Existencia, unicidad y regularidad de las soluciones a la ecuación de onda a través del Teorema de Hille-Yosida

Julián Felipe Tiria Bulla
Director: Arturo Sanjuán
SAMAT

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá D.C.
2016

A Erika, mi gran amor e inspiración.

Agradecimientos

Agradezco Al profesor Arturo Sanjuán por toda su dedicación durante todo mi proceso de formación. A mis padres por todo el apoyo brindado. Y a la música, por ser parte fundamental de mi vida e inspirar este hermoso proyecto.

Índice general

Introducción

Las ecuaciones diferenciales han sido un tema de discusión que surgió en el siglo XVIII como una pregunta al comportamiento de la cuerda de un violín y cómo modelar este fenómeno matemáticamente. Algunas preguntas relacionadas se venían estudiando desde tiempos de Pitágoras a partir de los ármonicos que generaba la cuerda según su longitud y arreglo musical frente a otro conjunto de cuerdas. Fueron grandes matemáticos como Euler, D'Alembert y Daniel Bernoulli quienes abordaron este problema que, para la época, generaron grandes preguntas por los métodos de solución presentados.

En esta ocasión se expone la existencia, unicidad y regularidad de la ecuación de onda soportado en los espacios de Sobolev y el teorema de Hille-Yosida. Este último aborda el problema a partir de un operador monótono maximal autoadjunto y por el cual se encuentra una solución débil al problema $u_{tt} - u_{xx} = 0$.

Inicialmente se abordará la ecuación de onda, su deducción y la solución de ella, viendo las equivalencias entre los dos métodos anteriormente nombrados (D'Alembert y Bernoulli). Posteriormente se soportará el desarrollo del trabajo en la teoría de medida, los espacios L^p y los espacios de Sobolev en $\mathbb{R}$, se introducirán los operadores monótonos maximales, el teorema de Hille- Yosida para el problema de evolución $\frac{du}{dt} + Au = 0$, su solución para un valor inicial u_0 y su generalización para valores iniciales fuera del dominio del operador. Finalmente se aplica la teoría anteriormente nombrada a la ecuación de onda, mostrando su existencia, unicidad y regularidad.

CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1. Motivación

Una onda se interpreta como la propagación de una perturbación, fuerza o movimiento en una determinada superficie. Si el movimiento que se aplica en ellas va en la misma dirección de su propagación se les denomina ondas longitudinales. Por otra parte, si el movimiento que se aplica en ellas va en dirección perpendicular a la fuerza de propagación, se les llama ondas transversales.

Se definen además cinco aspectos importantes: La frecuencia de la onda, definida como número de repeticiones del fenómeno estudiado en un intervalo de tiempo. La amplitud de la onda, que permite percibir el volumen y la sonoridad, determinada por el tamaño de la vibración de la onda. El tono, el cual determina la frecuencia de la vibración. El timbre, que es el que da forma a la distribución de las amplitudes de cada frecuencia. La duración, que corresponde a la longitud de tiempo en el que las notas suenan [Benson, 2007, p. 2].

1.2. La Ecuación de Onda

1.2.1. Movimiento armónico

Tomemos como ejemplo de onda el movimiento de un resorte [Parker, 2010, p. 21]. Si se propaga una perturbación en él, causará que cada uno de los aros se desplace de su posición original de equilibrio. Si relacionamos las crestas y los valles de una cuerda común a nuestro ejemplo del resorte, hablaríamos de crestas cuando los aros están más juntos de lo normal y de valles cuando los aros se separan más de lo normal.

A estos casos los llamaremos compresiones (aumento de la perturbación a la que está sometido el objeto) y rarefacciones (proceso en el cual el fenómeno de perturbación se hace menor). Además, dada su naturaleza tienen una forma repetitiva regular a lo largo de la onda, por lo que dichas repeticiones toman una forma senoidal.

En efecto, si consideramos una partícula de masa m sujeta a una fuerza F hacia la posición de equilibrio $y = 0$ y cuya magnitud es proporcional a la distancia y de la posición de equilibrio, $F = -ky$ [Benson, 2007, p. 14], siendo k la constante de proporción de Hooke, tendremos bajo las leyes de movimiento la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0,$$

cuyo polinomio característico será $\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$ y sus raíces $\lambda_1 = \sqrt{\frac{-k}{m}}$, $\lambda_2 = -\sqrt{\frac{-k}{m}}$, complejas, dado que $k, m > 0$.

Luego, la solución de la ecuación tendrá la forma

$$y = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

o lo que es igual

$$y = C \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right),$$

lo que explica el porqué de llamarla onda senoidal.

1.2.2. Armónicos por longitud de onda

Si consideramos una cuerda vibrante anclada en sus extremos, con un nudo en el centro de ella de tal forma que la masa m del nudo es mucho más grande que la de la cuerda, ésta ejercerá una fuerza F sobre el nudo hacia la posición de equilibrio, modelado por el mismo caso anterior de movimiento armónico. Así, por ejemplo, en una guitarra, se obtiene este modelo al tocar el punto medio de la cuerda mientras se puntea con los dedos. El resultado, como veremos más adelante, será un sonido una octava del tono natural. Si cada mitad está vibrando con una onda senoidal pura, entonces el movimiento de un punto que no sea el punto medio estará dado por

$$y = A\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}t}\right) + B\,\mathrm{sen}\left(2\sqrt{\frac{k}{m}t}\right),$$

donde las constantes A y B están determinadas por la posición inicial y la velocidad del nudo.

En general, la ecuación del movimiento en la cuerda será

$$y = A_n\cos\left(n\sqrt{\frac{k}{m}t}\right) + B_n\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{n\frac{k}{m}t}\right).$$

Antes de seguir con el estudio de estos armónicos introduciremos el concepto de longitud de onda.

La distancia o repetición de un punto a un punto similar más adelante, se llama longitud de onda y será denotado con λ. Ésta es la distancia entre dos compresiones o dos refracciones [Parker, 2010, p. 21]. De acuerdo con el análisis de las series de Fourier tenemos que para cualquier onda periódica podemos encontrar una descomposición senoidal. Así, dada una onda senoidal, de frecuencia f y período T, su longitud de onda está dada por la expresión

$$\lambda = \frac{v}{f} = vT,$$

donde v es la velocidad de propagación de onda.

Retomando el estudio de las escalas musicales y los armónicos es importante mencionar cómo la escuela pitagórica tenía una teoría matemática para la música. La relación entre las longitudes de las cuerdas y las notas. Las distancias corresponden a intervalos musicales y las notas a la armonía. Estudiando así la naturaleza de los sonidos musicales y la existencia de una relación numérica entre tonos que sonaban armónicos y que al dividir la cuerda en ciertas proporciones generaba sonidos que llegaban a ser placenteros al oído humano.

Procedió entonces Pitágoras a iniciar sus experimentos comparando distintos tonos con el fin de encontrar alguna relación entre ellos. Para comenzar, él producía un tono de toda la cuerda sin detenerla y lo comparaba con un tono producto de puntear la cuerda en la mitad. Esta relación se denominó $2/1$, llamado octava, típico arreglo en las notas de un piano, que viene siendo la misma nota pero en diferente tono. Para su segundo experimento, punteaba la cuerda a un tercio del final y la comparaba con la cuerda original. Esta relación se denominó $2/3$, llamada quinta perfecta. Si además, él punteaba la sección pequeña, relación $1/3$, encontrando igual placer al oído al unirlo con el de $2/3$. Un experimento adicional se basaría en comparar una nota dada con $2/3L$, con L longitud de la cuerda, con una nota de $1/2L$ y encontró otro armónico llamado la cuarta perfecta. De esta forma quedaban deducidas la octava $2/1$, la quinta perfecta $3/2$, la cuarta perfecta $4/3$ y la tercera mayor $5/4$. Formando así la llamada escala pentatónica debida a Pitágoras. [Parker, 2010, p. 3].

1.2.3. Deducción de la Ecuación de Onda

Regresando al estudio del movimiento de las ondas desde el movimiento armónico, consideremos la vibración sobre cuerdas atadas en los extremos. Pensemos en el desplazamiento de y como una función espacio-tiempo a lo largo de la cuerda determinada por una ecuación en derivadas parciales en una dimensión, de forma que la pendiente en cualquier punto de la cuerda es pequeña.

Sea $u(x,t)$ dicho desplazamiento, en donde x es la variable en el espacio y t la variable tiempo. Definamos también la tensión T, tangencial a lo largo de la cuerda y ρ la masa de la cuerda. Aplicando las leyes de Newton entre dos puntos "cercanos" en la cuerda, digamos x_0, x_1, tendremos que, la suma de fuerzas longitudinales será igual a cero debido a que el movimiento se da transversalmente [Strauss, 1992, p. 11]. Por su parte, la suma de fuerzas transversales será la tensión de la cuerda sobre su magnitud, aquí la magnitud será de $\sqrt{1+u_x^2}$, siendo u_x la pendiente de la cuerda en x_1:

$$T \sin\theta = \frac{Tu_x(x_1,t)}{\sqrt{1+u_x(x_1,t)^2}} - \frac{Tu_x(x_0,t)}{\sqrt{1+u_x(x_0,t)^2}} = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx.$$

Si asumimos el movimiento suficientemente pequeño, tal que $u_x \sim 0$ entonces podremos expresar la suma de fuerzas como

$$Tu_x(x_1,t) - Tu_x(x_0,t) = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx,$$

multiplicando por $\frac{1}{x_1-x_0}$ a ambos lados de la igualdad, tenemos

$$\frac{Tu_x(x_1,t) - Tu_x(x_0,t)}{x_1-x_0} = \frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx.$$

Aplicando $\lim\limits_{x_1\to x_0}$ a ambos lados de la igualdad tenemos que

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{Tu_x(x_1,t) - Tu_x(x_0,t)}{x_1-x_0} = \lim_{x_1\to x_0}\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx.$$

Por la forma integral del teorema del valor medio existe un valor en el intervalo $[x_0, x_1]$ tal que

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx = \rho u_t t,$$

y dado que

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{Tu_x(x_1,t) - Tu_x(x_0,t)}{x_1-x_0} = \partial_x(Tu_x),$$

debido a que T es independiente del espacio-tiempo, se obtiene la igualdad

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

con $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ (denominada velocidad de onda) [Benson, 2007, p. 99].

1.2.4. Solución de la Ecuación de Onda

Jean le Rond d'Alembert (1717,1783) propuso un método con el cual encontraba la solución general a esta ecuación: [Benson, 2007, p. 89].

Teorema 1.1. *La solución general de la ecuación de onda*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

está dada por

$$u = f(x+ct) + g(x-ct).$$

Sí la solución satisface las condiciones de frontera $u = 0$ para $x = 0$ y $x = l\pi$ entonces es de la forma

$$u = f(x+ct) - f(-x+ct).$$

Donde f satisface $f(x) = f(x+2\pi)$, para todos los valores de x.

Demostración. Si tomamos el cambio de variables $v = x - ct$, $w = x + ct$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} \\
&= \frac{\partial u}{\partial w}(c) + \frac{\partial u}{\partial v}(-c) \\
&= c\frac{\partial u}{\partial w} - c\frac{\partial u}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Derivando de nuevo se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial v}{\partial t} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2}(c) + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w}(-c)\right)(c) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial w \partial v}(c) + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(-c)\right)(-c) \\
&= c^2\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial w \partial v} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \\
&= c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right).
\end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial u}{\partial v}.\end{aligned}$$

Derivando de nuevo se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Reescribiendo $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ tendríamos

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\right),$$

o lo que es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial w \partial v} = 0.$$

Si integramos con respecto a la variable w tendremos que

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(w).$$

Integrando con respecto a la variable v tendremos que

$$u = f(w) + g(v),$$

o lo que es igual

$$u = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Debido a que la cuerda esta fija en los extremos, cuando $x = 0$, $x = \pi$, tenemos que $u = 0$.

Para $x = 0$
$$0 = f(ct) + g(-ct),$$
para todo t, de modo que, para $x = -ct$,
$$-f(-x) = g(x),$$
para todo x. Por lo tanto
$$u = f(x + ct) - f(ct - x).$$
Para $x = \pi$
$$0 = f(\pi + ct) - f(ct - \pi),$$
para todo t, de modo que, para $x = ct - \pi$,
$$f(x) = f(x - 2\pi)$$
para todo x.

Daniel Bernoulli también desarrolló una solución para la ecuación de onda bajo las mismas condiciones anteriores:

Supongamos que existe una solución de la forma
$$u(x,t) = p(x)h(t),$$
en la que separamos la dependencia de $u(x,t)$ en sus dos variables independientes. Así,
$$u_{xx} = p''(x)h(t) \quad y \quad u_{tt} = p(x)h''(t),$$
por lo que podemos reescribir la ecuación de onda como
$$\frac{h''(t)}{h(t)} = c^2 \frac{p''(x)}{p(x)} = -\lambda,$$
siendo λ una constante.
Como se quieren satisfacer las condiciones iniciales, se debe cumplir que $u(0,t) =$

$p(0)h(t) = 0$ y $u(l,t) = p(l)h(t) = 0$, para todo t.
Como $h(t) \neq 0$ para evitar la solución trivial, entonces $p(0) = p(l) = 0$, veamos entonces la ecuación

$$-p''(x) = \lambda p(x),$$

cuya solución general será

$$p(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}x).$$

Para $p(0) = 0$

$$p(0) = A = 0.$$

Para $p(l) = 0$

$$B\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}l) = 0,$$

de donde $\sqrt{\lambda}l = n\pi, \ \ (n = 1, 2, ...)$.
Por tanto, dicha ecuación admitirá soluciones no triviales sí y sólo sí $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$.
De ésta forma la ecuación

$$-h''(t) = \lambda h(t),$$

queda determinada por

$$h''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 h = 0,$$

cuya solución general será

$$h(t) = C\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + D\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}t\right).$$

Así, tenemos que

$$u_n(x,t) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[C\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + D\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\right].$$

Por el principio de superposición, la combinación lineal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + D_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}t\right)\right],$$

también es solución de la ecuación diferencial.

Para ver la equivalencia entre estas dos soluciones es necesario desarrollar algunos conceptos previos como lo son la frecuencia fundamental y el n-ésimo armónico.

Como los extremos de la cuerda están fijos, serán puntos sin desplazamiento. Entre ellos tendremos un punto de máxima amplitud al cual llamaremos antinodo.

El armónico básico en una cuerda será entonces aquel que tiene un solo antinodo entre sus puntos fijos. Éste sería el armónico con longitud mas baja al cual llamaremos frecuencia fundamental o primer armónico. El segundo armónico se produce entonces al adicionar un nodo más a la frecuencia fundamental, de forma que hay exactamente una onda completa dentro de la longitud de cuerda. El tercer armónico sería la adición de dos nodos a la frecuencia fundamental, completando cuatro nodos y tres antinodos, de forma que hay tres mitades de onda dentro de la longitud de cuerda. De esta forma el n-ésimo armónico contará con $n+1$ nodos, n antinodos y n mitades de onda dentro de la longitud de cuerda. Ahora, al observar la solución dada por D'alembert podemos ver que ésta es periódica con período $2l$ por lo que f tendrá una expansión en series de Fourier [Bensen, pág. 91].
Así, si sólo la frecuencia fundamental se encuentra presente, $f(x)$ toma la forma

$$f_1(x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}x\right) \qquad (T = 2l).$$

Si, de otro modo, sólo el n-ésimo armónico está presente, $f(x)$ toma la forma

$$f_n(x) = A\cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \qquad (T = 2l),$$

con lo que $f(x)$ quedaría denotado de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Llamemos $\alpha = \left(\frac{n\pi}{l}x\right)$ y $\beta = \left(\frac{n\pi}{l}t\right)$.
Sea entonces la expansión de series de Fourier de $f(x+t) - f(-x+t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\alpha+\beta) + B_n\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta) - C_n\cos(\beta-\alpha) - D_n\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha).$$

Por propiedades de suma de ángulos tendremos entonces que

$$
\begin{aligned}
f(x+t)-f(-x+t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[E_n \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+F_n \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)\right]. \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(\alpha)\cos(\beta)-A_n \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)+B_n \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+B_n \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\
&\quad - C_n \cos(\beta)\cos(\alpha)-C_n \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)-D_n \operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)+D_n \cos(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}[E_n \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+F_n \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)].
\end{aligned}
$$

Reemplazando α, β, tendremos entonces la igualdad de las soluciones.

La ecuación de onda puede variar dependiendo de fenómenos que interactúen en el modelo. Así por ejemplo, si una fuerza exterior se aplicara sobre el modelo original, la ecuación de onda quedaría determinada por

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t).$$

Si tuviéramos por ejemplo, una fuerza elástica transversal, la ecuación quedaría de la forma

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + ku = f(x,t).$$

Las soluciones a esta ecuación representan las pequeñas vibraciones de la cuerda de una guitarra.

1.3. Espacios de medida

Supongamos entonces $f \in C[a, b]$ tal que

$$\begin{cases} -u'' + u = f, \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Una solución sería una función de clase C^2 que satisfaga dichas condiciones. Veamos lo siguiente, sea $\varphi \in C_0^1[a, b]$, multiplicando a ambos lados de la igualdad por φ obtenemos

$$-u''\varphi + u\varphi = f\varphi.$$

Si se integra a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$-\int_a^b u''\varphi + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi.$$

Que integrando por partes será

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u'\varphi = \int_a^b f\varphi,$$

lo cual tiene sentido para una función $u \in C^1[a, b]$, dicha función recibirá el nombre de solución débil de la ecuación [Brezis, 2010, p. 201].

Salvo algunas restricciones si una función tiene derivada fuerte, también tendrá derivada débil y coincidirán. Antes de entrar en detalle con ésta derivada, definida sobre los espacios de Sobolev primero veamos un concepto más amplio de integral, la integral de Lebesgue, una integral mas amplia fundamentada en la medida de Lebesgue y sobre cual se construyen los espacios en que se desarrollarán dichas derivadas débiles.

1.3.1. Espacios L^p

Para analizar los espacios L^p comencemos por hablar de funciones simples. Una función de valores reales definida en un espacio de medida X será llamada función simple si el rango de dicha función es finito. De esta forma, la función característica $K_E(x)$ toma el valor 1 si $x \in E$ y 0 si $x \notin E$, es una función simple sobre un espacio $E \subseteq X$.

Lo importante de las funciones simples será que para $f \geq 0$ una función real en el espacio de medida X, existirá una sucesión creciente (s_n) de funciones simples tales que $s_n(x) \to f(x)$ si $n \to \infty$ para todo $x \in X$. Incluso podremos calcular la integral de una función medible a partir de aproximaciones de funciones simples [Rudin, 1980, p. 340].

En efecto, supongamos

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{E_i}(x),$$

una función medible con $x \in X$ y $c_i > 0$, sea además

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(E \cap E_i).$$

Si la función f es medible y no negativa, tendremos que

$$\int_E f d\mu = \sup I_E(s),$$

asumiendo $\sup I_E(s)$ como el supremo sobre todas las funciones simples s tales que $0 \leq s \leq f$.

Para ver un poco más claro este concepto supongamos la siguiente sucesión de funciónes simples tales que tienden a la función $f = -\frac{1}{4}(x - 3{,}5)^2 + 3$:

Sea s_3

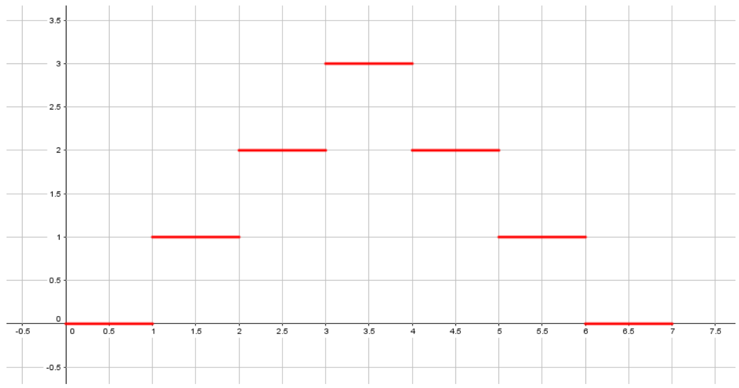

Figura 1.1: Ejemplo de Función Simple

En donde $E_1 = [1,2) \cup [5,6)$ y $\mu(E_1) = 2$; $E_2 = [2,3) \cup [4,5)$ y $\mu(E_2) = 2$; $E_3 = [3,4)$ y $\mu(E_3) = 1$.

$$\begin{aligned} I_E(s) =& c_1\mu(E_1) + c_2\mu(E_2) + c_3\mu(E_3) \\ =& 1(2) + 2(2) + 3(1) \\ =& 9. \end{aligned}$$

Para s_{12} tendríamos la siguiente función con rango finito en el intervalo $[0,7]$.

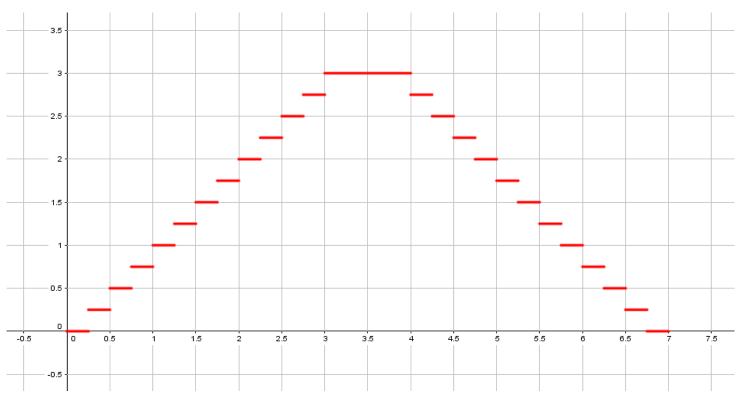

Figura 1.2: Ejemplo de función simple

A medida que $n \to \infty$ tendríamos entonces a f:

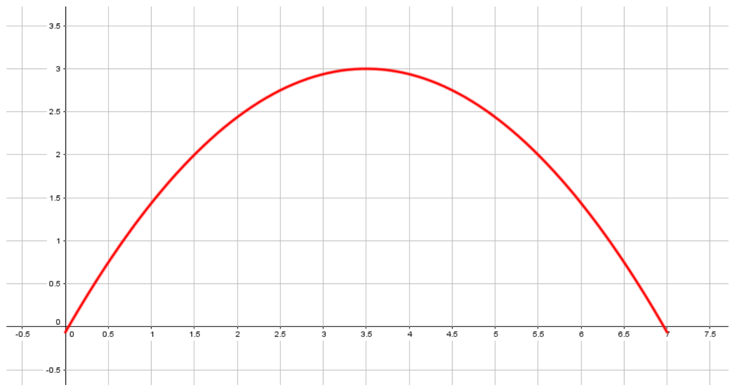

Figura 1.3: función $f = -\frac{1}{4}(x - 3{,}5)^2 + 3$

Para entender mejor como funciona esta integral, supongamos f una función medible y E un espacio medible.
Consideremos las integrales $\int_E f^+ d\mu$ y $\int_E f^- d\mu$, donde llamaremos $f^+ = \text{máx}(f, 0)$ y $f^- = -\text{mín}(f, 0)$, con f^+ y f^- medibles. Si ambas integrales son finitas, se definirá

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu,$$

y diremos que la función es Lebesgue integrable con respecto a μ, notada por $f \in L(\mu)$. [Rudin, 1980, p. 340]. Además $L(\mu)$ será un espacio vectorial con la suma de funciones y el producto por escalar habitual.

Sean $f, g \in L(\mu)$. Diremos que dos funciones son μ-equivalentes si son iguales en μ-casi toda parte. Esta clase de equivalencia determinará un conjunto de funciones en $L(\mu)$ que son μ-equivalentes a f, por lo que se define el espacio L^1 como el conjunto de todas las clases de equivalencia $[f]$ en $L(\mu)$.

Para $[f] \in L^1$ definimos

$$||[f]||_1 = \int |f| d\mu.$$

Y llamamos $||f||_1$ la norma L^1 de f. Con esto L^1 sera un espacio vectorial normado.

Generalizando esta definición, si $1 \leq p < +\infty$, el espacio L^p consistirá de todas las funciones medibles en el espacio X tal que

$$\int_X |f|^p d\mu < +\infty.$$

Además se definirá

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

por la norma de f en $L^p(\mu)$ [Bartle, 1995, p. 55].

Definidos los espacios L^p, tendremos que con la norma anteriormente descrita, L^2 es un espacio vectorial normado, mas aún, será un espacio de Hilbert. En efecto las propiedades de positividad de la norma, norma cero y producto por escalar se tienen. Veamos que la desigualdad triangular se cumple.

Teorema 1.2. *Supongamos que $f \in L^2$ y $g \in L^2$. Entonces $fg \in L^1$ y*

$$||fg||_1 \leq ||f||_2 ||g||_2.$$

Esta es la desigualdad de Hölder para el caso particular $p = 2$, también llamada desigualdad de Schwarz.

Demostración. Definamos $u(t) = t$, con inversa $u = t(u)$.
Sean $\alpha, \beta > 0$. Si suponemos $\alpha\beta$ el área de un rectángulo tenemos que

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha t dt + \int_0^\beta u du = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

Supongamos $||f||_2 \neq 0$ y $||g||_2 \neq 0$. Sea $\alpha = \frac{|f(x)|}{||f||_2}$ y $\beta = \frac{|g(x)|}{||g||_2}$.
Reemplazando tendremos que

$$\frac{|f(x)|}{||f||_2} \frac{|g(x)|}{||g||_2} \leq \frac{|f(x)|^2}{2||g||_2^2} + \frac{|g(x)|^2}{2||g||_2^2}.$$

Integrando con respecto a x a ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$\frac{||fg||}{||f||_2||g||_2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Luego

$$||fg|| \leq ||f||_2||g||_2.$$

Como se quería demostrar.

Con el resultado previo de la desigualdad de Schwarz tenemos la desigualdad triangular a partir de la desigualdad de Minkowski.

Teorema 1.3. *Si $f \in L^2$ y $g \in L^2$, entonces $f + g \in L^2$ y*

$$||f + g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2.$$

Demostración. Para ver que $f + g \in L^2$ veamos que

$$\begin{aligned} |f+g|^2 \leq& (|f| + |g|)^2 \\ \leq& (2 \max |f|, |g|)^2 \\ \leq& (2|f|)^2 + (2|g|)^2. \end{aligned}$$

Luego $f + g \in L^2$.
Veamos ahora,

$$\begin{aligned} ||f+g||_2^2 &= \int_X |f|^2 + 2|fg| + |g|^2 d\mu \\ &\leq ||f||_2^2 + 2||f||_2||g||_2 + ||f||_2^2 \\ &= (||f+g||_2)^2. \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado que $||f||$ es una norma.

El primer resultado que podemos analizar para el espacio L^2 es la convergencia monótona [Rudin, 1980, p. 344]. Dado un espacio μ-medible E, si tenemos una sucesión creciente de funciones no negativas para la cual $f_n(x) \to f(x)$ para todo x cuando $n \to \infty$, entonces $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$, cuando $n \to \infty$.

Como ejemplo a este teorema sea (f_n) una sucesión de funciones medibles definida por $f_n(x) = x^2 + 6 - \frac{1}{n}$,

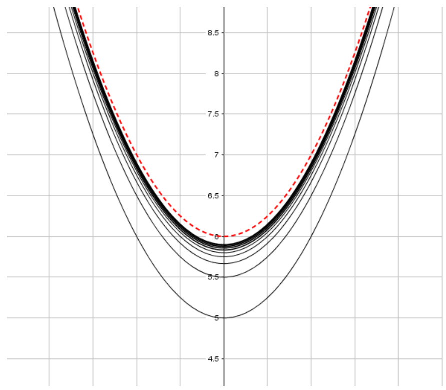

Figura 1.4: Sucesión $f_n(x)$

siendo f_n es una sucesión creciente, además $f = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2 + 6$.
Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dx = \int_{\mathbb{R}} f dx = \frac{x^3}{3} + 6x.$$

Contemplando el caso de que la sucesión de funciones no cumpla las hipótesis, supongamos (g_n) una sucesión de funciones medibles definida por $g_n(x) = \frac{1}{n}$.

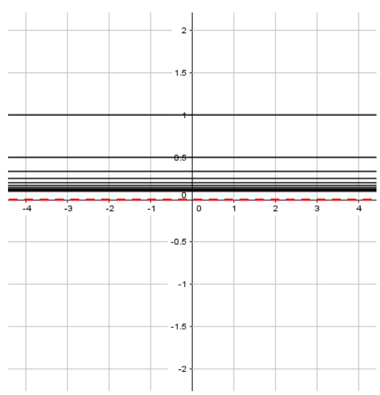

Figura 1.5: Sucesión g_n

g_n es una sucesión decreciente. Tenemos que $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ y $g = 0$.

Sin embargo

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n dx = \infty \neq \int_{\mathbb{R}} g dx = 0.$$

Otro resultado sobre el espacio L^2 es el Lema de Fatou. [Rudin, 1980, p. 347]. Si tenemos una sucesión de funciones medibles no negativas (f_n) tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n$, entonces $\int_E f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_E f_n d\mu$.

Para ello supongamos la función [Rudin, 1980, p. 359]

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq 1 \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Y sea (f_n) una sucesión de funciones medibles no negativas tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} f_{2k} = g(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ f_{2k+1} = g(1-x) & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

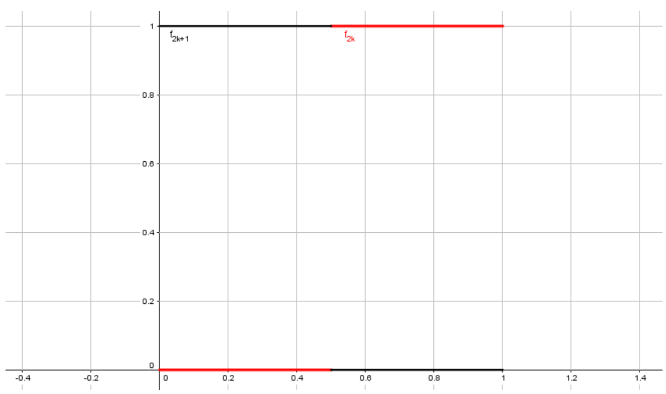

Figura 1.6: $f_n(x)$

Por un lado tenemos que $\lim_{n\to\infty} \inf f_n = 0$.

Además, $\int_0^1 f_n = \frac{1}{2}$, luego

$$\int_0^1 f d\mu = 0 < \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^1 f_n = \frac{1}{2}.$$

Con estos dos resultados (Teorema de convergencia Monótona y Lema de Fatou) se puede expandir la convergencia a una en que no sólo el límite de la sucesión tienda a la función, sino que además, la integral de la función sea igual al límite de la integral de la sucesión.

Teorema 1.4 (Teorema de la Convergencia Dominada)**.** *Supongamos que E es un espacio μ-medible. Sea (f_n) una sucesión de funciones medibles, tales que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad (x \in E),$$

cuando $n \to \infty$. Si existe una función $g \in L(\mu)$ en E tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$, $n = 0, 1, 2, ...$, entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

En particular, si la sucesión (f_n) es uniformemente acotada en E, el espacio tiene medida finita y $f_n(x) \to f(x)$ también se cumplirá esto, pues para $c = \max_{x \in E} \{f_n(x)\}$, se tendrá que $|f_n(x)| \leq c$.

A manera de ejemplo consideremos ahora la sucesión de funciones definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } |x| \leq n, \\ 0 & \text{si } |x| \geq n. \end{cases}$$

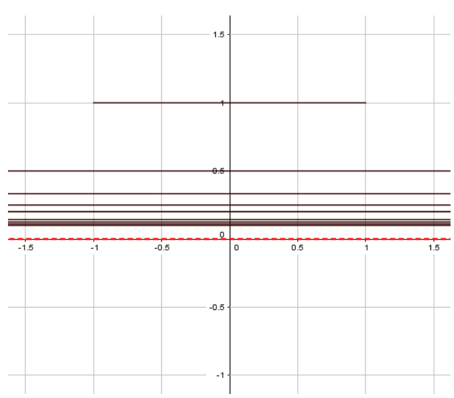

Figura 1.7: $f_n(x)$

Se tiene que $f_n \to 0$ en $\mathbb{R}$, sin embargo

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 2 \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Esto se debe a el espacio no tiene medida finita [Rudin, 1980, p. 359].

1.3.2. Espacios de Sóbolev

Sea I un intervalo abierto de la forma (a, b), los espacios de Sóbolev $W^{1,p}(I)$ están definidos por

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) \mid \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Es decir, es el conjunto de funciones en L^p tal que su primera derivada también esta en L^p. Aquí, $C_c^1(I)$ denota al espacio de todas las funciones continuas en I con primera derivada tal que la función es cero en todo el espacio a excepción de un conjunto compacto K. Además, para $u \in L^p(I)$ notaremos $u' = g$ [Brezis, 2010, p. 202]. Por tanto, Los espacios de Sóbolev $W^{1,p}$ son espacios vectoriales normados con la norma heredada de L^p, de forma que

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + ||u'||_{L^p}.$$

Supongamos por ejemplo el intervalo $I = (-1, 1)$ y sea $u = |x|$ tal que $u \in W^{1,p}$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.
La función $g = u'$ estará definida por

$$g(x) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ -1 & \text{si} \ -1 < x < 0. \end{cases}$$

Veamos que en efecto g es tal que se cumple la definición:

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u\varphi' &= \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} -x\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\
&= x\varphi(x)|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx + \varphi(x)x|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx.
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
-\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx &= -\int_{-1}^{0} (-1)\varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx.
\end{aligned}
$$

Con lo que se concluye

$$
\int_{-1}^{1} u\varphi' = -\int_{-1}^{1} g\varphi,
$$

por lo que g cumple la definición. Sin embargo, dado que g no tiene representante continuo, $g \notin W^{1,p}$. Para ver más claro esto supongamos la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, claramente $f \in L^1(0,1)$ pues $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty$. Además f es derivable con derivada $f' = x^{-3/2}$, sin embargo, $\int_0^1 |x^{-3/2}| = \infty$, por lo que $f' \notin L^1(0,1)$ luego $f \notin W^{1,1}(0,1)$.

Cuando se trabaja en espacios de Sóbolev sobre L^2 generalmente se acostumbra usar la notación $W^{1,2}(I) = H^1(I)$. En particular, el espacio H^1 esta dotado del producto escalar

$$
\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_I uv + u'v',
$$

y la norma

$$
||u||_{H^1} = (||u||_{L^2}^2 + ||u'||_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.
$$

Un resultado importante [Brezis, 2010, p. 204] es que para $u \in W^{1,p}(I)$ existe una función extensión, para la cual la función queda definida en la clausura del intervalo I de forma que $u = \widetilde{u}$ en I y

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt.$$

Para ver mas claro esto primero supongamos lo siguiente. Sea $f \in L^1_{loc}(I)$ tal que $\int_I f\varphi' = 0$ para toda $\varphi \in C^1_c(I)$. Sea además $\psi \in C_c(I)$ una función fija tal que su integral en el intervalo I es igual a 1. Para cualquier función $w \in C_c(I)$ existe una $\varphi \in C^1_c(I)$ tal que

$$\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi,$$

en donde $h = w - \left(\int_I w\right)\psi$ es continua, de soporte compacto y su integral es cero. Por tanto la función h tendrá una única primitiva con soporte compacto en el intervalo I. Entonces tendremos que

$$\begin{aligned}\int_I f\varphi' &= 0\\ \int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] &= 0\\ \int_I \left[f - \left(\int_I \psi f\right)\right] &= 0,\end{aligned}$$

para toda $w \in C_c(I)$, por lo cual $f - \left(\int_I \psi f\right)$ será igual a cero en I. Luego existirá una constante $C = \int f\psi$ tal que $f = C$ en I [Brezis, 2010, p. 204].
Por otro lado, sea $g \in L^1_{loc}(I)$, sea y_0 un punto fijo en I y sea $v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt$, con $x \in I$, se tiene que dicha $v \in C(I)$ y $\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi$ [Brezis, 2010, p. 205].
Supongamos ahora $\overline{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)dt$, de lo anterior tendremos que

$$\int_I \overline{u}(x)\varphi' dx = -\int_I u'\varphi dx,$$

además

$$\int_I u\varphi' = -\int_I u'\varphi,$$

luego

$$\int_I (u - \overline{u})\varphi' = 0,$$

para toda $\varphi \in C_c^1(I)$. Por tanto, como en el resultado anterior $u - \overline{u} = C$ en I y por ende la función extensión buscada será $\widehat{u} = \overline{u} + C$.

El espacio de Sobolev $W_0^{1,p}$

Una particularidad de los espacios de Sobolev anteriormente mencionados son los espacios $W_0^{1,p}$, los cuales denotan la clausura de $C_c^1(I)$ en $W^{1,p}$, es decir, una función $u \in W^{1,p}(I)$ pertenecerá a $W_0^{1,p}(I)$ si y sólo si $u = 0$ en ∂I [Brezis, 2010, p. 217].

Supongamos entonces $u = -(x-3)^2 + 4$, con $I = (1,5)$ y $p = 2$. $u \in W^{1,p}$ pues $\left(\int_1^5 |u|^2\right)^{1/2} = \frac{16\sqrt{30}}{15} \leq \infty$ y $\left(\int_1^5 |u'|^2\right)^{1/2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \leq \infty$. Además $u \in W_0^{1,p}$, pues $u(1) = u(5) = 0$.

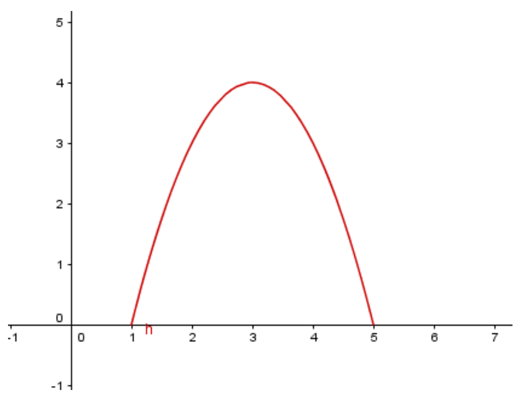

Figura 1.8: Función $u = -(x-3)^2 + 4 \in W_0^{1,2}$

Así como en los espacios de Sobolev sobre L^2, llamaremos $H_0^1 = W_0^{1,2}$. Este espacio estará dotado con la norma definida en H^1 con la cuál sera un espacio de Hilbert separable. Si suponemos además que I es un intervalo acotado, existirá una constante C tal que

$$||u||_{W^{1,p}(I)} \leq C||u'||_{L^p(I)}.$$

En otras palabras, sobre $W_0^{1,p}$, la norma $||u'||_{L^p(I)}$ es una norma equivalente a la norma en $W^{1,p}$ [Brezis, 2010, Desigualdad de Poincaré p. 218].

CAPÍTULO 2

Teorema de Hille-Yosida

El teorema de Hille-Yosida es una de las herramientas más importantes en las ecuaciones diferenciales para probar la existencia, unicidad y regularidad de las soluciones a los problemas fundamentales en el contexto de las ecuaciones diferenciales parciales. Su importancia se centra en que a partir de un problema de evolución obtenemos uno más sencillo.

2.1. Operadores monótonos maximales

Decimos que un operador lineal no acotado $A : D(A) \subset H \to H$ es monótono si el producto interno $(Av, v) \geq 0$ para todo $v \in D(A)$, diremos además que es monótono maximal si además $R(I + A) = H$, es decir,

$$\text{Para toda } f \in H \text{ existe } u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f$$

Antes de proceder al teorema y su demostración demostración de la proposición, desarrollaremos algunos conceptos previos, esos son el principio del punto fijo de Banach los operadores lineales cerrados.

Supongamos una función $f : S \to S$ de un espacio métrico (S, d) en él mismo. Llamaremos punto fijo a un punto $p \in S$de f si cumple que $f(p) = p$. llamaremos a f una contracción de S si existe un número positivo $\alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

para todo $x, y \in S$. Además, una contracción f de un espacio métrico completo S tiene un único punto fijo p [Apostol, 1974, p. 111].

Por otro lado, supongamos X, Y espacios normados y $T : D(T) \to Y$ un operador lineal con dominio $D(T) \subset X$. Entonces T es llamado un operador lineal cerrado si su grafo

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, y); x \in D(T), y = Tx\}$$

es cerrado en el espacio normado $X * Y$ donde la norma está definida por $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Además, T será cerrado si y sólo si tiene la propiedad de que si $x_n \to x$, donde $x_n \in D(T)$, y $Tx_n \to y$, entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

Proposición 2.1. *Sea A un operador monótono maximal. Entonces*

a) *$D(A)$ es denso en H.*

b) *A es un operador cerrado.*

c) *Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ es biyectivo de $D(A)$ a H, $(I + \lambda A)^{-1}$ es un operador acotado y*

$$||(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

[Brezis, 2010, p. 181].

Demostración. *a)* Sea $f \in H$ tal que el producto interno $(f, v) = 0$ $\forall v \in D(A)$, de donde f tendría que ser cero. En efecto, existe $v_0 \in D(A) = f$ tal que $v_0 + Av_0 = f$, por ser A monótono maximal. Así

$$\begin{aligned} 0 &= (f, v_0) \\ &= (v_0 + Av_0, v_0) \\ &= (v_0, v_0) + (Av_0, v_0) \\ &= |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \\ &\geq |v_0|^2, \end{aligned}$$

de ésta forma $v_0 = 0$, de donde $f = 0$. luego, por [Brezis, 2010, Corolario 1.8, p.8] $D(A)$ es denso en H.

b) Primero veamos que para un $f \in H$ dado, existe un único $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$, ya que si $\bar{u}$ es otra solución, tendremos

$$\begin{aligned} u + Au &= f \\ \bar{u} + A\bar{u} &= f. \end{aligned}$$

Luego $(u - \bar{u}) + A(u - \bar{u}) = 0$, además

$$\begin{aligned} 0 &= (0, (u - \bar{u})) \\ &= ((u - \bar{u}) + A(u - \bar{u}), (u - \bar{u})) \\ &= ((u - \bar{u}), (u - \bar{u})) + (A(u - \bar{u}), (u - \bar{u})) \\ &\geq |u - \bar{u}|^2, \end{aligned}$$

de donde $u - \bar{u} = 0$, probando así la unicidad. Veamos ahora que $|u| \leq |f|$

$$\begin{aligned} |f|^2 &= (u + Au, u + Au) \\ &= |u|^2 + (u, Au) + (Au, u) + |Au|^2 \\ &\geq |u|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto el mapeo $f \to u$ denotado por $(I+A)^{-1}$ es acotado, pues $|(I+A)^{-1}| = |u| \leq |f|$, además $||(I+A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$ pues

$$||(I+A)^{-1}|| = \sup_{f \in D(I+A)^{-1}, f \neq 0} \frac{||u||}{||f||} \leq 1.$$

Probemos ahora que A es un operador cerrado.

Sea (u_n) una sucesión en $D(A)$ tal que $u_n \to u$ y $Au_n \to u$. Veremos que $u \in D(A)$ y $Au = f$.

Por propiedades tenemos que $u_n + Au_n \to u + f$ y así

$$u_n = (I+A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I+A)^{-1}(u+f),$$

de donde $(I+A)^{-1}(u+f) = u$, luego $u \in D(A)$ y $u + Au = u + f$.

$c)$ Probaremos que si $R(I + \lambda_0 A) = H$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces $R(I + \lambda A) = H$ para todo $\lambda > \lambda/2$.

En $b)$ se demostró que para todo $f \in H$ existe un único $u \in D(A)$ tal que $u + \lambda_0 Au = f$. Además, el mapeo $f \to u$ denotado por $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ es un operador lineal acotado con $||(I + \lambda_0 A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Se resolverá la ecuación

$$u + \lambda Au = f \quad \lambda > 0.$$

Multiplicando por $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ a ambos lados de la igualdad tenemos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}u + \lambda_0 A_u = \frac{\lambda_0}{\lambda}f,$$

sumando u a ambos lados de la igualdad

$$u + \frac{\lambda_0}{\lambda}u + \lambda_0 A_u = \frac{\lambda_0}{\lambda}f + u,$$

reorganizando queda

$$u + \lambda_0 A u = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u,$$

de donde

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u\right].$$

Aplicando el principio de punto fijo de Banach tendremos

$$\begin{aligned} u - v =& (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)(u - v)\right] \\ ||u - v|| =& ||(I + \lambda_0 A)^{-1}|| \left\|\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)(u - v)\right\| \\ \leq& \left\|\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right)(u - v)\right\| \\ \leq& \left\|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right\| ||u - v||. \end{aligned}$$

Así, si $|1 - \lambda_0/\lambda| < 1$, es decir, $\lambda > \lambda_0/2$ se deduce que la ecuación tiene solución.

Definiremos ahora para A un operador monótono maximal y para todo $\lambda > 0$

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad y \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

en donde J_λ es llamado resolvente de A y $A\lambda$ es la aproximación de Yosida o regularización de A.

Proposición 2.2. *Sea A un operador monótono maximal. Entonces*

a_1) $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$ *Para todo* $v \in H$ *y Para todo* $\lambda > 0$.

a_2) $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$ *Para todo* $v \in D(A)$ *y Para todo* *lambda* > 0.

b) $|A_\lambda v| \leq |Av|$ *Para todo* $v \in D(A)$ *y Para todo* $\lambda > 0$.

c) $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$ *Para todo* $v \in H$.

d) $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av$ *Para todo* $v \in D(A)$.

e) $(A_\lambda v, v) \geq 0$ *Para todo* $v \in H$ *y Para todo* $\lambda > 0$.

f) $|A_\lambda v| \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right) |v|$ *Para todo* $v \in H$ *y Para todo* $\lambda > 0$.

[Brezis, 2010, p. 182]

Demostración.

a_1) Sea $(I + \lambda A)^{-1} v = J_\lambda v$, Aplicando $(I + \lambda A)$ a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$v = (I + \lambda A) J_\lambda v,$$

o lo que es igual

$$v = \lambda A(J_\lambda v) + (J_\lambda v),$$

de donde reescribiéndolo nos queda

$$v - (J_\lambda) v = \lambda A(J_\lambda v),$$

dividiendo por λ a ambos lados de la igualdad y agrupando en factor común de v tendremos

$$\frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) v = A(J_\lambda v),$$

es decir, por definición de A_λ

$$A_\lambda v = A(J_\lambda v).$$

$a_2)$ Sea $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$, sumando Av a ambos lados de la igualdad tenemos

$$A_\lambda v + Av = A(J_\lambda v) + Av,$$

de donde reescribiéndolo nos queda

$$A_\lambda v + Av - A(J_\lambda v) = Av,$$

agrupando en factor común de A la expresión queda de la forma

$$A_\lambda v + A(v - J_\lambda v) = Av,$$

o lo que es igual

$$A_\lambda v + A((I - J_\lambda)v) = Av,$$

por definición de A_λ tenemos que $(I - J_\lambda) = \lambda A_\lambda$, entonces

$$A_\lambda v + \lambda A(A_\lambda v) = Av,$$

Agrupando en factor común de $A_\lambda v$ la expresión queda de la forma

$$(I + \lambda A)A_\lambda v = Av,$$

aplicando $(I + \lambda A)^{-1}$ a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$A_\lambda v = (I + \lambda A)^{-1}Av,$$

de donde, por definición de J_λ tenemos

$$A_\lambda v = J_\lambda(Av).$$

$b)$ Como $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$ y $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |A_\lambda v| &= |(I + \lambda A)^{-1}Av| \\ &= |(I + \lambda A)^{-1}||Av| \end{aligned}$$

Y como $|(I+\lambda A)^{-1}| \leq 1$ tenemos que

$$|(I+\lambda A)^{-1}||Av| \leq |Av|$$

de donde

$$|A_\lambda v| \leq |Av|$$

$c)$ Sea $|v - J_\lambda v| = |(I - J_\lambda)v|$, por definición de A_λ tenemos que

$$= \lambda |A_\lambda v|$$

y por la proposicion anterior $|A_\lambda v| \leq |Av|$ luego

$$|v - J_\lambda v| \leq \lambda |Av|.$$

Así, para todo $v \in D(A)$, cuando $\lambda \to 0$ $J_\lambda v \to v$.

Si $v \notin D(A)$, existe $v_1 \in D(A)$ tal que $|v_1 - v| < \epsilon$, por ser $D(A)$ denso en H tal que

$$\begin{aligned}
|J_\lambda v - v| &\leq |J_\lambda v - J_\lambda v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\
&\leq |J_\lambda (v - v_1)| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\
&\leq |J_\lambda||v - v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\
&\leq 2|v_1 - v| + |J_\lambda v_1 - v_1| \\
&\leq 2\epsilon + |J_\lambda v_1 - v_1|
\end{aligned}$$

Así, $\lim_{\lambda \to x_0} \sup |J_\lambda v - v| \leq 2\epsilon$ $\forall \epsilon$ y entonces $\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda v - v| = 0$.

$d)$ Por la proposición (a_2) tenemos que $A_\lambda v = J_\lambda (Av)$ luego

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda v = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda (Av).$$

Ahora, por proposición anterior $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$, luego

$$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda v = \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda (Av) = Av.$$

e) Sea el producto interno de $A_\lambda v$ y v definido como

$$\begin{aligned}
(A_\lambda v, v) &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\
&= (A_\lambda v, (I - J_\lambda)v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\
&= (A_\lambda v, \lambda A_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\
&= \lambda |A_\lambda v|^2 + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\
&\geq \lambda |A_\lambda v|^2.
\end{aligned}$$

De donde, por ser $\lambda > 0$ y $|A_\lambda v|^2 \geq 0$ obtenemos que $(A_\lambda v, v) \geq$

f) De la propiuedad anterior tenemos que $\lambda |A_\lambda v|^2 \leq (A_\lambda v, v)$, por desigualdad de Schwarz

$$(A_\lambda v, v) \leq |A_\lambda v||v|$$

. Luego $|A_\lambda v| \leq |v|$.

Las propiedades de esta proposición implican que $(A_\lambda)_{\lambda > 0}$ es una familia de operadores acotados que se aproxima a un operador no acotado A cuando $\lambda \to 0$.

2.2. Problema de evolución $\frac{du}{dt} + Au = 0$

Teorema 2.5. *Sea E un espacio de Banach y sea $F : E \to E$ un mapeo Lipschitz, es decir, existe una constante L tal que*

$$\|F_u - F_v\| \leq L \|u - v\| \qquad \forall u, v \in E.$$

Entonces, dado un $u_0 \in E$, existe una única solución $u \in C'([0, +\infty); E)$ del problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = Fu(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

u_0 es llamado dato inicial. [Brezis, 2010, p. 184]

Demostración. **Existencia.**

Resolver (2.1) asciende a encontrar algún $u \in C([0,+\infty);E)$ que satisfaga la ecuación integral

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds \tag{2.2}$$

Dado $k > 0$, que se fijará mas adelante, el conjunto

$$X = \left\{ u \in C([0,+\infty);E); \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u(t)\| < \infty \right\}$$

Este será un espacio de Banach con la norma $\|u\|_X = \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u(t)\|$ en efecto, $\|u\|_X \geq 0$ ya que $e^{-kt} > 0$ y $\|u(t)\| \geq 0$ por propiedades de la norma.

Si $\|u\|_X = 0$ tenemos que $\sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u(t)\| = 0$ de donde $u(t) = 0$. De igual manera, si $u = 0$ tenemos que $\sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|u(t)\| = \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|0\| = 0$ luego $\|u\|_X = 0$.

Además para el producto por escalar se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\alpha u\|_X &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \|\alpha u(t)\| \\
&= \sup_{t\geq 0} e^{-kt} |\alpha| \, \|u(t)\| \\
&= |\alpha| \sup_{t\geq 0} \ e^{-kt} \|u(t)\| \\
&= |\alpha| \, \|u\|_X .
\end{aligned}$$

Para la desigualdad triangular veamos que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_X &= \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)+v(t)\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}(\|u(t)\|+\|v(t)\|) \\
&\leq \sup_{t\geq 0} (e^{-kt}\|u(t)\|+e^{-kt}\|v(t)\|) \\
&\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u(t)\| + \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|v(t)\| \\
&\leq \|u\|_X + \|v\|_X .
\end{aligned}$$

Así ésta será una norma.

Sea (u_m) una sucesión de Cauchy en X. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe un N tal que para todo $m, n > N$ se tiene que

$$d(u_m, u_n) = \sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u_m(t)-u_n(t)\| < \epsilon,$$

por lo tanto, para algún $t = t_0$ fijo

$$\left\| e^{-kt_0}u_m(t_0) - e^{-kt_0}u_n(t_0) \right\| < \epsilon.$$

Esto muestra que la sucesión $(e^{-kt_0}u_m(t_0))$ de números reales converge a un $e^{-kt_0}u(t_0)$ cuando $m \to \infty$. De este modo podemos asociar con cada $t \geq 0$ un único número real $e^{-kt}u(t)$. Esto definirá puntualmente una función sobre $[0, +\infty)$, veamos que esa función esta en X.

Cuando $n \to \infty$ tendremos que

$$\sup_{t\geq 0} e^{-kt}\|u_m(t)-u(t)\| < \epsilon \qquad m > N.$$

Por lo tanto para cada $t \geq 0$

$$e^{-kt}\|u_m(t)-u(t)\| < \epsilon.$$

Esto muestra que $(u_m(t))$ converge a $u(t)$ uniformemente. Ya que cada (u_m) es contínuo en $[0,+\infty)$ y la convergencia es uniforme, la función u es contínua en $[0,+\infty)$ y su norma es acotada, por lo tanto $u \in X$ y además $u_m \to u$, probando así que X es un espacio de Banach.

Ahora, para toda $u \in X$, la función ϕu definida

$$(\phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds$$

pertenece a X. Además, para todo $u, v \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|\phi u - \phi v\|_X &= \left\| \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \int_0^t F(u) - F(v) ds \right\| \\
&\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \int_0^t \|F(u) - F(v)\| \, ds \\
&\leq \sup_{t\geq 0} \int_0^t Le^{-kt} \|u - v\| \, ds \\
&\leq \sup_{t\geq 0} e^{-kt} \frac{L}{k} \|u - v\| \\
&\leq \frac{L}{k} \|u - v\|_X .
\end{aligned}$$

Fijando $k > L$ tendremos $\frac{L}{k} < 1$ y aplicando el teorema del punto fijo de Banach se tendrá que ϕ tiene un único punto fijo en X, que es solución.

Unicidad.

Para probar la unicidad introduciremos la desigualdad de Grönwall

Proposición 2.3 (Desigualdad de Grönwall)**.** *Sea $u : [0,\alpha] \to \mathbb{R}$ contínua y no negativa. Supongamos $C \geq 0$ y $k \geq 0$ tales que*

$$u(t) \leq C + \int_0^t ku(s)ds,$$

para todo $t \in [0, \alpha]$. Entonces, para todo t en dicho intervalo

$$u(t) \leq Ce^{kt}$$

[Hirsch and Smale, 2004, p. 393]

Supongamos ahora u y $\bar{u}$ dos soluciones de (2.1) y sea

$$\varphi(t) = \|u(t) - \bar{u}(t)\|,$$

por 2.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \left\| \int_0^t F(u(s)) - F(\bar{u}(s)) ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(\bar{u}(s))\| \, ds \\ &\leq L \int_0^t \|u(s) - \bar{u}(s)\| \, ds \\ &\leq L \int_0^t \varphi(s) ds\end{aligned}$$

Aplicando desigualdad de Grönwall para $u = \Phi$ $C = 0$ y $k = L$ tendremos que

$$\Phi(t) \leq Ce^{kt} = 0$$

de donde $\varphi = 0$.

Teorema 2.6. ***[Teorema de Hille-Yosida]*** *Sea A un operador monótono maximal. Entonces, dado algún $u_0 \in D(A)$ existe una única función $u \in C^{'}([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty); D(A))$ que satisface*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Además $|u(t)| \leq |u_0|$ y $\left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|$ $\forall t \geq 0$. [Brezis, 2010, p. 185]

Demostración. **Paso 1. Unicidad.**

Sean u y $\bar{u}$ dos soluciones de (2.3). Tenemos que $\left(\frac{d}{dt}(u-\bar{u}),(u-\bar{u})\right) = (-A(u-\bar{u}), u-\bar{u}) \leq 0$.

Ahora bien, si $\varphi \in C'([0,+\infty); H)$ entonces $|\varphi|^2 \in C'([0,+\infty); \mathbb{R})$ y $\frac{d}{dt}|\varphi|^2 = 2\left(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi\right)$ de forma que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-\bar{u}|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t)-\bar{u}(t)), u(t)-\bar{u}(t)\right).$$

Como la derivada es menor que cero tenemos que la función es decreciente en $[0,+\infty)$.

Ahora, ya que $|u(0)-\bar{u}(0)| = |u_0-u_0| = 0$, se tiene que $|u(t)-\bar{u}(t)| = 0\ \forall t \geq 0$.

Existencia.

Supongamos para la existencia que (2.3) es de la forma

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda(t) = 0, \\ u_\lambda(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Por la Proposición 2.2, (A_λ) es una familia de operadores acotados que se aproxima al operador no acotado A cuando $\lambda \to 0$. Por teorema 2.5, como A_λ es un operador lineal acotado

$$\begin{aligned} \|Au - Av\| &= \|A(u-v)\| \\ &\leq \|A\|\,\|u-v\| \\ &\leq L\,\|u-v\| \end{aligned}$$

luego u_λ es solución de (2.4).

Paso 2.

Tenemos las estimaciones

$$|u_\lambda(t)| \leq |u_0| \qquad \forall t \geq 0$$

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \qquad \forall t \geq 0, \forall \lambda > 0$$

Para ello el siguiente lema

Lema 2.1. *Sea* $w \in C^{'}([0,+\infty);H)$ *una función que satisface*

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad en \quad [0,+\infty),$$

entonces las funciones $t \to |w(t)|$ *y* $t \to \left|\frac{dw}{dt}(t)\right| = |A_\lambda w(t)|$ *son decrecientes en* $[0,+\infty)$.

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= (0,w) \\ &= \left(\frac{dw}{dt} + A_\lambda w, w\right) \\ &= \left(\frac{dw}{dt}, w\right) + (A_\lambda w, w). \end{aligned}$$

Por Proposición 2.2(e) se tiene que $(A_\lambda w, w) \geq 0$, luego $\left(\frac{dw}{dt}, w\right) \leq 0$ y por tanto $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 \leq 0$.

Como la derivada es menor que cero tenemos que la función es decreciente en $[0,+\infty)$.

Como que A_λ es un operador lineal acotado, se deduce que $w \in C^\infty([0,+\infty);H)$ y también

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right) + A_\lambda\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0$$

Análogamente

$$\begin{aligned} 0 &= \left(0, \frac{dw}{dt}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right) + A_\lambda\left(\frac{dw}{dt}\right), \frac{dw}{dt}\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right), \frac{dw}{dt}\right) + \left(A_\lambda\left(\frac{dw}{dt}\right), \frac{dw}{dt}\right) \end{aligned}$$

Por Proposición 2.2(e) se tiene $\left(A_\lambda\left(\frac{dw}{dt}\right), \frac{dw}{dt}\right) \leq 0$ luego $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dt}\right), \frac{dw}{dt}\right) \geq 0$ y por tanto $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{dw}{dt}\right|^2 \leq 0$.

Como la derivada es menor que cero tenemos que la función es decreciente en $[0,+\infty)$.

De esta forma, al ser ambas decrecientes se tiene que

$$|u_\lambda(t)| \leq |u_0| \quad \text{y} \quad |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0|$$

Paso 3.

Se probará que para todo $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge, acuando $\lambda \to 0$, a algún límite $u(t)$. Además, la convergencia es uniforme en todo intervalo acotado $[0, T]$.

Para todo $\lambda, \mu > 0$ tenemos

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
0 &= (0, u_\lambda(t) - u_\mu(t)) \\
&= \left(\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda(t) - u_\mu(t) \right) \\
&= \left(\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt}, u_\lambda(t) - u_\mu(t) \right) + \left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda(t) - u_\mu(t) \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 + \left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda(t) - u_\mu(t) \right).
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
(A_\lambda u_\lambda - &A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = \\
&= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\mu u_\mu - J_\mu u_\mu - u_\mu) \\
&= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, (I - J_\lambda) u_\lambda - (I - J_\mu) u_\mu + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\
&= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\
&= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda) - A(J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\
&= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu),) J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\
&\geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu).
\end{aligned}$$

De esto tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 &= -\left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda(t) - u_\mu(t)\right) \\
&\leq -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \\
&= (A_\mu u_\mu - A_\lambda u_\lambda, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \\
&= (A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda) - (A_\mu u_\mu, \mu A_\mu u_\mu) - (A_\lambda u_\lambda, \lambda A_\lambda u_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, \mu A_\mu u_\mu) \\
&= (A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda) - \mu|A_\mu u_\mu|^2 - \lambda|A_\mu u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda, \mu A_\mu u_\mu) \\
&\leq (A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda) + \mu|A_\mu u_\mu|^2 + \lambda|A_\mu u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda, \mu A_\mu u_\mu) \\
&(\text{ sin pérdida de generalidad } \quad A_\mu u_\mu \leq A_\lambda u_\lambda) \\
&\leq (A_\lambda u_\lambda, \lambda A_\lambda u_\lambda) + \mu|A_\mu u_\mu|^2 + \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + (A_\lambda u_\lambda, \mu A_\lambda u_\lambda) \\
&= \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu|A_\mu u_\mu|^2 + \lambda|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu|A_\lambda u_\lambda|^2 \\
&\leq \lambda|Au_0|^2 + \mu|Au_0|^2 + \lambda|Au_0|^2 + \mu|Au_0|^2 \\
&= 2(\lambda + \mu)|Au_0|^2.
\end{aligned}$$

Así

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|Au_0|^2,$$

integrando esta ecuación tenemos

$$|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t|Au_0|^2,$$

o lo que es igual

$$|u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}|Au_0|. \tag{2.5}$$

Se deduce así que para cada $t \geq 0$ fijo, $u_\lambda(t)$es una sucesión de Cauchy cuando $\lambda \to 0$ y así converge al límite $u(t)$. Pasando al límite en 2.5 cuando $\mu \to 0$ se tiene que

$$|u_\lambda - u| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|.$$

Por lo tanto, la convergencia es uniforme en t en todo intervalo acotado $[0, T]$ y así $u \in C([0, +\infty); H)$.

Paso 4.

Asumamos que $u_0 \in D(A^2)$, es decir, $u_0 \in D(A)$ y $Au_0 \in D(A)$, probaremos que $\frac{du_\lambda}{dt}$ converge, cuando $\lambda \to 0$ a algún límite y que la convergencia es uniforme en todo intervalo $[0, T]$.

Establezcamos que $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$, de forma que

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0.$$

Siguiendo los mismos argumentos del paso 3, tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu| \leq (|A_\lambda u_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda|A_\lambda v_\lambda| + \mu|A_\mu v_\mu|).$$

Por el Lema 2.1 tenemos que

$$|A_\lambda v_\lambda(t)| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0|,$$

similarmente

$$|A_\mu v_\mu(t)| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|.$$

Finalmente, ya que $Au_0 \in D(A)$, obtenemos

$$\begin{aligned} A_\lambda A_\lambda u_0 &= J_\lambda A J_\lambda A u_0 \\ &= J_\lambda J_\lambda A A u_0 \\ &= J_\lambda^2 A^2 u_0 \end{aligned}$$

y por tanto

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|.$$

Se concluye que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|A^2 u_0|^2.$$

Así, al igual que en el paso 3 que $v_\lambda(t)$ converge cuando $\lambda \to 0$ a algún límite y la convergencia es uniforme en todo intervalo acotado $[0, T]$.

Paso 5.

Asumiendo que $u_0 \in D(A^2)$ probaremos que u es una solución de 2.3.

Por los pasos 3 y 4 sabemos que pata todo $T < \infty$ $u_\lambda(t) \to u(t)$ cuando $\lambda \to 0$ uniformemente en $[0, T]$ y $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge cuando $\lambda \to 0$, uniformemente en $[0, T]$. De aquí que $u \in C^{'}([0, +\infty); H)$ y que $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t)$ cuando $\lambda \to 0$, uniformemente en $[0, T]$.

Reescribamos el problema cómo

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0$$

Nótese que $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ cuando $\lambda \to 0$, pues

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \to 0. \end{aligned}$$

Aplicando el hecho de que un operador se dice cerrado si tiene grafo cerrado, se deduce que $u(t) \in D(A)$ $\forall t \geq 0$, y

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0.$$

Finalmente, ya que $u \in C^{'}([0, +\infty); H)$, la función $t \to Au(t)$ es contínua de $[0, +\infty)$ en H y por lo tanto $u \in C([0, +\infty); D(A))$

Paso 6.

Concluimos aquí la prueba del teorema por medio del siguiente lema

Lema 2.2. *2.2 Sea $U_0 \in D(A)$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\bar{u_0} \in D(A^2)$ tal que $|u_0 - \bar{u_0}| < \epsilon$. En otras palabras, $D(A^2)$ es denso en $D(A)$.*

Demostración. Fijemos $\bar{u_0} = J_\lambda u_0$ para algún $\lambda > 0$ apropiado. Tenemos que

$$\bar{u_0} \in D(A) \text{ y } \bar{u_0} + \lambda A\bar{u_0} = u_0.$$

Así, $A\bar{u_0} \in D(A)$, es decir, $\bar{u_0} \in D(A^2)$. Por otro lado sabemos que

$$\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \qquad \lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda Au_0 - Au_0| = 0,$$

$$J_\lambda A u_0 = A_\lambda A u_0 = A J_\lambda u_0$$

La conclusión deseada se tendrá así bajo la escogencia de un $\lambda > 0$ suficientemente pequeño.

Continuando con la prueba del teorema 2.6, dado $u_0 \in D(A)$ construiremos, de acuerdo con el Lema 2.2 una suceción (u_{0_n}) tal que $u_{0_n} \to u_0$ y $Au_{0_n} \to Au_0$. Por el paso 5 sabemos que existe una solución u_n del problema

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt}(t) + Au_n = 0, & \text{en } [0, +\infty) \\ u_n(0) = u_{0_n}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Tenemos para todo $t \geq 0$

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0_m} - u_{0_n}| \to 0 \text{ cuando } m, n \to \infty,$$

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| \leq |Au_{0_n} - Au_{0_m}| \to 0 \text{ cuando } m, n \to \infty.$$

Por lo tanto

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{uniformemente en} \quad [0, +\infty),$$

$$\frac{du_n}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t) \quad \text{uniformemente en} \quad [0, +\infty).$$

Con $u \in C^{'}([0, +\infty); H)$. Pasando al límite en 2.6 usando el hecho de que A es un operador cerrado, vemos que $u(t) \in D(A)$ satisface 2.3 y de aquí que $u \in C^{'}([0, +\infty); D(A))$.

Si asumiéramos el caso en que $u_0 \in H$ se podría mantener la prueba de que como $\lambda \to 0$, $u_\lambda(t)$ converge, para todo $t \geq 0$, a algún límite $u(t)$. Pero puede suceder que este límite $u(t)$ no pertenezca a $D(A)$ para todo $t \geq 0$ y que $u(t)$ no sea diferenciable en algún punto en $[0, +\infty)$, por lo tanto $u(t)$ no es una solución "clásica" de 2.3. En efecto, para tal u_0, $u(t)$ va a ser una solución "generalizada" de 2.3. Sin embargo, como veremos más adelante, esto no ocurre cuando A es un operador autoadjunto, en ese caso $u(t)$ es una solución "clásica" de 2.3 para todo $u_0 \in H$, incluso cuando $u_0 \notin D(A)$.

2.3. Regularidad

En esta sección vamos a demostrar que la solución $U(t)$ de 2.3 obtenida en el Teorema 2.6 es mas regular que simplemente $C^{'}([0,+\infty);H)\cap C([0.+\infty);D(A))$ haciendo suposiciones adicionales sobre la condición inicial u_0. Para ésto definimos por inducción el espacio

$$D(A^k)=\left\{v\in D(A^{k-1};Av\in D(A^{k-1}))\right\}$$

donde k es un entero mayor o igual a dos.

$D(A^k)$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$(u,v)\sum_{j=0}^{k}(A^ju,A^jv)$$

y norma

$$|u|=\left(\sum_{j=0}^{k}|A^ju|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 2.7. *Supongamos $u_0\in D(A^k)$ para algún entero $k\geq 2$. Entonces la solución u del problema 2.3 en el Teorema 2.6 satisface $u\in C^{k-j}([0,+\infty);D(A^j))$ $\forall j=0,1,...,k$. [Brezis, 2010, p. 191]*

Demostración. Supongamos primero $k=2$. Consideremos el espacio de Hilbert $H_1=D(A)$ con el producto escalar anteriormente definido.

$A_1:D(A_1)\subset H_1\to H_1$ estará definido por

$$D(A_1)=D(A^2)$$

$$A_1u=Au \quad \text{para} \quad u\in D(A_1).$$

Éste operadores monótono maximal, pues

$$(A_1u,u)=(Au,u)\geq 0 \quad \forall u\in D(A_1),$$

además,

$$\forall f \in H \ \ \exists u \in D(A_1) \quad \text{tal que} \quad u + A_1 u = f.$$

Aplicando el Teorema 2.6 al operador A_1 en el espacio H_1 existirá una única función

$$u \in C^{'}([0,+\infty); H_1) \cap C([0,+\infty); D(A_1))$$

tal que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + A_1 u = 0 \qquad \text{en} \ \ [0,+\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

En particular, u satisface (2.3). Por unicidad, u es solución de (2.3). Sólo queda ver que

$$u \in C^2([0,+\infty); H).$$

Ya que $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ y $u \in C([0,+\infty); H_1)$, se sigue que $Au \in C^{'}([0,+\infty); H)$ y

$$\frac{d}{dt}(Au) = A\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Aplicando (2.3), vemos que $\frac{du}{dt} \in C^{'}([0,+\infty); H)$ es decir, $u \in C^2([0,+\infty); H)$ y

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dt}\right) + A\left(\frac{du}{dt}\right) = 0 \quad \text{en} \quad [0,+\infty) \tag{2.7}$$

Pasamos ahora al caso general $K \geq 3$. Razonando por inducción sobre k : Asumamos que el resultado se mantiene para $(k-1)$ y sea $u_0 \in D(A^k)$. Por el análisis previo sabemos que la solución u de (2.3) pertenece a $C^2([0,+\infty); H) \cap C^{'}([0,+\infty); D(A))$ y que u satisface (2.7).

Haciendo $v = \frac{du}{dt}$ tenemos que

$$v \in C^{'}([0,+\infty); H) \cap C([0,+\infty); D(A)),$$

$$\frac{dv}{dt} + Av = 0 \quad \text{en} \quad [0,+\infty),$$

$$v(0) = -Au_0.$$

En otras palabras, v es la solución de (2.3) correspondiente a la condición inicial $v_0 = -Au_0$.

Ya que $v \in D(A^{k-1})$, sabemos por inducción que

$$v \in C^{k-1-j}([0,+\infty); D(A^j)) \qquad \forall j = 0, 1, ..., k-1. \tag{2.8}$$

Es decir

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty); D(A^j)) \qquad \forall j = 0, 1, ..., k-1.$$

Sólo queda ver que

$$u \in C([0,+\infty); D(A^k)).$$

Aplicando 2.8 con $j = k-1$, vemos que

$$\frac{du}{dt} \in C([0,+\infty); D(A^{k-1})),$$

de donde

$$Au \in C([0,+\infty); D(Ak-1)),$$

es decir

$$u \in C([0,+\infty); D(A^k))$$

2.4. Solución al problema del valor inicial $u_0 \in H$

Como vimos en el capítulo anterior, el teorema de Hille-Yosida puede que no nos determina una solución "clásica" del sistema cuando $u_0 \in H$ y $u_0 \notin D(A)$. Este problema se soluciona vía operadores autoadjuntos.

Decimos que un operador lineal no acotado A es simétrico si $(Au, v) = (u, Av)$ para todo $u, v \in D(A)$. Por su parte, se dice que A es autoadjunto si $D(A^*) = D(A)$ y $A^* = A$.

Cuando un operador es acotado, las definiciones de simétrico y autoadjunto coincidirán. Sin embargo, si el operador A es no acotado, va a existir diferencia entre ellos.

Claramente cualquier operador autoadjunto será simétrico. sin embargo no todo operador simétrico será autoadunto, un operador A es simétrico si y sólo si $A \subset A^*$, es decir, $D(A^*) \subset D(A)$ y $A^* \subset A$. Puede suceder que A sea simétrico y que $D(A) \neq D(A^*)$. Sin embargo, si A es monótono maximál, se tendrá que A es simétrico si y sólo si A es autoadjunto.

Proposición 2.4. *Sea A un operador simétrico monótono maximal. Entonces A es autoadjunto. [Brezis, 2010, p. 193]*

Demostración. Sea $J_1 = (I + A)^{-1}$. Probaremos que J_1 es autoadjunto.

Ya que $J_1 \in \mathcal{L}(H)$ es suficiente ver que $(J_1 u, v = (u, J_1 v))\ \forall u, v \in H$.

Sea $u_1 = J_1 u$ y $v_1 = J_1 v$, tal que

$$u_1 + Au_1 = u,$$

$$v_1 + Av_1 = v.$$

Como A es simétrico

$$\begin{aligned} (u_1, Av_1) &= (Au_1, v_1) \\ (u_1, v - v_1) &= (u - u_1, v_1) \\ (u_1, v) - (u_1, v_1) &= (u, v_1) - (u_1, v_1) \\ (u_1, v) &= (u, v_1) \\ (J_1 u, v) &= (u, J_1 v). \end{aligned}$$

Sea $u \in D(A^*)$ y sea $f = u + A^* u$. Tenemos

$$\begin{aligned} (f, v) &= (u + A^* u, v) \\ &= (u, v) + (u, Av) \\ &= (u, v + Av) \qquad \text{Para todo } v \in D(A). \end{aligned}$$

Es decir,

$$
\begin{aligned}
(f, J_1 w) &= (u + A^*, w_1) \\
&= (u, w_1) + (A^* y, w_1) \\
&= (u, w_1) + (u, A w_1) \\
&= (u, w_1 + A w_1) \\
&= (u, w) \qquad \forall w \in H.
\end{aligned}
$$

Así $u = J_1 f$ y entonces $u \in D(A)$. Esto prueba que $D(A^*) = D(A)$ y por lo tanto A es autoadjunto.

2.4.1. Teorema de Hille-Yosida Generalizado

Debido a que el Teorema de Hille-Yodia esta ambientado en condiciones iniciales $u_0 \in D(A)$ puede llegar a no ser suficiente en algunos casos en los que la condición no esté en el dominio del operador, para ello, el teorema de Hille-Yosida generalizado nos permite tomar una condición inicial $u_0 \in H$.

Teorema 2.8. *Sea A un operador monótono maximal autoadjunto. Entonces para cada $u_0 \in H$ existe una única función $u \in C([0,\infty); H) \cap C^{'}((0,\infty); H) \cap C((0,\infty); D(A))$ tal que*

$$
\begin{cases}
\frac{du}{dt} + Au = 0 \qquad en \;\; (0, +\infty), \\
u(0) = u_0.
\end{cases}
$$

Más aún, tenemos

$$
|u(t)| \leq |u_0| \quad y \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \frac{1}{t} |u_0| \;\; \forall t > 0,
$$

$$
u \in C^k((0, +\infty); D(A^l)) \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}
$$

[Brezis, 2010, p. 194]

Demostración.

Unicidad.

Sean u y $\bar{u}$ dos soluciones. Por la monotonía de A vemos que $\varphi(t) = |u(t) - \bar{u}(t)|^2$ es no creciente en $(0, +\infty)$.

Por otro lado, φ es cotínua en $[0, +\infty)$ y $\varphi(0) = 0$. Así $\varphi = 0$.

Existencia. Paso 1.

Asumamos primero que $u_0 \in D(A^2)$ y sea u la solución de (2.3) dada por el Teorema 2.6.

Afirmamos que

$$\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leq \frac{1}{t}|u_0| \quad \forall t > 0.$$

Como en la Proposición 2.4 tenemos que

$$J_\lambda^* = J_\lambda \quad \text{ y } \quad A_\lambda^* = A_\lambda \quad \forall \lambda > 0.$$

Volvemos a introducir el problema de aproximación que se usó en la prueba del Teorema 2.6

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{ en } \quad [0, +\infty),$$
$$u_\lambda(0) = u_0.$$

Tomando el producto escalar con u_λ e integrando en $[0.T]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda, u_\lambda\right) &= \left(\frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda\right) + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda|^2 + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda).\end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de esta igualdad tenemos que tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\, dt &= \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^T \left(-\frac{du}{dt}, u_\lambda\right) dt \\
&= \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^T -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda|^2 dt \\
&= \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \frac{1}{2}|u_0|^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\, dt = \frac{1}{2}|u_0|^2 \tag{2.9}$$

Tomando ahora le mismo producto escalar, pero con $t\frac{du_\lambda}{dt}$ e integrando sobre $[0, T]$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda, t\frac{du_\lambda}{dt}\right) &= \left(\frac{du_\lambda}{dt}, t\frac{du_\lambda}{dt}\right) + \left(A_\lambda u_\lambda, t\frac{du_\lambda}{dt}\right) \\
&= t\left(\frac{du_\lambda}{dt}, \frac{du_\lambda}{dt}\right) + t\left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right) \\
&= t\left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 + t\left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Integrando a ambos lados de esta igualdad tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 tdt + \int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right) tdt &= \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 tdt + \int_0^T \left(-\frac{du_\lambda}{dt}, \frac{du_\lambda}{dt}\right) tdt \\
&= \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 tdt - \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 tdt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 tdt + \int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right) tdt = 0. \tag{2.10}$$

Ahora, usando el hecho de que $A_\lambda^* = A_\lambda$ integraremos por partes la segunda integral de 2.10

$$\int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right) tdt = \int_0^T \frac{1}{2}\left[\left(A_\lambda u_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda\right) + \left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right)\right] tdt$$
$$= \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)tdt$$
$$= \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda)T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt. \tag{2.11}$$

Por otro lado, ya que la función $t \to \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|$ es no creciente, tenemos

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt \geq \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}. \tag{2.12}$$

Combinando (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12), obtenemos

$$\frac{1}{2}|u_0|^2 = \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)\, dt$$
$$= \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda)T - \int_0^T \left(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}\right) tdt$$
$$= \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda)T + \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}\right|^2 tdt$$
$$\geq \frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda)T + \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}.$$

En particular

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right| \leq \frac{1}{T}|u_0| \quad \text{Para todo } T > 0. \tag{2.13}$$

Finalmente pasando al límite en 2.13 cuando $\lambda \to 0$ tenemos

$$\frac{du_\lambda}{dt} \to \frac{du}{dt}$$

Paso 2.

Asumamos ahora que $u_0 \in H$. Sea (u_{0_n}) una sucesión en $D(A^2)$ tal que $u_{0_n} \to u_0$. Sea u_n solución de

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{ en } [0, +\infty), \\ u_n(0) = u_{0_n}. \end{cases}$$

Sabemos por el Teorema 2.6 que

$$|u_n(t) - u_n(t)| \leq |u_{0_n} - u_{0_m}| \quad \forall m, n \ \forall t > 0,$$

y por el paso 1 sabemos que

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t) \right| \leq \frac{1}{t} |u_{0_n} - u_{0_m}| \quad \forall m, n \ \forall t > 0.$$

De aquí que u_n converge uniformemente en $[0, +\infty)$ a un límite $u(t)$ y que $\frac{du_n}{dt}(t)$ converge a $\frac{du}{dt}(t)$ uniformemente en todo intervalo $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$. La función límite u satisface $u \in C([0, +\infty); H) \cap C^{'}((0, +\infty); H)$, $u(t) \in D(A)$ Para todo $t > 0$ y $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$ Para todo $t > 0$. Mostraremos ahora por inducción sobre $k \geq 2$ que

$$u \in C^{k-j}((0, +\infty); D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, ..., k. \tag{2.14}$$

Asumamos que se mantiene para $k - 1$. En particular tenemos

$$u \in C^{'}((0, +\infty); D(A^{k-1})).$$

Para probar (2.14) basta con ver que

$$u \in C((0, +\infty); D(A^k)).$$

Consideremos le espacio de Hilbert $\tilde{H} = \overline{D(A^{k-1})}$ y el operador $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset \tilde{H} \to \tilde{H}$ definido por

$$\begin{cases} D(\tilde{A}) = D(A^k), \\ \tilde{A} = A. \end{cases}$$

$\tilde{A}$ es monótono maximal y simétrico en $\tilde{H}$. Así, $\tilde{A}$ es autoadjunto. Aplicando la primera afirmación del Teorema 2.8 en el espacio $\tilde{H}$ al operador $\tilde{A}$ obtenemos una única solución v del problema

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 & \text{en } (0, +\infty), \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

dado $v_0 \in H$. Más aún

$$v \in C([0, +\infty); \tilde{H}) \cap C^{'}((0, +\infty); \tilde{H}) \cap \cap C((0, +\infty); D(\tilde{A})).$$

Escogiendo $v_0 = u(\epsilon)$ $\epsilon > 0$ concluimos que

$$u \in C((\epsilon, +\infty); D(A^k)).$$

CAPÍTULO 3

La Ecuación de Onda

Sea $(0,\pi) \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Definamos $Q = (0,\pi) \times (0,\infty)$. Consideremos el siguiente problema: Encontrar una función $u(x,t) : [0,\pi] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{en } Q \tag{3.1}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{en } (0,\pi)) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \quad \text{en } (0,\pi)). \tag{3.4}$$

Donde t es la variable temporal, y u_0, v_0 son funciones dadas.

La ecuación (3.1) es la llamada ecuación de onda.

El operador $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ frecuentemente se denota $\Box$ y es llamado d'Alembertiano.

La ecuación de onda es un ejemplo de ecuación hiperbólica que modela las pequeñas vibraciones de una cuerda en ausencia de una fuerza exterior. Para cada t, la gráfica de la función $x \in (0,\pi) \to u(x,t)$ representa la configuración de una cuerda en el tiempo t.

Más general, cuando el laplaciano involucra más variables, se modela la propagación de una onda, bien sea acústica, electromagnética o de otro tipo, en algún medio elástico homogéneo.

La ecuación 3.2 es la condición homogénea de frontera de Dirichlet, significa que la cuerda esta fija en los extremos.

Las ecuaciones (3.3) y (3.4) representan el estado inicial del sistema: la configuración inicial de desplazamiento está descrita por u_0, y la velocidad inicial está descrita por v_0. El dato (u_0, v_0) se llama dato de Cauchy.

De aqui en adelante asumiremos $\Omega = (0,\pi)$.

3.1. Existencia

Teorema 3.9. *Sea $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v_0 \in H_0^1(\Omega)$. Entonces existe una única solución u de (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) que satisface*

$$u \in C([0,\infty); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^{'}([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty); L^2(\Omega)) \tag{3.5}$$

Además

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = |v_0|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)} \tag{3.6}$$

[Brezis, 2010, p. 336]

Ésta última es la ley de conservación que afirma que la energía es invariante en el tiempo

Demostración. Consideremos $u(x,t)$ como una función vectorial definida en $[0,\infty)$; mas exáctamente, para cada $t \geq 0$, $u(t)$ denota el mapeo $x \to u(x,t)$.

Escribiremos (3.1) como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{ en } (0,\pi)\times(0,\infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{ en } (0,\pi)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{3.7}$$

y estableceremos $U = \binom{u}{v}$, de forma que (3.7) se convierte en

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \tag{3.8}$$

donde

$$\begin{aligned} AU &= \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ahora aplicamos el teorema de Hille-Yosida en el espacio $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ equipado con el producto escalar

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega u_1' \cdot u_2' dx + \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx,$$

donde $U_1 = \binom{u_1}{v_1}$ y $U_2 = \binom{u_2}{v_2}$ Consideremos el operador no acotado $A : D(A) \subset H \to H$ definido como en 3.9, tal que

$$D(A) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

Veamos que $I + A$ es monótono maximal

i) $A + I$ es monótono; en efecto, si $U = \binom{u}{v} \in D(A)$ tenemos

$$\begin{aligned} &(AU, U)_H + |U|^2 \\ &= -\int_\Omega v' \cdot u' dx - \int_\Omega vu dx - \int_\Omega (u'')v + \int_\Omega |u'|^2 dx + \int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega v^2 dx. \end{aligned}$$

Por (3.7) tenemos que será igual a

$$-\int_{\Omega} vudx + \int_{\Omega} |u'|^2 dx + \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} v^2 dx \geq 0$$

ii) $A + I$ es monótono maximal. Esto equivale a probar que $A + 2I$ es sobreyectiva.

Dado $F = \binom{f}{g} \in H$, debemos resolver la ecuación $AU + 2U = F$. Es decir, el sistema

$$\begin{cases} -v + 2u = f & \text{en} \quad \Omega, \\ -\Delta u + 2v = g & \text{en} \quad \Omega. \end{cases} \tag{3.10}$$

con $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$.

De (3.10) tenemos que

$$-\Delta u + 4u = 2f + g. \tag{3.11}$$

(3.11) tendrá una única solución $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, entonces como $v = 2u - f$ obtenemos que $v \in H_0^1(\Omega)$, lo que resuelve 3.10.

Aplicando el teorema de Hille-Yosida, vemos que existe una única solución del problema

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = 0 & \text{en} \quad [0, +\infty), \\ U(0) = U_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Con

$$U \in C^{'}([0.\infty); H) \cap C([0, \infty); D(A)), \tag{3.13}$$

y ya que $U_0 = \binom{u_0}{v_0} \in D(A)$, de (3.13) se deduce (3.5) Para probar (3.6) multiplicaremos (3.1) por $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0,$$

e integrando sobre Ω

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx$$

y

$$\int_{\Omega}(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\frac{\partial u}{\partial t}dx = \int_{\Omega} u' \cdot \frac{\partial}{\partial t}(u')dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}|u'|^2 dx$$

3.2. Regularidad

Teorema 3.10. *Supongamos que los datos iniciales satisfacen*

$$u_0 \in H^k(\Omega),\ \ v_0 \in H^k(\Omega)\ \ \forall k$$

y las condiciones de compatibilidad

$$\Delta^j u_0 = 0 \quad en \ \ \Gamma \ Para\ todo\ j \geq 0 \quad entero$$

$$\Delta^j v_0 = 0 \quad en \ \ \Gamma \ Para\ todo\ j \geq 0 \quad entero$$

Entonces la solución u de 3.1, 3.2, 3.3, 2.10 pertenece a $C^{\infty}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ *[Brezis, 2010, p. 336]*

Demostración. Por inducción sobre k tenemos que

$$D(A^k) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; u \in H^{k+1}(\Omega)\ y\ \Delta^j u = 0\ en\ \Gamma\ \text{Para todo} j 0 \leq j \leq \frac{k}{2}$$
$$v \in H^k(\Omega)\ y\ \Delta^j u = 0\ en\ \Gamma\ \text{Para todo} j 0 \leq j \leq \frac{k+1}{2}$$

En particular, $D(A^k) \subset H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ con inyección contínua. Aplicando el teorema 2.7vemos que si $U_0 = \binom{u_0}{v_0} \in D(A^k)$, entonces la solución U de 3.12 satisface

$$u \in C^{k-j}([0, \infty); D(A^j)) \quad \forall j = 0, 1, ..., K.$$

Así, $u \in C^{k-j}([0, \infty); H^{j+1}(\Omega))\ \forall j = 0, 1, ..., k$. Podemos concluir entonces que $u \in C^k(\bar{\Omega} \times [0, \infty))\ \forall k$

CAPÍTULO 4

Conclusiones

En este trabajo realizamos una motivación de la ecuación de onda desde un punto de vista musical. Apreciando el fenómeno inicialmente desde las cuerdas de la guitarra. Analizar cómo los acordes musicales y los punteos se remitían a los armónicos de Pitágoras hizo necesario, estudiar el fenómeno a partir de la física, considerando todas las repercusiones que esto traería, por ejemplo, que la onda debía estar sujeta a una fricción que detuviera la onda en determinado momento. Todo esto fue pertinente para poder formular el problema de manera clara y apropiada.

Se acudió a las herramientas del análisis y las ecuaciones diferenciales para plantear la existencia, unicidad y regulardiad de la ecuación de onda y se optó por encontrar una función u que satisfaciera $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)$, en el intervalo $(0, \pi)$, anclada en los extremos y con condiciones iniciales $u(x,0) = u_0(x)$ y $u_t(x,0) = v_0(x)$.

Cabe resaltar que la solución que se encontró a este problema es una solución débil sobre los espacios H_0^1 por lo cual el soporte de teoría de la medida fue indispensable para entender el problema desde el punto de vista matemático y abordarlo debidamente bajo las condiciones dada.

Este trabajo, permitió analizar un fenómeno tal como el de la música, más específicamente al de las cuerdas de la guitarra, mostrándo cómo las matemáticas están íntimamente relacionadas con diversos fenómenos de la vida cotidiana.

Bibliografía

[Apostol, 1974] Apostol, T. (1974). *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley.

[Bartle, 1995] Bartle, R. (1995). *The elements of integration and Lebesgue measure*. Wiley classics library. Wiley.

[Benson, 2007] Benson, D. (2007). *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press.

[Brezis, 2010] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer New York.

[Hirsch and Smale, 2004] Hirsch, M. and Smale, S. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems, And An Introduction To Chaos*. Universitext. Elsevier.

[Parker, 2010] Parker, B. (2010). *Good Vibrations: The Physics of Music*. Good Vibrations. Johns Hopkins University Press.

[Rudin, 1980] Rudin, W. (1980). *Principios de análisis matemático*. McGraw-Hill.

[Strauss, 1992] Strauss, W. (1992). *Partial Differential Equations. An Introducction*. John Wiley and Sons.