LA ECUACIÓN DE ONDA SEMILINIEAL CON CONDICIONES DE PERIODICIDAD DOBLE

TRABAJO DE ASCENSO PARA PROFESOR TITULAR

ARTURO SANJUÁN
PROFESOR ASOCIADO

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá DC
2019

INTRODUCCIÓN

Un capítulo de gran importancia en la historia de la matemática tiene su origen en el Siglo XVIII alrededor del problema de encontrar la curva que describe una cuerda en vibración. En otras palabras, el objetivo es encontrar una función $u(x,t)$ que represente el desplazamiento transversal de la cuerda (de un violín por ejemplo) en el punto x y en el instante t.

Daniel Bernoulli (basado en trabajos de su padre Johan Bernoulli) planteó la siguiente ecuación diferencial parcial que debe satisfacer la función u

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0.$$

La ecuación anterior es conocida como la ecuación de onda (lineal homogénea sin disipación, en terminología moderna) [35, p. 183–189] [73, p. 420–427] [75, p. 298-311] [77, p. 310-317]. Jean le Rond D'Alembert (de manera casi simultanea a Leonhard Euler) propuso soluciones de forma

$$u(x,t) = \mathfrak{f}(t+x) + \mathfrak{g}(t-x).$$

Por su parte Daniel Bernoulli introdujo el método de separación de variables y las soluciones a la ecuación de onda propuestas por él vienen representadas por series de senos cuando los extremos de la cuerda están fijos

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(nx).$$

Las soluciones de D'Alembert y de Bernoulli parecían no coincidir en absoluto. Fueron necesarios más de ochenta años, con los trabajos de Lagrange y Fourier, para conciliar las dos representaciones. Dicha conciliación dio origen a una de las ramas más importantes de las matemáticas: el análisis de Fourier [5, p. 531-533]. Incluso algunos matemáticos, como Walter Rudin, han afirmado que el problema descrito dio origen a la teoría de conjuntos [69].

A lo largo de este trabajo asumiremos las condiciones doble-periódicas

$$u(x,t) = u(x,t+2\pi) = u(x+2\pi,t).$$

El tratamiento para el caso Dirichlet-periódico –es decir: cuando los extremos de la cuerda están fijos y se buscan soluciones periódicas– es similar y muchos de los resultados de existencia, unicidad y regularidad se mantienen. En cualquiera de los dos casos (doble-periódico o Dirichlet-periódico) y a pesar de estar involucrada la variable temporal, trataremos el problema como un problema de frontera y no como un problema de evolución [62, p. 146].

Desde el punto de vista de la mecánica analítica [3, p. 53.154] [73, p. 87-236] [77, p. 437–482] , la ecuación onda corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange que provienen del funcional de acción

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (u_t^2 - u_x^2)\,dxdt. \tag{1}$$

La expresión $\int u_x^2 \, dx$ representa la energía potencial del sistema. En distintos problemas físicos puede suceder que la fuerza de restauración presente una perturbación no-lineal $G(u)$ o que una fuerza externa $f(x,t)$ actúe sobre el sistema. En este caso la energía potencial toma la forma $\int (u_x^2 - G(u) + fu) \, dx$ y la densidad del Lagrangiano viene dada por

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2) + G(u) - fu.$$

Tomando $g = G'$, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange que de vienen dada por la ecuación de onda semilineal

$$u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f.$$

En matemáticas una misma ecuación puede representar distintos fenómenos. La ecuación de onda semilineal, por ejemplo, modela problemas de geometría, de física cuántica relativista y de vibraciones de cuerdas. La ecuación de onda semilineal tiene un especial interés en la teoría de mesones y la teoría cuantíca de campos [74]. Sin embargo, en este trabajo no abordaremos las aplicaciones o la interpretación física de la ecuación o sus soluciones. Nos centraremos únicamente el aspecto matemático.

En la segunda mitad del siglo XX, los trabajos de Lovicarovà, Mawhin, Willem Brezis, Rabinowitz, Coron y Nirenberg hicieron notables aportes (al problema de vibraciones libres y forzadas) en las preguntas de existencia, multiplicidad, bifurcación y regularidad de soluciones al problema de la ecuación de onda semilineal cuando se asume que g es una no-linealidad monótona. Es decir, $g'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ [12, 13, 14, 53, 57, 56, 58, 62, 63, 82]. Uno de los métodos destacados para determinar la existencia en el caso en que g es monótona es el Teorema del Paso de Montaña [29, 39, 43, 48, 79].

Coron [28] encontró soluciones sin asumir monotonía pero se requiere que g sea una función impar. Willem [83] y Hofer [37] de manera independiente y simultanea encontraron, sin asumir monotonía, que el rango forma un subconjunto denso de funciones. Sin embargo, los resulados de Hofer y Willem no dan condiciones suficientes para que un forzamiento f esté en el rango de $u \mapsto u_{tt} - u_{xx} + g(u)$.

Para el caso en el que g es no-monótona, desde los años ochenta el profesor Alfonso Castro viene liderando la investigación de la ecuación de onda semilineal cuando el término no-lineal puede ser no-monótono dando condiciones suficientes para que f esté en el rango [17, 19, 20, 23, 24, 25, 26].

En este trabajo nos concentramos en estudiar la existencia de soluciones débiles a la ecuación de onda semilineal sujeta a las condiciones doble-periódicas.

Para la lectura de este trabajo se requieren conocimientos avanzados de análisis matemático. Específicamente análisis funcional, teoría espectral, análisis de Fourier, teoría de la medida, espacios de Sobolev, cálculo avanzado y ecuaciones diferenciales parciales [11, 18, 31, 40, 41, 42, 44, 52, 54, 66, 67, 68, 78]. Son deseables, pero no estrictamente necesarios, conocimientos en análisis funcional no-lineal y teoría de grado [21, 29, 33, 43, 48, 79]. Cuando se emplee algún resultado especializado de estas áreas, será debidamente citado en el texto.

El trabajo está divido de la siguiente forma. En el capítulo 1 se estudiará la teoría lineal, el problema lineal homogéneo, el problema lineal forzado, las propiedades del operador lineal y el problema espectral. En el capítulo 2 haremos una delimitación de lo qué se entiende por ecuación de onda semilineal y por solución débiles. También se explicará el método de reducción de Lyapunov-Schmidt empleado. Se hará una breve revisión de los resultados en el caso monótono sin entrar en detalle en las demostraciones. En el capítulo 3 se dan las condiciones suficientes para que un forzamiento pertenezca al rango del operador semilineal no-monótono. Estudiaremos las vibraciones libres y el problema de bifurcación. Encontraremos soluciones a un problema no-regular. Finalmente en el capítulo 4 mostraremos un panorama con los problemas abiertos en el tema. Al final del trabajo se encuentra un índice alfabético y un índice de símbolos.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

EL PROBLEMA LINEAL

En este capítulo exponemos algunas propiedades básicas del operador de onda lineal. En las subsecciones siguientes calcularemos su núcleo (vibraciones libres al problema lineal homogéneo), el rango (vibraciones forzadas al problema lineal), el problema espectral (el cálculo de valores y funciones propias) y la compacidad. Finalmente haremos algunas observaciones para el inverso de perturbaciones del operador de onda.

1.1. El Núcleo del Operador de Onda

Denotamos con $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ al toro unidimensional. Es bien sabido que $\mathbb{T}$ es una variedad compacta unidimensional de clase C^∞ [1, p. 135] [38, p. 4] [81, p. 7]. Consideramos el conjunto $C^k(\mathbb{T}^2)$ como el conjunto de todas las funciones

$$\begin{aligned} u : \mathbb{T}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto u(x,t), \end{aligned}$$

(i.e. funciones doble-periódicas) con todas las derivadas de Frechet de orden $\leq k$ continuas [18]. De este modo, para cada $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, tiene sentido definir el operador lineal

$$\begin{aligned} \Box : C^{k+2}(\mathbb{T}^2) &\to C^k(\mathbb{T}^2) \\ u &\mapsto u_{tt} - u_{xx}. \end{aligned}$$

Al operador $\Box$ se le conoce como el *operador de onda* o *D'Alembertiano*. Así, la ecuación de onda lineal homogénea se puede reescribir como

$$\Box u = 0. \tag{1.1}$$

Encontrar todas las $u \in C^{k+2}(\mathbb{T}^2)$ que satisfacen (1.1) es determinar el núcleo de $\Box$ en $C^{k+2}(\mathbb{T}^2)$. Para tal fin realizamos el siguiente cambio de variable sobre las líneas características

$$\begin{cases} \xi := t + x \\ \eta := t - x. \end{cases}$$

En términos de las nuevas variables, (1.1) se transforma en

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Integrando con respecto a ξ y luego con respecto a η obtenemos las soluciones de D'Alembert

$$u(x,t) = \mathfrak{f}(x+t) + \mathfrak{g}(t-x), \tag{1.2}$$

donde $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in C^{k+2}(\mathbb{T})$ son arbitrarias. Decimos entonces que $u \in \ker \Box \subset C^{k+2}(\mathbb{T}^2)$ sii existen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in C^{k+2}(\mathbb{T})$ que satisfacen (1.2).

No obstante $\mathfrak{f}$ y $\mathfrak{g}$ no están determinadas de manera única en (1.2). Por ejemplo, si fijamos $c \in \mathbb{R}$ las dos parejas de funciones $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$ y $(\mathfrak{f} - c, \mathfrak{g} + c)$ representan la misma función u en el núcleo de $\Box$.

Para subsanar este problema Rabinowitz propuso la idea de *normalizar el núcleo* [63, p. 57]. Es un cálculo directo demostra que $u \in C^{k+2}(\mathbb{T}^2)$ satisface la ecuación (1.1) sii existe un único número real $\bar{v}$ y unas únicas funciones $v_1, v_2 \in C^{k+2}(\mathbb{T})$ de promedio nulo tales que

$$u(x,t) = \bar{v} + v_1(x+t) + v_2(t-x). \tag{1.3}$$

Más aún, podemos dar una fórmula inversa. Es decir, si $u \in \ker \Box \subset C^{k+2}(\mathbb{T}^2)$, podemos dar una fórmula explícita para $\bar{v} \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in C^{k+2}(\mathbb{T}^2)$ de promedio nulo en términos de u. En efecto, integrando a ambos lados en (1.3) vemos que

$$\bar{v} = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{T}^2} u.$$

Integrando a ambos lados de (1.3) sobre la línea características $(x, r-x)$ en $\mathbb{T}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} u(x, r-x)\,dx &= 2\pi\bar{v} + \int_0^{2\pi} v_1(r)\,dx + \int_0^{2\pi} v_2(r-2x)\,dx \\ &= 2\pi\bar{v} + 2\pi v_1(r) \quad \text{dado que } \int_0^{2\pi} v_2 = 0.\end{aligned}$$

Por tanto

$$v_1(r) = -\bar{v} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x, r-x)\,dx.$$

Una fórmula similar puede ser obtenida para v_2. La fórmula (1.3) y su fórmula inversa no requieren que $\bar{v}$, v_1, v_2 y u tengan derivadas, lo que hace pensar que es posible definirlas en espacios más generales. Es de nuestro interés los espacios $L^2(\mathbb{T}^2)$ y $L^2_0(\mathbb{T})$ de las funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue definidas en $\mathbb{T}$ y de promedio nulo. Podemos definir entonces la aplicación lineal continua $\mathscr{L} : \mathbb{R} \times L^2_0(\mathbb{T}) \times L^2_0(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ mediante la fórmula

$$\mathscr{L}(\bar{v}, v_1, v_2)(x,t) := \bar{v} + v_1(t+x) + v_2(t-x). \tag{1.4}$$

De manera similar, podemos definir la formula de inversión como la aplicación lineal continua $\mathscr{Q} : L^2(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{R} \times L^2_0(\mathbb{T}) \times L^2_0(\mathbb{T})$ mediante la fórmula

$$\mathscr{Q}(u)(r) := \left(\bar{u}, -\bar{u} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x, r-x)\,dx, -\bar{u} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x, r+x)\,dx\right), \tag{1.5}$$

donde $\bar{u}$ representa el promedio de u en $\mathbb{T}^2$. Si dotamos a $\mathbb{R} \times L^2_0(\mathbb{T}) \times L^2_0(\mathbb{T})$ con la norma

$$\|(\bar{v}, v_1, v_2)\|_{\mathbb{R}\times L^2_0(\mathbb{T})\times L^2_0(\mathbb{T})} = \sqrt{|\bar{v}|^2 + \|v_1\|^2_{L^2_0(\mathbb{T})} + \|v_2\|^2_{L^2_0(\mathbb{T})}},$$

tenemos las siguientes estimaciones de las normas de $\mathscr{Z}$ y $\mathscr{Q}$ sobre el espacio de las lineales continuas

$$\|\mathscr{Z}\|_{\mathscr{L}(\mathbb{R}\times L^2_0(\mathbb{T})\times L^2_0(\mathbb{T});L^2(\mathbb{T}^2))} \leq 4\pi \quad \text{y} \quad \|\mathscr{Q}\|_{\mathscr{L}(L^2(\mathbb{T}^2);\mathbb{R}\times L^2_0(\mathbb{T})\times L^2_0(\mathbb{T}))} \leq 1. \tag{1.6}$$

Definimos el siguiente subespacio de $L^2(\mathbb{T}^2)$

$$N := \mathscr{Z}(\mathbb{R}\times L^2_0(\mathbb{T})\times L^2_0(\mathbb{T})). \tag{1.7}$$

Es directa la verificación de las relaciones

$$\mathscr{Q}\mathscr{Z} = I_{L^2_0(\mathbb{T})} \quad \text{y} \quad \mathscr{Z}\mathscr{Q} = \Pi_N \tag{1.8}$$

donde Π_N representa la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sobre N y $I_{L^2_0(\mathbb{T})}$ la aplicación identidad en $L^2_0(\mathbb{T})$. La relación (1.8) nos dice además que N es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Estamos interesados en encontrar soluciones en un sentido más general. Para la ecuación (1.1) queremos encontrar soluciones en $L^2(\mathbb{T}^2)$ en el sentido de las distribuciones. Es decir, queremos determinar todas las funciones $u \in L^2(\mathbb{T}^2)$ tales que

$$\iint\limits_{\mathbb{T}^2} u\Box\phi = 0$$

para toda $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$.

La densidad de las funciones de clase C^∞ de soporte compacto en los espacio L^p no dice que N es precisamente el núcleo del operador de onda en $L^2(\mathbb{T}^2)$. En otras palabras, N es el conjunto de todas las funciones en $L^2(\mathbb{T}^2)$ que son soluciones en el sentido de las distribuciones a la ecuación (1.1).

Otra forma de representar las soluciones a (1.1) consiste en realizar separación de variables en como propuso Daneil Bernoulli. De este modo vemos que

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{4} \hat{u}_m(k,k)\vartheta_{kk,m}(x,t), \tag{1.9}$$

donde

$$\hat{u}_m(k,j) = \iint\limits_{\mathbb{T}^2} u(x,t)\vartheta_{kj,m}$$

es la transformada de Fouirer y $\{\vartheta_{kj,m} : i,j = 0,\dots,\infty, m = 1,2,3,4\}$ es el sistema ortonormal total obtenido de la normalización de las funciones ortogonales:

$$\begin{cases} \sin(kx)\sin(jt) & m=1 \\ \sin(kx)\cos(jt) & m=2 \\ \cos(kx)\sin(jt) & m=3 \\ \cos(kx)\cos(jt) & m=4. \end{cases} \tag{1.10}$$

Es así como N, el núcleo de $\Box$ en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}^2)$, puede también ser representado por la adherencia en $L^2(\Omega)$ del subespacio generado por las funciones $\vartheta_{kj,m}$. En otras palabras

$$N = \overline{\operatorname{span}\langle \vartheta_{kj,m} : i,j = 0,\dots, m = 1,2,3,4\rangle}. \tag{1.11}$$

Gracias al análisis de Fourier [68, Teo. 4.18], es sencillo verificar que las tres representaciones para N: la dado por (1.7), entendido como el conjunto de todas las soluciones en el sentido de las distribuciones a (1.1) y la dada por (1.11) son equivalentes y serán usadas indistintamente a lo largo del documento.

1.2. El Rango del Operador de Onda

Para el cálculo del rango queremos determinar para qué funciones $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ con $f \not\equiv 0$ existe una función $u \in L^2(\mathbb{T}^2)$ tal que

$$\Box u = f \tag{1.12}$$

en el sentido de las distribuciones. Es decir,

$$\iint\limits_{\mathbb{T}^2} u\Box\phi = \iint\limits_{\mathbb{T}^2} f\phi \tag{1.13}$$

para toda $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Expresando la relación (1.13) a través de la Identidad de Parseval obtenemos

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{4}(k^2-j^2)\hat{u}(k,j)\hat{\phi}(k,j) = \sum_{k,j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{4}\hat{f}(k,j)\hat{\phi}(k,j),$$

lo que implica que si f está en el rango del operador de onda, $f \in N^\perp$. El recíproco también es cierto y tenemos la siguiente relación usando la representación en series de Fourier para f y para u

$$u(x,t) = \sum_{k\neq j}\sum_{m=1}^{4}\frac{\hat{f}(k,j)}{k^2-j^2}\vartheta_{kj,m}(x,t). \tag{1.14}$$

Es claro que para que las soluciones (1.14) tengan sentido es necesario que $k^2-j^2 \neq 0$ para todo $k, j = 0, \ldots$. Lo que es equivalente a afirmar que $f \in N^\perp$.

1.3. Análisis Espectral

Consideramos el problema de encontrar soluciones no triviales a

$$\Box u = \nu u. \tag{1.15}$$

Aplicando nuevamente el método de separación de variables vemos que el espectro del operador de D'Alembert viene dado por

$$\sigma(\Box) = \{k^2-j^2 \,:\, k, j = 0, 1, \ldots\} \tag{1.16}$$

y que el valor propio $\lambda_0 \in \sigma(\Box)$ tiene como espacio propio asociado el generado por todas las funciones $\vartheta_{k,j,m}$ tales que $k^2-j^2 = \lambda_0$, $m = 1,2,3,4$.

Es un ejercicio sencillo de teoría de números notar que $0 \in \sigma(\Box)$ es el único valor propio de multiplicidad infinita [70, p 31]. Dado que $0 \in \sigma(\Box)$, es imposible que $\Box : \mathrm{dom}(\Box) \to L^2(\mathbb{T}^2)$ pueda ser un operador compacto [11, p. 165].

Otras propiedades del espectro son las siguientes. A diferencia del caso Dirichlet-periódico, no existen valores propios de multiplicidad impar y en particular no existen valores propios simples. En efecto. Si $\nu \in \sigma(\Box)\setminus\{0\}$, existen exactamente n_ν soluciones $(k_1, j_1), \ldots (k_{n_\nu}, j_{n_\nu})$ a $k^2-j^2 = 0$. Sin importar si n_ν es par o impar o si $k_i = 0$ o $j_i = 0$, el número de funciones propias asociadas será un número par. Esto impide que se puedan usar argumentos del tipo Krasnoselkii Rabinowitz para bifurcación de soluciones.

1.4. Compacidad y Regularidad

Si bien el operador $\Box$ no es compacto ni acotado, el operador $\Box^{-1} : N^{\perp} \to N^{\perp}$ nos permite solucionar en el sentido de las distribuciones la ecuación (1.12) y tiene algunas propiedades deseables.

Denotamos con H el espacio de Sobolev de todas las funciones en $L^2(\mathbb{T}^2)$ definidas en $\mathbb{T}^2$ a valor real que tienen sus derivadas parciales débiles $u_t, u_x \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Es un ejercicio sencillo demostrar que en H es válida la desigualdad de Poincaré $\|u\| \leq \pi \|\nabla u\|$ [70, p. 27]. La norma en H viene dada por

$$\|u\|_1 = \|u_t\| + \|u_x\|.$$

Para $f \in N^{\perp}$, la estimación

$$\begin{aligned} \left\|\Box^{-1} f\right\|_1^2 &= \sum_{k \neq j} \sum_{m=1}^{4} \frac{k^2 + j^2}{(k^2 - j^2)^2} \hat{f}(k, j)^2 \\ &\leq \sum_{k \neq j} \sum_{m=1}^{4} \frac{1}{(k - j)^2} \hat{f}(k, j)^2 \\ &\leq \sum_{k \neq j} \sum_{m=1}^{4} \hat{f}(k, j)^2 \\ &= \|f\|^2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

demuestra que $\Box^{-1} : N^{\perp} \to N^{\perp}$ es una aplicación acotada de $N^{\perp}$ en H. Esto tiene dos implicaciones importantes. La primera es que gracias al Teorema de Rellich-Kondrachov, $\Box^{-1} : N^{\perp} \to N^{\perp}$ es un operador compacto. La segunda es que las soluciones en el sentido de las distribuciones a (1.12) ganan una derivada débil. Por lo tanto la representación (1.13) equivale a encontrar $u \in H \cap N^{\perp} =: Y$ tales que

$$\iint_{\mathbb{T}^2} (u_x \phi_x - u_t \phi_t - f \phi) = 0. \tag{1.18}$$

para toda $\phi \in Y$. De esta forma las soluciones al problema forzado se entienden como soluciones débiles.

Las soluciones al problema lineal forzado también ganan regularidad en términos de continuidad. Es posible demostrar [70, p. 30] que si $f \in N^{\perp}$, entonces

$$\|f\|_{C^{1/2}} \leq \mathrm{cst} \|f\|. \tag{1.19}$$

Aquí $\left\|C^{1/2}\right\|$ es el espacio de las funciones $\frac{1}{2}$-Hölder continuas $C^{1/2}$. La relación (1.19) prueba de manera independiente, usando el Teorema de Arzelá-Ascoli, que $\Box^{-1} : N^{\perp} \to N^{\perp}$ es un operador compacto.

1.5. Perturbaciones Lineales del Operador de Onda

Para futuras referencias, notemos que si $k^2 - j^2 \neq 0$, para todo $\lambda \notin \sigma(\Box)$ es válida la relación

$$A_\lambda := \frac{1}{1 + |\lambda|} \leq \left| \frac{k^2 - j^2}{k^2 - j^2 + \lambda} \right| \leq 1 + \frac{|\lambda|}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(\Box))} := B_\lambda. \tag{1.20}$$

La demostración es directa y se puede consultar en [70, p. 29].

Si $-\lambda \notin \sigma(\Box)$ podemos usar la identidad

$$(I + \lambda \Box^{-1})^{-1} \Box^{-1} = (\Box + \lambda I)^{-1}$$

para demostrar que $(\Box+\lambda I)^{-1}:N^{\perp}\to N^{\perp}$ también es compacto. Además tenemos la fórmula

$$(\Box+\lambda I)^{-1}f=\sum_{k\neq j}\sum_{m=1}^{4}\frac{\hat{f}(k,j)}{k^2-j^2+\lambda}\vartheta_{kj,m}(x,t). \tag{1.21}$$

Recreando los métodos de la sección anterior, podemos demostrar también que

$$\left\|(\Box+\lambda I)^{-1}f\right\|_1\leq B_\lambda\left\|f\right\|. \tag{1.22}$$

y

$$\left\|(\Box+\lambda I)^{-1}f\right\|_{1/2}\leq 4B_\lambda\left\|f\right\|. \tag{1.23}$$

Hemos demostrado entonces que $(\Box+\lambda I)^{-1}:N^{\perp}\to N^{\perp}$ es un operador compacto auto-adjunto. Con este hecho concluimos este capítulo.

CAPÍTULO 2

REVISIÓN DEL PROBLEMA SEMILINEAL

En éste capítulo mostraremos qué se entenderá por ecuación de onda semilineal en el toro y nos servirá de paradigma a lo largo del documento. También definiremos qué se entiende por solución débil a la ecuación de onda semilineal con condiciones doble-periódicas.

Luego haremos una breve revisión de los resultados más importantes hasta el año 2016. Separaremos el caso en que la no-linealidad es monótona del caso en que es no-monótona. En este capítulo vamos a omitir las demostraciones de los resultados y nos limitaremos a mencionar la idea de la demostración, la técnica empleada o la teoría empleada para la prueba dependiendo del caso. Finalmente haremos una nota sobre el caso de varias dimensiones espaciales.

Por la dependencia lógica del documento en general, para la lectura del Capítulo 3 y subsiguientes sólo son necesarias las secciones 2.1, 2.3.2, 2.3.3 y 2.3.4. El resto de las secciones son opcionales, pero dan un panorama general de los avances previos en la ecuación de onda sobre el toro y con condiciones de frontera Dirichlet-periódicas.

2.1. Soluciones Débiles

La ecuación de onda semilineal es la ecuación diferencial parcial

$$\Box u + g(u) = f \tag{2.1}$$

con la condición de que u sea una función a valor real definida en $\mathbb{T}^2$. El imponer que las funciones estén definidas sobre el toro $\mathbb{T}^2$, es equivalente a imponer la condición doble-periódica

$$u(x,t) = u(x,t+T_1) = u(x+T_2,t) \tag{2.2}$$

tomando $T_1 = T_2 = 2\pi$. En muchos casos los resultados se mantienen para el caso Dirichlet-periódico . Es decir, cuando se imponen las condiciones

$$u(0,t) = u(l,t) \quad u(x,t) = u(x,t+T), \tag{2.3}$$

donde l es usualmente π y T es usualmente 2π. Nos centraremos en este trabajo en el caso doble-periódico haciendo menciones ocasionales a resultados del caso Dirichlet-periódico.

En (2.1) $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ es dada y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada que satisface $g(u) \in L^2(\mathbb{T}^2)$ si $u \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Aquí $g(u) : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ está definida como $g(u)(x,t) = g(u(x,t))$. En ocasiones tomaremos para $\lambda \in \mathbb{R}$ la función $h(s) := g(s) - \lambda s$ y la ecuación (2.1) toma la forma

$$\Box u + \lambda u + h(u) = f. \tag{2.4}$$

Basados en el desarrollo del Capítulo 1 decimos que $u = v + y \in N \oplus Y$ es una *solución débil* de (2.1) si

$$\iint_{\mathbb{T}^2} [y_x \xi_x - y_t \xi_t + (\eta + \xi)(g(u) - f)] = 0 \tag{2.5}$$

para toda $\xi \in Y$ y toda $\eta \in N$. Decimos entonces que $f \in \operatorname{rng}(\Box + g(\cdot))$ si existe una solución débil a (2.1). Cuando $f \equiv 0$ decimos que las soluciones débiles son *vibraciones libres* para la ecuación semilineal (2.1). En caso contrario decimos que las soluciones son *vibraciones forzadas*. Al término f se le llama *forzamiento* o *fuerza externa* y al término $g(u) = \lambda u + h(u)$ se le llama parte no-lineal de la ecuación (2.1).

Cuando $-\lambda \notin \sigma(\Box)$ el problema de encontrar soluciones débiles a (2.4) es equivalente a un problema de punto fijo usando el método de reducción de Lyapunov-Schmidt. Es un cálculo directo [70, p. 34] demostrar que $u = v + y \in N \oplus Y$ es una solución débil de (2.1) sii $v \in N$ y $y \in Y$ satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones de punto fijo

$$v = \frac{1}{\lambda}\Pi_N(f - h(v + y)) \qquad \text{(ecuación del núcleo)} \tag{2.6}$$

$$y = (\Box + \lambda I)^{-1}\Pi_{N^\perp}(f - h(v + y)) \qquad \text{(ecuación del rango).} \tag{2.7}$$

La ecuación (2.6) suele ser delicada de trabajar porque el núcleo es un subespacio de dimensión infinita en el que falla la compacidad. Es conveniente reescribir la ecuación del núcleo (2.6) como un sistema de ecuaciones integrales usando (1.8). Para este fin, supongamos que $u = v + y \in N \oplus Y$ satisface (2.6). Es decir, $v = \frac{1}{\lambda}\mathscr{X}\mathscr{Q}(f - h(u))$. Entonces existe un único número real $\bar{v}$ y dos únicas funciones de promedio nulo $v_1, v_2 \in L^2_0(\mathbb{T})$ tales que $(\bar{v}, v_1, v_2) = \frac{1}{\lambda}\mathscr{Q}(f - h(u))$ o lo que es lo mismo

$$\bar{v} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\mathbb{T}^2}(f - h(u)) \tag{2.8}$$

$$v_1(r) = -\bar{v} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x, r - x) - h(u(x, r - x))]\, dx \tag{2.9}$$

$$v_2(r) = -\bar{v} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x, r - x) - h(u(x, r + x))]\, dx \tag{2.10}$$

De esta forma el sistema de ecuaciones integrales (2.8)–(2.10) es equivalente a la ecuación del núcleo (2.6). Una demostración alternativa de este hecho se puede encontrar en [25].

2.2. Nolinealidad monótona

A lo largo del capítulo vamos a suponer que $g \in C^1(\mathbb{R})$ y que $-\lambda \notin \sigma(\Box)$. Recordemos que el conjunto resolvente está del operador de onda está definido por $\rho(\Box) := \mathbb{R} \setminus \sigma(\Box)$ y denotemos con $\Gamma_\lambda = \operatorname{dist}(-\lambda, \sigma(\Box))$ que está bien definido por ser la distancia de un cerrado a un compacto. También notaremos con

$$|\mathfrak{f}|_\infty = \sup\{|\mathfrak{f}(x)| : x \in \mathbb{R}\}$$

donde $\mathfrak{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada.

2.2.1. Caso sublineal sin interacción con el espectro

El siguiente teorema resume algunos resultados de Jean Mawhin en relación con este problema [55, 56, 6].

Teorema (Ben Naoum-Mawhin-Willem). *Supongamos que*

(H1) $|h'|_\infty \leq \Gamma_\lambda$.

(H2) Existen $A \in (0, \Gamma_\lambda)$, $B \geq 0$ *tales que*

$$|h(s)| \leq A|s| + B \quad \textit{(Sublinealidad).}$$

Entonces, para toda $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$, *existe una solución débil a* (2.4) *y el conjunto de soluciones débiles es un conjunto convexo de* $L^2(\mathbb{T}^2)$. *En particular las soluciones no pueden ser puntos aislados. Si suponemos que la desigualdad en (H1) es estricta* ($|h'|_\infty < \Gamma_\lambda$), *entonces existe una única solución débil que depende continuamente de* λ *y de* f. *Más aún la solución puede ser obtenida mediante el algoritmo recursivo de punto fijo (método de Picard)*

$$u_{k+1} = (\Box + \lambda I)^{-1}(f - h(u_k))$$

y $u_0 \in \mathrm{dom}(\Box)$ *es cualquiera.*

La demostración es sencilla y usa una argumento de punto fijo que explicaremos a continuación. En primer lugar, notemos que encontrar soluciones a (2.4) es equivalente a encontrar soluciones a

$$u = (\Box + \lambda I)^{-1}(f - h(u)).$$

Tomemos $R := 2(1 - \Gamma_\lambda^{-1})^{-1}\Gamma_\lambda^{-1}(B + \|f\|)$ y $D[R] := \left\{\mathfrak{f} \in L^2(\mathbb{T}^2) : \|\mathfrak{f}\| \leq R\right\}$. Claramente $D[R]$ es un espacio métrico completo y un conjunto convexo en $L^2(\mathbb{T}^2)$. Podemos definir el operador $T_{\lambda,f}(u) : (-\lambda - \Gamma_\lambda, -\lambda + \Gamma_\lambda) \times L^2(\mathbb{T}^2) \times B_R(0) \to B_R(0)$ mediante la fórmula

$$T_{\lambda,f}(u) = (\Box + \lambda I)^{-1}(f - h(u)).$$

La escogencia del R y las hipótesis (H1) y (H2) garantizan que el operador $T_{\lambda,f}$ está bien definido. Adicionalmente tenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \|(\Box + \lambda I)^{-1}(h(u) - h(v))\| &\leq \Gamma_\lambda^{-1}\,\|h(u) - h(v))\| \\ &\leq \Gamma_\lambda^{-1}|h'|_\infty\,\|u - v\| \\ &\leq \|u - v\| \end{aligned} \tag{2.11}$$

Usando el Teorema de Punto Fijo de Browder-Göhde-Kirk [29, p. 192-200] [48, p. 106] podemos garantizar la existencia de una solución débil al problema (2.4). El Teorema de Punto Fijo de Browder-Göhde-Kirk además garantiza que el conjunto de soluciones es un conjunto convexo. Por tal razón las soluciones (en caso de ser múltiples) no pueden ser aislados (o un número finito). En el caso de tener la desigualdad estricta $|h'|_\infty < \Gamma_\lambda$ usamos el Principio de Contracciones con Parámetros [15] y encontramos que la solución es única, depende continuamente de f y de λ y además puede ser obtenida por el método de Picard.

Por ejemplo, la ecuación

$$\Box u + 0{,}5u + 0{,}2\sin u = \cos(x)\sin(3t)$$

tiene una única solución débil 2π-periódica en x y en t.

El hecho clave en el resultado del Teorema de Mawhin y lo que hace fácil de demostrar es que el rango de la derivada de la nolinealidad $g'(\mathbb{R})$ no atraviesa ningún punto del espectro. En particular, es monótona.

2.2.2. Nolinealiad potencial (vibraciones libres)

En la ecuación (2.1) supongamos que $g(s) = |s|^{p-1}s$ con $p > 2$. Es decir tenemos el siguiente teorema

Teorema (Brezis-Coron-Nirenberg 1980)**.** *La ecuación*

$$\Box u + |u|^{p-1}u = 0. \tag{2.12}$$

sujeta a las condiciones doble-periódicas tiene una solución débil no trivial.

Vamos a encontrar soluciones débiles no-triviales. Este problema se puede tratar con técnicas variacionales directas del siguiente modo siguiendo las ideas de [13, 79]. Consideramos el sistema

$$\begin{aligned} v &= \Box u \\ -v &= |u|^{p-2}u =: G'(u) \end{aligned}$$

donde $G(u) = \frac{1}{p}|u|^p$. Al ser G estrictamente convexa podemos plantear su problema dual. Es decir, encontrar $\chi \in N_q$ tal que

$$\begin{aligned} u &= \Box^{-1}v + \chi \\ u &= G^{*'}(-v). \end{aligned}$$

Aquí N_p es el núcleo del operador de onda en $L^p(\mathbb{T}^2)$ y G^* representa la Transformada de Fenchel-Young de G que viene dada por $G(s) = -v|v|^{p'-2}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < 2$. Para encontrar soluciones débiles se define el funcional $J : N_q^{\perp} \to L^p L^p(\mathbb{T}^2)$.

$$J[v] := \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{T}^2} (\Box^{-1}v)v. \tag{2.13}$$

Aquí $N_q^{\perp}$ es el complemento débil de N_p en el dual de $L^p(\mathbb{T}^2)$. Por la compacidad de $\Box^{-1}$, J es semicontinuo inferiormente. La restricción de J a

$$S[1] = \left\{ v \in N_p^{\perp} \, : \, \|v\|_q = 1 \right\}$$

está acotada inferiormente y podemos encontrar una sucesión minimizante (v_m). Podemos suponer que $v_m \rightharpoonup v^*$.

Por la semicontinuidad inferior de J y la existencia de valores propios negativos de $\Box$ tenemos que

$$J[v^\star] \leq \liminf J[v_m] = \inf_{v \in S[1]} J[v] < 0. \tag{2.14}$$

Esto implica que $v^\star \neq 0$ y $v^\star / \|v^\star\|_q \in S[1]$. Por la homogeneidad de J y (2.14), $v^\star \in S[1]$ minimiza J en $S[1]$. Por el Teorema de Multiplicadores de Lagrange para Espacios de Banach [18], tenemos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\iint_{\mathbb{T}^2} \left[(\Box^{-1}v^\star)v^\star + \lambda v^\star |v^\star|^{q-2} \right] \varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in N_q^{\perp}. \tag{2.15}$$

Tomando $\varphi = v^\star$ notamos que $\lambda > 0$ y reescalando $v^\star$ podemos obtener $\lambda = 1$. La ecuación (2.15) implica que la χ deseada es $\chi = \Box^{-1}v + v|v|^{p-2}$. Haciendo $u = -v|v|^{p-2}$ encontramos una solución débil no-trivial a (2.12)

2.2.3. Perturbaciones pequeñas

Cuando el término no-lineal y el forzamiento son peuqeños, tenemos los trabajos de [62], [50] y [53]. En (2.1) escribimos $g(u) - f = \varepsilon(\tilde{g}(u) - \tilde{f})$. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema (Rabinowtiz 1967)**.** *Sea $\tilde{g} \in C^k(\mathbb{R})$ tal que $\tilde{g}'(s) \geq \beta > 0$ para algún $\beta \in \mathbb{R}$. Sea también $f \in C^k(\mathbb{T}^2)$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, la ecuación*

$$\Box u + \varepsilon \tilde{g}(u) = \varepsilon \tilde{f} \tag{2.16}$$

tiene solución doble-periódica en H^k.

Es importante notar que este teorema garantiza cierta regularidad de las soluciones. Es decir, si el término no-lineal y el forzamiento tienen k derivadas clásicas, la solución tendrá k derivadas débiles.

El esbozo de la demostración es el siguiente. En primer lugar se demuestra que para toda $w \in N^{\perp}$ la ecuación del núcleo (2.6) tiene una única solución.

Rabinowiz propone dos caminos distintos para demostrar este hecho. El primero es usando el Método de Galerkin solucionando para polinomios trigonométricos de dimensión $\leq n$ la ecuación del núcleo. Usando la monotonía de $\tilde{g}$ se prueba que la sucesión de soluciones v_n a la ecuación del núcleo está acotada en H. Con Rellich-Kondrachov se encuentra una subsucesión convergente. El punto de convergencia será la solución a la ecuación del núcleo (2.6).

El otro camino para solucionar la ecuación del núcleo es optimizar el funcional asociado en bolas de radio $\leq K$ en H. Se usa la monotonía de $\tilde{g}$ para demostrar que el punto óptimo será un punto interior. Dicho punto soluciona la eucación del núcleo (2.6).

La ecuación del núcleo suele presentar más problemas porque el subespacio propio es infinito dimensional y los argumentos de compacidad se pierden. No obstante, la monotonía permite que emplear métodos propios de los problemas elípticos.

Para la ecuación del rango se soluciona el problema lineal primero. Esta solución se llama u_0. Luego se define $w_1 = \Box^{-1}\Pi_{N^{\perp}}(f - g(u_0))$ y $v_1 \in N$ la función asociada por el procedimiento anterior. Se produce así una sucesión de funciones $u_n = v_n + \varepsilon w_n$. Usando la monotonía y el Teorema de Inmersión de Sobolev se demuestra que $u_n \to u$ en $C^2(\mathbb{T}^2)$. La función límite será la solución a (2.16) deseada.

Los detalles se encuentran en [62] que es el artículo de la tesis doctoral de Paul Rabinowitz dirigida por Jürgen Moser y con ideas de Louis Nirenberg en el apartado de la regularidad.

2.2.4. Vibraciones libres

Es posible demostrar que existen soluciones débiles a (2.1) con $f \equiv 0$ para una clase de nolinealidades más generales que la presente en (2.12). Vamos a suponer lo siguiente sobre g.

(VL1) $g'(x) \geq 0$.

(VL2) $g(0) = 0$.

(VL3) g es superlineal en infinito. En otras palabras

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty.$$

(VL4) Existen constantes $\alpha > 0$ y $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{2}sg(s) - G(s) \geq \alpha|g(s)| - C.$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Claramente $g(u) = |u|^{p-2}u$ satisface (NL1)-(VL4) con $\alpha = 1/2 - 1/p$ y $C = 0$.

El siguiente teorema es original de Rabinowitz [63] pero en [13] se encuentra una demostración más sencilla. Un resultado relacionado se puede encontrar en [12].

Teorema (Rabinowitz 1978)**.** *Si g satisface (H1)-(H4) la ecuación*

$$\Box u + g(u) = 0 \tag{2.17}$$

tiene una solución débil en $L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Si g es estrictamente creciente y suave, las soluciones son suaves.

La demostración usa el Teorema del Paso de Montaña de Ambrosetti-Rabinowitz [2]. La condición (H4) es empleada para garantizar la geometría de montaña y se suele llamar condición de Ambrosetti-Rabinowitz. Como es usual en estos casos, la dificultad reside en demostrar que el funcional satisface la condición de Palais-Smale. El funcional a trabajar es similar a (2.13) dado por

$$J[u] = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{T}^2}(\Box^{-1}u)u + \iint_{\mathbb{T}^2} H_k(u), \tag{2.18}$$

con H_k la truncación de $H = G^\star$, la función convexa conjugada de G.

2.2.5. Vibraciones forzadas

El problema de vibraciones forzadas requiere algunas restricciones adicionales. En este caso suponemos que

(VF1) $g : [-L, L] \to \mathbb{R}$ es continua y creciente.

(VF2) $|g(s)| \leq |s|$ para todo $s \in [-L, L]$.

(VF3) $g(-L/2) < 0 < g(L/2)$.

Tenemos el siguiente teorema propuesto por [14] , basado en trabajos previos de [14] y generalizado en [10].

Teorema (Brezis-Nirenberg 1978)**.** *Suponiendo (VF1)-(VF3), existe $\delta > 0$ tal que si $\|f\| < \delta$, existe una solución débil a*

$$\Box u + g(u) = f. \tag{2.19}$$

Si f es suave y g es suave, la solución también es suave. Si además $|g'(s)| \leq 1$ en $s \in [-L, L]$ la solución es única.

Nuevamente podemos notar que bajo la hipótesis de monotonía se tiene regularidad. Un resultado relacionado encontrando vibraciones de amplitud grande es el trabajo de Rabinowtiz de 1986 [65].

2.2.6. Bifurcación desde cero

Podemos encontrar bifurcación en el rango Y desde 0 en un sentido que precisaremos más adelante. Para esto se usa la siguiente teorema debido a Rabinowitz [64] y que es una extensión del Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz [46, 64, 16, 29, 48].

Teorema (Rabinowitz 1971)**.** *Sea $T : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ compacto con $T(0,\cdot) \equiv 0$. Entonces la ecuación*

$$T(\lambda, u) = u$$

tiene un continuo (cerrado y conexo) de soluciones que corta a $(0,0)$ y a ∞.

Usando lo anterior podemos formular el siguiente teorema que también es demostrado por Rabinowitz en el mismo artículo [64].

Teorema (Rabinowitz 1971)**.** *Supongamos que $\tilde{g} \in C^3(\mathbb{R})$, $\tilde{g}'(s) \geq \beta > 0$ para algún $\beta \in \mathbb{R}$ y todo $s \in \mathbb{R}$, y que $\tilde{f}_t \not\equiv 0$. Consideremos la ecuación*

$$\Box u + \lambda \tilde{g}(u) = \lambda \tilde{f}. \tag{2.20}$$

Entonces existe un continuo de soluciones a (2.20) *que corta a $(0, v(0))$ y a ∞.*

Aquí $v : Y \to N$ denota la función que a cada $y \in Y$ le corresponde la solución en $v(y) \in N$ a la ecuación del núcleo (2.6). Por la discusión de la Sección 2.2.3 tenemos que la v está bien definida. El resto es un aplicación del Teorema de Rabinowitz para bifurcación desde cero tomando

$$T(\lambda, u) = \lambda \Box^{-1}(\tilde{f} - \tilde{g}(u)),$$

lo que soluciona la ecuación del rango y demuestra el teorema.

2.2.7. Otros resultados

El problema de encontrar soluciones cuando el forzamiento tiene una componente en el núcleo implica la necesidad de introducir condiciones del tipo Landezman-Lazer [51]. En Mawhin [55], Bahri y Brezis [4] y [10] se encuentran avances en esta dirección. Brezis introduce la condición de que el forzamiento f se pueda representar como $f = f^{\star} + f^{\star\star}$ con $f^{\star} \in N^{\perp}$ y

$$g(-\infty) + \delta \leq f^{\star\star}(x,t) \leq g(+\infty) - \delta$$

para algún $\delta > 0$ y todo $(x,t) \in \mathbb{T}^2$. La técnica empleada se basa en el Teorema del Paso de Montaña.

Para el caso monótono Willem [82] demuestra la existencia de soluciones débiles para no-linealidades de salto. Es decir, suponiendo que

$$\lim_{s \to -\infty} \frac{g(s)}{s} = p \quad \text{y} \quad \lim_{s \to \infty} \frac{g(s)}{s} = q$$

con $p < q$ y $[p,q] \subset \rho(\Box)$.

En otro trabajo de Willem [83] se puede demuestra usando técnicas e hipótesis muy similares a las de la Sección 2.2.1 la existencia de soluciones débiles a la ecuación de onda Dirichlet-periódica –es decir $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y $u(x,t) = u(x,t+T)$– con periodo múltiplo irracional de π.

2.3. Nolinealidad no-monótona

En esta sección haremos una revisión de los avances que se tienen en la existencia de soluciones al problema de semilineal cuando la nolinealidad es no-monótona.

2.3.1. Nolinealidad impar

Asumiendo simetrías suficiente en el término no lineal es posible encontrar soluciones débiles a (2.1). Más específicamente tenemos el siguiente resultado debido a Coron [28] para el caso Dirichlet-periódico.

Teorema (Coron 1983)**.** *Supongamos que* $\tilde{g} \in C^2(\mathbb{R})$*,* $\tilde{g}'(0) \neq 0$*,* $\lim_{|s|\to\infty} \tilde{g}(s)/s = 0$*,* $\tilde{g}$ *es impar,* $\tilde{g}'$ *es acotada, entonces existe* $c_0 \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $c \geq c_0$ *y todo entero* l*, existen al menos* l *soluciones geométricamente distintas a*

$$\Box u + c\tilde{g}(u) = 0.$$

Un ejemplo de una ecuación de este estilo es la famosa ecuación de sin-Gordon

$$\Box u + c \sin u = 0.$$

La demostración de este resultado usa los métodos topológicos de teoría de índice cohomológico de Fadell-Rabinowtiz [32].

2.3.2. Densidad en el rango

El siguiente resultado ha servido como lema para resultados posteriores como veremos más adelante. Fue formulado y demostrado por Hoffer [37] y Willem [83] de manera simultanea e independiente. No obstente, la versión de Hofer es más general.

Teorema (Hofer-Willem)**.** *Supongamos que existen constante* $\beta \leq \gamma$ *tal que* $[\beta, \gamma] \subset \rho(\Box)$*, que* g *es globalmente Lipschitz continua y que*

$$-c + \frac{\beta}{2}s^2 \leq G(s) = \int_0^s g(\tau)\, d\tau \leq c + \frac{\gamma}{2}s^2 \tag{2.21}$$

para algún número $c > 0$*. Entonces existe un subconjunto denso* $\Xi \subset L^2(\mathbb{T}^2)$ *tal que*

$$\Box u + g(u) = h$$

tiene solución para todo $h \in \Xi$*.*

La demostración utiliza elemetos avanzados de teoría espectral [66, 11], teoría de operadores y análisis convexo [30, 49] y teoría de grado de Leray-Schauder [16, 29, 43].

2.3.3. Algunas funciones en el rango

Si bien el Teorema de Hofer-Willem es de gran utilidad para determinar la existencia de soluciones a la ecuación (2.1) no da condiciones suficientes para que una función f esté en el rango. En este sentido los trabajos liderados por el profesor Alfonso Castro dan condiciones de este estilo [26], [25] y [23]. Exponemos [23] por tratarse del resultado más general.

Para esto se introduce el concepto, crucial en todos estos resultados, de *función no-plana sobre características*. Sea $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, decimos que f es no-plana sobre características si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\mu_1(\{x \in \mathbb{T} : |\mathfrak{f}(x, t \pm x) - r| < \delta\}) < \varepsilon$$

para todo $t, r \in \mathbb{T}$. Aquí μ_n representa la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Una función como $\mathfrak{f}(x,t) = \sin(x+t) - \sin(t-x)$ satisface esta condición.

Teorema (Caicedo-Castro-Duque-Sanjuán 2015)**.** *Supongamos que $h \in C^1(\mathbb{R})$ y que existen $\gamma < 0$ y $M > 0$ tales que*

$$|h'(s)| \leq |s|^\gamma \quad \textit{para todo } |s| \geq M \tag{2.22}$$

Supongamos además que $-\lambda \notin \sigma(\Box)$, $f = c\tilde{f} \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Si $\varphi = (\Box + \lambda I)^{-1}\tilde{f}$ es no plana sobre características, entonces existe $c_0 > 0$ tal que si $|c| \geq c_0$ el problema

$$\Box u + \lambda u + h(u) = f$$

tiene una solución débil en $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Notemos que si h satisface (2.22), entonces h es asintóticamente lineal pero no necesariamente monótona o simétrica.

Es un ejercicio de cálculo demostrar que una $h \in C^1(\mathbb{R})$ que satisface (2.22) también satisface las condiciones del Teorema de Hofer-Willem. La idea de la demostración consiste entonces en encontrar una sucesión de funciones $\varepsilon_n \in L^2(\mathbb{T})$ que satisfacen

$$\Box u_n + g(u_n) = f + \varepsilon_n$$

y además $\varepsilon_n \to \tilde{0}$. Se transforma el problema con la sutitución $\zeta_n = u_n - c\varphi$. Aplicando Lypaunov-Schmidt se descomone $\zeta_n = v_n + w_n$ y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} v_n &= \Pi_N(\varepsilon_n - h(u_n)) \\ w_n &= (\Box + \lambda I)^{-1}\Pi_{N^\perp}(\varepsilon_n - h(u_n)). \end{aligned}$$

La sucesión de los w_n será convergente usando el Teorema de Rellich-Kondrachov y la sucesión de los v_n demostrando que es una sucesión de Cauchy, la condición (2.22) y la hipótesis de no-plana sobre características hecha sobre φ.

Un resultado relacionado con el anterior es cuando el se suponen condiciones Dirichlet-periódicas y se asume que el periodo es múltiplo irracional de π. Las hipótesis sobre f yg son similares. Tampoco se asume monotonía y se asume también (2.22). Este problema es particularmente difícil porque la derivada de la nolinealidad g atraviesa infinitos valores propios de multiplicidad infinita. Sin asumir monotonía, el único resultado conocido hasta el momento es [19].

2.3.4. Un problema no regular

A diferencia del caso en el que g es monótona en el caso no-monótono se puede perder la regularidad del problema. Incluso aparecen fenómenos raros de datos o forzamientos suaves sin soluciones continuas. Específicamente tenemos el siguiente teorema de Castro y Caicedo [20].

Teorema (Caicedo-Castro 2009)**.** *Supongamos que $\lambda \in \rho(\Box) \cap (0,\infty)$, que el soporte de h está contenido en $[0,D]$ y que $h(D/2) < -\lambda D/2$. Entonces existe $c_0 > 0$ tal que si $|c| > 0$ el problema*

$$\Box u + \lambda u + h(u) = c \sin(x+t)$$

no tiene soluciones continuas. En particular, no tiene soluciones débiles en $H^1(\mathbb{T}^2)$.

Este resultado es un contraste importante con el caso monótono. El forzamiento $c\sin(x+t)$ es de clase C^∞ pero en caso de existir solución, esta no podrá ni siquiera ser continua. En el próximo capítulo mostraremos que, en efecto, un problema así tiene solución débil.

2.3.5. Bifurcación imperfecta

Para el caso Dirichlet-Periódico podemos considerar el problema de encontrar soluciones débiles a la ecuación

$$\Box u + \varepsilon(u^{2k} + \tilde{g}(u)) = \varepsilon f$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ donde $\varepsilon_0 > 0$ es un número por determinar. Aquí se asume $k \in \mathbb{Z}_{>0}$, que $\tilde{g} \in C^1(\mathbb{R})$ y que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\tilde{g}'(s)}{s} = 0.$$

Este problema se conoce como problema de bifurcación imperfecta y [8] encontraron soluciones a este problema. Posteriormente [22] extendieron estos resultados.

2.4. Varias dimensiones espaciales

El problema en varias dimensiones espaciales

$$\Box u + g(u) = u_{tt} - \triangle u + g(u) = f$$

presenta complicaciones importantes. Por ejemplo, si la variable espacial x está definida en un conjunto Ω rectangular, todos los valores propios tienen multiplicidad infinita. Esto hace que se pierda la compacidad en todo $L^2(\mathbb{T}^{n+1})$.

Bajo algunas hipótesis especiales, por ejemplo encerrando el rango de la derivada de g' en el resolvente de $\Box$, similar a la técnica empleada en la Sección 2.2.1 es posible encontrar soluciones [72, 6]. Cuando el término no-lineal es pequeño y monótono se tienen los resultados de [61] y [62]. Algunos autores han considerado el caso radialmente simétrico [76, 45, 6, 7] encontrando resultados de existencia y en ocasiones multiplicidad de soluciones.

CAPÍTULO 3

AVANCES RECIENTES

En este capítulo exponemos rigurosamente los avances recientes sobre la ecuación de onda semilineal en el toro. Cada sección corresponde a tres resultados: bifurcación desde infinito, polinomios grandes en el rango y existencia de soluciones a un problema no regular. Los dos primeros resultados también son válidos para la ecuación de onda semilineal con condiciones Dirichlet-periódicas.

Vamos a necesita dos teoremas de la teoría de los polinomios ortogonales. El primero es la Desigualdad de Nikolskii [60, p. 126].

Teorema (Desigualdad de Nikolskii)**.** *Sea $p : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ un polinomio trigonométrico en n variables. Entonces*

$$\|p\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq 2^n \left(\prod_{i=1}^{n} m_i \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|p\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \tag{3.1}$$

donde m_i es la potencia más alta en la i-ésima variable y $1 \geq p < q \leq \infty$. Si $q = \infty$ se entiende que $1/q = 0$.

El segundo es el Lema de Nazarov-Turán. Se trata de una extensión a conjuntos medibles, gracias a Fedor Nazarov [59, Teo. 1.4], del famoso Lema de Turán de 1941 [80, Teo. 6.1] sobre estimación de intervalos de polinomios trigonométricos. Natasha Fontes-Merz (2006) generaliza el lema de Nazarov-Turán a polinomios trigonométricos en varias variables periódicas [34]. Esta última generalización es la que vamos a emplear.

Teorema (Lema de Nazarov-Turán)**.** *Sean $m_1, \ldots, m_n$ enteros no-negativos. Si*

$$p : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$$

está definida por

$$p(x) = \sum_{k_i \leq m_i, i=1,\ldots,n} c_k e^{ik\cdot x}, \;\; c_k \in \mathbb{C}, \tag{3.2}$$

Entonces para cualquier subconjunto medible $E \subset \mathbb{T}^n$,

$$\mu_n(E)^{m_1+\cdots+m_n} \sup_{x\in\mathbb{T}^n} |p(x)| \leq (14n)^{m_1+\cdots+m_n} \sup_{x\in E} |p(x)|, \tag{3.3}$$

donde $\mu_n(E)$ denota la medida de Lebesgue n-dimensional de E.

Si fijamos $-\lambda_0 \in \sigma(\Box)$ un valor propio de multiplicidad finta y y Z su correspondiente espacio propio. Toda función en Z es una combinación lineal de funciones propias $\vartheta_{kj,i}$ con $i = 1,2,3,4$ y $k^2 - j^2 = -\lambda_0$. Así, los elementos de Z serán polinomios trigonométricos definidos en $\mathbb{T}^2$ con $m_1, m_2 \leq \sqrt{|\lambda_0|}$. Aplicando la Desigualdad de Nikolskii tenemos que

$$\|\psi\| \leq 4\sqrt{|\lambda_0|}\,\|\psi\|_\infty \tag{3.4}$$

para toda $\psi \in Z$. Sea $\psi \in Z$ con $\|\psi\| = 1$ y $\varepsilon > 0$. Tomando en el lema de Nazarov-Turán

$$E = \left\{(x,t) \in \mathbb{T}^2 : |\psi(x,t)| < \varepsilon\right\}$$

obtenemos el siguiente corolario del Lema de Nazarov-Turán que será usado más adelante.

Lemma 1. *Si $-\lambda_0 \in \sigma(\Box)$ es un valor propio de multiplicidad finita y Z su correspondiente espacio propio, para cada $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4\sqrt{|\lambda_0|}}\right)$*

$$\mu_2\left(\left\{(x,t) \in \mathbb{T}^2 : |\psi(x,t)| < \varepsilon\right\}\right) < C_{\lambda_0}\varepsilon^{\frac{1}{2|\lambda_0|}}, \tag{3.5}$$

para todo polinomio $\psi \in Z$ con $\|\psi\| = 1$.

En el Lema 1 se puede tomar se puede tomar

$$C_{\lambda_0} := 28(4\sqrt{|\lambda_0|})^{\frac{1}{2|\lambda_0|}}. \tag{3.6}$$

Para lograr una estimación similar de manera uniforme sobre características, para $\psi \in Z$ con $\|\psi\| = 1$ realizamos la expansión en series de fourier para $\psi(\cdot, r\pm\cdot)$ vemos que $\psi(\cdot, r\pm\cdot)$ es un polinomio trigonométrico en una variable que satisface las hipótesis del Lema de Nazarov-Turán y además

$$\|\psi(\cdot, r\pm\cdot)\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1.$$

Tenemos entonces el siguiente lema

Lemma 2. *Si Z, $-\lambda_0$ y ε son como en el Lema 1, entonces*

$$\mu_1\left(\{x \in [0,\pi]; |\psi(x, r\pm x)| < \varepsilon\right) < C_{\lambda_0}\varepsilon^{\frac{1}{2|\lambda_0|}}, \tag{3.7}$$

para toda $\psi \in Z$ con $\|\psi\| = 1$, y cualquier $r \in \mathbb{T}$.

3.1. Bifurcación desde infinito

Para este problema vamos a asumir las siguientes hipótesis sobre $h \in C^1(\mathbb{R})$.

(BI1) Existe un $h_0 > 0$ y un $\gamma > 1$ tal que para todo s con $|s| \geq h_0$,

$$|h'(s)| \leq \frac{1}{|s|^\gamma} \tag{3.8}$$

(BI2) Existe $A > 0$ tal que

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm A \tag{3.9}$$

Las hipótesis (BI1)-(BI2) implican que $|h|_\infty < \infty$, que $|h'|_\infty < \infty$ y que $h'(s) \to 0$ cuando $|s| \to \infty$. La condición (BI1) implica que el término no lineal $g(s) = \lambda s + h(s)$ es asintóticamente lineal. Se Vamos a asumir que $-\lambda_0 \in \sigma(\Box) \setminus \{0\}$, es decir $-\lambda_0$ con $|\lambda - \lambda_0| < 1/2$. El caso en que $-\lambda_0 = 0$ será tratado en el Teorema 2.

Tomemos a N como en la Sección 1.1, a Y como en la Sección 1.4 y a Z como en el Lema 1. Para encontrar soluciones débiles a la ecuación (2.4) con $f \equiv 0$.

$$\Box u + \lambda u + h(u) = 0, \tag{3.10}$$

podemos descomponer por el método de Lyapunov-Schmidt como en (2.6)-(2.7). Vamos a dividir el espacio $N^\perp = W \oplus Z$ donde W es el complemento ortogonal de Z en $N^\perp$. Al espacio W lo llamaremos *espacio regular* y a Z lo llamaremos *espacio singular*. Con $u = v + w + z \in N \oplus W \oplus Z$, el sistema de ecuaciones (2.6)-(2.7) se convierte en

$$v = -\frac{1}{\lambda}\Pi_N h(u) \qquad \text{(ecuación del núcleo)} \tag{3.11}$$

$$w = -(\Box + \lambda I)^{-1}\Pi_W h(u) \qquad \text{(ecuación del espacio regular)} \tag{3.12}$$

$$z = -(\lambda - \lambda_0)^{-1}\Pi_Z h(u) \qquad \text{(ecuación del espacio singular)} \tag{3.13}$$

Vamos a modificar la ecuación (3.10) usando soluciones aproximadas en la ecuación (3.13). Tenemos entonces el siguiente lema.

Lemma 3. *Si $h \in C^1(\mathbb{R})$ satisface (BI1)-(BI2), entonces existe $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$ tal que para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe $\varphi_\star \in Z$ tal que*

$$-\varepsilon\varphi_\star + \Pi_Z h(\varphi_\star) = 0. \tag{3.14}$$

Más aún, existen $c_1 > c_0 > 0$ que dependen solo de h y λ_0 tales que

$$c_0\varepsilon^{-1} \le \|\varphi_\star\| \le c_1\varepsilon^{-1}. \tag{3.15}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Para $z \in Z$ definimos el funcional $J_\varepsilon : Z \to \mathbb{R}$ por

$$J(z) := J_\varepsilon(z) := \frac{-\varepsilon}{2}\int_\Omega |z|^2 dx + \int_\Omega H(z) dx, \tag{3.16}$$

donde $H(x) = \int_0^x h(s)\,ds$. Así

$$\begin{aligned} J[z] &\le \frac{-\varepsilon}{2}\int_\Omega |z|^2 + |h|_\infty \int_\Omega |z| \\ &\le -\frac{\varepsilon}{2}\|z\|^2 + |h|_\infty \|z\|\, 2\pi \\ &\to -\infty \ \text{ as } \ \|z\| \to +\infty. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ya que Z es de dimensión finita, existe $\varphi_\star$ tal que

$$J[\varphi_\star] = \max_Z J.$$

Luego, para cada $z \in Z$ $\langle J'[\varphi_\star], z\rangle = 0$, lo que implica (3.14).

De (3.17) vemos que $J(z) < 0$ para $\|z\| > 4\pi|h|_\infty\varepsilon^{-1}$. Esto y $J(\varphi_\star) \geq J(0) = 0$, implican que

$$\|\varphi_\star\| \leq 4\pi|h|_\infty\varepsilon^{-1} =: c_1\varepsilon^{-1}. \tag{3.18}$$

By (3.9), there exists $M_1 > 0$ such that

$$H(x) \geq \frac{A|x|}{2} - M_1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Ya que Z es un espacio finito dimensional de polinomios trigonométricos de grado $\leq \sqrt{|\lambda_0|}$, por la Desigualdad de Nikoslkii

$$\int_\Omega |z|dx \geq \frac{1}{4|\lambda_0|}\|z\|$$

para todo $z \in Z$. Por tanto, para

$$\|z\| = \frac{A}{8\varepsilon|\lambda_0|}|\lambda_0|,$$

tenemos

$$\begin{aligned} J(z) &\geq -\frac{\varepsilon}{2}\|z\|^2 + \frac{A\|z\|}{8|\lambda_0|} - 2\pi^2 M_1 \\ &\geq \frac{A^2}{2^6|\lambda_0|^2\varepsilon} - 4\pi^2 M_1. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Luego

$$J(\varphi_\star) \geq \frac{A^2}{2^6|\lambda_0|\varepsilon} - 2\pi^2 M_1.$$

Tomando $\varepsilon_0 = A^2/(2^{11}\pi^2 M_1)$, obtenemos $J(\varphi_\star) \geq \frac{A}{2^7|\lambda_0|\varepsilon}$ for $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Esto, junto con (3.17) nos da la estimación

$$\|\varphi_\star\| \geq \frac{A^2}{2^{11}\pi|h|_\infty\varepsilon} := c_0\varepsilon^{-1}. \tag{3.20}$$

This and (3.18) complete the proof of the lemma. □

Vamos a buscar soluciones de la forma $u = v + w + (\varphi_\star + z) \in N \oplus W \oplus Z$. Restando de la ecuación (3.13) la ecuación (3.14), obtenemos la ecuación modificada en el esapcio singular

$$z = (\lambda - \lambda_0)^{-1}\Pi_Z[h(u) - h(\varphi_\star)] = 0. \tag{3.21}$$

Es necesario entonces que $\lambda < \lambda_0$ y que $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$. La desigualdad contraria, $\lambda > \lambda_0$ se puede realizar con la hipótesis dual intercambiando los signos en (3.9).

A continuación vamos a resolver la ecuación del núcleo (2.6) usando las soluciones aproximadas $\varphi_\star$ y el Lema 2, consecuencia del Lema de Nazarov-Turán. Recordemos que (3.11) puede ser reescrita como el sistema de ecuaciones integrales (2.8)–(2.10) con $f \equiv 0$, $u = v + w + (z + \varphi_\star) \in N \oplus W \oplus Z$ y $v = \mathscr{Q}(\bar{v}, v_1, v_2)$, donde $(\bar{v}, v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times L_0^2(\mathbb{T}) \times L_0^2(\mathbb{T})$ y $\mathscr{Q}$ es como en (1.5).

Para fijar ideas tomemos

$$\mathbb{X}_N = \{(\bar{v}, v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times (L_0^2(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}))^2 : \|v_i\|_\infty \leq 2|h|_\infty, |\bar{v}| \leq 2|h|_\infty\} \tag{3.22}$$

$$\mathbb{X}_W = \{w \in L^\infty(\mathbb{T}^2) \cap W : \|p\|_\infty \leq 8(1 + |\lambda_0|)|h|_\infty\} \tag{3.23}$$

$$\mathbb{X}_{Z,\varepsilon} = \{z \in ZL_0^2(\mathbb{T}) : \|z\| \leq c_0/4\varepsilon\} \qquad \text{para } \varepsilon \in (0,\varepsilon_0). \tag{3.24}$$

Definimos $F : \mathbb{X}_N \times (0,\varepsilon_1) \times \mathbb{X}_W \times \mathbb{X}_Z \to \mathbb{X}_N 1$ mediante la fórmula

$$F(\bar{v}, v_1, v_2; \varepsilon, w, z) = F_{\varepsilon,w,z}(\bar{v}, v_1, v_2) = (F_1, F_2, F_3)(\bar{v}, v_1, v_2)$$

con

$$F_1 = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} h(u) \tag{3.25}$$

$$F_2 = -\bar{v} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(u(x, r-x))\, dx \tag{3.26}$$

$$F_3 = -\bar{v} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(u(x, r-x))\, dx. \tag{3.27}$$

Recordemos que $u = \bar{v} + v_1 + v_2 + w + (z + \varphi_\star)$ y notemos que ε, w y z son parámetros en la definición de F. Es un cálculo directo rectificar que F está bien definida. Con estos ingredientes podemos entonces formular el siguiente lema que resuelve la ecuación del núcleo (3.11).

Lemma 4. *Existe $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ tal que para todos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $w \in \mathbb{X}_W$ y $z \in \mathbb{X}_Z$, la ecuación del núcleo* (3.11) *tiene una única solución que depende continuamente de (ε, w, z).*

Demostración. Es claro que $\mathbb{X}_V$ es un espacio métrico completo con la norma del máximo (o cualquier otra norma de $\mathbb{R}^2$) dada por

$$\|(\bar{v}, v_1, v_2)\|_{\mathbb{X}_V} = \text{máx}\{|\bar{v}|, \|v_1\|_\infty, \|v_2\|_\infty\}.$$

Escojamos $M_2 > 0$ tal que si $|s| \geq M_2$ entonces $|h'(s)| < \varepsilon_1$. Para $i = 1,2$, sea $(\bar{v}_i, v_{1,i}, v_{2,i}) \in \mathbb{X}_V$ con $v_i = \mathscr{L}(\bar{v}_i, v_{1,i}, v_{2,i}) \in \mathbb{X}_V$ con $v_i = \mathscr{L}(\bar{v}, v_1, v_2)$. Sea $w \in \mathbb{X}_W$, $z \in \mathbb{X}_Z$, $u_i(x,t) = (\varphi_\star + z + w + v_i)(x,t)$ y $\mathscr{L}$ es como en (1.4). De (3.15) tenemos que

$$\|\varphi_\star + z\| \geq \frac{3c_0}{4\varepsilon}.$$

Sea $D = M_2 + 2|h|_\infty + 8(1 + |\lambda_0|)|h|_\infty$. Por el Lema 2, para todo $r \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}
\mu(G) &:= \mu_1(\{x \in \mathbb{T} : |(\varphi_\star + z)|(x, r \pm x) \leq D\} \\
&= \mu_1(\{x \in \mathbb{T} : |(\varphi_\star + z)|(x, r \pm x)/\|\varphi_\star + z\| \leq D/\|\varphi_\star + z\|\} \\
&\leq \mu_1(\{x \in \mathbb{T} : |(\varphi_\star + z)|(x, r \pm x)/\|\varphi_\star + z\| \leq 4D\varepsilon/(3c_0)\} \\
&\leq C_{\lambda_0} \left(\frac{4D\varepsilon}{3c_0}\right)^{\frac{1}{2|\lambda_0|}} \\
&=: c_2 \varepsilon^{\frac{1}{2|\lambda_0|}}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Con C_{λ_0} como en (3.6) y $c_2 > 0$ dependiendo únicamente de λ_0 y h. Para $x \in \mathbb{T} \setminus G$ tenemos que

$$|h(u_2(x, r \pm x) - h(u_1(x, r \pm x)| \leq \varepsilon_1 |p_1(x) - p_2(x)|.$$

Por tanto, para $i = 1,2$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} |h(u_2(x,r\pm x)) - h(u_1(x,r\pm x))|\,dx \\
&\leq \iint_{G\times[0,1]} |h'(\text{punto intermedio}(x,r,s))||v_2(x,r\pm x) - v_1(x,r\pm x)|\,dxds \\
&\quad + \iint_{(\mathbb{T}\setminus G)\times[0,1]} \varepsilon_1 |v_2(x,r\pm x) - v_1(x,r\pm x)|\,dxds \\
&\leq (|h'|_{\infty} c_2 \varepsilon^{\frac{1}{2|\lambda_0|}} + \varepsilon_1)\|v_2 - v_1\|_{\infty} \\
&\leq 2(|h'|_{\infty} c_2 \varepsilon^{\frac{1}{2|\lambda_0|}} + \varepsilon_1)\|v_2 - v_1\|_{\infty}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

De manera similar se procede para F_1. Tomando

$$\varepsilon_1 := \text{mín}\left\{ \varepsilon_0, \frac{3c_0}{2^5(28)^{\frac{1}{2|\lambda_0|}}\sqrt{|\lambda_0|}D} \right\},$$

tenemos que F es una contracción. Por el Principio de Contracciones con Parámetros [15, Teo. 3.8] [21, Teo. 2.1]) el lema queda demostrado. $\square$

Para la ecuación del rango definimos, basados en (3.12) y (3.13), la aplicación $\tilde{F}$ para $(w,z) \in \mathbb{X}_W \times \mathbb{X}_Z$ mediante la fórmula

$$\tilde{F}(w,z) = \left(-(\Box + \lambda I)^{-1}\Pi_W h(u), \quad \frac{1}{\varepsilon}\Pi_Z(h(\varphi_\star) - h(u)) \right). \tag{3.30}$$

Usando (1.20), transformada de Fourier y desigualdad de Hölder, podemos ver que $\tilde{F}_1(w,z) \in \mathbb{X}_W$. En efecto,

$$\begin{aligned}
|(\Box + \lambda I)^{-1} P_W h(u(x,t))| &\leq \sum_{\substack{k^2-j^2\neq 0,-\lambda_0 \\ i=1,2,3,4}} \frac{|\hat{h}_i(k,h)\vartheta_{kj,i}(x,t)|}{|k^2-j^2+\lambda|} \\
&\leq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{\substack{k^2-j^2\neq 0,-\lambda_0 \\ k=1,\dots,j=0,\dots}} \frac{|\hat{h}_i(k,h)|}{|k^2-j^2+\lambda|} \\
&\leq \frac{2}{\pi}\left[\sum_{\substack{k^2-j^2\neq 0,-\lambda_0 \\ i=1,2,3,4}} \frac{1}{(k^2-j^2+\lambda)^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{\substack{k^2-j^2\neq 0,-\lambda_0 \\ i=1,2,3,4}} \hat{h}_i(k,h)^2 \right]^{1/2} \\
&\leq \frac{4(|\lambda_0|+1)}{\pi} \left[\sum_{\substack{k^2-j^2\neq 0 \\ i=1,2,3,4}} \frac{1}{(k^2-j^2)^2} \right]^{1/2} \|h(u)\| \\
&\leq 8(|\lambda_0|+1)|h|_{\infty}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Queremos ver ahora que $\tilde{F}_2(w,z) \in \mathbb{X}_Z$ para ε suficientemente pequeño. De hecho tenemos el siguiente lema.

Lemma 5. *Sea $u = (\varphi_\star + z) + w + v(z,w,\varepsilon) \in Z \oplus W \oplus N$. c_2, ε_1 y $v(z,w,\varepsilon)$ como en el Lema 4. Existe $\varepsilon_2 \in (0,\varepsilon_1)$ tal que si $w \in \mathbb{X}_W$, $z \in B_3$ y $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$, entonces*

$$\left\|(\Box + \lambda I)^{-1} P_Z(h(\varphi_\star) - h(u))\right\| \leq \frac{c_0}{4\varepsilon}. \tag{3.32}$$

Demostración. Sea γ como en (2.22), $\beta \in (0,(\gamma-1)/\gamma)$. Para $s \in [0,1]$, definamos

$$\psi_s := \frac{\varphi_\star + sz}{\|\varphi_\star + sz\|},$$

$G'_s := \{(x,t) \in \mathbb{T}^2 : |\psi_s(x,t)| < \varepsilon^\beta\}$, y

$$G_s := \left\{(x,t) \in \Omega : |\varphi_\star(x,t) + sz(x,t)| < \frac{3c_0}{4}\varepsilon^{\beta-1}\right\}. \tag{3.33}$$

Por (3.15) tenemos que $G_s \subset G'_s$. Para $(x,t) \in \mathbb{T}^2 \setminus G_s$ definimos el punto intermedio

$$\xi(x,t,s) := \varphi_\star(x,t) + s(v(x,t) + w(x,t) + z(x,t)). \tag{3.34}$$

Entonces, si $(x,t) \notin G_s$ y $\zeta \in Z$ es tal que $\|\zeta\| = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
&|((\Box + \lambda I)^{-1}\Pi_Z(h(\varphi_\star) - h(u)) \mid \zeta)| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |h(\varphi_\star(x,t)) - h(\varphi_\star(x,t) + v(x,t) + w(x,t) + z(x,t)||\zeta(x,t)|\,dxdt \\
&\quad \leq \frac{d}{\varepsilon}\left[\iiint\limits_{(\mathbb{T}^2\setminus G_s)\times[0,1]} |h'(\xi)||v(x,t) + z(x,t) + w(x,t)|\,dxdtds + \iint\limits_{G_s} 2|h|_\infty\right] \\
&\quad \leq \frac{d}{\varepsilon}\left[\frac{2\pi^2}{c_0^\gamma 2^\gamma}\varepsilon^{\gamma(1-\beta)}\left(2|h|_\infty + 8(|\lambda_0|+1) + \frac{c_0}{4\varepsilon}\right) + 2c_2|h|_\infty \varepsilon^{\frac{1}{2|\lambda_0|}}\right] \\
&\quad \leq \frac{c_0}{4\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Ya que ζ fue tomado arbitrario con $\|\zeta\| = 1$, tenemos que (3.35) implica (3.32). $\Box$

Tenemos el siguiente teorema que en [24] se demuestra para el caso Dirichlet-periódico. Aquí damos los detalles y especificidades del caso doble-periódico.

Teorema 1 (Caicedo-Castro-Sanjuán, 2017)**.** *Sea $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ y $h \in C^1$ que satisface (BI1)–(BI2). si $-\lambda_0 \in \sigma(\Box)$ es un valor propio de multiplicidad finita, existe $\varepsilon_\star \in (0,1/2)$ tal que si $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ el problema (2.4) con condiciones doble-periódicas tienen una solución débil no-trivial*

$$u_\varepsilon = v_\varepsilon + y_\varepsilon \in (N \oplus Y) \cap L^\infty(\mathbb{T}^2).$$

Más aún, si $\varepsilon \to 0$ entonces $\|v_\varepsilon\| + \|y_\varepsilon\|_1 \to \infty$.

Demostración. Fijemos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$, $w \in \mathbb{X}_W$ y $z \in \mathbb{X}_Z$ como en el Lema 4. Para la tripla (ε, w, z) existe un único punto fijo $v(\varepsilon, w, z) \in N$ con $\mathscr{Q}v \in \mathbb{X}_N$ para (3.11).

Por el Lema 5 y la estimación (3.31) vemos que la función $\tilde{F}$ dada por (3.30) es tal que $\tilde{F}(\mathbb{X}_Z) \subset \mathbb{X}_W \to \mathbb{X}_Z$. Como $\mathbb{X}_Z \to \mathbb{X}_W \to \mathbb{X}_Z$ es un conjunto cerrado, convexo y acotado de $W \times Z$, podemos aplicar el Teorema de Punto Fijo de Schauder [48, Teo. 3.4.7] y encontrando una solución débil no trivial para (2.4). La relación asintótica se desprende directamente de (3.13) □

Incluso, aplicando métodos similares y haciendo hipótesis adicionales sobre h, se puede demostrar que en el valor propio de multiplicidad infinita también. La idea se basa en tomar la $\varphi_\star$ como una función constante. Esto no se puede hacer en el caso Dirichlet-periódico y parece ser que encontrar bifurcación desde infinito en el valor propio cero es más complicado y sigue siendo un problema abierto. Los métodos son similares y los detalles se pueden encontrar en [71]. El teorema para el valor propio cero es el siguiente.

Teorema 2 (Caicedo-Castro-Sanjuán, 2016)**.** *Suponga que $h \in C^1(\mathbb{R})$ y satisface (BI1). Suponga que h además satisface la condición*

(BI2') $h(x) > 0$ *para* $x \geq 0$ *y*

$$\liminf_{x\to\infty} h(x) > 0.$$

Entonces existe un $\lambda_0 \in (-1/2, 0)$ tal que si $-\lambda \in (0, -\lambda_0)$, entonces (2.4) *tiene una solución débil no trivial $u_\lambda = v_\lambda + y_\lambda \in N \oplus Y$ tal que si $\lambda \uparrow 0$ entonces $\|v_\lambda\| + \|y_\lambda\|_1 \to \infty$.*

Un ejemplo de una ecuación que satisface tanto las condiciones del Teorema 1 como del Teorema 2 es la siguiente

$$\Box u + \lambda u + 1{,}2 \arctan u + \frac{10 \sin(u^2)}{u^2} = 0,$$

definiendo h de manera natural en 0.

Notemos que en el problema presentado en esta sección nos era imposible emplear los métodos clásicos de bifurcación inversa [29, Sec. 28.6], el Teorema de Krasnoselskii-Rabinowitz [16, Teo. 14.7] o el Teorema de Crandal-Rabinowitz [48, Teo. 1.3.3], ya que ningún valor propio tiene multiplicidad impar. Para el problema Dirichlet-periódico existen dos valores propios simples ($-\lambda_0 = 1{,}4$) en donde la bifurcación se da en forma de curva e infinitos valores propios de multiplicidad impar $-\lambda_0 = k^2$, con $k = 1, 2, \ldots$, en donde es posible encontrar un continuo de soluciones [24, Teo. 1.2].

3.2. Polinomios grandes en el rango

En contraste con los teoremas 1 y 2 donde las vibraciones son libres, en esta sección vamos a considerar un problema con forzamiento en el rango. En otras, vamos a encontrar condiciones suficientes para que una función de cuadrado integrable haga parte del rango de la ecuación semilineal.

Vamos a suponer que $h \in C^1(\mathbb{R})$, no necesariamente acotada, y satisface la siguiente condición similar a (BI1).

(PG1) Existe un $A > 0$ y un $\beta < 0$ tal que para todo s con $|s| \geq A$,

$$|h'(s)| \leq |s|^{\beta}. \tag{3.36}$$

La condición (PG1) también implica (BI1) y por tanto que g es asintóticamente lineal. Como consecuencia directa de (PG1) se tiene que para $\varepsilon > 0$ arbitrario pero fijo

$$|h(s)| \leq M_\varepsilon + \varepsilon|s| \quad \text{para algún } M_\varepsilon > 0 \text{ y todo } s \in \mathbb{R} \tag{3.37}$$

Además

$$|h(s)| \leq M_1 + \frac{|s|^{\beta+1}}{\beta+1} \tag{3.38}$$

Es claro que $g(s) = \lambda s + h(s)$ es globalmente Lipschitz continua ya que h' es acotada y

$$|g(s) - g(s')| \leq (|\lambda| + |h'|_\infty)|s - s'|.$$

Además, gracias a (3.37), g cumple (2.21) y las hipótesis del Teorema de Hofer-Willem. Es así como hemos demostrado el siguiente Lema.

Lemma 6. *Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ es acotada y satisface (PG1). Entonces existe una sucesión $\rho_n \in L^2(\mathbb{T}^2)$ con $\|\rho_n\| \to 0$ y una sucesión de soluciones débiles $u_n \in L^2(\mathbb{T}^2)$ a la ecuación*

$$\Box u_n + \lambda u_n + h(u_n) = f + \rho_n, \tag{3.39}$$

sujeta a las condiciones doble-periódicas.

Vamos a considerar de ahora en adelante forzamientos polinómicos grandes. Es decir suponemos que f tiene la forma

$$f(x,t) = cq(x,t) \tag{3.40}$$

para $q \in Y$ un polinomio trigonométrico de grado m y c suficientemente grande en un sentido que precisaremos más adelante. Definimos

$$\varphi := (\Box + \lambda I)^{-1} q. \tag{3.41}$$

Es claro que en particular φ es también un polinomio trigonométrico no-plano sobre características gracias a Nazarov-Turán.

De (2.4), (3.39) y (3.40), obtenemos

$$\Box(u_n - c\varphi) + \lambda(u_n - c\varphi) + h(u_n) = \rho_n. \tag{3.42}$$

Haciendo $\xi_n := u_n - c\varphi$, la ecuación anterior se convierte en

$$\Box\xi_n + \tau\xi_n + h(u_n) = \rho_n. \tag{3.43}$$

Podemos escribir $\xi_n = z_n + w_n \in N \oplus Y$. Donde $N = \ker(\Box) \subset L^2(\mathbb{T}^2)$.

Las ecuaciones (2.6) y (2.7) se transforman en

$$\begin{cases} w_n = (\Box + \lambda)^{-1} \Pi_N(\rho_n - h(u_n)) & \text{(ecuación del rango)} \\ \lambda z_n = \Pi_{N^\perp}(\rho_n - h(u_n)) & \text{(ecuación del núcleo).} \end{cases} \tag{3.44}$$

El argumento consiste en demostrar que las sucesiones w_n y z_n convergen en Y y N respectivamente. Los límites serán precisamente soluciones débiles al problema (3.43) y con estas soluciones, el teorema quedará demostrado.

El siguiente lema acota las sucesiones w_n y z_n en H y $L^2(\mathbb{T}^2)$ respectivamente. Por el Teorema de Rellich-Kondrakov [10, p. 194], para la sucesión w_n exise una subsucesión que converge puntualmente y en $L^2(\mathbb{T}^2)$. Sin pérdida de generalidad podremos suponer que la subsucesión es ella misma. De este modo, el siguiente lema garantiza la convergencia de las w_n en $L^2(\Omega)$.

Lemma 7. *Existen $c_1 > 0$ y $M_2 > 0$ tales que si $|c| > c_1$, entonces*

$$\|w_n\|_1\,, \|z_n\|\,, \|\varphi\| \leq M_2|c|^{\beta+1}$$

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. De (3.36) y usando la desigualdad de Hölder con los exponentes $-1/\beta$ y $1/(\beta+1)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|h(u_n)\|^2 &\leq 2\int_\Omega M_1^2 + \frac{2}{(\beta+1)^2}\int_\Omega |u_n|^{2(\beta+1)}\\ &\leq 8\pi^2 M_1^2 + \frac{2^{1-2\beta}}{\pi^{2\beta}(\beta+1)^2}\|u_n\|^{2(\beta+1)}\,.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Esto implica que

$$\|h(u_n)\| \leq 2\sqrt{2}\pi M_1 + \frac{2^{1/2-\beta}}{\pi^\beta(\beta+1)}\|u_n\|^{\beta+1}\,. \tag{3.46}$$

Sea $M_\rho > 0$ tal que $\|\rho_n\| \leq M_\rho$ y sean $M_h := M_\rho + 2\sqrt{2}\pi M_1$ y $C_h := \dfrac{2^{1/2-\beta}}{\pi^\beta(\beta+1)}$. Usando (3.44) y (3.46) obtenemos las siguientes acotaciones para w_n y z_n

$$\|w_n\|_1 \leq \kappa\left[M_h + C_h\left(\|w_n\| + \|z_n\| + |c|\,\|\varphi\|\right)^{\beta+1}\right] \tag{3.47}$$

$$\|z_n\| \leq \tau^{-1}\left[M_h + C_h\left(\|w_n\| + \|z_n\| + |c|\,\|\varphi\|\right)^{\beta+1}\right]. \tag{3.48}$$

Sean

$$\begin{aligned}c_1 := \max\Bigg\{&\|\phi\|^{\frac{1}{\beta+1}}, e^{\frac{\ln(M_h)}{\tau(\beta+1)}}, e^{\frac{\ln(\kappa M_h)}{(\beta+1)}}, \left[\left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{\frac{-1}{\beta}} - \beta^{-1}\kappa M_h\right]^{\frac{1}{\beta+1}},\\ &\left[\left(\tau^{-1}C_h 3^{\beta+1}\right)^{\frac{-1}{\beta}} - \beta^{-1}\tau^{-1}M_h\right]^{\frac{1}{\beta+1}},\\ &\left[\kappa M_h + C_h 3^{\beta+1}\kappa\left(\left(\tau^{-1}C_h 3^{\beta+1}\right)^{\frac{-1}{\beta}} - \beta^{-1}\tau^{-1}M_h\right)^{\beta+1}\right]^{\frac{1}{\beta+1}}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.49}$$

y

$$M_2 := \max\left\{1,\, \kappa C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|^{\beta+1} + 1,\, \tau^{-1}C_h 3^{\beta+1}\|\varphi\|^{\beta+1} + 1\right\}. \tag{3.50}$$

Tomemos $|c| > c_1$. Supongamos en primer lugar que $|c| \|\phi\|$ es el $\max\{\|w_n\|, \|z_n\|, |c| \|\varphi\|\}$. Entonces (3.47) y (3.48) se transforman en

$$\begin{aligned}
\|w_n\| &\leq \|w_n\|_1 \\
&\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1} \|\varphi\|^{\beta+1} |c|^{\beta+1} \\
&\leq \left(\kappa C_h 3^{\beta+1} \|\varphi\|^{\beta+1} + 1\right) |c|^{\beta+1} \\
&\leq M_2 |c|^{\beta+1}
\end{aligned}$$

y en

$$\begin{aligned}
\|z_n\| &\leq \tau^{-1} M_h + \tau^{-1} C_h 3^{\beta+1} \|\varphi\|^{\beta+1} |c|^{\beta+1} \\
&\leq \left(\tau^{-1} C_h 3^{\beta+1} \|\varphi\|^{\beta+1} + 1\right) |c|^{\beta+1} \\
&\leq M_2 |c|^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\|w_n\| = \max\{\|w_n\|, \|z_n\|, |c| \|\varphi\|\}$. Entonces, usando la desigualdad de Young con los exponentes $-1/\beta$ y $1/(\beta+1)$, (3.47) y (3.48) se transforman en

$$\begin{aligned}
\|w_n\| &\leq \|w_n\|_1 \\
&\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1} \|w_n\|^{\beta+1} \\
&\leq \kappa M_h - \beta \left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{-\frac{1}{\beta}} + (\beta+1) \|w_n\| \\
&\leq \kappa M_h - \beta \left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{-\frac{1}{\beta}} + (\beta+1) \|w_n\|_1 .
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\|z_n\|, \|w_n\| &\leq \|w_n\|_1 \\
&\leq \left(\kappa C_h 3^{\beta+1}\right)^{-\frac{1}{\beta}} - \beta^{-1} \kappa M_h \\
&\leq |c|^{\beta+1} \\
&\leq M_2 |c|^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

Por último supongamos que $\|z_n\| = \max\{\|w_n\|, \|z_n\|, |c| \|\varphi\|\}$. Procediendo de la misma manera que en el caso anterior tenemos que

$$\|w_n\| \leq \|z_n\| \leq M_2 |c|^{\beta+1}.$$

Usando el último en la lista en la definición (3.49), obtenemos

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_1 &\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1} \|z_n\|^{\beta+1} \\
&\leq \kappa M_h + \kappa C_h 3^{\beta+1} \left[\left(\tau^{-1} C_h 3^{\beta+1} \right)^{-1/\beta} - \beta^{-1} \tau^{-1} M_h \right]^{\beta+1} \\
&\leq M_2 |c|^{\beta+1}.
\end{aligned}$$

La desigualdad para $\|\varphi\|$ se verifica inmediatamente. □

El siguiente lema garantiza la convergencia de los c_n

Lemma 8. *Existe $c_2 > 0$, tal que si $|c| > c_2$, z_n es una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitario pero fijo. El argumento consiste en demostrar que cada una de las suceciones $\|\bar{z}_n - \bar{z}_m\|$, $\|z_{1,n} - z_{1,m}\|$, $\|z_{2,n} - z_{2,m}\|$ definidas como $(\bar{z}, z_{1,n}, z_{2,n}) = \mathscr{Q}z$ están acotadas adecuadamente por $\|z_n - z_m\|$. Denotamos con $\zeta_{r,x}$ a la linea caracterísica $(x, r-x)$.

Sea ε_0 cualquier número fijo con la condición

$$0 < \varepsilon_0 < \text{mín} \left\{ 1, \frac{\varepsilon^2}{1568\pi^2}, \frac{1}{32\pi^2 (C_1 + 2C_2)^2} \right\}, \tag{3.51}$$

donde

$$C_1 := \frac{\sqrt{6} M}{4\tau\pi^{3/2}} \tag{3.52}$$

$$C_2 := 2\sqrt{\pi} C_1 + \frac{\sqrt{3} M}{\tau\pi}. \tag{3.53}$$

Sea N_{ε_0} un entero positivo tal que si $n, m \geq N_{\varepsilon_0}$

$$\|\rho_n - \rho_m\| < \text{mín} \left\{ \tau\sqrt{\pi\varepsilon_0}, \frac{\pi\tau\sqrt{\varepsilon_0}}{2\sqrt{2}} \right\} \text{ y} \tag{3.54}$$

$$\|w_n - w_m\| < \text{mín} \left\{ \frac{1}{2C_1}, \frac{\pi^{3/2}\tau}{2\sqrt{3}} M \right\} \tag{3.55}$$

Suponemos de ahora en adelante que $n, m \geq N_{\varepsilon_0}$.

Ahora, para ε_0, existe $\delta := \delta(\varepsilon_0) > 0$ tal que $\mu(B^c) < \varepsilon_0$, donde

$$A = \{ x \in \mathbb{T} : |\xi_m + s(\xi_n - \xi_m)|(\zeta_{r,x}) < |c|\delta/2 \} \tag{3.56}$$

$$B = \{ x \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta_{r,x})| \geq \delta \} \tag{3.57}$$

Sea

$$c_2 := \text{máx}\left\{\frac{2}{\delta}\left(\frac{\varepsilon_0 M^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2\beta}}, \left(\frac{\delta}{M_2}\sqrt{\frac{9}{\pi}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\}, \tag{3.58}$$

y escojamos $|c| > c_2$ arbitrario pero fijo.

Definimos

$$\sigma = (c\varphi + \xi_m + s(\xi_n - \xi_m))(\zeta_{r,x}) \tag{3.59}$$

con $s \in [0,1]$.

Para $x \in A \cap B$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\sigma|^{2\beta} &= |\,(c\varphi + \xi_m + s(\xi_n - \xi_m))\,(\zeta_{r,x})|^{2\beta} \\ &\leq |c|^{2\beta}\,[|\varphi(\zeta_{r,x})| - |\,(\xi_m + s(\xi_n - \xi_m))\,(\zeta_{r,x})|]^{2\beta} \\ &= |c|^{2\beta}(\delta/2)^{2\beta}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Tomemos $M_0 := \sqrt{2}M_2|c|^{\beta+1}$. Es claro que $\|\xi_n\|$ y $\|\varphi\|$ están acotadas por M_0.

$$\begin{aligned} 9M_0^2 &\geq \int_\Omega |\xi_m + s(\xi_n - \xi_m)|^2 \\ &\geq \int_0^{2\pi}\int_{A^c} |\xi_m + s(\xi_n - \xi_m)|^2 \\ &\geq 2\pi\mu(A^c)c^2(\delta/2)^2. \end{aligned}$$

De ahí que

$$\mu(A^c) \leq \frac{18M_0^2}{\pi c^2\delta^2}. \tag{3.61}$$

De esta manera podemos acotar

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |h'(\sigma)|^2\,dx &= \int\limits_{A\cap B} |h'(\sigma)|^2\,dx + \int\limits_{A^c\cup B^c} |h'(\sigma)|^2\,dx \\ &\leq 2\pi|c|^{2\beta}(\delta/2)^{2\beta} + \mu(A^c)M^2 + \mu(B^c)M^2 \\ &\leq 2\pi|c|^{2\beta}(\delta/2)^{2\beta} + \frac{18M_0^2M^2}{\pi c^2\delta^2} + \varepsilon_0 M^2 \\ &\leq 3\varepsilon_0 M^2. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Usando lo anterior obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\int_\Omega |h(u_n)-h(u_m)| &\leq \int_\Omega |h'(\sigma)||\xi_n-\xi_m| \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} 3\varepsilon_0 M^2\right)^{\frac{1}{2}} \|\xi_n-\xi_m\| \\ &\leq \sqrt{6\pi\varepsilon_0}M\,\|\xi_n-\xi_m\|\,.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Usando (3.63), (3.52)-(3.55)

$$\begin{aligned}|\bar{z}_n-\bar{z}_m| &\leq \frac{1}{4\pi^2\tau}\left[\int_\Omega |\rho_n-\rho_m| + \int_\Omega |h(u_n)-h(u_m)|\right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi\tau}\|\rho_n-\rho_m\| + C_1\sqrt{\varepsilon_0}\,\|\xi_n-\xi_m\| \\ &\leq \sqrt{\varepsilon_0}+C_1\sqrt{\varepsilon_0}\,\|z_n-z_m\|\end{aligned} \tag{3.64}$$

Gracias a (3.64)

$$\begin{aligned}&\|z_{1,n}-z_{1,m}\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \int_0^{2\pi}\left|\bar{z}_m-\bar{z}_n+\frac{1}{2\pi\tau}\left[\int_0^{2\pi}(\rho_n-\rho_m+h(u_n)-h(u_m))\,(\zeta_{rx})\,dx\right]\right|^2 dr \\ &\leq 4\pi|\bar{z}_n-\bar{z}_m|^2+\frac{2}{\pi\tau^2}\|\rho_n-\rho_m\|^2+\frac{1}{\pi^2\tau^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}|h'(\sigma)||\xi_n-\xi_m|\right]^2 \\ &\leq 4\pi|\bar{z}_n-\bar{z}_m|^2+\frac{2}{\pi\tau^2}\|\rho_n-\rho_m\|^2+\frac{3\varepsilon_0 M^2}{\pi^2\tau^2}\|\xi_n-\xi_m\|^2\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}&\|z_{1,n}-z_{1,m}\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\quad\leq 2\sqrt{\pi}|z_n-z_m|+\frac{2}{\sqrt{\pi}\tau}\|\rho_n-\rho_m\|+\frac{\sqrt{3\varepsilon_0}M}{\pi\tau}\|\xi_n-\xi_m\| \\ &\quad\leq 3\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon_0}+C_2\sqrt{\varepsilon_0}\,\|z_n-z_m\|\,.\end{aligned} \tag{3.65}$$

Del mismo modo, reptiendo todo el procedimiento sobre características $(x, r+x)$, tenemos que

$$\|z_{2,n}-z_{2,m}\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq 3\sqrt{\pi}\sqrt{\varepsilon_0}+C_2\sqrt{\varepsilon_0}\,\|z_n-z_m\|\,. \tag{3.66}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\|z_n - z_m\| \\
&\quad \le 2\sqrt{2}\Big[\pi|z_n - z_m|^2 + \sqrt{\pi}\,\|z_{1,n} - z_{1,m}\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \sqrt{\pi}\,\|z_{2,n} - z_{2,m}\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\Big] \\
&\quad \le 14\sqrt{2}\pi\sqrt{\varepsilon_0} + 2\sqrt{2}\pi(C_1 + 2C_2)\,\|z_n - z_m\| \\
&\quad \le 14\sqrt{2}\pi\sqrt{\varepsilon_0} + \frac{1}{2}\,\|z_n - z_m\|.
\end{aligned}
$$

Lo que implica que

$$\|z_n - z_m\| \le 28\sqrt{2}\pi\sqrt{\varepsilon_0} < \varepsilon.$$

En otras palabras z_n es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{T}^2)$. □

$|c| > \text{máx}\,\{c_1, c_1\}$, podemos entonces demostrar el siguiente teorema que es una adaptación de [23] al caso doble periódico y con forzamientos polinómicos. El argumento para garantizar que la solución está en $L^p(\mathbb{T}^2)$ con $p > 2$ es muy similar al de la referencia [23].

Teorema 3 (Caicedo-Castro-Duque-Sanjuán, 2014)**.** *Sea $\lambda \notin \sigma(\Box)$, $f = cq \in L^p(\Omega)$ un polinomio trigonométrico. Entonces existe $c_0 > 0$ tal que si $|c| > c_0$, el problema* (2.4) *con condiciones doble-periódicas tiene una solución débil en $L^p(\mathbb{T}^2)$.*

3.3. Existencia de soluciones a un problema no regular

En esta sección vamos a demostrar que existe solución débil a un problema no-regular. Específicamente, la solución no va a ser ni siquiera continua con forzamientos suaves. Esto complementa los resultados obtenidos en [20].

Vamos a asumir que $g \in C(\mathbb{R})$ es continua y satisface

$$g(t) = \begin{cases} \tau_1 t + h(t) & \text{if } t \le 0 \\ \tau_2 t + h(t) & \text{if } t > 0 \end{cases} \tag{3.67}$$

aquí $\tau_1, \tau_2 > 0$, h continua y

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{h(s)}{s} = 0. \tag{3.68}$$

Cuando $\tau_1 \neq \tau_2$ se dice que la no-linelalidad es de salto. En [27] se demostró que si $\nu < \mu$ son dos valores propios consecutivos de $-\Box$, entonces existe una función decreciente $b : (\nu, \mu) \to \mathbb{R}$ with $\text{lím}_{x\to\mu} b(x) = \mu$ tal que si g es monótona, $\tau_1 \in (\nu, \mu)$, $\tau_2 \in [\tau_1, b(\tau_1)$ entonces (2.1) tiene una solución para todo $f \in L^2((0,2\pi) \times (0,2\pi))$. Esto extiende los resultados en [82].

El resultado que se expone en esta sección permite no-linealidades de salto y resonancia [17].

Teorema 4 (Caicedo-Castro-Duque-Sanjuán, 2017)**.** *Si g satisface* (3.67)–(3.68) *y $f(x,t) = p(x+t)$ o $f(x,t) = p(x-t)$, con $p \in L^2(\mathbb{T}^2)$ y $p(\xi + 2\pi) = p(\xi)$ para $\xi \in \mathbb{T}$, entonces la ecuación* (2.1) *tiene solución débil $u \in L^2(\mathbb{T})$.*

La solución encontrada en el Teorema 4 no necesariamente es única como veremos más adelante.

La idea central de la demostración del Teorema 4 es la construcción de una función monótona g_1 tal que las soluciones débiles a $\Box u + g_1(u) = f(x,t)$ son también soluciones a (2.1).

Sea

$$\Gamma = \{\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \gamma \text{ is increasing, continuous and } \gamma(t) \le g(t) \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}.$$

Definimos la función g_1 por

$$g_1(t) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(t). \tag{3.69}$$

Por (3.67) y (3.68), $\Gamma \neq \emptyset$ y por ende g_1 está bien definida. Adicionalmente, g_1 cumple las propiedades del siguiente lema.

Lemma 9. *La función g_1 definida en* (3.69)*, satisface:*

(1) $g_1(t) \le g(t)$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(2) g_1 *es creciente, es decir, si* $s \le t$ *entonces,* $g_1(s) \le g_1(t)$.

(3) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$g_1^{-1}(\alpha) = \{t \in \mathbb{R}; \quad g_1(t) = \alpha\} = [a,b]. \tag{3.70}$$

(4) g_1 *es continua.*

(5) Si $g(a) < g(t)$ *para* $t > a$*, entonces* $g(a) = g_1(a)$.

Demostración. (1) Se deduce de (3.69). (2) Suponga que existen $s < t$ tales que $g_1(s) > g_1(t)$. Tomemos $\varepsilon = g_1(s) - g_1(t)$. Sea $\gamma \in \Gamma$ tal que $g_1(s) - \varepsilon < \gamma(s) \le g_1(s)$. Así $g_1(t) < \gamma(s) \le \gamma(t) \le g_1(t)$ es decir, $g_1(t) < g_1(t)$, lo cual es una contradicción. (3) Se deduce de (2). (4) Sean $c \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$.Por la definición de $g_1(c)$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(c) > g_1(c) - \varepsilon/2$. Por la continuidad de γ, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(x) > \gamma(c) - \varepsilon/2 > g_1(c) - \varepsilon$ para todo $x \in (c-\delta, c)$. Por tanto $g_1(x) > g_1(c) - \varepsilon$ para todo $x \in (c-\delta, c)$, lo que implica $\lim_{x\to c-} g(x) := g_1(c-) \ge g_1(c)$. Esto y (2), demuestran que $g_1(c) = g(c-)$.

Suponga que $g_1(c) > g_1(c+) := \lim_{x\to c+} g_1(x)$. Ya que $g(y) \ge g_1(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to c+} g(x) := g(c+) \ge g_1(c+)$. Esto y la continuidad de g implican que $g(c) = g(c+) \ge g_1(c+) > g_1(c)$. Por la continuidad de g existe $\delta_1 > 0$ tal que $g(x) > (g(c) + g_1(c))/2$ para todo $x \in (c - \delta_1, c)$. Sea $\gamma_1 \in \Gamma$. Ya que $g_1(c-) = g_1(c)$, $g(c-\delta_1) \le g_(c)$.

Sea

$$\gamma^*(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{for} \quad t \le c - \delta_1 \\ \dfrac{c-x}{\delta_1}\gamma_1(c-\delta_1) + \dfrac{x-c+\delta_1}{\delta_1}\dfrac{g(c)+g_1(c)}{2} & \text{for} \quad x \in [c-\delta_1, c] \\ (g(c)+g_1(c))/2 & \text{for } t \ge c. \end{cases} \tag{3.71}$$

Entonces $\gamma^* \in \Gamma$. Pero esto contradice que $\gamma^*(c) \leq g_1(c)$. Es decir, $g_1(c+) = g_1(x)$, demostrando (4).

(5) Suponga que es falso, es decir, $g(a) < g(t)$ para todo $t > a$ y $g(a) > g_1(a)$. Sea $\{s_n\}$ una sucesión decreciente tal que $s_n \to a$, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ definimos la función γ_n por

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} g_1(t); & t < a \\ \frac{g(a)-g_1(a)}{s_n - a}(t-a) + g_1(a); & t \in (a, s_n) \\ g(a); & t \geq s_n \end{cases} \tag{3.72}$$

Las sucesión $\{\gamma_n\} \subseteq \Gamma$, $\gamma_n(s_n) = g(a)$, entonces $g_1(s_n) \geq g(a)$ par todo n, por continuidad de g_1 tenemos

$$g(a) \leq \lim_{n\to\infty} g_1(s_n) = g_1(a), \tag{3.73}$$

lo que es una contradicción. Esto demuestra el Lema. $\square$

Sea $f(x,t) = p(x+t)$. Por el Lema 9, para cada $\xi \in \mathbb{R}$ existe $a_\xi, b_\xi \in \mathbb{R}$ tal que $g_1^{-1}(p(\xi)) = [a_\xi, b_\xi]$ y $g_1(b_\xi) = g(b_\xi)$. Definimos

$$v(\xi) := b_\xi. \tag{3.74}$$

Por tanto

$$g(v(\xi)) = p(\xi). \tag{3.75}$$

Veamos que v es medible, que $u(x,t) := v(x+t) \in N$, y que u es una solución débil de (2.1).

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Ya que $g_1^{-1}(\alpha) = [a,b]$ y g_1 es una función creciente, $\{t \in \mathbb{R},\ g_1(t) > \alpha\} = (b, \infty)$. Así

$$\{\xi \in \mathbb{R}; \quad v(\xi) > b\} = \{\xi \in \mathbb{R}; \quad p(\xi) > \alpha\} \tag{3.76}$$

que es medible porque $p \in L^2(\mathbb{T}^2)$. Ya que α es arbitrario, hemos probado que v es medible.

Veamos ahora que $v(x+t) \in N$. Sea $A := \{s \in [0, 2\pi]\,; v(s) \geq 0\}$ y $\tau_3 = \frac{1}{2}\,\text{mín}\{\tau_1, \tau_2\}$. Por (3.67) y (3.75), existe $M > 0$ tal que

$$h(s) < (\tau_3 - \tau_1)s \quad \text{for } s < -M \tag{3.77}$$
$$h(s) > (\tau_3 - \tau_2)s \quad \text{for } s > M \tag{3.78}$$

Para $m > 0$, sea $A_m = \{s \in (0, 2\pi)\,; v(s) \leq -m\}$. Entonces, por (3.77)

$$\begin{aligned} \int_{A_0} p^2(s)\,ds &= \int_{A_0} [\tau_1 v(s) p(s) + h(v(s))]^2\,ds \\ &= \int_{A_M} [\tau_1 v(s) + h(v(s))]^2\,ds + \int_{A_0 - A_M} g(v(s))^2\,ds \\ &\geq \tau_3^2 \int_{A_0} v^2(s)\,ds - \tau_3^2 \int_{A_0 - A_M} v^2(s)\,ds + \int_{A_0 - A_M} g(v(s))^2\,ds \\ &\geq \tau_3^2 \int_{A_0} v^2(s)\,ds - 4\pi^2(\tau_3^2 M^2 + M_1) \end{aligned} \tag{3.79}$$

donde $M_1 = \text{máx}\{g(s)^2\,;\,|v(s)| \leq M\}$. De forma similar, usando (3.78)

$$\int_{A_0^c} p^2(s)\,ds \geq \tau_3^2 \int_{A_0^c} v^2(s)\,ds - 4\pi^2(\tau_3^2 M^2 + M_1) \tag{3.80}$$

De (3.79) y (3.80), obtenemos

$$\tau_3^2 \int_0^{2\pi} v(s)^2\,ds \leq \int_0^{2\pi} p^2(s)\,ds + 4\pi^2(\tau_3^2 + M_1) \tag{3.81}$$

Por tanto, $v \in L_2[0,2\pi]$ y es claro que $v \in L_2(\Omega)$. Más aún $v(x+t) \in N$. Esto demuestra el Teorema cuando $f(x,t) = p(x+t)$. Para $f(x,t) = p(x-t)$ el argumento es similar.

Veamos que las soluciones no son necesariamente únicas. Si $a_\xi < b_\xi$ y $\mu_1(\{x \in \mathbb{T}\,;\, p(x) = p(\xi)\}) > 0$ entonces definiendo

$$\hat{v}(\xi) := a_\xi\,, \tag{3.82}$$

vemos que $\hat{v}$ es otra solución de (2.1). De manera más general, si $\mu_1(\{x \in [0,2\pi]\,;\, p(x) = p(\xi)\}) > 0$ tomando A, B de tal forma que $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \{x \in \mathbb{T}\,;\, p(x) = p(\xi)\}$ y $m(A) > 0$, $m(B) > 0$. Definiendo

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} a_\xi & \text{for } x \in A \\ b_\xi & \text{for } x \in B, \end{cases} \tag{3.83}$$

tenemos una solución adicional. Así, si $\mu_1(\{x \in \mathbb{T}\,;\, p(x) = p(\xi)\}) > 0$ el argumento expuesto permite demostrar que (2.1) tiene infinitas soluciones no-contables.

CAPÍTULO 4

PERSPECTIVAS Y PROBLEMAS ABIERTOS

Este capítulo lo dividiremos en tres secciones: problemas razonables, problemas difíciles y problemas muy difíciles. Los problemas razonables son los que a criterio del autor tienen posibilidades de ser resueltos con las técnicas expuestas en este documento. Problemas formulados en este nivel podrían ser resueltos, por ejemplo, en una tesis de maestría.

Los problemas difíciles requerirán seguramente técnicas más elaboradas y adaptaciones de técnicas conocidas. Un problema de este nivel puede hacer parte de una tesis de doctorado.

Finalmente los problemas muy difíciles son problemas completamente abiertos donde las técnicas existentes parecen agotarse. En estos casos seguramente se hará necesario la creación de nuevos métodos. Problemas de este nivel podrían hacer parte de un programa de investigación a largo plazo que atraviese generaciones.

4.1. Problemas razonables

Es razonable encontrar condiciones suficientes sobre f, h o λ que permitan ampliar el rango del operador de onda semilineal

$$u \mapsto \Box u + \lambda u + h(u).$$

Dos problemas aquí se presentan como interesantes. En primer lugar tratar de encontrar un subespacio en el rango sin suponer monotonía. Por ejemplo un subespacio de polinomios. En segundo lugar, y en relación con lo anterior, encontrar condiciones suficientes para que existan soluciones con resonancia, es decir, con $-\lambda \in \sigma(\Box)$. Los métodos expuestos en este documento junto con los métodos en [51] pueden ser de ayuda.

Es de aclarar que el problema de caracterizar el rango del operador de onda semilineal sigue siendo un problema abierto.

El problema de bifurcación desde infinito ya tiene una respuesta aceptable [24]. Similar al anterior es posible que, como en el caso elíptico, se pueda encontrar bifurcación desde cero en los valores propios del operador de onda.

4.2. Problemas difíciles

Los problemas difíciles aparecen cuando se pierde la compacidad. Por ejemplo, el problema de encontrar bifurcación desde infinito para el valor propio cero en el problema Dirichlet-periódico, parece ser un problema difícil.

Un problema en donde se pierde por completo la compacidad es el siguiente. Dar condiciones suficientes sobre h y λ para encontrar bifurcación en infinito si el cociente de los periodos en la variable espacial y temporal es un número irracional. En el caso Dirichlet-periódico el fenómeno es el mismo si el cociente entre el periodo y la longitud de la cuerda es un número irracional. Una combinación de argumentos de [19] y [24] puede ayudar en este caso.

En relación con lo anterior, con varias dimensiones espaciales en membranas rectangulares están los trabajos de [9]. Sin embargo, permitir que el rango de la derivada atraviese los valores propios con los periodos fijos sigue siendo un problema abierto. En varias dimensiones espaciales todos los valores propios son de multiplicidad infinita lo que hace que se pierda completamente la compacidad. En este sentido, el problema de bifurcación desde infinito o caracterización del rango son problemas abiertos.

4.3. Problemas muy difíciles

La regularidad de soluciones en el caso elíptico ha tardado años y la intervención de grandes matemáticos y es una teoría con muchas preguntas abiertas pero también con muchas preguntas resueltas [36]. En el caso hiperbólico el problema de la regularidad de soluciones, si la no-linealidad es no-monótona parece ser un problema bastante difícil. Están los trabajos de [20] y [17] que muestran los primeros resultados en esa dirección. Sin embargo una respuesta general y aceptable del fenómeno está lejos por el momento.

Otra dificultad que presenta la ecuación de onda es que su índice de Morse es infinito [47]. Las técnicas conocidas para encontrar resultados de multiplicidad de soluciones no siempre se aplican con facilidad. A este respecto se tiene el trabajo de [28], pero sin suponer simetrías en la parte no-lineal de este tipo de resultados se sabe muy poco [17].

Finalmente el problema más difícil, a criterio del autor, consiste en obtener resultados de existencia, regularidad, multiplicidad de soluciones o bifurcación de soluciones cuando hay varias variables espaciales y el dominio de las variables espaciales es una región general. Salvo el caso lineal [11, Teo. 10.7-10.8] o salvo el caso de simetría radial en bolas [7, 45] el caso no lineal general es un problema completamente abierto y del que muy poco se sabe.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*. Springer Verlag, 2005.

[2] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz. Dual variational methods in the critical point theory and applications. *Journal of Functional Analysis*, 1973.

[3] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, 1989.

[4] A. Bahri and H. Beresticky. A Perturbation Method in Critical Point Theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 267(1), 1981.

[5] E. T. Bell. *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica de México, 2004.

[6] K. Ben-Naoum and J. Mawhin. The periodic-Dirichlet problem for some semilinear wave equations. *Journal of Differential Equations 96 (1992)Chaos, Solitons and Fractals*, 5:340–354, 1995.

[7] J. Berkovits and J. Mawhin. Diophantine approximation, Bessel functions and radially symmetric periodic solutions of semilinear wave equations in a ball. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(12):5041–5055, 2001.

[8] M. Berti and L. Biasco. Forced Vibrations of Wave Equations with non-Monotone Nonlinearity. *Annales del Institute Henry Poincaré. Analyse Nonlinéaire*, 23:439–474, 2006.

[9] M. Berti and P. Bolle. Sobolev Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations in Higher Spatial Dimensions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 195:609–642, 2010.

[10] H. Brezis. *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, 1984.

[11] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2010.

[12] H. Brézis and J. M. Coron. Periodic Solutions of a Wave Equation and Hamiltonian Systems. *American Journal of Mathematics*, 103(3):559–570, June 1981.

[13] H. Brézis, J. M. Coron, and L. Nirenberg. Free Vibrations for a Nonlinear Wave Equation and a Theorem of P. Rabinowitz. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXIII:667–689, 1980.

[14] H. Brézis and L. Nirenberg. Forced Vibrations for a Nonlinear Wave Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXI:1–30, 1978.

[15] R.M. Brooks and K. Schmitt. *The Contraction Mapping Principle and Some Applications*. Electronic journal of differential equations: Monograph, 2009.

[16] R.F. Brown. *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*. Birkhäuser Boston, 2004.

[17] A. Caicedo, A. Castro, R. Duque, and A. Sanjuán. The semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity: a review (to appear). *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2017.

[18] J. F. Caicedo. *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colobmia, Bogotá., 2005.

[19] J. F. Caicedo and A. Castro. A Semilinear Wave Equation with Derivative of Nonlinearity Containing Multiple Eigenvalues of Infinite Multiplicity. *Contemporary Mathematics*, 208, 1997.

[20] J. F. Caicedo and A. Castro. A Semilinear Wave Equation with Smooth Data and no Resonance Having no Continuous Solution. *Continuous and Discrete Dynamical Systems*, 24(3):653–658, 2009.

[21] J. F. Caicedo and A. Castro. *Ecuaciones semilineales con espectro discreto*. Universidad Nacional de Colombia, 2012.

[22] J. F. Caicedo, A. Castro, and R. Duque. Existence of Solutions for a wave equation with non-monotone nonlinearity. *Milan J. Math*, 79(1):207–222, 2011.

[23] J. F. Caicedo, A. Castro, R. Duque, and A. Sanjuán. Existence of L^p-solutions for a semilinear wave equation with non-monotone nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Serie S*, 7(6), December 2014.

[24] J. F. Caicedo, A. Castro, and A. Sanjuán. Bifurcation at Infinity for a Semilinear Wave Equation with Nonmonotone Nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Serie A.*, 37(4), 2017.

[25] A. Castro and B. Preskill. Existence of Solutions for a Wave Equation with Non-monotone Nonlinearity. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 28(2):549–658, 2010.

[26] A. Castro and S. Unsurangsie. A Semilinear Wave Equation with Nonmonotone Nonlinearity. *Pacific Journal of Mathematics*, 132(2):215–225, 1988.

[27] Alfonso Castro and Chen Chang. A variational characterization of the Fucik spectrum and applications. *Rev. Colombiana Mat.*, 44(1):23–40, 2010.

[28] J. M. Coron. Periodic Solutions of a Nonlinear Wave Equation Without Assumption of Monotonicity. *Mathematical Annalen*, 262:273–285, 1983.

[29] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, 1985.

[30] I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM, 1994.

[31] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997.

[32] Edward R. Fadell and Paul H. Rabinowitz. Generalized cohomological index theories for lie group actions with an application to bifurcation questions for hamiltonian systems. *Inventiones mathematicae*, 45(2):139–174, 1978.

[33] D. G. De Figueredo. *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Springer Verlag, 1989.

[34] N. Fontes-Merz. A multidimensional version of Turán's lemma. *Journal of Approximation Theory*, 140(1):27–30, 2006.

[35] A.P. French. *Vibraciones y ondas*. Curso de física del M.I.T. Createspace Independent Pub, 1974.

[36] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. U.S. Government Printing Office, 2001.

[37] H. Hofer. On the range of a wave operator with nonmonotone nonlinearity. *Math. Nachr.*, 106:327–340, 1982.

[38] S.T. Hu. *Differentiable manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[39] Y. Jabri. *The Mountain Pass Theorem*. Cambridge University Press, 2003.

[40] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 4 edition, 1981.

[41] J. Jost. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2002.

[42] J. Jost. *Postmodern Analysis*. Springer Verlag, 2005.

[43] O. Kavian. *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*. Springer Verlag, Berlin, 1993.

[44] S. Kesavan. *Functional Analysis*. Texts and readings in mathematics. Hindustan Book Agency, 2009.

[45] J. Kim. Infenitely Many Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations on Sn. In *Seventh Mississippi State - UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations*, 2009.

[46] Krasnoselskii. *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. MacMillan, 1964.

[47] C. Kung-Ching. *Infinite Dimensional Morse Theory*, volume 6. Birkhäuser, Berlin, 1993.

[48] C. Kung-Ching. *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 2005.

[49] A. Kurdila and M. Zabarankin. *Convex Functional Analysis*. Birkhäuser Verlag, 2005.

[50] L. Simone and G. Torelli. Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari. *Ren. Sem. Mat. Univ. Padova*, 15:380–401, 1968.

[51] E. M. Landesman and A. C. Lazer. Linear eigenvalues and a nonlinear boundary value problem. *Pacific J. Math.*, 33(2):311–328, 1970.

[52] E.H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Crm Proceedings & Lecture Notes. American Mathematical Society, 2001.

[53] H. Lovicarová. Periodic Solutions of a Weakly Nonlinear Wave Equation in one Dimention. *Czecnosiovak Mathematical Journal*, 19(94):324–343, 1968.

[54] B. MacCluer. *Elementary Functional Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2008.

[55] J. Mawhin. Periodic solutions of nonlinear dispersive wave equations. In K. Kirchgassner J Albrecht, L. Collatz, editor, *Constructive Methods for Nonlinear Boundary Value Problems and Nonlinear Oscillations*, pages 102–109. Conference at the Oberwolfach Mathematical Research Institute, Springer Basel AG, 1978.

[56] J. Mawhin. Nonlinear Functional Analysis and Periodic Solutions of Semilinear Wave Equations. In *Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences*, pages 671–681. Conference on Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, Academic Press, 1982.

[57] J. Mawhin and J. Ward. Asymptotic nonresonance conditions in the periodic-Dirichlet for semi-linear wave equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 135(1):85–97, 1983.

[58] P. J. McKenna. On Solutions of a Nonlinear Wave Question when the Ratio of the Period to the Length of the Interval is Irrational. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 93(1):59–64, 1985.

[59] F. Nazarov. Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type. *Algebra i Analiz*, 5:3–66, 1993.

[60] S.M. Nikol'skiĭ. *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. New York : Springer-Verlag, 1975.

[61] Giovanni Prodi. Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 42(1):25–49, 1956.

[62] P. Rabinowitz. Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XX:145–205, 1967.

[63] P. Rabinowitz. Free Vibrations for a Semilinear Wave Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XXXI:31–68, 1978.

[64] Paul H Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *Journal of Functional Analysis*, 7(3):487–513, 1971.

[65] Paul H. Rabinowitz. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. Number n.º 65 in Conference Board of the Mathematical Science. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1986.

[66] W. Rudin. *Funcitonal Analisis*. Mc Graw-Hill Book Company, 1973.

[67] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions, 3 edition, 1976.

[68] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw-Hill International Edtiions, 3 edition, 1981.

[69] W. Rudin. Set Theory: An Offspring of Analysis. YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=hBcWRZMP6xs&t=3s, 6 April 1990.

[70] A. Sanjuán. *Membranas Vibrantes*. PhD thesis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2015.

[71] A. Sanjuán. Bifurcación de soluciones desde infinito en un valor propio de multiplicidad infinita a un problema hiperbólico semilineal doble-periódico. *Revista Científica*, 27:402–206, 2016.

[72] M. Schechter. Periodic Solutions of a Semilinear Higher Dimensional Wave Equations. *Chaos Solitons & Fractals*, 12:1029–1034, 2001.

[73] F. Scheck. *Mechanics. From Newton's Laws to Deterministic Chaos*. Springer Verlag, 2005.

[74] L. I. Schiff. Nonlinear meson theory of nuclear forces. i. neutral scalar mesons with point-contact repulsion. *The Physical Review - Second Series*, 48(1):1–9, 1951.

[75] G.F. Simmons. *Differential equations: with applications and historical notes*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1972.

[76] M. W. Smiley. Time Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equation in Balls. In *Oscillations, Bifurcation and Chaos*, Toronto, 1987. Proceedings of the Canadian Mathematical Society Conference.

[77] M. Spivak. *Physics for Mathematicians. Mechanics I.* Perish, 2010.

[78] W. Strauss. *Partial Differential Equations. An Introducction*. John Wiley and Sons, 1992.

[79] M. Struwe. *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.* A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 2 edition, 2000.

[80] P. Turan. *Eine neue Methode in der Analyse und deren Anwendungen*. Akadémi Kiadó, Budapest, 1953.

[81] F.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[82] M. Willem. Periodic solutions of wave equations with jumping nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, 36(1):20 – 27, 1980.

[83] M. Willem. Density of the Range of Potential Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 83(2):341–344, 1981.

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Subconjuntos y Subespacios

- $\mathbb{T}$: El toro unidimensional, 1.
- $\mathbb{T}^2 := \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.
- $N = \ker \Box$ en $L^2(\mathbb{T}^2)$, núcleo del operador de onda, 3.

Funciones, constantes y variables especiales

- A_λ, B_λ, 5.
- $\{\vartheta_{kj,m}\}_{k,j=0,\ldots,\infty,m=1,2,3,4}$, base de Hilbert para $L^2(\mathbb{T}^2)$, 3.
- g término no-lineal, 7.
- h, 8.
- λ, parámetro de bifurcación, 8.

Espacios de Banach

Espacios C^k

- $C^k(\mathbb{T})$, el espacio de las funciones continuas con k derivadas continuas definidas en $\mathbb{T}^2$, 1.
- $C(\mathbb{T}^2) = C^0(\mathbb{T}^2)$.
- $C(\mathbb{R})$, espacio de las funciones continuas de valor real a valor real.

Espacios L^p

- $L_0^2(\mathbb{T})$, espacio de las funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue sobre $\mathbb{T}$ de promedio nulo, 2.
- $L^p(\mathbb{T}^2)$, espacio de las funciones en L^p sobre $\mathbb{T}^2$ con $p \in [1,\infty]$.

Normas

- $|h|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |h|$.
- $\|u\| = \left(\int_\Omega u^2\right)^{1/2}$, norma en $L^2(\Omega)$.
- $\|u\|_1 = \|u_t\| + \|u_x\|$, norma en el espacio de Sobolev H.
- $C^\infty := \bigcap_{k=0}^\infty C^k$.

Operadores

- $\Box$, operador de onda, 1
- $\mathscr{X}$, $\mathscr{Q}$ operadores de Lovicarovà, 2.
- Π_X, proyección ortogonal sobre el subespacio cerrado X.

Notaciones funcionales

- $\ker T$, el núcleo del operador lineal T.
- $\operatorname{rng} T$, el rango del operador lineal T.
- $\operatorname{span}\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, subespacio geneardo por los vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
- $X^\perp$, complemento ortogonal del subespacio X.
- $\bar{u}$, promedio de la función u.
- $\hat{u}_m(k, j)$ transformada de Fourier d u, 3.
- $\sigma(\Box)$, espectro del operador de onda, 4.