
PEQUEÑOS UNIVERSOS Y EL MÉTODO DE CUADRATURA

CURSILLO PARA EL V TALLER DE ANÁLISIS NO-LINEAL Y ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

ARTURO SANJUÁN*

BOGOTÁ DC
JUNIO DE 2019

Presentación

Motivados por fenómenos de reacción-difusión y física de partículas en una dimensión introducimos el problema semi-lineal

$$\begin{cases} u'' + f(u) = 0, & \text{en } \Omega \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

donde Ω es el intervalo $(0, \pi)$. Realizamos un estudio cualitativo de existencia y comportamiento de las soluciones positivas y soluciones que cambian de signo. El componente matemático está orientado por el primer capítulo del libro de Francisco Caicedo y Alfonso Castro de Ecuaciones semilineales con espectro discreto [12]. Este cursillo está dirigido a estudiantes con conocimientos básicos e intermedios en análisis y ecuaciones diferenciales ordinarias. Se proponen 23 ejercicios de rutina para que el estudiante refuerce sus conocimientos y 45 referencias bibliográficas para el estudiante que quiera profundizar más en alguno de los temas expuestos.

Índice general

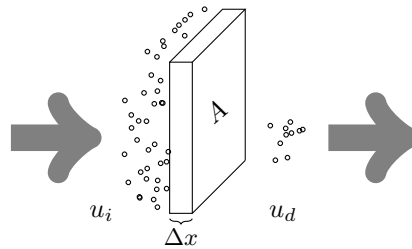
1 Motivación fenomenológica	2
2 Fenómenos de física de partículas	6
3 Breve digresión matemática preliminar	10
4 Análisis de la energía	11
5 El problema de valores iniciales asociado	11
6 Simetría de las soluciones	12

*Profesor asociado Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Email: aasanjuanc@udistrital.edu.co,
web: <https://comunidad.udistrital.edu.co/arturosanjuan/>

7	Funciones de Green	13
8	Ordenación de las soluciones positivas	15
9	Un problema de valores propios semi-lineal	17
10	Infinitas soluciones que cambian de signo	21

1 Motivación fenomenológica

Consideremos el siguiente experimento mental. Supongamos un conjunto de moléculas inmersas en un medio (p. ej. polvo en el aire) y supongamos además que están concentradas más a la izquierda que a la derecha de una membrana que permite el paso de las mismas. Si prestamos la suficiente atención podemos percibir que las moléculas se mueven de los lugares de mayor concentración a los lugares de menor concentración. En nuestro ejemplo, las partículas se mueven de izquierda a derecha. A este fenómeno se le conoce como **difusión**. Digamos que la membrana tiene un grosor Δx y un área transversal A . La situación está representada en la siguiente figura:



Estamos interesados en la cantidad de moléculas que se mueven por unidad de tiempo \dot{M} . Esta cantidad es mayor cuando:

- (1) El grosor de la membrana, dx , es menor.
- (2) El área, A , de la membrana es mayor.
- (3) La diferencia en la concentración de moléculas de un lado con respecto al otro es mayor. Es decir, cuando $u_i - u_d = -\Delta u$ es mayor.

En otras palabras

$$\dot{M} \propto -\frac{\Delta u A}{\Delta x}$$

Recordando que el flujo J se define como la cantidad de materia (moléculas) por unidad de tiempo por unidad de área, podemos escribir $J = \frac{\dot{M}}{A}$, lo que sugiere la siguiente ecuación conocida como la **ley de Fick**:

$$J = -k \frac{\partial u}{\partial x}.$$

La constante de proporcionalidad $k > 0$ es la **constante de difusión** [18].

Ejercicio 1. Asumiendo que el calor fluye de los lugares calientes a los fríos, deducir la **ley de Fourier** de la conductividad térmica que tiene la misma forma que la ley de Fick. En ese caso J es el flujo de energía por unidad de área por unidad de tiempo, u es la temperatura y $k > 0$ es la **constante de conductividad térmica**.

Por otro lado, la **ley de la conservación de la materia** dice que en un sistema aislado la masa total del sistema permanece constante. En otras palabras $\dot{M} = 0$ para un paquete de materia en el intervalo $[a, b]$. Aquí tanto a como b pueden depender del tiempo. Puesto que u es la concentración de materia por unidad de volumen, tenemos la relación

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial t} && \text{Ley de conservación de la materia} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u \, dx && \text{dado que } M = A \int_a^b u \, dx \\ &= \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} + u(b) \frac{\partial b}{\partial t} - u(a) \frac{\partial a}{\partial t} && \text{Regla integral de Leibniz} \\ &= \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} + J(b) - J(a) && \text{Definición de flujo.} \end{aligned}$$

Dividiendo a ambos lados de la ecuación anterior por $b-a$ y haciendo $a \rightarrow b$ obtenemos la **ecuación de continuidad**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0.$$

Combinando la ecuación de continuidad y la ley de Fick llegamos a la **ecuación de difusión**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

Ejercicio 2. Usando la **ley de conservación de la energía**, deducir la ecuación de calor que tiene la misma forma que la ecuación de difusión.

Ejercicio 3. Usando la aproximación de Taylor de orden dos, demostrar que $f''(x) \approx \frac{1}{h^2}(f(x+h) - f(x-h) - 2f(x))$ y usar esto para interpretar la segunda derivada como un promedio de tasas de cambio. En este contexto interprete la ecuación de difusión. Use la interpretación geométrica de la segunda derivada como una medida de concavidad para dotar de sentido físico a la ecuación de difusión.

Vamos a suponer que nuestro universo fenoménico varía en el intervalo $\Omega = (0, \pi)$. El número π está con el único propósito de simplificar los cálculos, cualquier otro número positivo funciona igual. Vamos a imponer que en los extremos del universo no hay nada, ni materia, ni temperatura, ni energía. En otras palabras, imponemos las condiciones de frontera

$$u(0) = u(\pi) = 0. \quad (3)$$

Ejercicio 4. Usando el método de separación de variables compruebe que la solución a la ecuación de difusión (2) sujeta a las condiciones (3) viene dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-n^2 kt}.$$

Si suponemos que la concentración (o la distribución de calor) inicial viene dado por una función $u(0, x) = \varphi(x)$ con $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, entonces los coeficientes de la serie anterior vienen dados por

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin(nx) \, dx.$$

Ejercicio 5. Use el criterio M de Weierstrass [39, teo. 7.10] para demostrar que la serie que expresa la solución u converge absoluta y uniformemente en $[T, \infty) \times (0, \pi)$ para todo $T > 0$, que $u \in C^\infty((0, \infty) \times (0, \pi))$ y que la serie satisface la ecuación de difusión [25, p. 56]. A veces es útil expresar la solución u en forma integral [25, p. 57]. Si definimos el **núcleo de calor** mediante la expresión

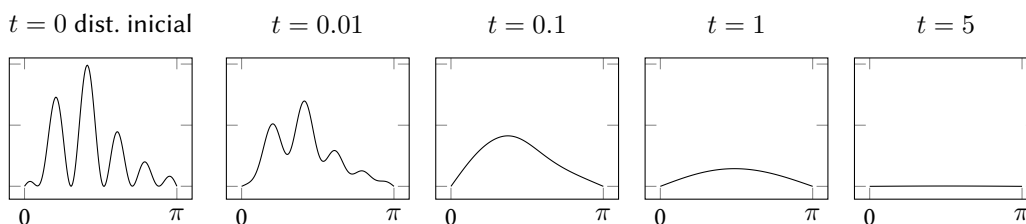
$$K(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \sin(ny) e^{-n^2 kt},$$

mediante un cálculo directo verifique que

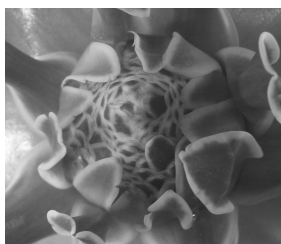
$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi K(t, x, y) \varphi(y) dy.$$

La ecuación (2) sujeta a las condiciones (3) y al dato inicial $u(0, x) = \varphi(x) \in C[0, \pi]$ tiene una única solución de clase C^∞ que depende continuamente de φ . En otras palabras, el problema descrito está **bien puesto**. Esta demostración se puede dar por, al menos, dos caminos distintos: usando aproximaciones de la identidad [25, § 2.6] y a través del teorema de Hille-Yoshida [8, § 10.1].

Un fenómeno presente en la naturaleza es la tendencia a alcanzar estados estacionarios: «*Todos los sistemas naturales tienden a alcanzar el estado más estable compatible con las condiciones en que se encuentre*» [16, p. 59]. En la siguiente figura podemos apreciar como sin importar que tan compleja sea la distribución inicial (de concentración de moléculas o de temperatura), con las condiciones de frontera (3), en muy poco tiempo el estado estable $u_t = 0$ tiende a $u \equiv 0$ como se ve en la figura siguiente. En la jergonza de la termodinámica, esto quiere decir que la entropía ha alcanzó su máximo nivel y el tiempo se ha detenido [16, p. 77]. Nuestra experiencia contradice esto. Algunas moléculas, partículas o calor quedará concentradas en Ω de alguna forma. Algo debemos estar pasando por alto.



Alan Turing notó que para ciertos compuestos químicos, no solo ellos se dispersan sino que también reaccionan entre sí sentando las bases de la morfogénesis [45]. Los patrones de color de la flor amazónica de la siguiente figura (así como de los gatos, cebras y demás formas de la naturaleza) obedecen a soluciones estacionarias de las ecuaciones de reacción difusión propuestas por Turing [37, cap. 2].



Consideremos el ejemplo de reacción difusión más sencillo. Supongamos que en vez de moléculas estamos considerando bacterias (p. ej. *Escherichia coli*) y que en nuestro universo Ω hay alguna clase de nutriente que les permite reproducirse por fisión binaria. Además de dispersarse espacialmente por medio de la difusión, las bacterias también *reaccionan* en el tiempo multiplicándose. Esto se suele expresar mediante la ecuación ordinaria $\dot{u} = \alpha u$ donde α es la tasa de crecimiento de la población.

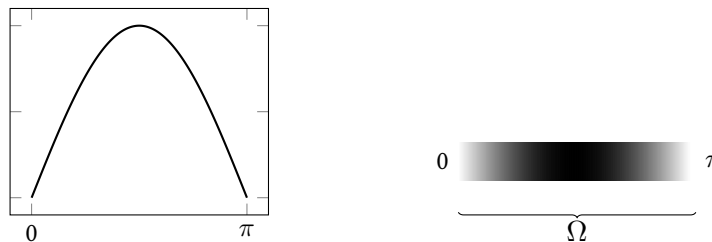
Ejercicio 6. Usando la fórmula recursiva $N(t+1) = 2N(t)$ donde N es la concentración de bacterias en el instante t , demuestre mediante una aproximación al modelo continuo que $\dot{u} = \log 2 u$.

Combinando $\dot{u} = \alpha u$ con $\dot{u} = ku_{xx}$ obtenemos las ecuaciones de **reacción-difusión**

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + \alpha u \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \end{cases}$$

Buscar soluciones estacionarias es resolver un problema de valores propios. Con $u_t = 0$, vemos que la única opción para tener soluciones no-triviales es que $\alpha = n^2k$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y las soluciones (funciones propias) vienen dadas por $\sin(nx)$. Bien sea en fenómenos de calor o difusión de moléculas, las soluciones deben ser positivas. De este modo, las únicas soluciones posibles son múltiplos positivos de $\sin(x)$ y el patrón estable de nuestro universo se ve en la siguiente figura donde las regiones más oscuras representan mayor concentración de bacterias. Es verdad, no es el universo más «impresionante» conocido.

Concentración estable



Pierre-François Verhulst introdujo el **modelo logístico** más adaptado a la realidad dado que una reacción de la forma $\dot{u} = \alpha u$ permiten crecimientos arbitrariamente grandes [36, p. 3]. Así es como se introdujo el concepto de **capacidad de carga** generando un proceso auto-limitado. En este caso, las ecuaciones del estado estacionario toman la forma

$$\begin{cases} u'' + \alpha u(1 - u) = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Por su parte, los fenómenos de difusión también pueden presentar términos de reacción no-lineales. De acuerdo con la **ley de Steffan-Boltzmann** se puede generar pérdida de calor por la radiación tal como ocurre con algunas estrellas [43, 7]. La ecuación de estado estacionario se transforma en

$$\begin{cases} ku'' + \mu u^4 - \gamma = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

con μ y γ constantes positivas.

En astrofísica las **ecuaciones de Lane-Emden** modelan el potencial gravitatorio constituido por un fluido politrópico y sometido a su propia gravitación (p. ej. el sol) [14, cap. 2]. En su versión unidimensional, estas ecuaciones tienen la forma

$$\begin{cases} u'' + u^p = 0 & \text{con } p \geq 2 \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases}$$

En los tres últimos ejemplos estamos buscando soluciones positivas a la ecuación (1), que es una ecuación diferencial no-lineal. En general, este tipo de ecuaciones no se pueden solucionar explícitamente y lo único que queda es buscar aproximaciones numéricas o realizar análisis cualitativos. En este curso nos centraremos en el segundo enfoque.

2 Fenómenos de física de partículas

Los fenómenos que hemos expuesto hasta el momento requieren que las soluciones sean positivas. A continuación vamos a enunciar un par de fenómenos no-lineales provenientes de la física de partículas cuyas soluciones naturalmente cambian de signo.

En los cursos de ecuaciones diferenciales aprendemos que una cuerda (como la de un violín) sometida a vibración satisface la ecuación diferencial parcial

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

conocida como la **ecuación de onda**. Su deducción se puede realizar con rudimentos de física clásica [44, pp. 11,12].

Ejercicio 7. Usando el método de separación de variables (inventado por Daniel Bernoulli para resolver esta ecuación [6]) demuestre que las soluciones de la ecuación de onda sometida a las condiciones de frontera Dirichlet-periódicas (3) y $u(t, x) = u(t + 2\pi, x)$ vienen dadas por

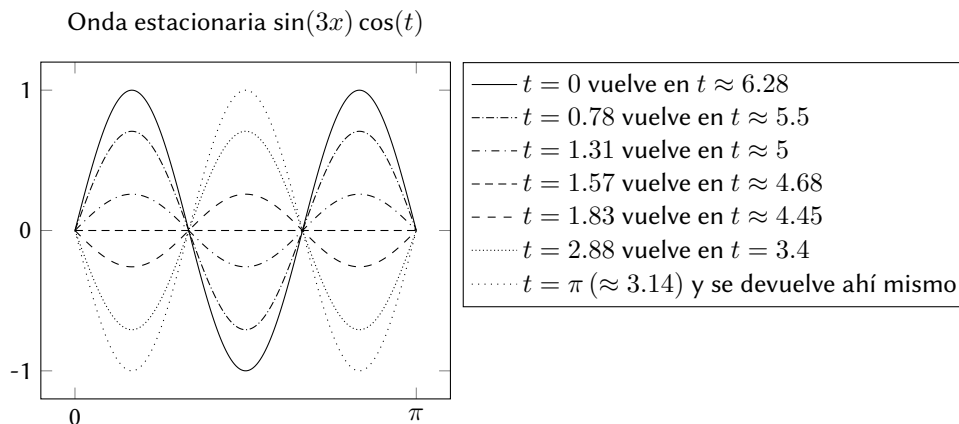
$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \sin\left(\frac{k}{c}x\right) e^{ikt}$$

con $c_{-k} = \overline{c_k}$. Verifique que esta solución es equivalente a

$$u(t, x) = p(t + x) - p(t - x)$$

con p una función 2π -periódica de promedio nulo. Esta equivalencia a los matemáticos les costó más de ochenta años notarla: desde los trabajos de Daniel Bernoulli (primera forma) y D'Alambert (segunda forma) hasta los desarrollos de Fourier y Lagrange [4, pp. 531–533]. Es un episodio importante en la historia de las matemáticas y la teoría de funciones.

Podemos notar de una vez que hay unas soluciones a la ecuación de onda cuya forma no cambia sino aumenta y disminuye periódicamente su amplitud. Son las soluciones de la forma $\sin(kx)e^{ikt}$ y a este tipo de soluciones se les conoce como **ondas estacionarias** representadas en la siguiente figura.



La ecuación de onda también puede ser deducida a partir de la mecánica lagrangiana. [42, parte III]. La lógica aquí es diferente, está basada en un principio variacional (**Principio de la mínima acción** [42, p. 463]), en donde las soluciones a la ecuación de onda, son los puntos críticos del **funcional de acción**. Intuitivamente la acción está definida como la energía cinética menos la energía potencial. La notas de John Baez y Derek Wise son una buena introducción en esta forma de entender la mecánica [3], mientras que los libros de Arnold [2] y [42] están dirigidos a lectores con mayor dominio técnico.

En el caso de la cuerda sometida a vibración, la **energía cinética** viene dada por la expresión $\frac{1}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx$ midiendo de alguna manera qué tanto movimiento tiene la cuerda. La energía potencial por su parte mide el movimiento **potencial** e intuitivamente, si la cuerda está muy estresada (la primera deriva espacial es grande), más potencial de movimiento ella tiene. En otras palabras, la energía potencial viene dada por $\frac{1}{2} \int_0^\pi u_x^2 dx$. De esta forma, el funcional de acción para la ecuación de onda tiene la forma

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u_t^2 - u_x^2) dx.$$

Ejercicio 8. Este ejercicio requiere un pequeño dominio técnico de cálculo avanzado [10]. Evalúe el incremento $J[u + v] - J[u]$ y expréselo en términos de una transformación lineal $T[u]$ evaluada en v , $\langle T[u], v \rangle$, más un resto $o(v)$. $T[u]$ es la **derivada de Frechet** de J y es igual a $\langle J'[u], v \rangle = \int_0^\pi u_t v_t - u_x v_x$. Más información sobre la derivada de Frechet se encuentra en [10, cap. 2]. Las soluciones a la ecuación de onda vienen dadas por las u tales que $\langle J'[u], v \rangle = 0$ para todo v (puntos críticos del funcional de acción). Integre por partes y demuestre que $\int_0^\pi (u_{tt} - u_{xx})v dx = 0$ para todo v . De aquí es posible deducir que $u_{tt} - u_{xx} = 0$ [8, cor. 4.24]. Estas ecuaciones se conocen como las **ecuaciones de Euler-Lagrange** para el funcional J [42, p. 463]. Para eso es necesario tener cuidado con la **configuración espacial** (los espacios en donde están definidos u y v). En este caso se toman **espacios de Sobolev** que a su vez están contruidos a partir de los espacios L^p [8].

Ejercicio 9. El cálculo de la derivada de Frechet en el caso del funcional de acción anterior fue sencillo porque las ecuaciones de Euler-Lagrange terminan siendo lineales. Cuando aparecen términos en la energía potencial no-lineales, el cálculo de la derivada de Frechet es más delicado. Usualmente se calcula primero la **derivada de Gateaux** o derivada- direccional, definida como

$$\partial J(u; v) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (J[u + sv] - J[u]).$$

Es sencillo demostrar que toda función Frechet diferenciable es Gateaux diferenciable (compruébelo), pero al revés

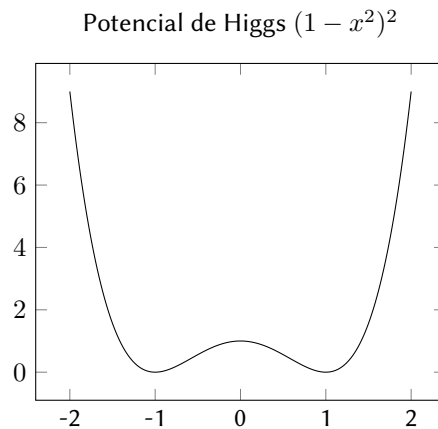
no siempre es cierto [34, p. 178]. Esto último lo puede demostrar con el ejemplo clásico $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bajo ciertas condiciones adicionales, la derivada de Gateoux implica la de Frechet. Incluso en \mathbb{R}^N hay una versión que permite determinar cuándo una función es derivable en el sentido de Frechet usando las derivadas parciales. ¿Recuerda esta forma?

Para calcular la derivada de Gateoux de un funcional de la forma $\int_0^\pi f(u(x)) dx$ donde f es una función derivable que cumple ciertas hipótesis de crecimiento (p. ej. $|f(u)| \leq |u|^2 + 1$) hay que recurrir a un resultado del análisis no-lineal que se conoce como el **operador de Nemytskii** [20, cap. 2]. En este contexto, y bajo ciertas hipótesis es posible demostrar que si $J[u] = \int_0^\pi f(u) dx$, entonces J es Frechet diferenciable y $\langle J'[u], v \rangle = \int_0^\pi f'(u)v dx$.

En matemáticas las mismas ecuaciones pueden provenir de fenómenos sin ninguna relación aparente. La ecuación de onda puede representar la curva de una cuerda vibrante o también el campo cuántico del **bosón de Higgs** que explica la materia en el universo [22]. En este caso la energía potencial tiene un término adicional que se conoce como **potencial de Higgs** y en una dimensión viene dado por $\lambda \int_0^\pi (\phi^2 - u^2)^2 dx$.



Ejercicio 10. Este ejercicio requiere cierto dominio técnico en cálculo avanzado [10]. Esboce la demostración de que si el mecanismo (acción) de Higgs viene dado por

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (u_t^2 - u_x^2) - \lambda \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\phi^2 - u^2)^2 dx,$$

entonces las ecuaciones de campo de Higgs tiene la forma

$$\square u + \mu u - |u|^2 u = 0$$

donde $\square u := u_{tt} - u_{xx}$ es el operador de onda. A esta ecuación se le conoce también como la **ecuación de Klein-Gordon semilineal**. Si queremos encontrar ondas estacionarias al campo cuántico de Higgs, suponemos que las soluciones tienen la forma $v(t, x) = e^{i\theta t} u(x)$ dando origen al problema

$$\begin{cases} u'' + \mu u - |u|^2 u = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Según las discusiones actuales de la física, estas soluciones explicarían la materia en nuestro pequeño universo $\Omega = (0, \pi)$.

La ecuación de Schrödinger proviene de un funcional de acción en el campo de los complejos (ver [5, cap. 2]) y algunos físicos dicen que esta ecuación puede explicar todo el universo [32]. En el caso unidimensional, la **ecuación de Schrödinger** viene dada por

$$iu_t = -\frac{1}{2}u_{xx} + \kappa|u|^2u.$$

Nuevamente buscando ondas estacionarias llegamos al problema

$$\begin{cases} u'' + \kappa|u|^2u = 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

En resumen, a través de fenómenos termodinámicos de difusión de materia y energía, así como de fenómenos de física de partículas hemos llegado a la ecuación diferencial ordinaria semi-lineal

$$u'' + f(u) = 0 \tag{4}$$

sujeto a las condiciones de frontera (3). Este es el modelo que vamos a estudiar a continuación desde un punto de vista matemático-cualitativo.

Antes de terminar esta sección, si queremos considerar estos problemas en distintas dimensiones la segunda derivada u'' se reemplaza por el laplaciano $\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i}$. El operador de onda se transforma en $\square u = u_{tt} - \Delta u$ y las ecuaciones más famosas de la física matemática se convierten en las siguientes ecuaciones semi-lineales en derivadas parciales

$u_t = \alpha \Delta u + f(x, u)$	Ecuaciones de reacción-difusión
$\square u + f(x, u) = 0$	Ecuación semilineal de onda o de Klein-Gordon
$iu_t = -\Delta u + f(x, u)$	Ecuación de Schrödinger.

Cuando queremos encontrar soluciones estacionarias u ondas estacionarias caemos en el siguiente paradigma del análisis no-lineal

$$\begin{cases} \Delta u + f(x, u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un abierto-conexo (región) de \mathbb{R}^N . Un muy buen lugar para familiarizarse con el problema lineal $\Delta u = f$, (f independiente de u) es el libro de Fritz John [26, cap. 4].

El libro de Fritz John es una referencia obligada para el matemático interesado en las ecuaciones diferenciales parciales [26]. Para un enfoque dirigido a las ecuaciones de evolución y el análisis de Fourier de la escuela del IMPA es recomendable el libro de Iorio & Magalhães [25]. Si se quiere un enfoque mucho más desde el análisis funcional y los espacios de Sobolev la mejor referencia es el libro de Brezis [8]. Para los que no temen estudiar de enciclopedias el libro de Evans es un buen lugar [19]. Si se quiere un enfoque intermedio hay dos opciones, el libro clásico de Strauss [44] con algunos ejemplos físicos o el más reciente y muy bien logrado libro de Salsa con abundantes ejemplos de la fenomenología física/química/biológica/económica que da origen a las ecuaciones diferenciales parciales [40].

3 Breve digresión matemática preliminar

Una pregunta obvia para un analista con respecto al problema (1) es si este problema tiene solución y de qué clase de solución estamos hablando. En este cursillo estamos interesados en encontrar **soluciones clásicas**. Estas son soluciones continuas en $[0, \pi]$ y con dos derivadas continuas en $(0, \pi)$. En otras palabras, buscamos funciones $u \in C[0, \pi] \cap C^2(0, \pi)$ que satisfagan (1).

Ejercicio 11. Suponga que u es una solución a la ecuación diferencial ordinaria (4) en un intervalo $[a, b]$. Es decir, u es continua en $[a, b]$ y con dos derivadas continuas en (a, b) . Use la estructura de la ecuación (4) para demostrar que existen los límites laterales de u'' por izquierda y por derecha en b y en a respectivamente. Demuestre que sucede lo propio con u' (ayuda: demuestre que u' es Lipschitz en (a, b)). Concluya que si $u \in C[a, b] \cap C^2(a, b)$ es solución clásica a (4), existe un intervalo abierto que contiene a $[a, b]$ en donde u se puede extender de clase C^2 .

En otros métodos y contextos, puede pasar que las soluciones no tengan todas las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial o que se traten de derivadas en el sentido débil. Es el caso de las **soluciones fuertes** [21, cap. 9], las **soluciones débiles** [8, cap. 8], las **soluciones generalizadas** y las **soluciones en el sentido de las distribuciones** [25, cap. 3, 7].

Muchas veces es posible recuperar la derivabilidad de la solución a partir de la estructura de la ecuación. Este proceso hace parte de la teoría de regularidad. Para ciertas ecuaciones lineales es muy fácil recuperar las derivadas de orden superior (el problema es regular) [8, cap. 8, 9]. En ecuaciones elípticas $\Delta u + f(u) = 0$, estamos hablando del **Problema XIX de Hilbert**, que se considera resultado (por John Nash y Ennio de Giorgi entre otros). La formulación y solución a este problema es intrincada y requiere un gran dominio técnico [21, 31]. En ecuaciones semilineales hiperbólicas, por ejemplo, ocurren fenómenos muy extraños como que con datos suaves (con todas las derivadas), las soluciones ni siquiera son continuas [11].

Otros métodos para garantizar la existencia de soluciones al problema (1) son los siguientes.

Ejercicio 12 (Métodos variacionales). El problema (1) corresponde a las ecuaciones de Euler-Lagrange de la acción

$$J[u] = \frac{1}{2} \int_0^\pi u_t^2 dx - \int_0^\pi F(u), dx \quad (5)$$

donde

$$F(r) := \int_0^r f(r) dr \quad (6)$$

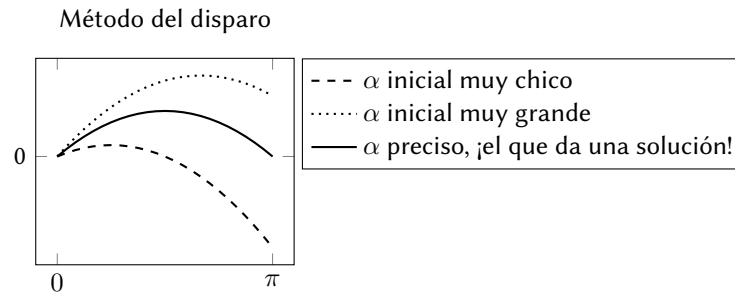
representa la energía potencial que corresponde a las «reacciones internas» del problema.

Un estudio del libro introductorio de Mawhin y Willem [35] permitiría familiarizarse con los métodos variacionales para encontrar condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones.

Ejercicio 13 (Método del disparo). Un método elemental consiste en convertir (1) en el sistema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -f(u) \\ u(0) = 0, v(0) = \alpha. \end{cases}$$

Por el **teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias** (a.k.a. **teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias**, a.k.a. **teorema de Picard-Lindelöf**) se sabe que este sistema tiene solución única. Lo que se suele hacer es variar el parámetro α (velocidad inicial del disparo) para que $u(0) = 2\pi$. No hay mejor referencia introductoria que el libro de Pablo Amster [1].



Ejercicio 14 (Métodos topológicos). Usando teoría de grado en dimensión infinita o teorías más avanzadas como la teoría de Morse, es posible encontrar soluciones a (1). Se define $g(u) = f(u) - u$ y (1) se transforma en el siguiente problema de punto fijo.

$$u = -\partial^{-2}g(u)$$

donde ∂^{-2} es el inverso del operador segunda derivada en un espacio adecuado. Nuevamente [1] es un buen lugar para familiarizarse con estos métodos. Para referencias más avanzadas ver [17, 30, 29].

4 Análisis de la energía

La densidad de la energía potencial que corresponde al estrés del campo viene dado por

$$\frac{u'(x)^2}{2}.$$

Intuitivamente, entre más grande sea esta cantidad, mayor «potencialidad» de movimiento hay en ese punto.

Denotando F como en (6), vemos que si multiplicamos $u'(x)$ a ambos lados de (4) e integramos obtenemos la siguiente ley de la conservación de la energía potencial

$$\frac{1}{2}u'(x)^2 + F(u(x)) = E, \tag{7}$$

para todo $x \in [0, \pi]$. Aquí E es una constante independiente de x . De aquí viene el nombre de **cuadratura**, pues la ecuación (7) tiene una cierta estructura de cuadrática en u' . Esta ecuación (7) será usada más adelante.

5 El problema de valores iniciales asociado

Es claro que toda solución al problema (1) es solución a la ecuación (4). Es así como estudiar un problema de valores iniciales asociado puede ser de mucha ayuda. En este caso, el problema de valores iniciales asociado a (4) viene dado por

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -f(u) \\ u(x_0) = u_0 \\ v(x_0) = v_0, \end{cases} \tag{8}$$

donde $x_0, u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ los podemos variar a conveniencia.

Si queremos garantizar la existencia y unicidad de soluciones a (8) podemos emplear el siguiente teorema.

Teorema (Teorema de Picard-Lindelöf). *Considere el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} x' = \Phi(x) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Suponga que $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es de clase C^1 . Entonces existe una y solo una solución a este problema de valores iniciales. Más precisamente, existe un $a > 0$ y una única solución $x : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^N$ que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$ [23, p. 144].

Ejercicio 15. Estudie la demostración de este teorema en [23, cap. 17] y verifique que puede cambiar la condición «ser de clase C^1 » por «ser localmente Lipschitz».

En (8) es deseable poder variar u_0 y v_0 y que la solución varíe continuamente en el espacio de funciones continuas. Eso lo garantiza el siguiente teorema.

Teorema (Dependencia continua de los parámetros). *Sea $\phi_t(y)$ la solución al problema de valores iniciales $x' = \Phi(x)$ con $x(0) = y$ y Φ de clase C^1 . Entonces ϕ_t es una función continua.[23, p. 147].*

Los dos teoremas anteriores pueden ser demostrados de una sola vez usando el **principio de contracciones con parámetros** (a.k.a Teorema de punto fijo de Banach)[9].

Podría pasar que, usando el teorema de Picard-Lindelöf, el radio maximal del intervalo a sea muy pequeño; tanto así que no alcancemos a evaluar $u(\pi)$ empezando, digamos, en $u(0)$. El siguiente ejercicio da condiciones suficientes sobre f para que la solución se pueda extender a todo \mathbb{R} .

Ejercicio 16. Sea K un compacto de \mathbb{R}^N . Demuestre que si una solución al problema $x' = \Phi(x)$ está definida en el intervalo $[0, a)$ y que el intervalo no se puede extender más allá de a , entonces existe $\delta > 0$ talque $x(t) \notin K$ para algún $t \in (a - \delta, a)$. Deduzca además que la solución explota (**blow-up**) en a . Es decir, $|x(t)| \rightarrow \infty$ cuando $t \uparrow a$. Un corolario inmediato a esto es que si la solución está contenida en un compacto, se puede extender su intervalo maximal a todo \mathbb{R} . Este hecho se conoce como el **teorema de escape de compactos**. [23, § 17.4]. Demuestre que si Φ es C^1 y sublineal (i.e. $|f(u)| \leq A|u| + B$ para algunos A y B , entonces cualquier solución del problema $x' = \Phi(x)$ puede extenderse a \mathbb{R} [1, p. 192].

Podría pasar que f no sea de clase C^1 (ni siquiera Lipschitz) y que nos ingeniemos la forma de encontrar una, muchas o infinitas soluciones a $u'' + f(u) = 0$. Tal es el caso el siguiente ejercicio clásico [23, p. 143].

Ejercicio 17. Demuestre que la familia infinita de funciones

$$u_\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \tau \\ (x - \tau)^3 & \text{si } t > \tau \end{cases}$$

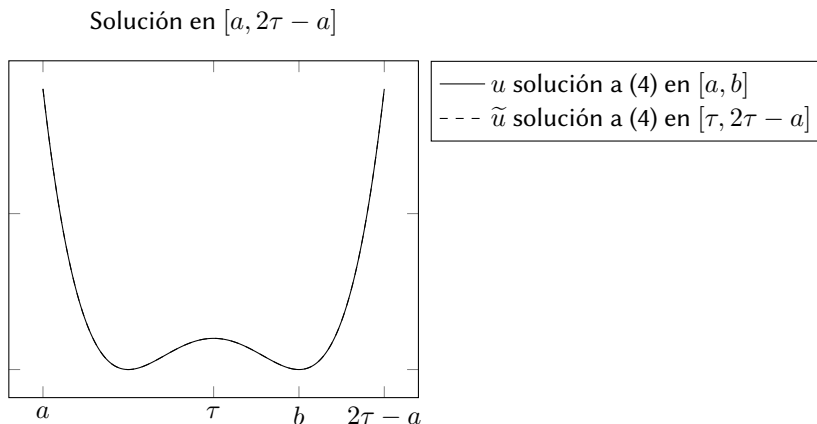
es de clase $C^2(\mathbb{R})$ y satisface (8) con $f(u) = u^{1/3}$, $x_0 = u_0 = v_0 = 0$. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Picard-Lindelöf?

Ejercicio 18. Demostrar que $y' = 1 + y^2$, sujeto a las condiciones iniciales $y(0) = 0$ presenta blow-up.

6 Simetría de las soluciones

A continuación vamos a echar mano de las simetrías de la ecuación (4) para entender la estructura de las soluciones a (1) y encontrar una alternativa para extenderlas a todo \mathbb{R} .

Sea u una solución a (4) en $[a, b]$ (ver ejercicio 11) y supongamos que en τ hay un punto crítico. Es decir, $u'(\tau) = 0$. Si definimos $\tilde{u}(x) = u(2\tau - t)$, es directo verificar que \tilde{u} es solución de clase C^2 en $[\tau, 2\tau - a]$. De esta forma podemos «pegar» las dos soluciones para obtener una solución simétrica alrededor de $x = \tau$ en el intervalo $[\tau, 2\tau - a]$. Esta situación se ilustra en la siguiente figura.



Podemos notar que para este análisis no hemos necesitado que la solución sea única. Más aún, si llegado el caso u es una solución a (4) en $[\alpha, \beta]$ con $u'(\alpha) = u'(\beta) = 0$, podemos extender la solución a toda la recta real.

Supongamos ahora que la solución a (4) sujeta a condiciones iniciales es única. Es decir, suponemos que u satisface (8) en $[0, \pi]$ de manera única para cualesquiera $x_0 \in [0, \pi]$, $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos adicionalmente que en $\tau \in (0, \pi)$ hay un punto crítico. Tomemos $v(t) := u(t + \tau)$ y $w(t) := u(\tau - t)$. Un cálculo directo muestra que v y w son soluciones a (4). Como $v(0) = w(0) = u(\tau)$ y $v'(0) = w'(0) = u'(\tau) = 0$, tanto u como v tienen las mismas condiciones iniciales. Por la unicidad

$$v(t) = u(\tau + t) = u(\tau - t) = w(t),$$

para todo $t \in [0, \min\{\tau, \pi - \tau\}]$.

Hemos demostrado el siguiente lema.

Lema A. (Simetría de las soluciones) *Supongamos que u es solución a (8) en un intervalo $[a, b] \subset [0, \pi]$. Si en τ hay un punto crítico $u'(\tau) = 0$, entonces $u(2\tau - t)$ es solución en $[\tau, 2\tau - a]$. Además si (8) admite solución única, entonces $u(\tau + t) = u(\tau - t)$ para todo $t \in [0, \min\{\tau, \pi - \tau\}]$.*

7 Funciones de Green

Para estudiar un problema semi-lineal como (1), siempre es necesario tener muy claro primero el comportamiento de la parte lineal. Denotemos con $L : \text{dom } L \rightarrow C[0, \pi]$ al operador $-\partial^2$ («menos segunda derivada») definido en $\text{dom}(L) = \{u \in C[0, \pi] \cap C^2(0, \pi) : u(0) = u(\pi) = 0\}$ mediante la fórmula $Lu = -\partial^2 u = -u''$.

Ejercicio 19. Compruebe que el núcleo de L , $\ker L$, es trivial. Resuelva completamente el problema de valores propios de L y encuentre sus funciones propias. Dele sentido a la expresión «ecuaciones semilineales con espectro discreto» [12].

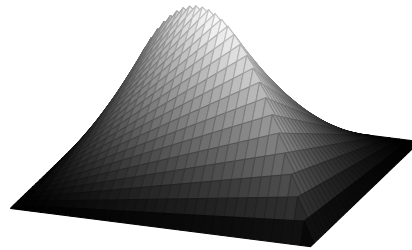
El ejercicio anterior resuelve el problema lineal homogéneo. Queremos resolver ahora el problema no-homogéneo. Cuando se trata de un problema de valores iniciales, sabemos que los problemas lineales no-homogéneos se pueden resolver mediante método de variación de parámetros [23, p. 131]. Como $Lu = f$ se trata de un problema de valores en la frontera el método requiere la introducción del concepto de **funciones de Green**.

Definimos la siguiente función

$$G(s, t) := \begin{cases} \frac{s(\pi - t)}{\pi} & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ \frac{t(\pi - s)}{\pi} & \text{si } t \leq s \leq \pi. \end{cases} \quad (9)$$

Ejercicio 20. Compruebe que $G(s, t) = 1/\pi \min\{s(\pi - t), t(\pi - s)\}$.

La función G está representada en la siguiente figura



Es fácil comprobar que G así definida cumple las siguientes propiedades:

- (G1) G es continua en x y s .
- (G2) $G(s, t) = G(t, s)$.
- (G3) Para cada s fijo $G(s, 0) = G(s, \pi) = 0$.
- (G4) Para $s \neq t$, $G_{ss}(s, t) = 0$.
- (G5) $G_s(s^+, s) - G_s(s^-, s) = 1$.

A cualquier función que cumpla (G1)–(G5) se le llama función de Green. Es un cálculo directo verificar que

$$u(x) = \int_0^\pi f(s)G(s, x) ds \quad (10)$$

es la única solución $u \in \text{dom } L$ a $Lu = f$ sin importar quién sea $f \in C[0, \pi]$.

En [12, apnd. A] se presentan las funciones de Green asociadas a problemas un poco más generales, conocidos como **problemas de Sturm-Louville** [15, cap. 5]. Cómo encontrar funciones de Green en dimensiones arbitrarias se puede consultar en [26, cap. 4], [27, cap. 1] o [21, cap. 1].

Ejercicio 21. Usando el espectro del operador L hallado en el ejercicio 19 si escribimos

$$G(s, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt) \sin(ns)}{n^2},$$

verifique que G así definida satisface (10). A esta forma de escribir la función de Green se le conoce como **fórmula de Mercer**[12, apnd. A].

8 Ordenación de las soluciones positivas

La fórmula (10) nos permite reescribir el problema (1) en la siguiente forma equivalente

$$u(x) = \int_0^\pi f(u(s))G(x, s) ds. \quad (11)$$

Supongamos por el momento que $f(s) \geq 0$. La fórmula (11) implica que $u \geq 0$ dado que el integrando es no-negativo. Ya que $G > 0$ en $(0, \pi) \times (0, \pi)$ y $f \geq 0$, si llega a pasar que $u(\tau) = 0$ para algún $\tau \in (0, \pi)$, usando (11), vemos que

$$0 = \int_0^\pi G(s, \pi)f(u(s)) ds.$$

Esto implicaría que $f(u(s)) = 0$ para todo s y por tanto $u \equiv 0$. Hemos demostrado entonces que si $f \geq 0$, las soluciones a (1) o son positivas en $(0, \pi)$ o son idénticamente nulas.

Tenemos el siguiente lema.

Lema B (Ordenación de las soluciones positivas). *Si $f \geq 0$ es continua y u, v son soluciones a (1), entonces:*

- (a) *Las soluciones a (1) o son positivas o son idénticamente nulas.*
- (b) *Si $u(\pi/2) > v(\pi/2)$, entonces $u(x) > v(x)$ para todo $x \in (0, \pi)$.*
- (c) *$u \neq v$ si y sólo si $F(u(\pi/2)) \neq F(v(\pi/2))$.*
- (d) *En $[0, \pi/2]$, u es creciente y en $[\pi/2, \pi]$ u es decreciente. En $\pi/2$ hay un máximo absoluto para u .*

Prueba. La parte (a) ya fue demostrada. Vamos a demostrar la parte (b) y (c). Si la solución u es no nula, sabemos que debe existir al menos un punto crítico $\tau \in (0, \pi)$, i.e. $u'(\tau) = 0$. Usando la representación de la energía (7) en τ y en $x \in (0, \pi)$ y restando, obtenemos

$$u'(x)^2 = 2F(u(\tau)) - 2F(u(x)). \quad (12)$$

Esta ecuación nos permite obtener información de la derivada en la frontera si tenemos en cuenta la forma de la solución en la frontera. De manera más específica

$$u'(0) = -u'(\pi) = \sqrt{2F(u(\tau))}.$$

A (12) le podemos sacar más información. Por una parte, es claro que en τ hay un máximo para preservar la positividad de (12). Más aún, u no puede tener mínimos locales o puntos de inflexión, pero esto ya lo sabíamos de la estructura de (4) y $f \geq 0$ (u es cóncava hacia abajo). Así, τ es el único punto crítico y corresponde a un máximo absoluto en $[0, \pi]$. Por otra parte, si llegara a pasar que $F(u(\tau)) = 0$, $u'(x)^2 = -2F(u(x)) \leq 0$ dejando la única posibilidad de que $u' \equiv 0$ y por ende $u \equiv 0$. No es difícil notar que esto tiene todo el sentido físico. Como estamos suponiendo que u es no trivial, podemos suponer con toda tranquilidad que $F(u(\tau)) \neq 0$. De donde, tanto u como $v(x) = v(\pi - x)$ satisfacen el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt{2F(u(\tau)) - 2F(u(x))} \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

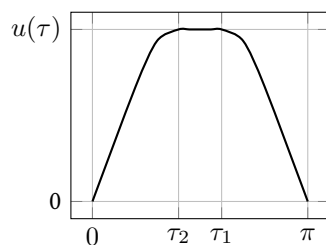
Es claro que u satisface (13) para $t \in [0, \tau_1)$ con

$$\tau_1 := \sup\{t \in [0, \pi] : u(s) \leq u(\tau) \text{ para todo } s \in [0, t]\}.$$

Hay que tener presente que F es creciente para entender la definición del τ_1 . Para v definimos el correspondiente

$$\tau_2 := \sup\{t \in [0, \pi] : v(s) \leq u(\tau) \text{ para todo } s \in [0, t]\}.$$

Una representación de τ_1 y τ_2 se ve en la siguiente gráfica.



Es claro que el lado derecho de (13) es de clase C^1 en $[0, u(\tau)]$ y por tanto podemos emplear el teorema de Picard-Lindelöf a u y a v en $x_0 = 0$. Obtenemos así que u es simétrica en los extremos

$$u(t) = v(t) = u(\pi - t) \quad \text{en } [0, \tau_1],$$

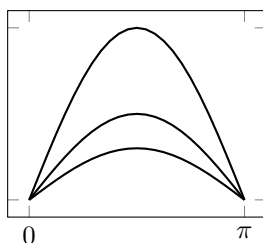
y además $\tau_1 = \pi - \tau_2$. Si $\tau_1 = \tau_2$, automáticamente $\tau_1 = \tau_2 = \pi/2$ y u sería simétrica con respecto a $\pi/2$. Pero si $\tau_2 < \tau_1$, por (12) u sería constante $u \equiv u(\tau)$ en $[\tau_2, \tau_1]$. En cualquier caso u seguiría siendo simétrica con respecto a $\pi/2$, y las soluciones tienen una forma similar a la del universo aburrido de la página 1. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar entonces $\tau = \pi/2$.

Sean ahora u y v dos soluciones a (1) tales que $u(\pi/2) > v(\pi/2)$. Usando (13) e integrando por separación de variables obtenemos

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(u(\pi/2)) - F(u)}} = \sqrt{2}x = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{F(v(\pi/2)) - F(v)}}$$

De donde $u = v$ en $(0, \pi)$ si y sólo si $F(u(\pi/2)) = F(v(\pi/2))$. También es claro que si $F(u(\pi/2)) > F(v(\pi/2))$ por ser F creciente, entonces $u > v$ en $(0, \pi)$. Esto completa la demostración del lema. \square

Notemos que en (7), si reemplazamos en $x = \pi/2$, la energía E del problema es sencillamente la expresión $F(u(\pi/2))$. En términos físicos, el Lema B nos dice que dos soluciones distintas, tienen **niveles de energía** distintos. A cada solución le corresponde un nivel de energía y las soluciones terminan ordenadas de acuerdo a sus niveles de energía. *Los universos posibles dependen de los niveles posible de energía estable.* Algo parecido a la siguiente gráfica



9 Un problema de valores propios semi-lineal

Podemos empezar esta sección con algo de calistenia.

Ejercicio 22 (Teoría de Sturm en tres ejercicios). A principios del siglo XIX un par de muy buenos amigos, Charles-François Sturm y Joseph Liouville, desarrollaron una teoría estudiando algunos problemas que provenían de la física matemática de la época que involucraban las ecuaciones de calor y de onda bajo supuestos más generales. Su estilo de solución cualitativo inspiró la teoría espectral y se adelantó un siglo a la forma de estudiar las ecuaciones diferenciales atribuido a Poincaré [33]. Como en [15, p. 291], si consideramos en la ecuación de onda que la elasticidad p y la densidad ρ no son homogéneas en el espacio, llegamos a la ecuación

$$(ru_x)_x = qu_x.$$

Si postulamos, como D'Alembert, que las soluciones tienen la forma $u(x, t) = \sin(\lambda t)y(x)$ obtenemos el problema de Sturm-Liouville

$$(py')' + qy = 0 \tag{14}$$

Vamos a seguir las ideas de [24, § 10.1–10.3]. Decimos que una solución a la ecuación anterior **oscila** si cambia de signo.

- (1) Demuestre que una solución a (14) no puede oscilar infinitas veces en un intervalo finito. Para esto razone por contradicción y use Bolzano-Weierstrass, Teorema del valor medio y el Teorema de Picard-Lindelöf.
- (2) (Teorema de separación de Sturm). Demuestre ahora que dos soluciones linealmente independientes tienen sus ceros intercalados. En otros términos si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes a (14) y $a < b$ son dos ceros consecutivos de y_1 , en (a, b) debe haber un cero de y_2 . Para esto razone nuevamente por contradicción, suponga que $y_2 \neq 0$ en (a, b) . Considere la función y_1/y_2 en (a, b) , esta función es de clase C^1 y se anula en los extremos del intervalo. Demuestre que su derivada se debe anular en el interior y use el concepto de Wroskiano [41, § 15]. Interprete esto a la luz de $y'' + m^2y = 0$
- (3) (Teorema de comparación de Sturm). Demuestre que si u es solución a $(pu')' + qu = 0$ y v es solución a $(pv')' + rv = 0$ con $r > q$, v oscila más rápido que u . Es otras palabras, si a y b son dos ceros consecutivos de u , en (a, b) hay un cero de v . Multiplique la primera ecuación por v , la segunda por u , reste e integre para obtener la siguiente fórmula de Green

$$p(vu' - uv')\Big|_a^b = \int_a^b (r - q).$$

Interpretando los signos a izquierda y derecha obtenga una contradicción. Interprete esto a la luz de $u'' + m^2u = 0$ y $v'' + n^2v = 0$ con $n > m$. ¿Qué sentido físico tiene este resultado?

Vamos a suponer ahora que la f depende de un parámetro lambda $f(s) = \lambda g(s)$ donde $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, positiva y **super-lineal**. De manera intuitiva, esto quiere decir que en hay una vecindad de infinito en donde la g está por encima de cualquier recta. En términos técnicos esto quiere decir que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = \infty.$$

Por ejemplo, cualquier u^α con $\alpha > 1$ es claramente super-lineal, evidentemente e^u también lo es.

Siguiendo nuestro esquema de notación, escribimos $G(u) = \int_0^u g(u) du$. Vamos a dar una condición necesaria y suficiente para que u sea solución positiva a (1). Supongamos primero que u es solución a (1). Usamos los hallazgos del Lema B para darnos cuenta que

$$u' = \sqrt{2E - 2\lambda G(u)} \quad \text{en } [0, \pi/2], \quad (15)$$

recordando que la energía del sistema $E = G(u(\pi/2)) = G(\rho)$ donde $\rho := u(\pi/2) = \max u$. Integrando obtenemos

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{E - G(u)}} = \sqrt{2\lambda}x. \quad (16)$$

En particular

$$\int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{E - G(u)}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{2\lambda}. \quad (17)$$

Recíprocamente, supongamos que u, λ y ρ satisfacen (17). Definimos $H : (0, \rho) \rightarrow (0, \pi/2)$ a través de (16) por

$$H(u) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{E - G(u)}}.$$

Como $H'(u) > 0$ en $(0, \rho)$, H es invertible y podemos escribir u en función de x . Con la información adicional de que $u(0) = u(0^+) = 0$ y $u(\pi/2) = u(\pi/2^-) = \rho$. Repetimos el análisis ahora con $H(u) = \pi - x$ y tenemos que u está definida en $[0, \pi]$ y $u(0) = u(\pi) = 0$. El Teorema de la función inversa también nos dice que en $\pi/2$ hay un punto crítico.

$$u'(\pi/2) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pi/2} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u} \Big|_{x=\pi/2}} = \sqrt{E - G(\rho)} = 0.$$

Ejercicio 23. Basta con la hipótesis de que g es positiva para verificar que, en efecto, la integral impropia en (17) es convergente. Más precisamente, demuestre que

$$\int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}} \leq \frac{2}{a} E^{1/2},$$

donde $a := \inf g$. *Ayuda:* cambie variables $v = G^{-1}(u)$. Use esta misma idea para demostrar que la función

$$x \mapsto \int_0^x \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}},$$

para $x \in (0, \rho)$ es $1/2$ -Hölder continua. Más precisamente

$$\left| \int_x^y \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}} \right| \leq \frac{1}{a} \left(\sup_{[0, \rho]} g \right)^{1/2} |y - x|^{1/2}.$$

Justifique por qué esto le permite extender dicha función de manera continua a $[0, \rho]$. Defina

$$\gamma(\rho) := \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}}.$$

Demuestre que $\gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ es continua.

Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema A (Soluciones positivas). *Si g es una función con las características mencionadas, existe $\lambda^* > 0$ tal que, si $0 < \lambda < \lambda^*$ el problema (1) tiene al menos dos soluciones. Si $\lambda = \lambda^*$, tiene al menos una solución. Si además imponemos sobre g que sea convexa, la conclusión de este teorema cambia de «al menos» por «exáctamente». En cualquier caso, se tiene a lo más un número finito de soluciones. Si $\lambda > \lambda^*$ no hay solución.*

Prueba. Tomemos γ como la función continua del ejercicio 23. Teniendo en cuenta la discusión hasta el momento, vemos que u es solución a (1) si y sólo si la relación

$$\pi^2 \lambda = 2\gamma(\rho)^2 \tag{18}$$

es válida. Por un lado tenemos que $(G(\rho) - G(u))^{-1/2} \geq (\inf g)^{-1/2}(\rho - u)^{-1/2} \geq a(\rho - u)^{-1/2}$ con a como en el ejercicio 23. Un cálculo directo muestra entonces que $\gamma(\rho) \leq 2a\rho^{1/2}$ y por tanto

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \gamma(\rho) = 0.$$

Por otra parte, usando el hecho de que g es super-lineal, tomemos $b > 0$ arbitrario pero fijo. Sabemos que existe un $c > 0$ tal que si $u > c$, entonces $g(u) > bu$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}} &= \int_0^c \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}} + \int_c^\rho \frac{du}{\sqrt{G(\rho) - G(u)}} \\ &\leq \int_0^c \frac{du}{\sqrt{g(\xi)(\rho - c)}} + \int_c^\rho \frac{du}{\sqrt{g(\zeta)(\rho - u)}} && \text{TVM} \\ &\leq a^{-1/2}(\rho - c)^{-1/2}c + b^{-1/2} \int_c^\rho u^{-1/2}(\rho - u)^{-1/2} du \\ &= a^{-1/2}(\rho - c)^{-1/2}c + b^{-1/2}\pi \end{aligned}$$

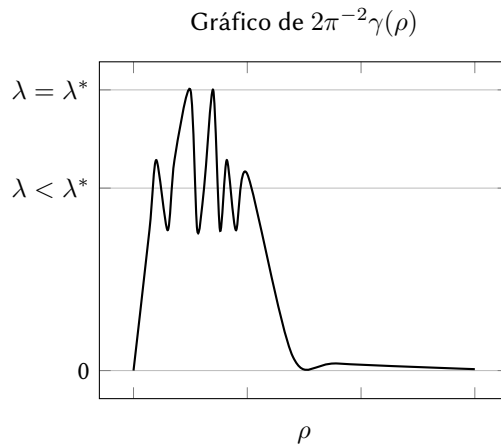
De lo anterior tenemos que

$$0 \leq \limsup_{\rho \rightarrow \infty} \gamma(\rho) \leq b^{-1/2}\pi,$$

como el $b > 0$ era arbitrario, entonces $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \gamma(\rho) = 0$ cuando $\rho \rightarrow \infty$. Si tomamos

$$\lambda^* := 2\pi^{-2} \max_{\rho} \gamma^2(\rho)$$

y teniendo en cuenta (18), vemos que $\lambda^* > 0$, si $\lambda \in (0, \lambda^*)$ hay al menos dos (pero a lo más finitas) soluciones, si $\lambda = \lambda^*$ hay al menos una (pero a lo más finitas) soluciones y si $\lambda > \lambda^*$ no hay soluciones. Es decir, hemos demostrado la primera parte del teorema. Esto se puede resumir en la siguiente figura:



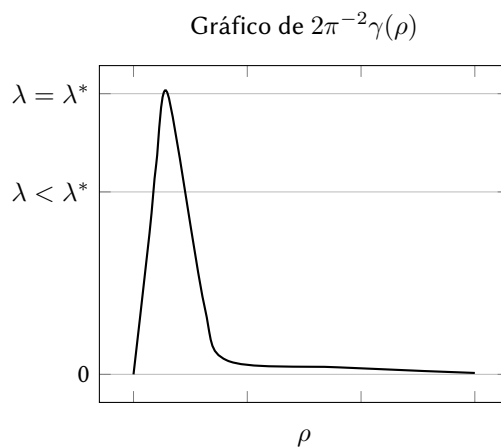
Supongamos ahora que g es convexa y que para $\lambda \in (0, \lambda^*)$ hay tres soluciones $u < v < w$ en $(0, \pi)$ ver lema B. Si $z = v - u > 0$ y $\zeta = w - v > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} z'' + \lambda h(t)z &= 0 & z(0) &= z(\pi) = 0 \\ \zeta'' + \lambda k(t)\zeta &= 0 & \zeta(0) &= \zeta(\pi) = 0 \end{aligned}$$

donde

$$h(t) := \frac{g(v(t)) - g(u(t))}{v(t) - u(t)} \quad k(t) := \frac{g(w(t)) - g(u(t))}{w(t) - u(t)}.$$

Por la convexidad de g obtenemos que $h < k$ en $(0, \pi)$, pero ahí no hay ceros ni de z ni de ζ lo que contradice el teorema de comparación de Sturm del ejercicio 22. Cuando λ es convexa el teorema se puede representar en la siguiente gráfica.



□

Las condición de positividad de g puede debilitarse en la búsqueda de soluciones positivas para estos problemas semilineales de valores propios. Por ejemplo, cuando la no-linealidad es semi-positiva, es decir $g(0) < 0$ y g finalmente positiva [28, 38, 13].

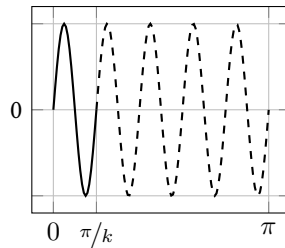
10 Infinitas soluciones que cambian de signo

Consideremos ahora el problema

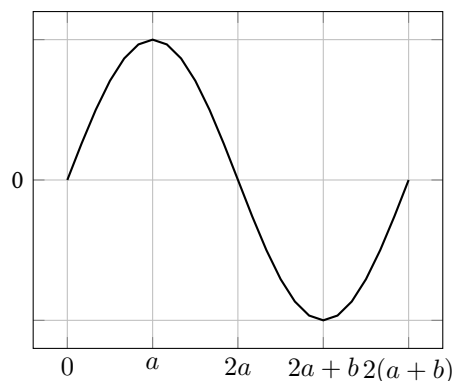
$$\begin{cases} u'' + g(u) = \alpha \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

con g super-lineal. Es decir, con la notación de (1), tenemos $f(u) = g(u) - \alpha$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(u) = \int_0^u g(s)$ y $F(u) = G(u) - \alpha u$ se definen como es usual.

Vamos a demostrar que el problema (19) tiene infinitas soluciones siguiendo la siguiente idea. Primero se demuestra que para k entero suficientemente grande, u tienen exactamente un máximo y un mínimo en $(0, \pi/k)$ con $u'(0) = u'(\pi/k) > 0$. Luego, usando el lema A podemos extender las soluciones con la simetría alrededor de sus puntos críticos. Finalmente, la solución tendrá k máximos y k mínimos. El esquema de la idea está representado en la siguiente gráfica.



Al suponer $u'(0) > 0$ garantizamos la existencia de un a que corresponde al primer máximo positivo. Podemos simetrizar alrededor de a y en $2a$ la función debe tener su primer cero con $u'(0) < 0$. De aquí tenemos que hay un b tal que, en $2a + b$ la función adquiere un mínimo negativo. Queremos ver que $2a + 2b$ tiene la forma π/k . En ese caso tendríamos soluciones. Esta situación se ve en la siguiente gráfica.



Notando $\rho = u(a)$ y $q = u(b + 2a)$, y siguiendo la deducción que nos llevó a (13) obtenemos

$$\begin{aligned} u' &= \sqrt{2(F(\rho) - F(u))} \quad \text{en } [0, a] \\ u' &= \sqrt{2(F(q) - F(u))} \quad \text{en } [2a, 2a + b]. \end{aligned} \tag{20}$$

Para deducir la segunda de estas ecuaciones es importante tener en cuenta la conservación de la energía (7), que $F(u(a)) = F(0) = 0$, que u' es positiva y decreciente en $[2a, 2a + b]$ y que por tanto la energía potencial en ese mismo intervalo es positiva creciente.

Integrando obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} x\sqrt{2} &= \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}} \quad \text{en } [0, a] \\ (x - 2a)\sqrt{2} &= - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{F(q) - F(u)}} \quad \text{en } [2a, 2a + b]. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la conservación de la energía tenemos que

$$\frac{u'(2a)^2}{2} = E = F(\rho) = F(q).$$

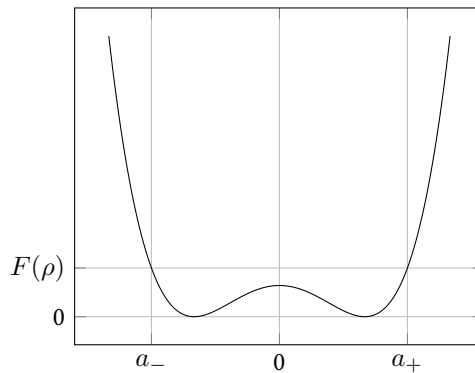
Podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema B. *Si g es superlineal, para cada α existe un entero positivo κ tal que para todo $k \geq \kappa$, el problema (19) tiene una solución con k máximos locales. En particular, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, el problema tiene infinitas soluciones.*

Prueba. Usando la hipótesis de super-linealidad vemos que si para todo $b > 0$, existe un $c > 0$ tal que si $s < -c$, $g(s) < bs$. Si además tomamos que $s < \min\{-c, \alpha/b\}$, $F'(s) = f(s) = g(s) - \alpha < 0$. Además $F(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow -\infty$. De manera similar se demuestra que $F' > 0$ en una vecindad de infinito y $F(s) \rightarrow \infty$ cuando $s \rightarrow \infty$. De este modo, existen $a_- < 0$ y $a_+ > 0$ tales que

$$\begin{aligned} F(s) &\leq F(q) \quad \text{si } q \leq a_- \text{ y } s \in (q, 0) \\ F(s) &\leq F(\rho) \quad \text{si } \rho \leq a_+ \text{ y } s \in (0, \rho). \end{aligned}$$

Potencial no lineal F



Sea H la inversa de F en $(-\infty, a_-]$. Para $\rho > a_+$ definimos

$$\gamma(\rho) = \int_0^\rho \frac{du}{\sqrt{F(\rho) - F(u)}} - \int_0^q \frac{du}{\sqrt{F(q) - F(u)}},$$

donde $q = H(F(\rho))$. Un cálculo como el realizado en la demostración del teorema A, vemos que $\gamma(\rho) \rightarrow 0$ cuando $\rho \rightarrow \infty$.

Por el teorema del valor intermedio, sabemos que existe un κ entero positivo tal que para cada $k \geq \kappa$, existe un ρ_k tal que

$$\gamma(\rho_k) = \frac{\pi}{2k}.$$

Ahora definimos

$$a := \int_0^{\rho_k} \frac{du}{\sqrt{F(\rho_k) - F(u)}} \quad b := \int_0^{q_k} \frac{du}{\sqrt{F(q_k) - F(u)}}.$$

Pero la fórmula

$$\int_0^u \frac{du}{F(\rho_k) - F(u)} = \sqrt{2}t$$

define a u como función de t . Derivando obtenemos

$$u' = \sqrt{2}\sqrt{F(\rho_k) - F(u(t))}.$$

Elevando al cuadrado y derivando otra vez

$$2u'u'' = 2(-g(u) + \alpha)u'.$$

Como u' es positiva en $[0, a]$ vemos que u es solución a (19) en $[0, a]$. Por simetrización la podemos extender a $[0, 2a]$. Usando un razonamiento similar con

$$\int_0^u \frac{du}{F(\rho_k) - F(u)} = \sqrt{2}(t - 2a)$$

tenemos una solución en $[2a, 2a+b]$. Continuando con la extensión k veces, se completa la demostración del teorema. \square

Una posible interpretación física de este resultado lo podemos dar en términos del Bosón de Higgs o de la Ecuación de Shrödinger. Con el potencial de Higgs se pueden encontrar infinitas soluciones de campos cuánticos. Infinitos universos posibles.

Referencias

- [1] P. Amster. *Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems*. Universitext. Springer US, 2013.
- [2] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, 1989.
- [3] John Baez and Derek Wise. Lectures on classical mechanics. Online, 2018.
- [4] E. T. Bell. *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica de México, 2004.
- [5] V. Benci and Fortunato. D. *Variational Methods in Nonlinear Field Equations*. Springer Verlag, 2014.

- [6] D. Bernoulli. Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'académie de 1747 & 1748. HAB pour l'année 1753, 1755, p. 147-148, 152-154 et 156-158.
- [7] L. Boltzmann. Ableitung des stefan'schen gesetzes, betreffend die abhängigkeit der wärmestrahlung von der temperatur aus der electromagnetischen lichttheorie. *Annalen der Physik und Chemie*, 6(258):291–294, 1884.
- [8] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2010.
- [9] R.M. Brooks and K. Schmitt. *The Contraction Mapping Principle and Some Applications*. Electronic journal of differential equations: Monograph, 2009.
- [10] J. F. Caicedo. *Calculo Avanzado. Introducción*. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá., 2005.
- [11] J. F. Caicedo and A. Castro. A Semilinear Wave Equation with Smooth Data and no Resonance Having no Continuous Solution. *Continuous and Discrete Dynamical Systems*, 24(3):653–658, 2009.
- [12] J. F. Caicedo and A. Castro. *Ecuaciones semilineales con espectro discreto*. Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [13] Alfonso Castro and R. Shivaji. Non-negative solutions for a class of non-positone problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 108(3-4):291–302, 1988.
- [14] S. Chandrasekhar. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover Books on Astronomy Series. Dover Publications, Incorporated, 2012.
- [15] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Number v. 1. Wiley, 2008.
- [16] H. Curtis and A. Schnek. *Curtis. Biología*. Editorial Medica Panamericana Sa de, 2008.
- [17] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, 1985.
- [18] R. Desai. Fick's law of diffusion. https://www.youtube.com/watch?v=Cg4K1mI_acs, 2013. Recuperado de YouTube en mayo de 2019.
- [19] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1997.
- [20] D. G. De Figueredo. *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Springer Verlag, 1989.
- [21] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. U.S. Government Printing Office, 2001.
- [22] J Goldstone. Field theories with "superconductor" solutions. *Nuovo Cimento*, 19(CERN-TH-118):154–164, Aug 1960.
- [23] M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press. Elsevier Science, 2013.
- [24] E.L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Books on Science. Longmans, Green and Company Limited, 1927.
- [25] R. Iorio and V. Magalhães. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 2001.
- [26] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 4 edition, 1981.
- [27] J. Jost. *Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 2002.
- [28] Ahmed K. Khamayseh and R. Shivaji. Evolution of bifurcation curves for semipositone problems when nonlinearities develop multiple zeroes. *Applied Mathematics and Computation*, 52(2):173 – 188, 1992.
- [29] C. Kung-Ching. *Infinite Dimensional Morse Theory*, volume 6. Birkhäuser, Berlin, 1993.
- [30] C. Kung-Ching. *Methods in Nonlinear Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 2005.

-
- [31] O. Ladyzhenskaya and N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science, 1968.
- [32] F. Laloë. *Do We Really Understand Quantum Mechanics?* Cambridge University Press, 2019.
- [33] Jesper Lützen. Sturm and Liouville's work on ordinary linear differential equations. the emergence of Sturm-Liouville theory. *Archive for History of Exact Sciences*, 29(4):309–376, Dec 1984.
- [34] J.E. Marsden and A. Tromba. *Vector Calculus*. W. H. Freeman, 2003.
- [35] J. Mawhin and M. Willem. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2013.
- [36] J.D. Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2011.
- [37] J.D. Murray. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2011.
- [38] Agnes R. Miciano and Ratnasingham Shivaji. Multiple positive solutions for a class of semipositone Neumann two point boundary value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 178:102–115, 09 1993.
- [39] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Mc Graw-Hill International Editions, 3 edition, 1976.
- [40] S. Salsa. *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*. Universitext. Springer Milan, 2008.
- [41] G.F. Simmons. *Differential equations: with applications and historical notes*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1972.
- [42] M. Spivak. *Physics for Mathematicians. Mechanics I*. Perish, 2010.
- [43] J. Stefan. Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. *Sitzungsberichte der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, 79:391–428, 1879.
- [44] W. Strauss. *Partial Differential Equations. An Introduction*. John Wiley and Sons, 1992.
- [45] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences*, 237(641):37–72, 1952.