
INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES CON RETARDO

CURSO PARA EL XXIII CONGRESO COLOMBIANO DE MATEMÁTICAS

ARTURO SANJUÁN*

TUNJA
JUNIO DE 2023

Presentación

La moscarda *lucilia cuprina*, de importancia forense y cuyas larvas consumen la carne viva del ganado ovino, posee una dinámica poblacional que podemos modelar (al igual que muchos otros fenómenos de la biología), mediante una ecuación diferencial con retardo. Estas ecuaciones (a diferencia de las ordinarias) viven en el mundo infinito-dimensional, procurar soluciones explícitas puede ser imposible (se prefiere el enfoque numérico) y su análisis cualitativo requiere de herramientas matemáticas muy avanzadas.

Introducimos el método de pasos, el teorema de existencia y unicidad y un análisis cualitativo para el modelo lineal del crecimiento poblacional de la moscarda en mención que también aplica a otras dinámicas de poblaciones de animales. Este curso está dirigido a un público con conocimientos básicos en cálculo y ecuaciones diferenciales. En este curso seguimos ideas de [2] y [3].

1. Motivación fenomenológica

En nuestros cursos de biología escolar nos enseñaron que las bacterias se reproducen por fisión celular. Esto quiere decir que si empezamos con N_0 bacterias, al cabo de t ciclos de fisión tendríamos $N_t = 2N_{t-1} = N_0 2^n$. Los modelos son siempre aproximaciones a la realidad que deben considerar múltiples factores, y si bien este modelo puede resultar ilustrativo y acertado para escasos ciclos, no deja de ser casi ridículo debido al crecimiento exponencial si lo prolongamos incluso para tiempos razonables.

Expliquemos el adjetivo anterior. Por ejemplo, la *escherichia coli*, la bacteria presente en los intestinos de los animales de sangre caliente, tiene una frecuencia de fisión celular de 14 minutos y

*Profesor titular Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Email: aasanjuanc@udistrital.edu.co,
web: <https://comunidad.udistrital.edu.co/arturosanjuan/>

un ciclo de vida de 10 días. Así las cosas, en 10 días una sola bacteria produciría una descendencia de $2^{1028} \approx 2,9 \cdot 10^{309}$ bacterias. Si el volumen de una bacteria de estas es de $\approx 1,3 \cdot 10^{-18} \text{m}^3$ y el volumen del universo conocido es de $4 \cdot 10^8 \text{m}^3$. La descendencia de una sola bacteria llenaría aproximadamente el espacio equivalente a $9,4 \cdot 10^{210}$ universos (algo más de nueve gúgolos cuadrados).

A pesar de su comportamiento poco realista, trataremos de afinar este modelo con la intención de acercarnos más al fenómeno real. Primero deduzcamos su versión continua. Si $N(0) = N_0$ y $N(t) = bN(t - 1)$ con $b > 0$ la tasa de reproducción neta ($b > 1$ la población crece, $b < 1$ la población tiende a desaparecer), tenemos que $N(t + h) - N(t) = N(t)(b^h - 1)$. Suponiendo que t y h son ahora continuos, dividiendo por h y tomando límite cuando $h \rightarrow 0$ a ambos lados, obtenemos la famosa ecuación de crecimiento poblacional

$$\begin{cases} N(0) = N_0 \\ N'(t) = rN(t) \end{cases} \quad (\mathcal{M})$$

con $r = \log b$ la tasa de crecimiento de la población y $N(t) = N_0 e^{rt}$. En este caso, si $r > 0$ la población crece de manera exponencial, si $r < 0$ la población tiende a desaparecer rápidamente y para $r = 0$ la población se mantiene constante.

En 1798 Thomas Malthus propuso, en un ensayo de 134 páginas, un modelo basado en datos demográficos de distintos ducados, poblaciones y reinos en el que $r = b - d$ con b y d las tasas de nacimiento y muertes respectivamente [6]. Debido al crecimiento exponencial de la población en los intervalos observados y el crecimiento lineal de la producción agrícola para aquel entonces, Malthus había predicho el fin de la humanidad para 1880. El modelo de Malthus no tuvo en cuenta las guerras, las hambrunas, el desarrollo tecnológico y tampoco tuvo en cuenta que los seres humanos podíamos llegar a producir un capitalismo depredador y un cambio climático planetario por las emisiones de dióxido de carbono con miras a una real catástrofe que no se debe a nuestra incapacidad de producir alimentos de manera eficiente.

Verhulst propuso un modelo más realista intuyendo que el proceso de crecimiento exponencial debe parar en algún momento e introdujo el concepto de **capacidad de carga** del ambiente, parámetro que denotamos con K y que se entiende como la cantidad máxima de individuos que se pueden sostener con los recursos disponibles [8, 9]. Es así como Verhulst sugiere la tasa de crecimiento de la población dado por $r(1 - N/K)$ que se acerca a 0 a medida que la población se acerca a la capacidad de carga.

Estas consideraciones dan origen al modelo logístico de crecimiento poblacional

$$N' = \alpha N \left(1 - \frac{N}{K} \right). \quad (\mathcal{V})$$

Ejercicio 1. Resuelva la ecuación (\mathcal{V}) y demuestre que su solución tiene la famosa forma de sigmoide con asíntota horizontal en $N = K$, un punto de equilibrio inestable $N = 0$ y un punto de equilibrio

estable en $N = K$. Realice un cambio de variable conveniente para demostrar que la capacidad de carga se puede considerar $K = 1$. Integre en un intervalo de tiempo $[t, t + T]$ a la función $N'(t)^2$ y use (\mathcal{V}) para demostrar que no hay soluciones periódicas $u(t + T) = u(t)$.

El modelo (\mathcal{V}) , (aunque también imperfecto como todos los modelos) resulta ilustrativo cuando el punto de equilibrio $N = 0$ es inestable y la población tiende a una cantidad finita y positiva. Para un análisis detallado de la estabilidad del problema (\mathcal{V}) o la introducción de términos de cosecha ver [5, cap 1] o [7, cap. 1].

Pero la reproducción no ocurre en el momento exacto en el que nacen individuos, afortunadamente. Se requiere un compás de espera para alcanzar la madurez sexual. Por eso se introduce el modelo con retardo en el que la tasa de nacimientos es $\alpha(1 - N(t - \tau))$. Algunos experimentos comprueban que este modelo se aplica mucho mejor a la dinámica población de la moscarda que consume la carne viva de las ovejas en Australia, así como ciertas poblaciones de roedores en Canadá.

Linealizando alrededor de $N \equiv 1$ y escribiendo $N(t) = 1 + u(t)$, obtenemos la ecuación retardo más sencilla posible (ecuación con feedback negativo lineal de primer orden).

$$u'(t) = -\alpha u(t - \tau). \tag{\mathcal{F}}$$

Notemos que para poder reconstruir la solución, necesitamos como dato inicial, ya no un valor, una función continua ϕ definida en $[-\tau, 0]$.

2. Soluciones explícitas

Tomemos $\alpha = -1$ (*feedback* positivo) y $\tau = 1$ en (\mathcal{F}) y $\phi \equiv 1$ en $[-\tau, 0]$. Usando la información y la ecuación, podemos integrar para obtener la solución en $t \in [0, 1]$ y que se mantenga continua en $[-1, 1]$. Vemos que en este intervalo, la solución es $u(t) = 1 + t$. Continuando con este proceso, vemos que para $t \in [n, n + 1]$, la solución viene dada por

$$u(t) = \sum_{n=0}^N \frac{(t - n)^n}{n!}.$$

Ejercicio 2. Revise los detalles de la solución anterior, y demuestre que la solución a (\mathcal{F}) en $[n\tau, (n + 1)\tau]$ viene dada por

$$u(t) = u(n\tau) - \alpha \int_{n\tau}^{\tau} u(s - \tau) ds. \tag{\mathcal{S}}$$

Resuelva la ecuación $u'(t) = 1 + u(t - 1)$ con dato inicial 1 en $[-1, 0]$. En [3, p. 47] encontrará muchos más ejercicios interesantes.

La ecuación diferencial lineal general de primer con retardo (o ecuación histero-diferencial) se puede escribir como

$$u'(t) + \tilde{\alpha}u(t) + \alpha u(t - \tau) = f(t).$$

Ejercicio 3. Demuestre que con la sustitución

$$\begin{cases} u(t) = w(t) & \text{para } t \in [-\tau, 0] \\ u(t) = e^{-\tilde{\alpha}t}w(t) & \text{para } t > 0 \end{cases}$$

podemos reducir la ecuación general al caso (\mathcal{F}) .

El ejercicio 2 nos da entonces el método para probar un teorema de existencia y unicidad global elemental para las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden del tipo con retardo. La función u obtenida es continua. Pero la regularidad de la solución va aumentando en cada paso. Más precisamente, se puede probar lo siguiente

Ejercicio 4. Si el forzamiento o función de control f es de clase $C^1[0, \infty)$ y el dato inicial ϕ es continua en $[-\tau, 0]$, existe una única solución continua u en $[-\tau, \infty)$ y de clase C^{n+1} en $[n\tau, \infty)$. Más aún, Si $\phi \in C^1[-\tau, 0]$, u será de clase $C^1[0, \infty)$ si se verifica la *condición de compatibilidad*

$$\phi'(0^-) + \alpha\phi(-\tau) = f(-\tau).$$

Formule condiciones de compatibilidad en los puntos de la forma $n\tau$ para garantizar mayor regularidad de las soluciones. En el caso en el que el dato inicial y el forzamiento son polinomios de grado a lo más r , demuestre que en cada paso aumenta, a lo mas, en una unidad el grado del polinomio.

Sabemos entonces que tenemos soluciones globales al problema (\mathcal{F}) . Veamos ahora si podemos estimar el comportamiento asintótico de la solución con los métodos que tenemos hasta el momento.

La solución (\mathcal{S}) con $n = 0$ es válida para $t > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq |\phi|_\infty + |\alpha| \int_0^t |u(s - \tau)| ds \\ &\leq |\phi|_\infty + |\alpha| \int_{-\tau}^{t-\tau} |u(s - \tau)| ds \\ &\leq |\phi|_\infty + |\alpha| \int_{-\tau}^t |u(s)| ds \end{aligned}$$

De donde,

$$\frac{|u(t)|}{|\phi|_\infty + |\alpha| \int_{-\tau}^t |u(s)| ds} \leq 1$$

Integrando a ambos lados en $[-\tau, t]$ obtenemos

$$\log \left(|\phi|_\infty + |\alpha| \int_{-\tau}^t |u(s)| ds \right) \leq |\alpha|(t + \tau) + \log |\phi|_\infty$$

De donde llegamos a la estimación

$$|u(t)| \leq |\phi|_{\infty} e^{|\alpha|(t+\tau)} \quad (\mathcal{E})$$

para $t \geq 0$. La desigualdad (\mathcal{E}) nos dice que la solución tiene a lo más un crecimiento exponencial que depende del tiempo. Sin embargo, esto no nos sirve de nada si la solución está realmente decreciendo. Para un análisis asintótico necesitamos otro tipo de enfoque, un análisis cualitativo que estudiaremos en la siguiente sección.

Ejercicio 5. Demuestre una estimación similar a (\mathcal{E}) pero que tenga en cuenta el forzamiento f .

Ejercicio 6. Demuestre que la solución depende continuamente de los datos iniciales. Es decir, si u_1 y u_2 son soluciones al problema con ϕ_1 y ϕ_2 como datos iniciales, entonces

$$|u_1(t) - u_2(t)| \leq |\phi_1(t) - \phi_2(t)| e^{ct}$$

para todo $t \geq 0$ y $c > 0$ alguna constante positiva. Demuestre que también depende continuamente del forzamiento.

3. Análisis cualitativo

Para el estudio que vamos a realizar, podemos ahorrarnos un parámetro con la sustitución $s := t/\tau$. Obtenemos así la ecuación

$$L(u)(t) := U'(s) + \beta U(s-1) = 0 \quad (\mathcal{F}_{\beta})$$

con $\beta = \alpha\tau$ y $U(s) = u(t)$.

Podemos imitar el mismo procedimiento que realizábamos en nuestro curso de ecuaciones con diferenciales ordinarias y buscar soluciones de la forma $e^{\lambda s}$. Al reemplazar en (\mathcal{F}) obtenemos $\lambda e^{\lambda s} + \beta e^{s-1} = 0$. Para los valores λ que hacen

$$h(\lambda) := \lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$$

obtenemos solución. En el caso de las ecuaciones ordinarias obteníamos un polinomio característico. Con esta notación $L(e^{\lambda s}) = e^{\lambda s} h(\lambda)$.

En este caso h es una función trascendente y estudiar las raíces de h puede llegar a ser muy difícil. Veámos qué tanto.

Dado que $\lambda = 0$ no es solución, podemos hacer el cambio de variable $z = 1/\lambda$ y obtenemos $g(z) := -\beta z e^{-z} = 1$. La función g tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y, por el Teorema Grande de Picard, en una vecindad del cero, podemos encontrar infinitos valores z , tales que $g(z) = 1$.

Ejercicio 7. Estudie, preferiblemente de [1], el argumento de variable compleja que le permite garantizar que todas las soluciones de $h(\lambda) = 0$ tienen orden finito, que son a lo más numerables y que deben satisfacer $|\lambda_n| \rightarrow \infty$.

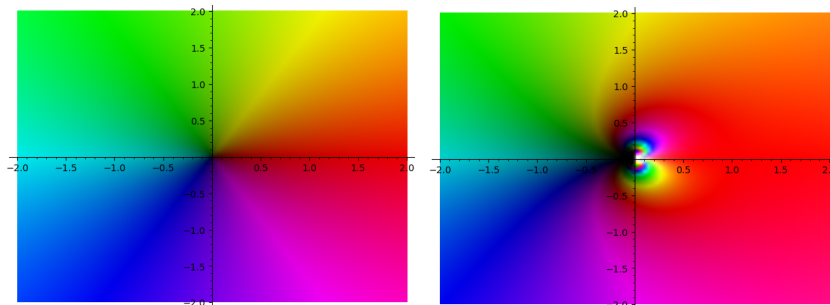


Figura 1: Representación de z y $ze^{1/z}$

Por el ejercicio anterior, podemos ver que es posible encontrar una cantidad infinita de soluciones linealmente independientes $e^{\lambda_n t}$ y podemos pensar en soluciones en series de la forma

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}.$$

Veamos que pasa con la multiplicidad de las soluciones. Supongamos que λ es raíz de h de orden dos. Esto quiere decir que $h(\lambda) = h'(\lambda) = 0$, pero $h''(\lambda) \neq 0$.

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(e^{\lambda s}) = L\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda s}\right) = L(se^{\lambda s})$$

Pero

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} L(e^{\lambda s}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} [e^{\lambda s} h(\lambda)] = se^{\lambda s} h(\lambda) + e^{\lambda s} h'(\lambda) = 0.$$

Por lo tanto $se^{\lambda s}$ es solución. Haciendo la cuenta para la segunda derivada observamos que $s^2 e^{\lambda s}$ ya no lo es.

Ejercicio 8. Generalice el resultado anterior para ceros de orden n .

El ejercicio anterior es de utilidad para ecuaciones lineales, pero veamos que no necesitamos un orden mayor para (\mathcal{F}_β) .

Si $h(\lambda) = h'(\lambda) = 0$, vemos que esto sólo es posible si $\lambda = -1$ y $\beta = 1/e$. Pero $h''(\lambda) = \beta e^{-\lambda} \neq 0$.

De $h(\lambda_n) = 0$ obtenemos que

$$|\lambda_n| = |\beta| |e^{\lambda_n}| = |\beta| e^{-\Re(\lambda_n)}.$$

Esto quiere decir que, dado que el lado izquierdo tiende a infinito, $\Re(\lambda_n) \rightarrow -\infty$ y por tanto la cantidad de ceros en conjuntos de la forma $\{\Re(\lambda) > a\}$ es finita.

Ejercicio 9. Demuestre que si $\sum |a_n| < \infty$, la serie $\sum a_n e^{\lambda_n t}$ converge a uniformemente una solución de la ecuación (\mathcal{F}_β) . Tenga cuidado con la convergencia de la derivada.

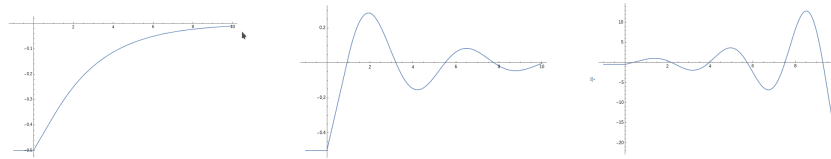


Figura 2: Representación del modelo para $\beta < 1/e$, $1/e < \beta < \pi/2$ y $\beta > \pi/2$

Determinar si estas son todas las soluciones es un problema más difícil. Para esto, se puede consultar [3, cap. 4].

Estudiar cualitativamente el comportamiento de las soluciones a (\mathcal{F}_β) se reduce a estudiar la naturaleza de las raíces características.

Para x real, estudiando $h(x)$ como en nuestros cursos de cálculo vemos que h tiene una única raíz real positiva si $\beta < 0$. Y estudiando la ecuación $xe^x = \beta$ vemos que si $\beta \in (0, 1/e)$, entonces h tiene exactamente dos raíces negativas que tienen a $-\infty$ y 0^- cuando $\beta \rightarrow 0^+$. Si $\beta = 1/e$, $\lambda = -1$ es la única raíz real de multiplicidad 2. Si $\beta > 1/e$, no hay raíces reales.

Ejercicio 10. Estudiar de [2] el siguiente resultado.

Teorema A. Se cumple que

- (1) Si $\beta < 0$ las soluciones son asintóticamente inestables.
- (2) Si $\beta < 1/e$, $U \equiv 0$ es asintóticamente estable.
- (3) $\beta = 1/e$ da origen a la única raíz real de multiplicidad 2 y es un punto de bifurcación.
- (4) Las soluciones oscilan si y solo si no hay soluciones reales, i.e. $\beta > 1/e$
- (5) Si $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ todas las raíces tienen parte real negativa alejada del cero ($\Re(\lambda) \leq -\mu$ para algún $\mu > 0$) y por ende las soluciones son asintóticamente estables.
- (6) Para $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = \pm i\frac{\pi}{2}$ son raíces simples y todas las raíces tienen parte real negativa. Además hay soluciones periódicas. Es otro punto de bifurcación.
- (7) Para $\beta > \pi/2$ hay raíces reales positivas y las soluciones son asintóticamente inestables.

Para ilustrar el comportamiento de las soluciones a partir de las raíces en el punto (5), procedamos formalmente. Una solución con $\beta \in (1/e, \pi/2)$ con la forma en series puede ser estimada entonces como

$$|U(t)| \leq \sum |a_n| e^{\Re(\lambda_n)t} \leq e^{-\mu t} \sum |a_n| \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Para efectos de la interpretación de las dinámicas poblacionales, lo que ocurre es que para retardos muy pequeños ($\beta = \alpha\tau < 1/e$) estamos básicamente en un modelo parecido al de Verhulst. Para retardos intermedios ($1/e < \alpha\tau < \pi/2$), la población oscila alrededor de la capacidad de carga. Para retardos muy grandes, la población tiende a infinito. Ver figura 2

4. Comentarios finales

Las ecuaciones con retardo pueden incluir términos probabilísticos como en el caso de la ecuación de Nicholson que es un mejor modelo de para la moscarda mencionada anteriormente.

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t - \tau)e^{-\gamma N(t-\tau)}.$$

También casos donde el retardo se distribuye probabilísticamente

$$x'(t) = -ax(t) + \int_{t-\tau}^t k(t-s)x(s) ds = -ax(t) + \int_0^\tau k(s)x(t-s) ds$$

con $\int_0^\tau k(s) ds = 1$.

Al usar distribuciones tipo δ de Dirac volvemos al caso con retardo discreto. Si introducimos la notación $x_t(s) = x(t+s)$ y $F : \mathbb{R} \times C[-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, podemos considerar la ecuación diferencial-funcional más general de la forma

$$x'(t) = F(t, x_t)$$

En este contexto general es válido un teorema de existencia, unicidad y dependencia continua que usa teoría de grado infinito-dimensional de Leray-Schauder

Teorema B. *Sea F continua y Lipschitz con respecto a x . Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$, existe un $\delta(t_0, R) > 0$ tal que para todo $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\phi\|_\infty \leq R$ existe una única solución $x(t, \phi)$ a*

$$x'(t) = F(t, x_t)$$

en $[t_0 - \tau, t_0 + \delta]$. Más aún

$$\sup_{t-\tau \leq s \leq t} \|x(s, \phi) - x(s, \psi)\| \leq \|\phi - \psi\|_\infty e^{L(t-t_0)}$$

Para un estudio más sistemático de las ecuaciones diferenciales-funcional ver [4].

Referencias

- [1] Lars Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to The Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. McGraw-Hill Education, 1979.
- [2] Pablo Amster. *Ecuaciones con Retardo: Cursos y Seminarios de Matemática.*, volume Serie B, Fascículo 11. Departamenteo de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad de Buenos Aires, 2017.
- [3] Richard Bellman and Kenneth Cooke. *Differential-Difference Equations*. Elsevier Science, 1963.

- [4] Jack Hale. *Functional Differential Equations*. Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1971.
- [5] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2004.
- [6] Thomas Malthus. *An Essay on the Principle of Population*. J. Johnson, 1798.
- [7] James D Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, 2002.
- [8] Pierre-François Verhulst. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18:1–42, 1845.
- [9] Pierre-François Verhulst. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 20:1–32, 1847.