$$

Si ahora fijamos $v \in D(G)$ y hacemos tender λ a ∞ en 1.38, tenemos que $k \geq 0$.

Luego, sea $\epsilon > 0$, como $G \geq 0$, por (1.38)

$$\langle v^*, v\rangle + (k+\epsilon)G(v) \geq \alpha \quad \forall v \in D(G)$$

y así

$$\begin{aligned}
\frac{\langle v^*, v\rangle}{k+\epsilon} + G(v) &\geq \frac{\alpha}{k+\epsilon} \\
-\frac{\langle v^*, v\rangle}{k+\epsilon} - G(v) &\leq -\frac{\alpha}{k+\epsilon} \\
\left\langle v^*, -\frac{v}{k+\epsilon}\right\rangle - G(v) &\leq -\frac{\alpha}{k+\epsilon}
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$G^*\left(-\frac{v}{k+\epsilon}\right) \leq -\frac{\alpha}{k+\epsilon}.$$

Por otro lado, dado que

$$G^{**}(v_0) \geq \langle v^*, v_0\rangle - G^*(v^*)$$

entonces

$$\begin{aligned} G^{**}(v_0) &\geq \left\langle -\frac{v^*}{k+\epsilon}, v_0 \right\rangle - G^*\left(-\frac{v^*}{k+\epsilon}\right) \\ &\geq \left\langle -\frac{v^*}{k+\epsilon}, v_0 \right\rangle + \frac{\alpha}{k+\epsilon}. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\langle v^*, v_0\rangle + (k+\epsilon)G^{**}(v_0) \geq \alpha$$

lo cual contradice 1.39. Así que $G \leq G^{**}$.

2. Caso general.

Por la proposición 1.6 tenemos que $D(G^*) \neq \emptyset$, así que podemos tomar $v_0^* \in D(G^*)$ (fijo) y definamos

$$\overline{G(v)} = G(v) - \langle v_0^*, v\rangle + G^*(v_0^*). \tag{1.40}$$

Como G y G^* son funciones convexas y s.c.i. entonces $\overline{G}$ es convexa y s.c.i. y $\overline{G} \not\equiv +\infty$. Además,

$$\langle v_0^*, v\rangle \leq G(v) - G^*(v_0^*).$$

Luego

$$\langle v_0^*, v\rangle - G^*(v_0^*) \leq G(v).$$

Así

$$G(v) - \langle v_0^*, v\rangle + G^*(v_0^*) \geq 0.$$

Es decir, $\overline{G} \geq 0$.

Haciendo uso de lo mostrado en el paso 1 tenemos que $\overline{G}^{**} = \overline{G}$.

Calculando ahora $\overline{G}^*$ y $\overline{G}^{**}$, esto es:

$$\overline{G}^*(v^*) = G(v^* + v_0^*) - G^*(v_0^*)$$

y

$$\overline{G}^{**}(v) = G^{**}(v) - \langle v_0^*, v\rangle + G^*(v_0^*),$$

escribiendo $\overline{G}^{**} = \overline{G}$, obtenemos

$$G(v) - \langle v_0^*, v\rangle + G^*(v_0^*) = G^{**}(v) - \langle v_0^*, v\rangle + G^*(v_0^*).$$

Por lo tanto $G = G^{**}$.

■

Por lo tanto G^{**} es la mayor función convexa semi-continua inferior $\leq G$, y $G^{**} = G$ si y sólo si G semi-continua inferiormente y convexa. Nuestra discusión anterior nos proporciona el siguiente Lema, tomado de [14, p. 59]

Lema 1.4. *Supongase que $G : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$, $G \not\equiv +\infty$, es semicontinua inferiormente y convexa, y sea G^* su transformada de Legendre-Frenchel. Entonces 1.3 es equivalente ya sea a una de las relaciones $v \in \partial G^*(v^*)$ o $v^* \in \partial G(v)$*

Demostración. En efecto, si $v \in \partial G^*(v^*)$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que l^*, definido por

$$l^*(w^*) = \langle v, w^*\rangle - \beta,$$

pertenece a L_{G^*} y satisface

$$l^*(v^*) = G^*(v^*).$$

Como, por definición,

$$G^*(v^*) \geq \langle v, v^*\rangle - G(v),$$

se concluye que $G(v) \geq \beta$. Por otra parte, como $G = G^{**} \leq (l^*)^*$. Se tiene

$$G(v) \leq \sup_{w^*} \{\langle v, w^*\rangle - l^*(w^*)\} = \beta$$

y se sigue que $G(v) = \beta$. Es decir, se obtuvo 1.3. Usando un razonamiento similar se muestra que $v^* \in \partial G(v)$ implica 1.3. ■

Ejemplo. *Consideremos la función $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x) = x^2$ y calculemos G^**

Solución: Como es bien sabido $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}$, así que los elementos que pertenecen a $\mathbb{R}^*$ son números reales α y por lo tanto

$$G^*(\alpha) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{\alpha x - x^2\} \tag{1.41}$$

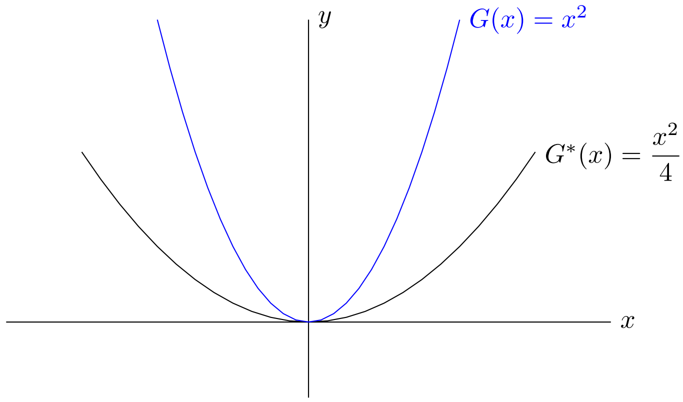

Figura 1.4: **Transformada de Frenchel para la función** $G(x) = x^2$

y por lo tanto $G^*(\alpha)$ coincide con el máximo de la función $\alpha x - x^2$ (ver figura) así, sea

$$f(x) = \alpha x - x^2$$

entonces

$$f'(x) = \alpha - 2x$$

y los puntos críticos serán:

1. Si $\alpha \geq 0$ entonces $x = \dfrac{\alpha}{2}$.
2. Si $\alpha < 0$ entonces $x = -\dfrac{\alpha}{2}$.

Por lo tanto f tiene un máximo en $f\left(\pm\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\alpha^2}{4}$ y así $G^*(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{4}$.

Dado que la función $G(x) = x^2$ es convexa, continua y por tanto s.c.i. entonces el Teorema 1.10 nos afirma que su doble transformada Frenchel debe ser ella misma, veamos que en efecto eso es así.

Aplicando la definición de G^{**} tenemos:

$$G^{**}(\beta) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \beta x - \frac{x^2}{4} \right\}$$

luego para obtener G^{**} calculamos el máximo de la función $f(x) = \beta x - \dfrac{x^2}{4}$, la cual tiene como puntos críticos $x = 2\beta$, y por tanto $G^{**}(\beta) = \beta^2$(ver figura 1.4).

Ejemplo. *Transformada de Frenchel para la función* $G(u) = \frac{1}{p}|u|^p \quad \forall 1 < p < \infty$.

Solución: *Escribamos la transformada de Frenchel como:*

$$G^*(v) = \sup_{u\in\mathbb{R}}\{u^t v - \frac{1}{p}|u|^P\} \tag{1.42}$$

procediendo de manera similar que en los ejemplos anteriores tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_u\left(u^t v - \frac{1}{p}|u|^p\right)\\
0 &= v - |u|^{p-1}\frac{u}{|u|}\\
v &= |u|^{p-2}u\\
|v| &= |u|^{p-1}\\
|u| &= |z|^{\frac{1}{p-1}}\\
u &= \frac{v}{|v|^{\frac{p-2}{p-1}}}
\end{aligned}$$

sustituyendo el valor de u en la función 1.42 obtenemos:

$$\begin{aligned}
G^*(v) &= \frac{v^t}{|v|^{\frac{p-2}{p-1}}}v - \frac{1}{p}|v|^{\frac{p}{p-1}}\\
&= \frac{|v|^2}{|v|^{\frac{p-2}{p-1}}} - \frac{1}{p}|v|^{\frac{p}{p-1}}\\
&= |v|^{2-\frac{p-2}{p-1}} - \frac{1}{p}|v|^{\frac{p}{p-1}}\\
&= |v|^{\frac{p}{p-1}} - \frac{1}{p}|v|^{\frac{p}{p-1}}\\
&= \left(1-\frac{1}{p}\right)|v|^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}\\
&= \frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}|v|^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}$$

Luego si llamamos $q = \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}}$ *tenemos:*

$$G^*(v) = \frac{1}{q}|v|^q \tag{1.43}$$

con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1.8. Definición y Propiedades Elementales de la Topología Débil $\sigma(E, E^*)$

Sea E un espacio de Bnach y sea $f \in E^*$. Se designa por $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ el funcional lineal dado por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$. Cuando f recorre E^* se obtiene una colección $(\varphi_f)f \in E^*$ de aplicaciones de E en $\mathbb{R}$. Bajo esta observación definimos una nueva topología (tomado de [4, p. 57]) sobre el conjunto E como sigue:

Definición. *La topología débil $\sigma(E, E^*)$ sobre E es la topología menos fina sobre E que hace continuas a todas lass aplicaciones $(\varphi_f) f \in E^*$.*

Nota. Si una sucesión (x_n) en E converge a x en la topología débil $\sigma(E, E^*)$ escribiremos

$$x_n \rightharpoonup x.$$

Para evitar confusiones se dice "$x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(E, E^*)$". Con el propósito de ser aun mas claros se dirá "$x_n \longrightarrow x$ fuertemente", lo que significa que $||x_n - x|| \longrightarrow 0$.

La siguiente Proposición tomada de [4, p. 58] presenta algunas propiedades de la topología débil:

Proposición 1.7. *Sea (x_n) una sucesión en E. Se verifica:*

1. $[x_n \rightharpoonup x$ *débilmente en* $\sigma(E, E^*)] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle \ \forall f \in E^*]$.
2. *Si* $x_n \longrightarrow x$ *fuertemente, entonces* $x_n \rightharpoonup x$ *débilmente en* $\sigma(E, E^*)$.
3. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *débilmente para* $\sigma(E, E^*)$, *entonces* $(||x_n||)$ *está acotada y* $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.
4. *Si* $x_n \rightharpoonup x$ *débilmente en* $\sigma(E, E^*)$ *y si* $f_n \longrightarrow f$ *fuertemente en* E^* *(es decir,* $||f_n - f||_{E^*} \longrightarrow 0$*), entonces* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Demostración. Ver por ejemplo en ([4, p. 58]). ∎

Nota. Cuando E es de dimensión infinita existen en general sucesiones que convergen débilmente pero que no convergen fuertemente (podemos encontrar un ejemplo de esto en $[4, p{,}60]$).

Todo conjunto cerrado en la topología débil $\sigma(E, E^*)$ es cerrado en ta topología fuerte. Pero el reciproco es falso en dimensión infinita. Sin embargo, para los conjuntos convexos estas dos nociones coinciden.

Ejemplo. La esfera unitaria $S = \{x \in E;\ ||x|| = 1\}$, con E un espacio normado de dimensión infinita, Nunca es cerrada en la topología débil. (Ver demostración en [4, p. 59]).

Teorema 1.11. *Sea C un conjunto convexo de E. Entonces C es cerrado en la topología débil si y sólo si es cerrado en la topología fuerte.*

Demostración. Ver por ejemplo ([4, p. 60]). ∎

1.9. Espacios Reflexivos

Definición. *Sea E un espacio de Banach y sea $J : E \longrightarrow E^{**}$ la inyección canónica de E dentro de E^{**}. El espacio E se dice reflexivo si J es sobreyectiva, es decir, $J(E) = E^{**}$.*

Nota. Muchos espacios importantes en análisis son reflexivos. Claramente, espacios de dimensión finita son reflexivos ya que dim $E =$ dim $E^* =$ dim E^{**}. Se puede demostrar también que los espacios L^p son reflexivos para $1 < p < \infty$. Sin embargo, espacios con la misma importancia no son reflexivos, por ejemplo: $C(K)$ que representa el espacio de las funciones continuas sobre un espacio métrico compacto infinito K (Ver ejercicio (3.25) de [4]).

En conexión con las propiedades de compacidad de espacios reflexivos se tienen los siguientes dos resultados obtenidos de [4, p. 69-70]:

Teorema 1.12 (Eberlein Smulian)**.** *Supongamos E un espacio de Banach reflexivo y sea (x_n) una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) que converge en la topología débil.*

Teorema 1.13. *Supongamos E un espacio de Banach tal que toda sucesión acotada en E admite una subsucesión convergente débilmente en $\sigma(E, E^*)$. Entonces E es reflexivo.*

CAPÍTULO 2

ECUACIÓN DE ONDA Y EL PROBLEMA HOMOGÉNEO

2.1. Deducción de la ecuación de onda

Consideremos una cuerda de longitud π, tensada entre dos puntos en el eje x, por ejemplo $x = 0$ y $x = \pi$ (figura 2.1).

Cuando la cuerda çomienza.ª vibrar, suponemos que el movimiento tiene lugar en el plano xu de tal manera que en cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje x (figura 2.2).

Sea $u(x,t)$ el desplazamiento vertical de cualquier punto sobre la cuerda, medido desde el eje x para $t > 0$.

Ademas supongase:

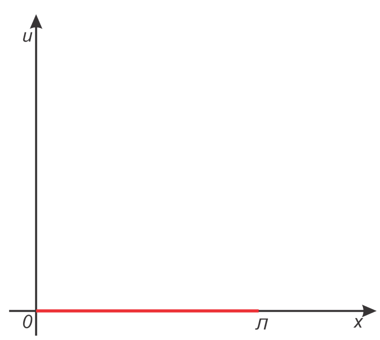

Figura 2.1: **Cuerda de longitud π**

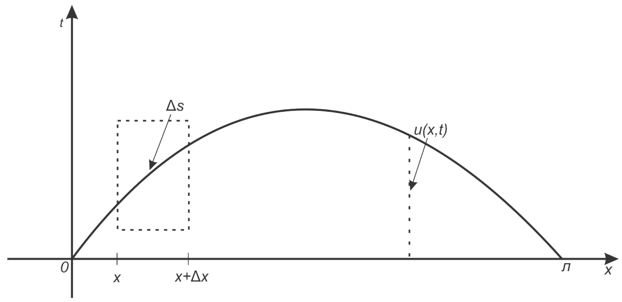

Figura 2.2: **Cuerda vibrando**

- La cuerda es perfectamente flexible.
- La cuerda es homogénea, es decir, su masa por unidad de longitud es constante.
- Los desplazamientos u son pequeños en comparación con la longitud de la cuerda.
- La pendiente de la curva es pequeña en todos los puntos.
- La tensión T actúa tangente a la cuerda, y su magnitud es la misma en todos los puntos.
- La tensión es grande comparada con la fuerza de gravedad.
- No actúan fuerzas externas a la curva.

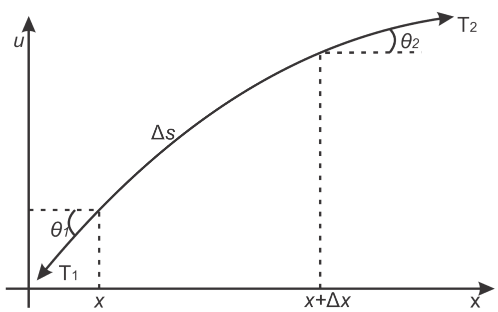

Figura 2.3: **Detalle del segmento**

Las tensiones T_1 y T_2 son tangentes a los extremos de la curva en el intervalo $[x, x+\Delta x]$. Para θ_1 y θ_2 pequeños, la fuerza neta vertical que actúa sobre elemento Δs correspondiente de la cuerda, es por consiguiente,

$$\begin{aligned} T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 &\approx T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 \\ &= T(\tan\theta_2 - \tan\theta_2) \\ &= T(u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)) \end{aligned}$$

donde $T = |T_1| = |T_2|$.

Ahora como $\rho\Delta s$ es la masa del resorte en $[x, x+\Delta x]$, y por lo tanto, de la segunda ley de Newton se obtiene

$$T(u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)) = \rho\Delta x u_{tt},$$

o bien,

$$\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

Si se toma el límite, esta ultima ecuación se transforma en:

$$\lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}u_{tt}$$

que por supuesto es una ecuación diferencial parcial

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Para nuestro propósito consideramos, $\alpha^2 = \frac{T}{P} = 1$.

De esta manera, el desplazamiento vertical $u(x,t)$ de la cuerda vibrante de longitud π se determina de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} && (2.1)\\ u(0,t) = 0 &= u(\pi,t), \quad t>0 && (2.2)\\ u(x,t) &= u(x,t+2\pi), \quad 0<x<\pi. && (2.3) \end{aligned}$$

A esta última condición de le conoce como condición de Dirichlet.

Se presentan a continuación soluciones generales al problema.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.4}$$

Es decir, no consideremos condiciones iniciales o de frontera todavía.

2.2. Solución de D′Alembert

En 1747, S. D′Alembert calcula la solución general de la ecuación 2.4 haciendo el siguiente cambio de variables independientes

$$\xi = x + t \quad y \quad \eta = x - t. \tag{2.5}$$

Con este cambio de variables, (2.4) se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Integrando con respecto a ξ y η obtenemos que

$$u(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) = F(x + t) - G(x - t) \tag{2.6}$$

Podemos verificar que esta ultima ecuación es solución de 2.4.

Si tenemos u como función de ξ y η podemos obtener las derivadas con respecto a t como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}. \tag{2.7}$$

Además, podemos obtener expresiones simples por medio de la solución de D´Alembert para $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ y $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ ya que F es función de ξ y G es función de η solamente, así,

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}[F(\xi) + G(\eta)] = \frac{dF(\xi)}{d\xi} = F'(\xi) \tag{2.8}$$

$$F'(\xi) = \frac{dF(\xi)}{d\xi}, \quad F''(\xi) = \frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2}. \tag{2.9}$$

De manera similar, podemos escribir

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}[F(\xi) + G(\eta)] = \frac{dG(\eta)}{d\eta} = G'(\eta) \tag{2.10}$$

Finalmente, la definición de $\xi = x + t$ y $\eta = x - t$ nos proporcionan las derivadas parciales

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 1 \;\; y \;\; \frac{\partial \eta}{\partial t} = -1. \tag{2.11}$$

Combinando las ecuaciones 2.7 y 2.8, 2.10 obtenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F' - G'. \tag{2.12}$$

Así mismo, podemos obtener la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}[F' - G'] - \frac{\partial}{\partial \eta}[F' - G'] = F'' - G'' \tag{2.13}$$

Procediendo de igual manera podemos obtener las derivadas para x, esto es:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \tag{2.14}$$

y también,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial (F(\xi) + G(\eta))}{\partial \xi} + \frac{\partial (F(\xi) + G(\eta))}{\partial \eta} = F'(\xi) + G'(\eta) \tag{2.15}$$

Derivando nuevamente respecto a x obtenemos la segunda derivada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}(F' + G') + \frac{\partial}{\partial \eta}(F' + G') = F'' + G'' \tag{2.16}$$

Calculadas las derivadas con respecto a t y x podemos ver por medio de 2.13 y 2.16 que se satisface 2.4.

Por lo tanto, la solución de D$'$Alembert $u = F(x + t) + G(x + t)$ donde F y G son funciones arbitrarias satisface la ecuación diferencial.

Mostraremos ahora como podemos utilizar esta solución para resolver el problema de la cuerda vibrante bajo condiciones de Dirichlet-periodicas, es decir

$$u(x, t) = u(x, t + 2\pi).$$

Imponiendo la condición

$$u(0, t) = 0$$

obtenemos

$$\begin{aligned} u(0, t) &= F(0 + t) + G(0 - t) = 0 \\ G(-t) &= -F(t) \end{aligned}$$

por lo que,

$$G(-(t - x)) = -F(t - x).$$

Así,

$$u(x, t) = F(x + t) - F(x - t).$$

Imponiendo ahora la condición de periodicidad en el tiempo tenemos que F debe ser una función $2\pi-$periódica.

2.3. Solución por separación de variables

Consideremos nuevamente el problema con condiciones iniciales y de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq \pi,\ t \geq 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \\ u(x,t) &= u(x,t+2\pi) \end{aligned}$$

y supongamos

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Al calcular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT'' \ \ y \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T \tag{2.17}$$

se aprecia que $u(x,t) = X(x)T(t)$ es una solución de la ecuación de onda $u_{tt} = u_{xx}$ si

$$XT'' = X''T, \tag{2.18}$$

o bien si,

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}. \tag{2.19}$$

Dado que el primer miembro de 2.19 depende únicamente de t y el segundo depende únicamente de x se tiene que:

$$\frac{T''}{T} = -\lambda = \frac{X''}{X} \tag{2.20}$$

para una constante λ.

Las condiciones, $0 = u(0,t) = X(0)T(t)$ y $0 = u(\pi,t) = X(\pi)T(t)$ implican que $X(0) = X(\pi) = 0$, por lo que $u(x,t)$ sera solución si:

$$X'' + \lambda X = 0; \quad X(0) = X(\pi) = 0 \tag{2.21}$$

$$T'' + \lambda T = 0; \tag{2.22}$$

cuyas soluciones dependen del signo de λ

1. Si $\lambda = -\alpha^2$ es un número negativo, entonces la solución general de $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ es $X(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$ y, al imponer $X(0) = X(\pi) = 0$, nos queda únicamente la solución trivial $X(x) = 0$.

2. Si $\lambda = 0$, entonces la solución general de $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ es $X(x) = c_1 + c_2 x$ y, al imponer $X(0) = X(\pi) = 0$, de nuevo nos queda únicamente la solución trivial $X(x) = 0$.

3. Si $\lambda = \alpha^2$ es un número positivo, entonces la solución general de $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ es $X(x) = c_1 \sin(\alpha x) + c_2 \cos(\alpha x)$. Ahora, al imponer la condición $X(0) = 0$, nos queda $X(x) = c_1 \sin(\alpha x)$ y al imponer $X(\pi) = 0$ nos queda $c_1 \sin(\alpha \pi) = 0$. Esto nos vuelve a dar la solución trivial salvo que $\alpha\pi$ sea un múltiplo entero de π ; es decir salvo para $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$.

   En resumen, el problema de contorno

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{con} \quad X(0) = 0 \text{ y } X(\pi) = 0$$

únicamente tiene solución no trivial para una sucesión de valores de λ que son $\lambda_n = n^2$ con $n = 1, 2, \ldots$; dichas soluciones son

$$X_n(x) = \sin(nx) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Al sustituir estos valores de λ en la ecuación que verifica $T(t)$, ésta nos queda

$$T''(t) + n^2 T(t) = 0 \tag{2.23}$$

cuya solución general es

$$T(t) = c_1 \sin(nt) + c_2 \cos(nt) \tag{2.24}$$

El método de separación de variables nos ha proporcionado una colección de funciones

$$u_n(x, t) = \sin(nx)[c_1 \sin(nt) + c_2 \cos(nt)] \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.25}$$

que verifican la ecuación de ondas y las condiciones de contorno. Luego por el Principio de superposición obtenemos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)[a_n \sin(nt) + b_n \cos(nt)] \tag{2.26}$$

sera la solución buscada.

2.4. Normalización del núcleo

Tenemos que si $u(x,t) \in \mathcal{C}^2$ y $u_{tt} - u_{xx} = 0$, entonces u tendrá la forma

$$u(x,t) = p(x+t) + q(t-x).$$

Si además consideramos las condiciones $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y las condiciones de Dirichlet como se demostró anteriormente, se tiene que

$$u(x,t) = p(x+t) - p(t-x)$$

donde p es una función $2\pi-$periódica, dicho esto, podemos definir:

$$N = \{u \in \mathcal{C}^2([0,\pi] \times \mathbb{R});\ u(x,t) = p(x+t) - p(t-x),\ p\ 2\pi - \text{periodica sobre } t\}. \tag{2.27}$$

Ahora, si $u \in N$, entonces u no es determinada de manera única, es decir existen infinitas p que me determinan a u. Por ejemplo si u es de la forma, $u(x,t) = p(x+t) - p(t-x)$, entonces $p + c$ también determinan a u, para c cualquier constante.

Podemos normalizar p si exigimos que,

$$[p] = \int_0^{2\pi} p = 0 \tag{2.28}$$

y la normalización de 2.27 estará dada por:

$$N = \{u \in \mathcal{C}^2([0,\pi] \times \mathbb{R});\ u(x,t) = p(x+t) - p(t-x), \text{y } p \text{ es } 2\pi - \text{periodica sobre } t \text{ y } \int_0^{2\pi} p = 0\}. \tag{2.29}$$

Las funciones $u \in N$ son usualmente llamadas soluciones clásicas al problema de la cuerda vibrante con condiciones de Dirichlet. Este proceso se conoce como normalización del núcleo (ver [11, p. 150] para más detalles).

2.5. Equivalencia entre las soluciones

Anteriormente se dijo que las funciones u que satisfacen 2.1, 2.2, 2.3 tienen la forma $u(x,t) = p(t+x) - p(t-x)$, donde p es una función 2π-periódica, así que podemos considerar la expresión en serie de Fourier [1, p. 309] para $p(t+x)$ y $p(t-x)$ como sigue:

$$p(t+x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in(t+x)} \quad c_n \in \mathbb{C} \tag{2.30}$$

y

$$p(t-x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{im(t-x)} \quad c_m \in \mathbb{C} \tag{2.31}$$

ahora,

$$\begin{aligned}
p(t+x) - p(t-x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in(t+x)} - \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{im(t-x)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (e^{ik(t+x)} - e^{ik(t-x)}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (e^{ikt}e^{ikx} - e^{ikt}e^{-ikx}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt} (2i\sin(kx)) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k (\cos(kt) - i\sin(kt))\sin(kx) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k (\cos(kt)\sin(kx) - i\sin(kt)\sin(kx)) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(kt)\sin(kx) + B_k\sin(kt)\sin(kx))
\end{aligned}$$

por lo cual $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(kt)\sin(kx) + B_k\sin(kt)\sin(kx))$ que es lo que se quería mostrar.

2.6. Funcional de Energía para la Ecuación de Onda

El principio fundamental de la mecánica es el Principio de Mínima Acción [9, p. 2], el cual afirma que entre los movimientos admisibles de un sistema de puntos materiales se efectúa el movimiento que da un valor estacionario a la integral

$$\int_{t_0}^{t1} (T - V)dt. \tag{2.32}$$

Apliquemos este principio para deducir la ecuación de onda.

Tomando la tensión y densidad homogénea de la cuerda igual a uno, tenemos que la energía potencial de toda la cuerda viene dada por:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (u_x)^2 dx \tag{2.33}$$

y también, la energía cinética es:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi (u_t)^2 dx. \tag{2.34}$$

Luego, la acción para una función u dada, se define como la integral en el tiempo de la diferencia de estas dos energías, por lo cual:

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi (u_t)^2 - (u_x)^2 dxdt. \tag{2.35}$$

Podemos mencionar sobre E que:

Proposición 2.8. *E es Frechet-diferenciable.*

Demostración. Sea $\Omega = (0,\pi)\times\mathbb{R}$, $h \in H^{1,2}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
E(u+h) - E(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega ((u+h)_t)^2 - ((u+h)_x)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 - (u_x)^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t+h_t)^2 - (u_x+h_x)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 - (u_x)^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 + 2u_th_t + (h_t)^2 - ((u_x)^2 + 2u_xh_x + (h_x)^2)dxdt - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 - (u_x)^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 - (u_x)^2 + \int_\Omega u_th_t - u_xh_x dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega (h_t)^2 + (h_x)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_\Omega (u_t)^2 - (u_x)^2 dxdt \\
&= \int_\Omega u_th_t - u_xh_x dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega (h_t)^2 + (h_x)^2 dxdt
\end{aligned}$$

En la ultima igualdad,es claro que la parte del lado izquierdo es una aplicación lineal en h, se mostrara que el segundo miembro es una $\circ(||h||)$, en efecto:

Sea $\epsilon > 0$, $\delta = 2\epsilon$ tal que $||h||_{H^{1,2}} < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{2}\int_\Omega h_t^2 + h_x^2}{||h||_{H^{1,2}}} - 0 &= \frac{\frac{1}{2}(||h_t||_{L^2}^2 + ||h_x||_{L^2}^2)}{||h||_{L^2} + ||h_t||_{L^2} + ||h_x||_{L^2}} && (2.36)\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{(||h_t||_{L^2} + ||h_x||_{L^2})^2}{||h||_{L^2} + ||h_t||_{L^2} + ||h_x||_{L^2}} && (2.37)\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{(||h||_{L^2} + ||h_t||_{L^2} + ||h_x||_{L^2})^2}{||h||_{L^2} + ||h_t||_{L^2} + ||h_x||_{L^2}} && (2.38)\\
&= \frac{1}{2}(||h||_{L^2} + ||h_t||_{L^2} + ||h_x||_{L^2})^2 && (2.39)\\
&= \frac{1}{2}||h||_{H^{1,2}} && (2.40)\\
&< \frac{1}{2}\delta && (2.41)\\
&= \frac{1}{2}2\epsilon = \epsilon. && (2.42)
\end{aligned}$$

$$A(h) = \int_{\Omega} u_t h_t - u_x h_x dxdt, \quad \circ(||h||) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (h_t)^2 + (h_x)^2 dxdt. \tag{2.43}$$

Por lo que

$$E(u+h) - E(u) = A(h) + \circ(||h||) \tag{2.44}$$

lo que termina la prueba. ■

El principio de mínima acción afirma que si u es un mínimo. Supongamos ahora $h \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ debe pasar que:

$$E'(u)[h] = 0. \tag{2.45}$$

Esto es,

$$\int_{\Omega} u_t h_t - u_x h_x dxdt = 0. \tag{2.46}$$

Aplicando la linealidad de la integral obtenemos que,

$$\int_{\Omega} u_t h_t dxdt - \int_{\Omega} u_x h_x dxdt = 0. \tag{2.47}$$

Consideremos cada una de estas integrales por separado, esto es

$$\int_{\Omega} u_t h_t dxdt = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_t h_t dxdt \tag{2.48}$$

Utilizando el teorema de Fubini[3, p. 119] obtenemos,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_t h_t dxdt = \int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi} u_t h_t dt\right] dx \tag{2.49}$$

y podemos hacer esta integral recurriendo a la integración por partes mediante la siguiente sustitución,

$$z = u_t \to dz = u_{tt}dt \ \text{ y } \ dw = h_t \to w = h.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_t h_t dxdt &= \int_0^{\pi}\left[u_t h\big|_0^{\pi} - \int_0^{2\pi} u_{tt} h dt\right] dx && (2.50)\\
&= \int_0^{\pi}\left[-\int_0^{2\pi} u_{tt} h dt\right] dx && (2.51)\\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u_{tt} h dxdt && (2.52)\\
&= -\int_{\Omega} u_{tt} h dxdt && (2.53)
\end{aligned}$$

ahora,

$$\int_{\Omega} u_x h_x dxdt = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} u_x h_x dx \right] dt \tag{2.54}$$

y podemos nuevamente recurrir a la integración por partes mediante la siguiente sustitución,

$$z = u_x \rightarrow dz = u_{xx} dx \quad \text{y} \quad dw = h_x \rightarrow w = h$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} u_x h_x dx \right] dt &= \int_0^{2\pi} \left[- \int_0^{\pi} u_{xx} h dx \right] dt && (2.55) \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} u_{xx} h dxdt && (2.56) \\ &= - \int_{\Omega} u_{xx} h dxdt && (2.57) \end{aligned}$$

Combinando 2.53 y 2.57 obtenemos,

$$\int_{\Omega} (u_{xx} - u_{tt}) h dxdt = 0. \quad \forall h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \tag{2.58}$$

por lo cual

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{2.59}$$

Que es precisamente la ecuación de onda homogénea.

Notese que los cálculos anteriores son posibles siempre que u sea por lo menos de clase C^2 sobre Ω.

CAPÍTULO 3

EL PROBLEMA NO LINEAL

Consideremos el problema de encontrar una solución periódica en el tiempo y no contante $u = u(x,t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbb{R}$, de el problema

$$\begin{aligned} \Box u = u_{tt} - u_{xx} &= -u|u|^{p-2} \quad \text{en } (0,\pi) \times \mathbb{R} && (3.1) \\ u(0,\cdot) &= u(\pi,\cdot) = 0 && (3.2) \\ u(\cdot, t+2\pi) &= u(\cdot,t) \quad \forall t \in \mathbb{R} && (3.3) \end{aligned}$$

donde $p > 2$.

Proposición 3.9. *El problema (3.1-3.3) puede ser interpretado como las ecuaciones de Euler−Lagrange asociadas con un problema de mínimos para el funcional:*

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (|u_x|^2 - |u_t|^2)\ dx\ dt \tag{3.4}$$

en el espacio

$$H = \{u \in H^{1,2}_{loc}([0,\pi] \times \mathbb{R})\ ;\ u \text{ satisface } (3.2,3.3)\} \tag{3.5}$$

dotado con la norma de $H^{1,2}$ sobre $\Omega = [0,\pi] \times [0,2\pi]$, sujeto a la condición

$$||u||_{L^p(\Omega)} = 1. \tag{3.6}$$

Demostración. En efecto, en la proposición 2.8 se mostró que el funcional E definido como en 3.4 es Frechet- diferenciable, posteriormente mediante algunos cálculos sencillos se deduce que al minimizar este funcional podemos obtener la ecuación de honda homogénea $u_{tt} - u_{xx} = 0$ siempre y cuando u tenga por lo menos dos derivadas. Para nuestro propósito, restaría ver que la función F definida por

$$F(u) = ||u||_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p \tag{3.7}$$

es también Frechet- diferenciable, para esto:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(F(u+th) - F(u)\right) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_\Omega |u+th|^p - \int_\Omega |u|^p\right) && (3.8)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_\Omega |u+th|^p - |u|^p\right) && (3.9)\\
&= \int_\Omega \lim_{t\to 0} \frac{|u+th|^p - |u|^p}{t} && (3.10)\\
&= \int_\Omega up|u|^{p-2h}. && (3.11)
\end{aligned}$$

Por tanto F es Gateaux diferenciable y por el teorema 1.2 esta derivada coincide con la derivada de Frechet.

Luego, u sera máximo para F siempre que

$$p\int_\Omega u|u|^{p-2}h = 0 \tag{3.12}$$

En la sección 2.6 se obtuvo ademas que

$$\int_\Omega u_x h_x - u_t h_t = 0 \tag{3.13}$$

combinando 3.12 y 3.13 se tiene que

$$u_{tt} - u_{xx} = -u|u|^{p-2}$$

■

Por otro lado, el operador $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$ en relación con la segunda variación de E tiene un número infinito de valores propios positivos y negativos y también posee un núcleo de dimensión infinita, como se vera más adelante.

Por lo tanto los métodos variacionales directos para la solución al problema no se aplican inmediatamente.

Con el fin de convertir (3.1-3.3) en un problema que podemos manejar, escribimos 3.1 como un sistema

$$
\begin{aligned}
v &= \Box u && (3.14)\\
-v &= u|u|^{p-2} = \nabla G(u), && (3.15)
\end{aligned}
$$

donde $G(u) = \dfrac{1}{p}|u|^p$. En la sección 1.7.2 se mostró que G es estrictamente convexa y posteriormente su transformada de Frenchel. Así, 3.15 puede ser interpretada usando esta ultima como

$$G^*(v) = \sup\{uv - \frac{1}{p}|u|^p; u \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{q}|v|^q$$

donde $1 < q < 2$ es el exponente conjugado de p, satisfaciendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego, por el lema 1.4, 3.15 es equivalente a la ecuación

$$u = \nabla G^*(-v) = -v|v|^{q-2} \tag{3.16}$$

3.1. Estimadores para el operador $\Box$

3.1.1. Núcleo en L^p

Denotemos con $\mathbb{T}$ al espacio cociente $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. $\mathbb{T}$ es una variedad de clase C^k modelada sobre $\mathbb{R}$. A la variedad $\mathbb{T}$ la llamamos el toro y puede ser visto como el conjunto de números $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$. Es decir, los números complejos tales que $z = e^{it}$ para algún $t \in \mathbb{R}$ [12, p. 183]. Decimos que una función a valor real es $2\pi - peridica$ si $dom(f) = \mathbb{T}$ o equivalentemente, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y que $f(x) = f(x + 2\pi)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ [13, p. 88].

Para $p \in [1, \infty)$, definimos $L^1_\times$ como el espacio de las funciones $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ de promedio nulo tales que $|f|$ es integrable en el sentido de Lebesgue.

Entendemos ahora una solución débil en l^p al problema lineal homogéneo si

$$\langle u, \Box\varphi \rangle = 0 \tag{3.17}$$

para toda $\varphi \in C^2_c(\mathbb{M})$ (se entiende $\mathbb{M}$ como la variedad producto $(0, \pi) \times \mathbb{T}$ y $C^2_c(\mathbb{M})$ como el espacio de las funciones continuas dos veces diferenciables a soporte compacto definidas en $\mathbb{M}$). Notamos con N al conjunto de todas las soluciones débiles al problema lineal homogéneo en $L^1(\Omega)$, o de manera equivalente

$$N = \left\{ u \in L^1(\Omega); u = p(t+x) - p(t-x);\ \text{donde } p(s + 2\pi) = p(s) \text{ p.c.t s},\ \text{ y } \int_0^{2\pi} p\ dx = 0 \right\} \tag{3.18}$$

La última condición que aparece en la definición de N es una condición de normalización.

3.1.2. Espectro de $\Box$

Definición. *Se define el espectro del operador $\Box$ como:*

$$\sigma(\Box) = \{j^2 - k^2 \ ; \ j, k \in \mathbb{N}, \} \tag{3.19}$$

Antes de seguir definamos las siguientes trasformaciones:

$$\mathcal{Z} : L^1_\times \to L^1(\Omega) \tag{3.20}$$

tal que

$$(\mathcal{Z}p)(x,t) := p(t+x) - p(t-x)$$

y también

$$\mathcal{Q} : L^1(\Omega) \to L^1_\times \tag{3.21}$$

mediante la formula

$$(\mathcal{Q}u)(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (u(s, r-s) - u(s, r+s))ds.$$

Proposición 3.10. *La aplicación $\mathcal{Z}$ definida en (3.20) es una transformación lineal, continua e inyectiva.*

Demostración. a) Primero que todo veamos que $\mathcal{Z}$ es una aplicación lineal.

En efecto, sean α, β números reales entonces

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Z}(\alpha p + \beta p'))(x,y) &= (\alpha p + \beta p')(t+x) - (\alpha p + \beta p')(t-x) \\
&= (\alpha p)(t+x) + (\beta p')(t+x) - (\alpha p)(t-x) + (\beta p')(t-x) \\
&= \alpha p(t+x) + \beta p'(t+x) - \alpha p(t-x) + \beta p'(t-x) \\
&= \alpha(p(t+x) - p(t-x)) + \beta(p'(t+x) + p'(t-x)) \\
&= \alpha(\mathcal{Z}p) + \beta(\mathcal{Z}p').
\end{aligned}$$

b) $\mathcal{Z}$ es continua.

Sea $p \in L^1_\times$ entonces

$$\begin{aligned}
||(\mathcal{Z}p)(x,t)||_{L^1_\times} &= \int_\Omega |p(t+x) - p(t-x)| \\
&\leq \int_\Omega |p(t+x)| + |p(t-x)| \\
&= \int_\Omega |p(t+x)| + \int_\Omega |p(t-x)| \\
&\leq 2\int_\Omega |p(t+x)| \\
&= 2||p(x,t)||_{L^1}.
\end{aligned}$$

lo que implica que $\mathcal{Z}$ es continua.

c) Para ver que $\mathcal{Z}$ es inyectivo, supongamos que $\mathcal{Z}p = 0$. Esto implica que

$$p(t+x) = p(t-x) \quad \forall x, t$$

así que para $x = t$ tenemos que

$$p(2t) = p(0) \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

integrando a ambos lados de la ultima ecuación tenemos que

$$\int_0^{2\pi} p(2t) \quad = \quad \int_0^{2\pi} p(0) \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

y dado que p es de promedio nulo obtenemos que $2\pi p(0) = 0$ lo que implica que $p = 0$.

Esto demuestra finalmente que $\mathcal{Z}$ es lineal, continua e inyectiva. ∎

Nota. Notese que $N = \operatorname{rng}(\mathcal{Z})$.

Proposición 3.11. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *La aplicación $\mathcal{Q}$ definida en (3.21) es lineal continua.*
2. *$\mathcal{Q}\mathcal{Z} = I$ donde I es la identidad en $L^1_\times$*

Antes de empezar con la demostración debemos constatar que la aplicación $\mathcal{Q}$ esta bien definida, para esto es necesario mostrar que si $v \in L^1(\Omega)$ entonces $\mathcal{Q}v \in L^1_\times$.

En efecto, es claro que $\mathcal{Q}v$ esta definida en $\mathbb{T}$. Resta ver que ademas tiene promedio nulo, para esto:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathcal{Q}v &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (v(s, r-s) - v(s, r+s)) ds \right) dr \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (v(s, r-s) - v(s, r+s)) ds dr \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (v(s, r-s) - v(s, r+s)) dr ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{2\pi} v(s, r-s) dr ds - \int_0^{2\pi} v(s, r+s) dr ds \right]
\end{aligned}$$

Realizando un pequeño cambio de variable tomando $u = r - s$ para el primer caso y $u = r + s$ en el segundo tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \mathcal{Q}v &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_{-u}^{2\pi-u} v(r,u)drds - \int_u^{2\pi+u} v(r,u)duds\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{2\pi} v(r,u)drds - \int^{2\pi} v(r,u)duds\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Demostración. 1. La definición de $\mathcal{Q}$ y un cálculo inmediato implica que es lineal, para demostrar la continuidad, procedamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
||\mathcal{Q}v||_{L^1_\times} &= \int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int (v(s,r-s)-v(s,r+s))ds\right| dr \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int |v(s,r-s)-v(s,r+s)|dsdr \\
&\leq \int_0^{2\pi}\int |v(s,r-s)-v(s,r+s)|dsdr \\
&\leq \int_\Omega |v(s,r)-v(s,r)|dsdr \\
&= ||v||_{L^1}
\end{aligned}$$

lo que muestra que $\mathcal{Q}$ es continuo.

2. Sea $p \in (L^1_\times)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{QZ}p(r) &= \mathcal{Z}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(p(s,r-s)-p(s,r+s))ds\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[(p(r-s+s)-p(r-s-s))-(p(r+s+s)-p(r+s-s))]ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(p(r)-p(r-2s))-p(r+2s)+p(r))ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(2p(r)-p(r-2s))-p(r+2s))ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}2p(r)ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(p(r-2s))+p(r+2s))ds \\
&= p(r) - \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}p(s)ds + \int_0^{2\pi}p(s)ds\right] \\
&= p(r)
\end{aligned}$$

este ultimo paso se justifica ya que p es de promedio nulo.

∎

Con el objetivo de demostrar que el núcleo N es cerrado presentamos el siguiente Teorema tomado de [4, p. 40]

Teorema 3.14. *Sean E, F espacios de Banach, asumamos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ es inyectivo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) T admite un inverso a izquierda.

b) $R(T) = T(E)$ es cerrado y admite un complemento en F.

Demostración. Ver por ejemplo [4, p. 40]. ■

Proposición 3.12. *N es cerrado en $L^1(\Omega)$*

Demostración. Tenemos por la proposición 3.10 que el operador $\mathcal{Z}$ es lineal, continuo e inyectivo definido de un espacio de Banach en un espacio de Banach, ademas en la proposición 3.11 se muestra que este admite un inverso a izquierda. Por el Teorema 3.14 tenemos que $R(\mathcal{Z}) = N$ es cerrado y por lo tanto se termina la prueba. ■

Por otro lado, para $f \in L^1(\Omega)$ tal que $\int_\Omega f\ \varphi\ dx\ dt = 0$ para toda $\varphi \in N \cap L^\infty(\Omega)$, entonces existe una única función $u \in C(\overline{\Omega})$ que satisface (2.2), (2.3), tal que $\Box u = f$ y $\int_\Omega u\varphi\ dx\ dt = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{N}$.

En efecto, Podemos expresar u explicitamente como:

$$u(x,t) = \psi(x,t) + (p(t+x) - p(t-x)), \tag{3.22}$$

donde ψ se construye con una extension $2\pi-$periódica de f a $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ esto es

$$\psi(x,t) = -\frac{1}{2}\int_x^\pi \left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} f(\xi,\tau) d\tau \right) d\xi + c\frac{\pi - x}{\pi} \tag{3.23}$$

con

$$c = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\int_{t-\xi}^{t+\xi} f(\xi,\tau) d\tau \right) d\xi. \tag{3.24}$$

Tenga en cuenta que c es constante. Aquí, se utiliza el hecho de que f es ortogonal a N.

La elección de c ahora garantiza que u satisface la condición de contorno (2.2); Por otra parte, la periodicidad de f implica (2.3). Por último, la elección de

$$p(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [\psi(\xi, s-\xi) - \psi(\xi, s+\xi)] d\xi \tag{3.25}$$

asegura que u es $L^2 - \textit{ortogonal}$ a N.

Las formulas (3.23-3.25) determinan un operador $K = \Box^{-1}$ de el complemento ortogonal débil de N.

Definición. *Se define el complemento ortogonal débil N notado $N^\perp$ en $C(\overline{\Omega})$ como*

$$N^\perp = \left\{ f \in L^1(\Omega);\ \int_\Omega f\varphi\ dx\ dt = 0 \quad \forall \varphi \in N \cap L^\infty(\Omega) \right\} \tag{3.26}$$

Formulamos el siguiente resultado debido a Lovicarová.

Proposición 3.13. *Las siguientes afirmaciones son válidas*

1. $\Box^{-1}\Box f(x,t) = f(x,t)$.
2. $||\Box^{-1}f||_{L^\infty} \leq C||f||_{L^1}$ *para* $f \in L^1(\Omega)$ *y alguna constante* c_0.
3. $||\Box^{-1}f||_{C^\alpha} \leq C_0||f||_{L^q}$ *para* $f \in L^1(\Omega)$, $\alpha = 1 - \frac{1}{q}$ *y c una constante.*

Demostración. Antes de comenzar con la demostración, con el animo de reducir los cálculos tomemos $\Box^{-1}f(x,t)$ de la siguiente manera:

$$\Box^{-1}f(x,t) = Sf(x,t) + S'f(x,t) \tag{3.27}$$

con

$$Sf(x,t) = -\frac{1}{2}\int_x^\pi \left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} f(\xi,\tau)d\tau\right) d\xi$$

y

$$S'f(x,t) = \frac{\pi - x}{2\pi}\int_0^\pi \left(\int_{t-\xi}^{t+\xi} f(\xi,\tau)d\tau\right) d\xi.$$

1. Dado que $S'f(x,t)$ es constante tenemos que las derivadas parciales segundas de $S'f(x,t)$ son cero, es decir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}S'f(x,t) &= 0\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}S'f(x,t) &= 0
\end{aligned}$$

ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}Sf(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2}\int_x^\pi \left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} f(\xi,\tau)d\tau\right) d\xi\right]\\
&= -\frac{1}{2}\int_x^\pi (f(\xi, t+\xi-x) - f(\xi, t-\xi+x))d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}Sf(x,t) &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[-\frac{1}{2}\int_x^\pi \left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} f(\xi,\tau)d\tau\right) d\xi\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2}\int_x^\pi (f(\xi, t+\xi-x) - f(\xi, t-\xi+x))d\xi\right]\\
&= -\frac{1}{2}\int_x^\pi (f_t(\xi, t+\xi-x) - f_t(\xi, t-\xi+x))d\xi\\
&= 0
\end{aligned}$$

De la misma forma calculamos las derivadas para x:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}Sf(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{2}\int_x^{\pi}\left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} f(\xi,\tau)d\tau\right)d\xi\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left[\int_x^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} f(\xi,\tau)d\tau\right)d\xi\right]-\int_t^t f(x,\tau)d\tau\\
&= -\frac{1}{2}\int_x^{\pi}(f(\xi,t+\xi-x)-f(\xi,t-\xi+x))d\xi-\int_t^t f(x,\tau)d\tau\\
&= -\frac{1}{2}\int_x^{\pi}(f(\xi,t+\xi-x)-f(\xi,t-\xi+x))d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}Sf(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{2}\int_x^{\pi}(f(\xi,t+\xi-x)-f(\xi,t-\xi+x))d\xi\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left[\int_x^{\pi}(f_x(\xi,t+\xi-x)-f_x(\xi,t-\xi+x))d\xi+2f(x,t)\right]\\
&= -f(x,t).
\end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\Box\Box^{-1}f(x,t)=f(x,t)$$

2. Sea $f\in N^{\perp}$ entonces

$$\begin{aligned}
|Sf(x,t)| &= \left|-\frac{1}{2}\int_x^{\pi}\left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} f(\xi,\tau)d\tau\right)d\xi\right|\\
&\leq \frac{1}{2}\int_x^{\pi}\left(\int_{t-(\xi-x)}^{t+(\xi-x)} |f(\xi,\tau)|d\tau\right)d\xi\\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega}|f(x,t)|dxdt\\
&= c_0||f||_{L^1}
\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
|S'f(x,t)| &= \left|\frac{\pi-x}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_{t-\xi}^{t+\xi} f(\xi,\tau)d\tau\right)d\xi\right|\\
&\leq \frac{|\pi-x|}{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{t-\xi}^{t+\xi}|f(\xi,\tau)|d\tau d\xi\\
&\leq \frac{|\pi-x|}{2\pi}\int_{\Omega}|f(x,t)|dxdt\\
&= c_1||f||_{L^1}
\end{aligned}$$

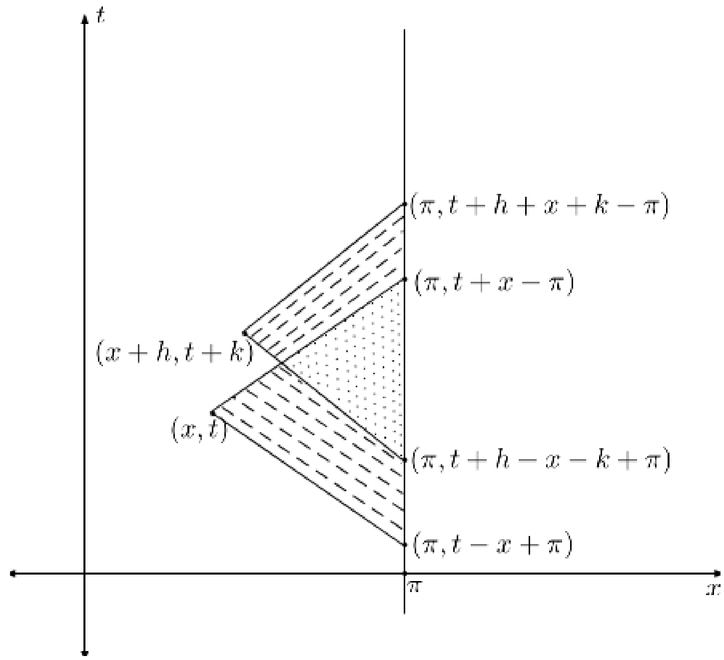

Figura 3.1: **Conjuntos** T_1**,** T_2**,** T

así que

$$|\Box^{-1} f(x,t)| \leq C||f||_{L^1}$$

y por lo tanto

$$||\Box^{-1} f(x,t)||_{L^\infty} \leq C||f||_{L^1}$$

3. Para demostrar que $||\Box^{-1} f||_{C^\alpha} \leq C||f||_{L^q}$ con $f \in L^1(\Omega)$ y $\alpha = 1 - \frac{1}{q}$ definamos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(x,t), (\pi, t+x-\pi), (\pi, t-x+\pi)\} \\ T_2 &= \{(x+h, t+k), (\pi, t+h+x+k-\pi), (\pi, t+h-x-k+\pi)\}. \end{aligned}$$

Notemos $T = T_1 \triangle T_2$ donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica entre conjuntos, es decir $T = (T_1 - T_2) \cup (T_2 - T_1)$ (ver figura 3.1).

De esta manera, la medida $\mu(T)$ la cual representa el área de T (sección marcada por lineas punteadas en la gráfica 3.1) está dada por $|k^2 - 2k(\pi - x)| \leq 4\pi(|k| + |h|)$.

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
|Sf(x+h,t+k) - Sf(x,t)| &= \left| -\frac{1}{2}\left[\int_x^{\pi} \left(\int_{t+k+x+h-\xi}^{t+k-x-h+\xi} f(\xi,\tau)d\tau \right) d\xi - \int_x^{\pi} \left(\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\xi,\tau)d\tau \right) d\xi \right] \right| \\
&= \frac{1}{2}\left| \int_{T_2} f - \int_{T_1} f \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left| \int_{T_2\setminus T_1} f - \int_{T_1\setminus T_2} f \right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\int_{T_2\setminus T_1} |f| + \int_{T_1\setminus T_2} |f| \right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{T_2\triangle T_1} |f| \right] \\
&= \frac{1}{2}\int_T |f| \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\left(\int_T 1 \right)^{1/p'} \left(\int_T |f|^q \right)^{1/q} \right] \\
&= \frac{1}{2}\mu(T)^{1/p'}||f||_{L^q} \\
&\leq 2\pi(|k|+|h|)^{1/p'}||f||_{L^q}
\end{aligned}
$$

Donde p' y q son exponentes conjugados.

Mediante un argumento similar obtenemos que

$$|S'f(x+h,t+k) - S'f(x,t)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(|k|+|h|)^{1/p'}||f||_{L^q}$$

y combinando estas dos ultimas expresiones obtenemos que $||\Box^{-1}f||_{C^\alpha} \leq C_q||f||_{L^q}$ donde $C_p > 0$ depende únicamente de q.

■

Para demostrar que $\Box^{-1}$ es un operador compacto usamos el siguiente

Teorema 3.15 (Arzela-Ascoli)**.** *Sea K un espacio métrico compacto y sea H un subconjunto acotado de $C(K)$. Asumimos que H es una familia uniformemente equi-continua de funciones, esto es*

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ tal que } d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall f \in H$$

.

Entonces, la clausura de H en $C(K)$ es compacto.

Demostración. Ver por ejemplo [13, p. 245]. ■

Veamos ahora una de las propiedades de mayor importancia del operador $\Box^{-1}$

Proposición 3.14. *El operador* $\Box^{-1} : N^{\perp} \cap L^q(\Omega) \longrightarrow N^{\perp}$ *es compacto.*

Demostración. Realizaremos la demostración para el caso $q = 2$, el caso general se hace de manera análoga.

Sea $B \subset N^{\perp} \cap L^2(\Omega)$ un conjunto acotado, Por la parte dos de 3.13 obtenemos que si $f \in B$,

$$||\Box^{-1} f||_{C^{1/2}} \leq C||f||_{L^2}$$

y por lo tanto $\Box^{-1}(B)$ es acotado en $C^{1/2}$.

Tenemos ademas que,

$$\begin{aligned}
||\Box^{-1} f||_{C^{1/2}} &= ||\Box^{-1} f||_{L^\infty} + |\Box^{-1} f|_{C^1/2} \\
&= ||\Box^{-1} f||_{L^\infty} + \sup\left\{\frac{|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)|}{|(x,t) - (y,s)|^{1/2}} \ ; \ (x,t) \neq (y,s) \in \Omega\right\} \\
&\geq \sup\left\{\frac{|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)|}{|(x,t) - (y,s)|^{1/2}} \ ; \ (x,t) \neq (y,s) \in \Omega\right\} \\
&\geq \frac{|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)|}{|(x,t) + (y,s)|^{1/2}},
\end{aligned}$$

tomemos $C||f||_{L^2} = k$,así:

$$|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)| \leq k|(x-y) + (t-s)|^{1/2}$$

.

Veamos ahora que $\Box^{-1}(B)$ es una familia equicontinua de funciones. En efecto, dado $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\epsilon^2}{k^2}$ y si $(x,t), (y,s) \in \Omega$ que verifican

$$|(x-y) + (t-s)| < \delta$$

tenemos

$$\begin{aligned}
|\Box^{-1} f(x,t) - \Box^{-1} f(y,s)| &\leq k|(x-y) + (t-s)|^{1/2} \\
&< k\delta^{1/2} \\
&= k(\frac{\epsilon^2}{k^2})(^{1/2} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

como se quería.

De esta manera, se mostró que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.15 (Arzela-Ascoli) y por lo tanto $\overline{\Box^{-1}(B)}$ es compacto, lo que implica que $\Box^{-1}$ es compacto. ∎

CAPÍTULO 4

EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN DÉBIL AL PROBLEMA $\Box u + u|u|^{p-2} = 0$

Queremos encontrar soluciones no triviales al problema $\Box u + u|u|^{p-2} = 0$ con condiciones de Dirichlet y periodicidad en el tiempo, para mostramos el Teorema fundamental de este trabajo el cual requiere un resultado conocido e importante del análisis como lo es el Teorema de Multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach (Ver por ejemplo [5, p. 337]), no se presenta su demostración para no extendernos.

Teorema 4.16 (Multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach)**.** *Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ espacios de Banach, $A \subset \mathcal{E}$ abierto, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \longrightarrow \mathcal{F}$, aplicaciones de clase C^k, $k \geq 1$.*

$$S = \{x \in A,\ g(x) = 0,\ g'(x) \ sobre\}$$

.

Si existe $p \in S$, tal que f restringida a S alcanza máximo (o mínimo) en p, entonces existe $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal continua, tal que

$$f'(p) = \lambda \circ g'(p),$$

es decir, p es punto crítico de la función $f - \lambda \circ g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, cuando $\lambda \in \mathcal{F}^*$.

Demostración. Ver por ejemplo [5, p. 338]. ∎

Teorema 4.17. *Supongamos $\dfrac{T}{\pi} \in \mathcal{Q}$; entonces existe una solución débil no constante $T-$periódica $u \in L^p([0,\pi] \times \mathbb{R})$ al problema (3.1-3.3).*

Demostración. Para nuestros efectos tomemos $T = 2\pi$.

Fijemos $q = \dfrac{p}{p-1}$ y sea $V = N^{\perp} \cap L^q(\Omega)$ dotado con la norma de L^q. Por (3.14) tenemos que el operador $\Box^{-1} : V \longrightarrow L^p\Omega$ es compacto.

Definamos

$$E^*(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\Box^{-1}v)v \; dxdt; \tag{4.1}$$

$E^* \in C^1(\Omega)$, en efecto

$$\begin{aligned}
E^*(v+h) - E^*(v) &= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} (\Box^{-1}(v+h))(v+h) - \int_{\Omega} (\Box^{-1}v)v \; dxdt \; dxdt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} ((\Box^{-1}v)(v+h) + (\Box^{-1}h)(v+h)) \; dxdt - \int_{\Omega} (\Box^{-1}v)v \; dxdt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} ((\Box^{-1}v)v + (\Box^{-1}v)h + (\Box^{-1}h)v + (\Box^{-1}h)h) \; dxdt - \int_{\Omega} (\Box^{-1}v)v \; dxdt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} ((\Box^{-1}v)v + (\Box^{-1}v)h + (\Box^{-1}h)v + (\Box^{-1}h)h - (\Box^{-1}v)v) \; dxdt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} ((\Box^{-1}v)h + (\Box^{-1}v)h + (\Box^{-1}h)h \; dxdt\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} (2(\Box^{-1}v)h \; dxdt + \int_{\Omega} (\Box^{-1}h)h \; dxdt\right]
\end{aligned}$$

Resta por ver que $\int_{\Omega} (\Box^{-1}h)h \; dxdt$ es $\circ(h)$. Para esto:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega} (\Box^{-1}h)h \; dxdt\right| &\leq |(\Box^{-1}h)|h| \\
&\leq ||h||_{L^q} ||\Box^{-1}h||_{L^p} \\
&\leq ||h||_{L^q} \left(\int_{\Omega} |\Box^{-1}h|^p\right)^{1/p} \\
&\leq ||h||_{L^q} ||\Box^{-1}h||_{L^\infty} \mu(\Omega)^{1/p} \\
&\leq ||h||_{L^q} ||\Box^{-1}h||_{L^1} \mu(\Omega)^{1/p} \\
&\leq ||h||_{L^q}^2 \mu(\Omega)^{1/p+(1-1/q)} \\
&= k||h||_{L^q}^2
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{|\int_{\Omega} (\Box^{-1}h)h \; dxdt|}{||h||_{L^q}} \leq k||h||_{L^q}$$

y tomando $\lim_{h\to 0}$ obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\int_\Omega(\Box^{-1}h)h\ dxdt|}{||h||_{L^q}}=0$$

así $\int_\Omega(\Box^{-1}h)h\ dxdt=\circ(h)$.

Dado que $\Box^{-1}$ es compacto, se puede deducir que E^* es débilmente semicontinua inferiormente. En efecto, sea $\varphi_n\rightharpoonup\varphi$, como $\Box^{-1}$ es compacto por la parte 1 de la proposición 1.7 $\Box^{-1}(\varphi_n)\to\Box^{-1}(\varphi)$, entonces

$$\begin{aligned}
E^*(\varphi) &= \frac{1}{2}\int(\Box^{-1}\varphi)\varphi\\
&= \frac{1}{2}\lim\int(\Box^{-1}\varphi)\varphi_n \quad \text{se usa la definición de convergencia débil}\\
&= \frac{1}{2}\lim\int\lim(\Box^{-1}\varphi_n)\varphi_n \quad \text{compacidad de } \Box^{-1}\\
&\leq \frac{1}{2}\liminf\int(\Box^{-1}\varphi_n)\varphi_n \quad \text{Lema de Fatou}\\
&= \liminf\frac{1}{2}\int(\Box^{-1}\varphi_n)\varphi_n\\
&= \liminf E^*(\varphi_n)
\end{aligned}$$

y por consiguiente E^* es débilmente semicontinua inferiormente.

Restrinjamos E^* a la esfera unitaria

$$M=\{v\in V;\ ||v||_{L^q}=1\}$$

en L^q.

Es claro entonces que bajo esta restricción E^* esta acotada superior e inferiormente debido a que

$$\left|\int(\Box^{-1}u)u\right|\leq k||u||^2_{L^q}\leq c$$

. Tiene entonces sentido hablar de

$$\alpha=\inf_M E^*$$

.

Tomemos ahora una sucesión $(v_m)\in M$ tal que

$$E^*(v_m)\to\alpha.$$

Entonces por el Teorema 1.12 (Eberlein Smulian) (v_m) es una sucesión acotada en un espacio reflexivo (L^q). Por el Teorema (1.12) la sucesión (v_m) tiene una subsucesión débilmente convergente que sin perdida de generalidad la podemos llamr igual $v_m \rightharpoonup v^*$ débilmente en L^q. Ahora, por la semicontinuidad inferior débil obtenemos

$$E^*(v) \leq \liminf_{m\to\infty} E^*(v_m) = \inf\{E^*(v);\ v \in M\} < 0. \tag{4.2}$$

Es claro que si $v^* \neq 0$ entonces $\dfrac{v^*}{||v^*||_{L^q}}$ tiene norma 1 en L^q y por lo tanto pertenece a M.

Ahora,

$$E^*(\rho v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\Box^{-1}\rho v)\rho v\ dxdt \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int_\Omega (\rho\Box^{-1}v)\rho v\ dxdt \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \rho^2(\Box^{-1}v)v\ dxdt \\ &= \rho^2 E^*(v). \end{aligned}$$

La condición $||v^*||_{L^q} = 1$ junto con (4.2) implican que v^* es una cota inferior de E^*. Como ademas $v^* \in M$ tenemos que v^* es un mínimo de E^* sobre M.

De esta manera caemos en las hipótesis del teorema (4.16) y por lo tanto existe un parámetro de Lagrange $\mu \in \mathbb{R}$ tal que v^* satisface la ecuación

$$\int_\Omega (\Box^{-1}v^* + \mu v^*|v^*|^{q-2})\varphi\ dxdt = 0 \quad \forall\varphi \in V. \tag{4.4}$$

Tomando $\varphi = v^*$ en (4.4) tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\Box^{-1}v^* + \mu v^*|v^*|^{q-2})v^*\ dxdt &= 0 \\ \int_\Omega (\Box^{-1}v^*)v^* + \mu(v^*)^2|v^*|^{q-2})\ dxdt &= 0 \\ \int_\Omega (\Box^{-1}v^*)v^* + \mu|v^*|^q)\ dxdt &= 0 \\ \int_\Omega (\Box^{-1}v^*)v^*\ dxdt + \mu\int_\Omega |v^*|^q)\ dxdt &= 0 \\ 2E^*(v^*) + \mu &= 0 \\ -2E^*(v^*) &= \mu > 0 \end{aligned}$$

Si tomamos $v = \dfrac{v^*}{\sqrt{\mu}} \in V$ obtenemos por (4.3) que $\mu' = 1$. Hemos hecho un reescalamiento de v^* y por lo tanto v satisface (4.4), es decir

$$\int_{\Omega}(\Box^{-1}v + v|v|^{q-2})\varphi \; dxdt = 0 \;\; \forall \varphi \in V.$$

Luego $\Box^{-1}v + v|v|^{q-2} \in N \cap L^p$.

Definamos $u = -v|v|^{q-2} \in L^p$, por la condición de ortogonalidad existe $\psi \in N \cap L^p$ tal que

$$\begin{aligned} u &= \Box^{-1}v + \psi && (4.5) \\ u &= -v|v|^{q-2} && (4.6) \end{aligned}$$

y aplicando $\Box$ tenemos

$$\begin{aligned} \Box u &= \Box\Box^{-1}v + \Box\psi \\ \Box u &= v. \end{aligned}$$

Por lo tanto ((4.5) y (4.6) son equivalentes a

$$\begin{aligned} \Box u &= v && (4.7) \\ u|u|^{p-2} &= -v. && (4.8) \end{aligned}$$

Se concluye que u es una solución débil, no constante a la ecuación

$$\Box u + u|u|^{p-2} = 0,$$

satisfaciendo las condiciones de contorno y periodicidad (3.2,3.3). ■

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Para lograr el desarrollo de este trabajo, se ha hecho un estudio previo de las herramientas que nos brinda el análisis que condensa resultados de diferentes ramas tales como: las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, ecuaciones integrales, cálculo variacional, geometría, topología, entre otras. Se ha mostrado en el recorrido que estos conceptos resultaron siendo claves para una mejor comprensión en el estudio de una ecuación de onda semilineal.

El estudio de la ecuación $\Box u = -u|u|^{p-2}$ sujeto a condiciones de Dirichlet se hace difícil con métodos tradicionales ya que el operador $\Box$ no cuenta con propiedades que faciliten su estudio. Por esta razón acudimos a procedimientos un poco más elaborados. Se opta por buscar una tipo de soluciones especiales con ayuda del operador $\Box^{-1}$ el cual es compacto. Esto ayuda a ganar propiedades.

Para el problema de onda semilineal que se ha estudiado las soluciones que se encontraron son soluciones débiles. La necesidad de hablar de soluciones débiles radica en que este tipo de soluciones (como se pudo ver en el trabajo) no cuentan con todas las condiciones de derivabilidad con las que están dotadas las soluciones fuertes. Inevitablemente al hablar de solución débil se hizo necesaria la introducción de los espacios de Sobolev.

Bibliografía

[1] T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison wesley, 1981.

[2] J. P. Aubin. *Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis*. Springer Science & Business Media, 1998.

[3] R. G. Bartle. *The Elements of Integrations and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, 1994.

[4] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2010.

[5] J. F. Caicedo. *Cálculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá 2005.

[6] K. C. Chang. *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer, 2005.

[7] O. Kavian. *Introduction à la Thórie des Points Critiques et Appllications aux Problèmes Elliptiques*. Berlin: Springer Verlag., 1993.

[8] E. Kreyszing. *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & Sons. Inc, 1978.

[9] L. D. Landau. *Mecánica*. Reverté, S.A., 1985.

[10] L. Arboleda L.Recalde. El concepto de semicontinuidad de baire en las investigaciones de fréchet. *Matemſ́icas: Enseñanza Universitarias XX*, pages 63–82, 2005.

[11] P. Rabinowitz. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics XX*, pages 145–205, 1967.

[12] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions., 3 edition, 1976.

[13] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions., 3 edition, 1981.

[14] M. Struve. *Variational methods Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian systems*. Springer, 1996.