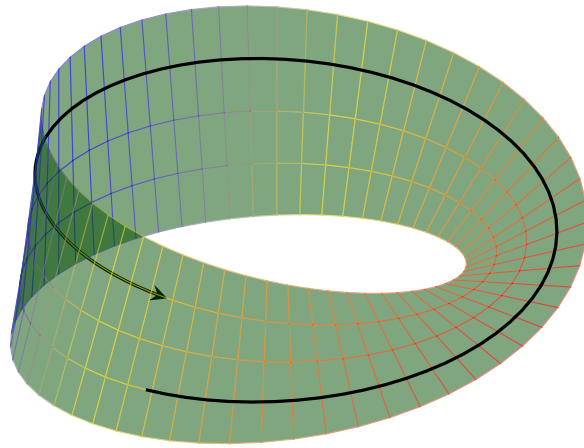


# Geometría de Superficies



Carlos Antonio Julio Arrieta

# Geometría de Superficies

Trabajo realizado en el año sabático 2021

**Carlos Antonio Julio Arrieta**

*Profesor de Matemáticas*

*Universidad Distrital Francisco José de Caldas*

*Bogotá - Colombia*

*email: [cjulioarrieta@outlook.com](mailto:cjulioarrieta@outlook.com)*

# **Geometría de Superficies**



# Índice General

<b>Prefacio</b>	<b>xi</b>
<b>Comentarios y Requisitos</b>	<b>xv</b>
<b>Parte I: Curvas Regulares</b>	<b>1</b>
<b>1 Curvas Regulares y Curvatura</b>	<b>25</b>
1.1 Introducción . . . . .	25
1.2 Curvas Regulares . . . . .	25
1.3 Longitud de Arco . . . . .	26
1.4 Teoría Local de Curvas . . . . .	29
1.5 Expresión para la Curvatura . . . . .	32
1.6 Ejercicios . . . . .	35
<b>2 Torsión y Fórmula de Frenet-Serret</b>	<b>37</b>
2.1 Introducción . . . . .	37
2.2 Plano Osculador y Torsión . . . . .	38
2.3 Fórmula de Frenet-Serret . . . . .	42
2.4 Expresiones de la Torsión . . . . .	44
2.5 Ejercicios . . . . .	48

<b>Parte II: Superficies Regulares</b>	<b>50</b>
<b>3 Superficies y Ejemplos Elementales</b>	<b>51</b>
3.1 Introducción . . . . .	51
3.2 Imagen de una Función Diferenciable. . . . .	51
3.3 Parametrizaciones Locales . . . . .	52
3.3.1 Esfera $S^2$ . . . . .	53
3.4 Superficies Regulares . . . . .	54
3.4.1 Ejemplos . . . . .	55
3.4.2 Observaciones. . . . .	55
3.5 Cambio de Parámetro . . . . .	62
3.6 Funciones Diferenciables entre Superficies . . . . .	66
3.7 Ejercicios . . . . .	67
<b>4 Más Ejemplos de Superficies Regulares</b>	<b>69</b>
4.1 Introducción . . . . .	69
4.2 Toro . . . . .	69
4.3 Banda de Möbius . . . . .	71
4.4 Garrafa o Botella de Klein . . . . .	74
4.5 Plano Proyectivo Real $\mathbb{RP}^2$ . . . . .	79
4.6 Ejercicios . . . . .	81
<b>5 Superficies y Vectores Tangentes</b>	<b>83</b>
5.1 Introducción . . . . .	83
5.2 Superficies de Dimensión $k$ . . . . .	83
5.3 Vectores Tangentes . . . . .	90
5.4 Diferencial entre Superficies de Dimensión $k$ . . . . .	95
5.5 Inmersiones, Submersiones y Encajes . . . . .	98
5.6 Espacio Cotangente . . . . .	99
5.7 Fibrado Tangente y Cotangente . . . . .	101
5.8 Ejercicios . . . . .	103

<b>6 Campos Vectoriales</b>	<b>105</b>
6.1 Introducción . . . . .	105
6.2 Campos Vectoriales . . . . .	105
6.2.1 Propiedades del Corchete de Lie . . . . .	109
6.3 Curvas Integrales y Flujo Local . . . . .	110
6.4 Derivada de Lie para Campos Vectoriales . . . . .	112
6.4.1 Observaciones . . . . .	113
6.5 Ejercicios . . . . .	115
<b>7 Orientación</b>	<b>117</b>
7.1 Introducción . . . . .	117
7.2 Orientación de Superficies . . . . .	118
7.3 Orientación de Superficies e Imagen Inversa . . . . .	124
7.4 Ejercicios . . . . .	128
<b>Parte III: Geometría Diferencial de Superficies</b>	<b>130</b>
<b>8 Primera Forma Fundamental</b>	<b>131</b>
8.1 Introducción . . . . .	131
8.2 Primera Forma Fundamental . . . . .	131
8.3 Longitud y Área . . . . .	134
8.4 Ángulos de Curvas . . . . .	135
8.5 Ejercicios . . . . .	138
<b>9 Curvatura de Superficies en <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>141</b>
9.1 Introducción . . . . .	141
9.2 Segunda Forma Fundamental . . . . .	141
9.3 Nociones de Curvatura . . . . .	142
9.4 Curvaturas Principales . . . . .	151
9.5 Ejercicios . . . . .	157

<b>Hacia la Geometría Intrínseca</b>	<b>159</b>
<b>10 Isometrías y Símbolos de Christoffel</b>	<b>161</b>
10.1 Isometrías . . . . .	161
10.2 Símbolos de Christoffel . . . . .	164
10.3 Ejercicios . . . . .	167
<b>11 Sobre el Teorema de Gauss</b>	<b>169</b>
11.1 Introducción . . . . .	169
11.2 Fórmula y Teorema Egregium de Gauss . . . . .	170
11.3 Ejercicios . . . . .	173
<b>12 Derivada Covariante</b>	<b>175</b>
12.1 Derivada Covariante . . . . .	175
12.2 Transporte Paralelo . . . . .	177
12.3 Ejercicios . . . . .	180
<b>13 Curvatura Tangencial o Geodésica</b>	<b>181</b>
13.1 Introducción . . . . .	181
13.2 Sobre la Curvatura Geodésica . . . . .	181
13.3 Valor algebraico de la Derivada Covariante . . . . .	183
13.4 Ejercicios . . . . .	189
<b>14 Geodésicas</b>	<b>191</b>
14.1 Introducción . . . . .	191
14.2 Geodésicas . . . . .	191
14.3 Ejemplos . . . . .	193
14.4 Coordenadas Geodésicas . . . . .	199
14.5 Hacia las Coordenadas Geodésicas Polares . . . . .	201
14.5.1 Coordenadas Geodésicas Polares . . . . .	205
14.6 Arcos de Longitud Mínima . . . . .	206
14.7 Ejercicios . . . . .	209



<b>15 Teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>211</b>
15.1 Introducción . . . . .	211
15.2 Teorema Local de Gauss-Bonnet . . . . .	212
15.2.1 Notaciones y Observaciones . . . . .	215
15.3 Algunas Observaciones . . . . .	219
15.4 Teorema Global de Gauss-Bonnet . . . . .	220
15.4.1 Algunos Resultados . . . . .	221
15.5 Ejercicios . . . . .	228
 <b>Bibliografía</b>	 <b>231</b>



# Prefacio

La noción de superficie suave se hace necesaria para extender los métodos del Cálculo a espacios geométricos mas generales que a conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Se presentará el concepto de superficie regular y de  $k$ -superficie, se ilustrará el concepto con una serie de ejemplos para dar mayor claridad. Este estudio, es base introductoria para desarrollar al menos tres ramas importantes de la Geometría: Topología Diferencial, Geometría Diferencial (Riemanniana, Sub-Riemanniana, Semi-Riemanniana, Simpléctica, Grupos de Lie, entre otras) y Geometría Algebraica.

La primera se preocupa de las cuestiones topológicas y por lo tanto es más básica, sobre  $k$ -Superficies y en variedades en general con la Topología Algebraica como instrumento de trabajo.

La segunda, se ocupa de las  $k$ -Superficies y sus generalizaciones que son metrizablees cuyos espacios tangentes son dotados de una noción de producto interior (o alguna noción de producto interior debilitada, simétrica o anti-simétrica), de este modo, se obtienen varios tipos de Geometría Diferencial tales como: Riemanniana, Semi-Riemanniana, Simpléctica, entre otras; con lo que se estudia como fundamento los conceptos que se pueden definir a partir de esos productos interiores tales como: longitud de arco, ángulo, volumen, geodésicas, curvatura. El principal instrumento de trabajo, en esta dirección, es el Cálculo Real y Complejo,

cuando se refiere a propiedades locales; pegado con la Topología Algebraica para pasar de lo local a lo global.

La tercera, se ocupa de la interrelación del Álgebra, las  $k$ -Superficies y las variedades en general, es un área extremadamente interesante. El principal instrumento de trabajo es el Álgebra Conmutativa, Topología Algebraica y Análisis Real y Complejo.

Todos los estudios sobre superficies tienen aplicaciones muy interesantes, pero en particular, la Geometría Diferencial es muy llamativa, pues se combina de manera adecuada con otras áreas del conocimiento para verse como una línea fundamental de la Matemática Pura y Aplicada, por ejemplo, con

1. Probabilidad, Estadística, Procesos Estocásticos y Ecuaciones diferenciales ordinarias y Parciales;
2. Matemática Financiera o Finanzas, y por lo tanto con las áreas de Ciencias Económicas;
3. Teoría del control (o Control Geométrico) y por lo tanto con varias áreas de la Ingeniería;
4. Física Teórica (la Geometría Semi-Riemanniana y Simpléctica).

La geometría de superficies tiene dos aspectos: una, que se puede llamar Geometría Diferencial clásica y usa los principios del Cálculo. Hablando a grosso modo, la Geometría Diferencial clásica estudia las propiedades locales de las superficies. Por propiedades locales se entiende que son las propiedades que dependen del comportamiento de las curvas o superficies en una vecindad de un punto; por esto, las curvas y superficies que se consideran en este ensayo serán aquellas que se pueden derivar un cierto número de veces.

El otro aspecto es la Geometría Diferencial global donde se estudia la influencia de las propiedades locales sobre el comportamiento de las curvas

o superficies enteras. Posiblemente, la parte más interesante y representativa de la Geometría Diferencial clásica es el estudio de las superficies, por lo tanto algunas propiedades locales de las curvas aparecen naturalmente en el estudio de las superficies.

La primera parte de este ensayo trata de curvas regulares y se desarrollan en dos capítulos; la segunda trata de la teoría elemental de las superficies regulares, campos vectoriales y orientación; mientras que la última trata de la geometría diferencial elemental de superficie inmersas en  $\mathbb{R}^3$  en búsqueda de la geometría intrínseca de las superficies bi-dimensionales para el cual se le dedican los últimos 9 capítulos.



# Notas de Requisitos

Los siguientes comentarios se utilizarán en el recorrido del texto que naturalmente se pueden saltar cuando se recuerdan sin dificultad.

## § Producto Interior

Si  $x, y \in \mathbb{R}^n$   $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  el producto interno de  $x$  con  $y$ , notado por  $\langle x, y \rangle$ , se define:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (1)$$

Propiedades:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
- $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$  y  $\langle x, x \rangle = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .
- Si se define  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  entonces se tiene:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado entre  $x$  e  $y$

- Si  $x, y$  son funciones vectoriales diferenciables de una variable real de  $I = (a, b)$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\frac{d}{dt}\langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

## § Producto Vectorial

Dados los vectores  $a = (a_1, a_2, a_3)$  y  $b = (b_1, b_2, b_3)$  en el espacio definimos su producto vectorial como el vector

$$a \times b = \left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right| \end{array} \right)$$

Una forma de recordar las componentes del vector producto vectorial de  $a$  y  $b$  es observar que corresponden al resultado de eliminar la primera, la segunda y la tercera columna, respectivamente, de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

teniendo siempre cuidado de que a la segunda componente es necesario cambiarle el signo.

Otra forma de recordarlo es la siguiente: sean  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$  y  $k = (0, 0, 1)$  los vectores coordenados unitarios; entonces se puede escribir

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

y

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

y por lo tanto de la definición de  $a \times b$  se tiene la ecuación

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



dearrollado por la primera fila. Esto indica, entonces que las propiedades de los determinantes se trasladan de manera natural al producto vectorial entre vectores. Así, por ejemplo  $a \times b = -b \times a$ . La siguiente gráfica muestra la posición de  $a \times b$  en el orden que muestran la Figuras 1 y 2.

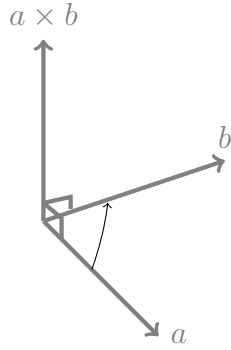


Figura 1

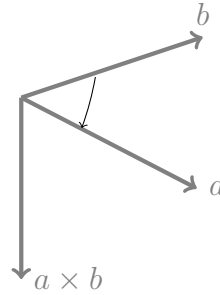


Figura 2

**Proposición 1 Propiedades del producto vectorial** Cualquiera que sean los vectores  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $\mathbb{R}^3$  se tiene:

- (a)  $a \times b = -b \times a$ .
- (b) Si  $a$  y  $b$  son no nulos,  $a \times b = 0$  si y solo si  $a$  y  $b$  son paralelos
- (c)  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ .
- (d) Para el producto mixto se tiene

$$\langle a \times b, c \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

- (e)  $\langle a \times b, a \rangle = 0$  y  $\langle a \times b, b \rangle = 0$ .
- (f)  $\langle a \times b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle = \langle b, c \times a \rangle$ .

- (g)  $\|a \times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2$ .
- (h)  $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$

**Demostración** Las propiedades (a), (b), (c), (d), (e) y (f) se deducen inmediatamente de la definición de producto vectorial y las propiedades ya conocidas de los determinantes. Las propiedades g) y h) pueden demostrarse directamente utilizando la definición de producto vectorial. En efecto, sean  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$  y  $c = (c_1, c_2, c_3)$

(g)

$$\begin{aligned}
 \|a \times b\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\
 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
 &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - \\
 &\quad - 2[a_2b_3a_3b_2 + a_1b_3a_3b_1 + a_1b_2a_2b_1] \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 \\
 &\quad - 2[a_2b_3a_3b_2 + a_1b_3a_3b_1 + a_1b_2a_2b_1] \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
 &= \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2
 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
 a \times (b \times c) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\
 &= (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1, -a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\
 &\quad + a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2, -a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2) \\
 &= \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c
 \end{aligned}$$

Lo que termina la demostración. ✓

**Proposición. Área de un paralelogramo en  $\mathbb{R}^3$**  El área  $A$  de un paralelogramo en  $\mathbb{R}^3$  determinado por dos vectores  $a$  y  $b$  está dado por la siguiente fórmula:

$$A = \|a \times b\| \quad (2)$$

**Demostración** Sea  $\theta$  el ángulo formado entre los vectores  $a$  y  $b$  como en la Figura 3

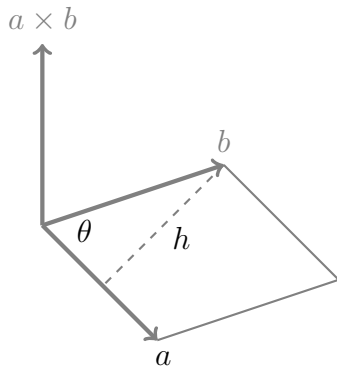


Figura 3

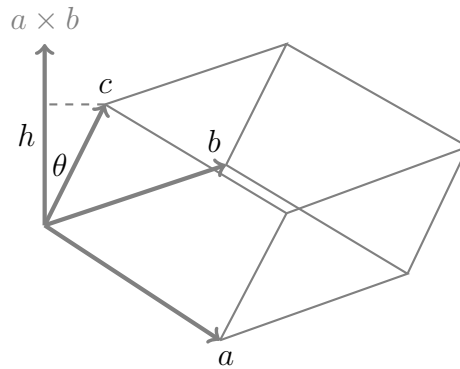


Figura 4

Luego,

$$A = \|a\|h = \|a\|\|b\|\text{sen}\theta. \quad (3)$$

Además por la identidad de Lagrange

$$\begin{aligned} \|a \times b\|^2 &= \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 \\ &= \|b\|^2\|b\|^2(1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|a\|^2\|b\|^2 \text{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (4)$$

Lo que demuestra la proposición.  $\diamond$

**Proposición. Volumen de un paralelepípedo.** El volumen de un paralelepípedo determinado por los vectores  $a$ ,  $b$  y  $c$  en el espacio puede calcularse mediante la fórmula

$$V = |\langle a \times b, c \rangle| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

donde  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$  y  $c = (c_1, c_2, c_3)$ .

**Demostración** Sea  $\theta$  el ángulo formado por los vectores  $a \times b$  y  $c$ , como en la Figura 4.

Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo  $V$  es

$$V = (\text{área de la base}) \times h = \|a \times b\| \|c\| \cos \theta = |\langle a \times b, c \rangle|.$$

Lo que demuestra la proposición. ✍

**Proposición.** Sean  $\alpha, \beta : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

y

$$\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$$

funciones diferenciables en una variable real definidas en un intervalo abierto  $I$ . Entonces

$$\frac{d}{dt} [\alpha(t) \times \beta(t)] = \alpha'(t) \times \beta(t) + \alpha(t) \times \beta'(t). \quad (5)$$

para todo  $t \in I$

**Demostración** Es un ejercicio simple. ✍

## § Derivada

En los cursos de Cálculo se define cuando una función es *suave*, esto es, una función  $f$  de un subconjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  se le llama *suave* si sus derivadas parciales, de todos los ordenes, existen y son continuas, y también se escribe  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ .

Por lo tanto, para cualquier  $h \in \mathbb{R}^n$ , la derivada de  $f$  en la dirección de  $h$ , tomada en el punto  $x$ , es definida por

$$df_x(h) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(x+h) - f(x)}{t}$$

siempre que tal límite exista. Con este punto  $x$  fijo, se define

$$df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

asignando a cada punto  $h \in \mathbb{R}^n$  la derivada direccional  $df_x(h) \in \mathbb{R}^m$ . Se observa que esta función, que se le llama *derivada de  $f$  en  $x$*  y está definida sobre todo  $\mathbb{R}^n$ .

En Cálculo se prueba que la función derivada  $df_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación lineal (ver por ejemplo, [29] página 14, [3] página 314) y como transformación lineal  $df_x$  se puede representar como una matriz en términos de la bases usuales de  $\mathbb{R}^n$  y de  $\mathbb{R}^m$ ; en efecto si se escribe  $f$  como

$$f(y) = (f_1(y), \dots, f_m(y)),$$

entonces la matriz asociada a  $df_x$  es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Naturalmente, la definición debe exhibir por si misma la simplicidad de la regla de la cadena. Se supone que  $U \subset \mathbb{R}^n$  y  $V \subset \mathbb{R}^m$  son subconjuntos

abiertos, mientras que  $f : U \rightarrow V$  y  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  son funciones suaves. Entonces la *regla de la cadena* dice que para cada  $x \in U$

$$d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x. \quad (7)$$

Para una demostración de este resultado, ver por ejemplo [29] pág. 30.

Cuando el dominio de  $f$  no es un conjunto abierto, usualmente no se debe hablar de derivadas parciales en todo los puntos de su dominio; pero en tal caso, se adapta la situación a un abierto de un espacio mas general. Una función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida sobre un conjunto arbitrario  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  se le dice *suave* si se puede extender localmente a una función suave sobre un conjunto abierto; esto es, si alrededor de cada punto  $x \in X$  existe un conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  y una función suave  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $F = f$  sobre  $U \cap X$ . El término *local* sólo se refiere a una vecindad de un punto y es muy conveniente.

Recuerde que subconjuntos abiertos (relativos) a  $X$  son exactamente aquellos que se pueden escribir de la forma  $U \cap X$ , donde  $U$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Así la suavidad es una propiedad local.

Una función diferenciable  $f : X \rightarrow Y$  de subconjuntos de dos espacios Euclideos es un *difeomorfismo* si es uno a uno, sobre y la función inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  es también diferenciable y en tal caso  $X$  e  $Y$  se dicen *difeomorfos*, es decir, dos copias de un mismo espacio abstracto, en un espacio euclideo.

# Parte I

## Curvas Regulares





# Capítulo 1

## Curvas Regulares y Curvatura

### § 1.1 Introducción

Los problemas que generalmente la Geometría estudia son aquellos que determinan con exactitud elementos que distinguen unas figuras de otras, que en el caso de las curvas regulares, éstas se pueden determinar por sólo dos cantidades llamadas curvatura y torsión. La curvatura la trataremos ahora y la torsión se presentará en el siguiente capítulo.

Una curva parametrizada diferenciable o simplemente parametrizada es una función vectorial diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de un abierto  $I = (a, b)$  en  $\mathbb{R}^n$ , la variable en  $I$  recibe el nombre de parámetro.

### § 1.2 Curvas Regulares

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada diferenciable. Para cada  $t \in I$  donde  $\alpha'(t) \neq 0$  existe una recta bien definida, que contiene el punto  $\alpha(t)$  y el vector  $\alpha'(t)$ , esta recta recibe nombre de recta tangente de  $\alpha$  en  $t$ . Para el estudio de la geometría diferencial de curvas es importante que exista tal recta tangente en cualquier punto de la curva. Si  $\alpha'(t) = 0$  entonces se dice que  $t$  es un *punto singular* de  $\alpha$ .

**Definición 1.2.1** Una curva parametrizada (diferenciable)  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice regular si  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

De ahora en adelante se consideran curvas parametrizadas diferenciables regulares y por simplicidad, muchas veces, se omite la palabra diferenciable.

### § 1.3 Longitud de Arco

Sea  $t \in I = (a, b)$   $a < b$ , la longitud de arco de una curva parametrizada regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  desde el punto  $t_0$  es por definición:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt \quad (1.1)$$

donde  $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$ .

Como  $\alpha'(t) \neq 0$ , la longitud de arco  $s$  es una función diferenciable y si tiene por el Teorema Fundamental del Cálculo que

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|. \quad (1.2)$$

Puede suceder que el parámetro  $t$  ya sea la medida de longitud de arco desde algún punto. En este caso:

$$1 = \frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|$$

Esto es, el vector velocidad tiene longitud igual a 1. Recíprocamente, si :

$$\|\alpha'(t)\| = 1,$$

entonces:

$$s = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (1.3)$$

y  $t$  es entonces la medida de longitud de arco para  $\alpha$  medida desde algún punto  $t_0$ . En resumen, el parámetro  $t$  es la medida de longitud de arco desde algún punto si y sólo si  $\|\alpha'(t)\| = 1$ .

Para continuar veamos:

**Teorema 1.3.1** *Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular. Entonces existe una reparametrización por longitud de arco para  $\alpha$  definida por*

$$\beta(s) = \alpha(t(s))$$

donde  $t(s)$  es la función inversa de la función longitud de arco asociada con  $\alpha$ .

### Demostración

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, cualquier función de longitud de arco  $s$  de  $\alpha$  satisface:

$$\frac{ds}{dt}(t) = s'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt = \|\alpha'(t)\| \quad (1.4)$$

Puesto que  $\alpha$  es una curva regular  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t$  y por lo tanto  $\frac{ds}{dt}$  es siempre positiva. El Teorema de la Función Inversa del Cálculo en una variable implica que  $t \rightarrow s(t)$  posee inversa  $s \rightarrow t(s)$  y

$$\left. \frac{dt}{ds} \right|_{s(t)} = \frac{1}{\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t(s)}}$$

Ahora, se define  $\beta$  por  $\beta(s) = \alpha(t(s))$ . Entonces por la regla de la cadena:

$$\beta'(s) = \alpha'(t(s)) \frac{dt}{ds}.$$

Por lo tanto

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t(s))\| \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{ds} \|\alpha'(t(s))\| = \frac{dt}{ds}(s) \frac{ds}{dt}(t(s)) = 1$$

◇

**Ejemplo 1.3.1** *Obtener una reparametrización por longitud de arco de la hélice*

$$x(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

**Solución** Como

$$s = s(t) = \int_0^t \|x'(t)\| dt = \int_0^t (a^2 + b^2)^{1/2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t,$$

entonces la función inversa de  $s$  es

$$t = t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y por el teorema anterior la reparametrización de  $x$  por longitud de arco es

$$x(t(s)) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

**Ejemplo 1.3.2** Dada la circunferencia

$$x(t) = (a \cos \theta, b \sin \theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 0 < a.$$

Introducir a lo largo de ella el parámetro  $t = \tan \frac{\theta}{4}$ .

**Solución.**

Por las identidades relativas al ángulo medio se obtiene

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \\ &= \left( \cos^2 \frac{\theta}{4} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{4} \right)^2 - 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{4} \cos^2 \frac{\theta}{4} \\ &= \cos^4 \frac{\theta}{4} + \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{4} - 6 \cos^2 \frac{\theta}{4} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{4} \\ &= \frac{1}{\sec^4 \frac{\theta}{4}} + \frac{1}{\csc^4 \frac{\theta}{4}} - 6 \frac{\tan^2 \frac{\theta}{4}}{\sec^2 \frac{\theta}{4}}. \end{aligned}$$

Usando las identidades

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t \quad \text{y} \quad \cot^2 t + 1 = \csc^2 t$$

se obtiene

$$\cos \theta = \frac{1}{(t^2+1)^2} + \frac{t^4}{(t^2+1)^2} - \frac{6t^2}{(t^2+1)^2} = \frac{t^4 - 6t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \theta &= 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2[2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{4} (\cos^2 \frac{\theta}{4} - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{4})] \\
 &= 4 \operatorname{sen} \frac{\theta}{4} \cos^3 \frac{\theta}{4} - \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{4} \cos \frac{\theta}{4} \\
 &= \frac{4 \tan \frac{\theta}{4}}{\sec^4 \frac{\theta}{4}} - \frac{4 \tan^3 \frac{\theta}{4}}{\sec^4 \frac{\theta}{4}} \\
 &= \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} - \frac{t^3}{(t^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{4t(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x(t) = \left( a \frac{t^4 - 6t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}, a \frac{4t(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2} \right), \quad -1 \leq t \leq 1.$$

La exposición se simplifica cuando las curvas están parametrizadas por  $s$ , la longitud de arco, esto es, si  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada por la longitud de arco, entonces

$$\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = 1.$$

y en este caso, por simplicidad, se usará frecuentemente la notación  $\dot{\alpha}$  para indicar  $\frac{d\alpha}{ds}$  y cuando se usa otro parámetro, por ejemplo  $t$ , escribimos  $\alpha'$  para designar  $\frac{d\alpha}{dt}$ .

## § 1.4 Teoría Local de Curvas Regulares

Se presentan los resultados básicos de la curvatura de una curva que se usarán posteriormente. Para tal efecto, sea  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por la longitud de arco, Esto es,

$$\|\dot{\alpha}(s)\| = 1, \quad (\forall s \in I),$$

entonces  $\|\dot{\alpha}(s)\|$  mide la razón de cambio del ángulo que hacen los vectores tangentes vecinos con la tangente en  $s$ , ver Figura 1.1.

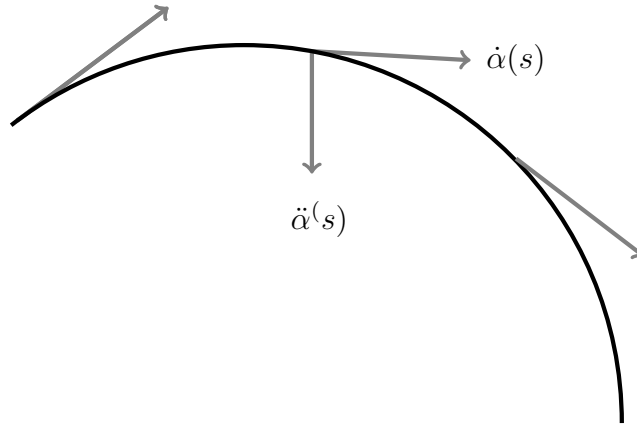


Figura 1.1

por lo tanto,  $\|\ddot{\alpha}(s)\|$  proporciona una medida de rapidez con que la curva se aleja de la tangente en  $s$ , en una vecindad de  $s$ .

**Definición 1.4.1** Sea  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por la longitud de arco  $s \in I$ : El número  $\|\ddot{\alpha}(s)\| = k(s)$  se llama curvatura de  $\alpha$  en  $s$ , y el vector  $\mathbf{k}(s) = \ddot{\alpha}(s) = k(s)n(s)$  con  $\|n\| = 1$  se llama vector curvatura.

Se debe observar que si  $\alpha$  está parametrizada por la longitud de arco, entonces  $\|\dot{\alpha}\| = 1$  (es costumbre omitir el parametro  $s$ ) y así  $\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 0$ , lo que muestra que  $n$  y  $\ddot{\alpha}$  son ortogonales a  $\dot{\alpha}$ .

**Ejemplo 1.4.1** Si  $\alpha$  es una línea recta, entonces

$$\alpha(s) = us + v$$

donde  $u$  y  $v$  son vectores constantes de  $\mathbb{R}^3$ .

Naturalmente,  $\|u\| = 1$  para que la recta esté parametrizada por la longitud de arco y así  $\ddot{\alpha} = 0$ .

Recíprocamente, si  $k = 0 = \|\ddot{\alpha}\|$ , entonces  $\ddot{\alpha} = 0$  y por simple integración  $\alpha(s) = us + v$  y la curva es una línea recta.

Note que por cambio de orientación el vector tangente cambia de dirección, esto es, si  $\beta(-s) = \alpha(s)$ , entonces

$$\frac{d\beta}{d(-s)} = \frac{d\alpha(s)}{d(-s)} = -\frac{d\alpha(s)}{d(s)},$$

por lo tanto,  $\ddot{\alpha}$  y la curvatura son invariantes bajo un cambio de orientación.

**Ejemplo 1.4.2** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  la circunferencia de radio 1, esto es,

$$\alpha(s) = (\cos s, \operatorname{sen} s), \quad s \in (-\epsilon, 2\pi + \epsilon),$$

entonces  $\ddot{\alpha}(s) = (-\cos s, -\operatorname{sen} s)$ , esto es,  $\|\alpha''(s)\| = 1 = k$ .

**Ejemplo 1.4.3** Calcular la curvatura de la hélice circular de ecuaciones

$$x = a \cos \frac{s}{c}, \quad y = a \operatorname{sen} \frac{s}{c}, \quad z = \frac{bs}{c}$$

con  $-\infty < s < \infty$ ,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Solución.** Como

$$\|(x, y, z)'\| = \left( \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \right)^{1/2} = 1,$$

entonces la hélice está parametrizada por la longitud de arco, luego.

$$(x, y, z)'' = \left( -\frac{a}{c} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{b}{c} \right)' = \left( -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, 0 \right),$$

así

$$k = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

## § 1.5 Expresión para la Curvatura

Se trata de encontrar una expresión para la curvatura cuando la curva  $\alpha$  está parametrizada con un parámetro arbitrario.

**Teorema 1.5.1** *Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada regular (no necesariamente por longitud de arco) y  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una reparametrización de  $\alpha(I)$  por la longitud de arco medida desde  $t_0 \in I$ . Sea  $t = t(s)$  la función inversa de la función longitud de arco  $s$ . Si  $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$ ,  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \alpha''$ , etc. Entonces la curvatura*

$$k(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}. \quad (1.5)$$

**Demostración** Como  $\alpha$  admite una reparametrización por la longitud de arco medida desde  $t_0 \in I$ ,  $t \rightarrow s(t)$ , con inversa  $s \rightarrow t(s)$ , ver Figura 1.2,

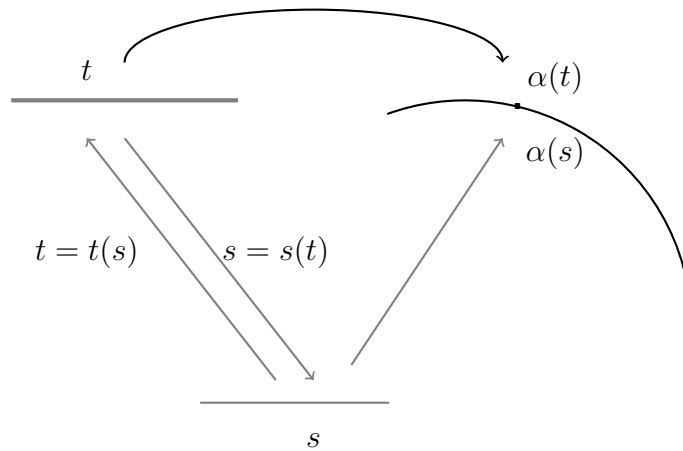


Figura 1.2

entonces se puede escribir  $\alpha(t) = \alpha(t(s)) = \alpha(s) = \alpha(s(t))$ , con lo que

$$\alpha(t) = \alpha(s(t)),$$



luego

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \frac{ds}{dt}, \quad \alpha'' = \frac{d}{dt} \left[ \dot{\alpha} \frac{ds}{dt} \right] + \dot{\alpha} \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{\alpha} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{\alpha} \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Como  $\ddot{\alpha} = kn$ , entonces

$$\alpha' \times \alpha'' = \left[ \dot{\alpha} \frac{ds}{dt} \right] \times \left[ \ddot{\alpha} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{\alpha} \frac{d^2s}{dt^2} \right] = k \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \dot{\alpha} \times n. \quad (1.6)$$

Como  $\|A \times B\| = 1$ , siempre que  $|A| = 1 = |B|$ , entonces

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = k \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 \quad (1.7)$$

Lo que muestra que

$$k(t) = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

✓

**Ejemplo 1.5.1** *Calcular la curvatura de la curva dada por*

$$\alpha(t) = (t^2, \cos t, \sin t), \quad 0 < t < \infty$$

**Solución.** Como

$$\alpha' = (2t, -\sin t, \cos t) \quad \text{y} \quad \alpha'' = (2, -\cos t, -\sin t),$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha' \times \alpha'' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t & -\sin(t) & \cos(t) \\ 2 & -\cos(t) & -\sin(t) \end{vmatrix} \\ &= (1.2t \sin t + 2 \cos t, -2t \cos t + 2 \sin t). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Con lo que

$$\|\alpha'\| = \sqrt{4t^2 + 1} \quad \text{y} \quad \|\alpha' \times \alpha''\| = \sqrt{4t^2 + 5}.$$

Por lo tanto,

$$k(t) = \frac{\sqrt{4t^2 + 5}}{(4t^2 + 1)^{3/2}}.$$

**Ejemplo 1.5.2** *Calcular la curvatura de la curva situada en el plano  $z = 0$  dada por  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .*

Solución.

Sea  $\alpha(t) = (x(t), y(t), 0)$ , entonces

$$\alpha' = (x', y', 0), \quad \alpha'' = (x'', y'', 0) \quad \text{y} \quad \|\alpha'\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2},$$

por lo tanto,

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x'y'' - y'x''),$$

así que,

$$\|\alpha' \times \alpha''\| = |x'y'' - y'x''|,$$

con lo que,

$$k(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

**Ejemplo 1.5.3** *Calcular la curvatura de la curva dada en forma de coordenadas polares  $\rho = \rho(\theta)$ .*

Solución.

Derivando con respecto a  $\theta$  las fórmulas de cambio de variables

$$x = \rho(\theta) \cos \theta, \quad y = \rho(\theta) \sin \theta$$

implican

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta \quad \text{y} \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta + \rho \cos \theta$$

y volviendo a derivar

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cos \theta - 2\frac{d\rho}{d\theta} \sin \theta - \rho \cos \theta$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \sin \theta + 2\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \sin \theta.$$

Como

$$k(t) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

entonces

$$\begin{aligned} |\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}| &= (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)(\rho'' \sin \theta + 2\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) - \\ &\quad (\rho' \sin \theta - \rho \cos \theta)(\rho'' \cos \theta + 2\rho' \sin \theta - \rho \cos \theta) \\ &= \rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho'' \end{aligned}$$

y

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^2 + (\rho' \sin \theta - \rho \cos \theta)^2 = (\rho')^2 + \rho^2,$$

luego

$$k = \frac{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}.$$

## § 1.6 Ejercicios

1. Calcular la curvatura de

$$a) \quad \gamma(t) = \left( \frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right)$$

$$b) \quad \gamma(t) = \left( \frac{4}{3} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$$

$$b) \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^2 t, 0)$$

en donde el parámetro tenga sentido.

2. Calcular la curvatura de

(a) Cicloide:

$$\alpha(\theta) = (a\theta - a\operatorname{sen}\theta, a - a\operatorname{sen}\theta)$$

con  $\theta \in \mathbb{R}$

(b) Epicicloide:

$$\alpha(\theta) = (4\cos\theta - \cos 4\theta, 4\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 4\theta)$$

con  $0 < \theta < 2\pi$ .

3. Probar que si todas las rectas tangentes a una curva  $\alpha = \alpha(s)$ , de clase  $\mathcal{C}^2$ , pasan por un punto fijo, la curva es una recta.

4. Calcular la expresión de la curvatura de la curva, situada en el plano  $z = 0$ , cuando su expresión viene dada en

(a) forma explícita  $y = f(x)$ ,

(b) forma polar  $r = 3\operatorname{sen}\theta$ .

5. Sea la curva  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $z = 0$  de clase  $\mathcal{C}^2$ , donde  $s$  es la longitud de arco. Probar que la curvatura  $k$  verifica

$$k^2 = (x'y'' - y'x'')^2.$$

6. Dada la curva  $x^4 - 2x^2y^2 - xy^3 - x^2 + y^2 + xy = 0$ ,  $z = 0$ , hallar la curvatura en  $x = 1$  y ordenada racional.

7. Se considera una curva de clase  $\mathcal{C}^2$  definida en forma implícita por  $F(x, y) = 0$ . Encontrar una expresión para la curvatura de dicha curva.

## Capítulo 2

# Torsión y Fórmula de Frenet-Serret

### § 2.1 Introducción

Como en el caso de la curvatura de una curva, la torsión es otro de los problemas que la Geometría estudia para determinar con exactitud las propiedades de las curvas regulares. Se empieza el estudio con curvas regulares parametrizadas por la longitud de arco y luego se pasa a parámetros arbitrarios.

La exposición se simplifica cuando las curvas están parametrizadas por  $s$ , la longitud de arco, es decir, si  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada por la longitud de arco, entonces

$$\left\| \frac{d\alpha}{ds} \right\| = 1.$$

La torsión se trata en este capítulo y se empieza el estudio con curvas regulares parametrizadas por la longitud de arco y luego se pasa a parámetros arbitrarios.

Por simplicidad, se usará frecuentemente la notación  $\dot{\alpha}$  para indicar  $\frac{d\alpha}{ds}$  y cuando se usa otro parámetro, por ejemplo  $t$ , escribimos  $\alpha'$  para designar  $\frac{d\alpha}{dt}$ .

## § 2.2 Plano Osculador y Torsión

Considere de nuevo  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular parametrizada por la longitud de arco. En los puntos donde  $k(s) \neq 0$  el vector unitario  $n(s)$  en dirección de  $\ddot{\alpha}(s)$  está bien definida mediante la ecuación

$$\ddot{\alpha} = kn \quad (2.1)$$

como  $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 1$ , entonces  $\langle \ddot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 0$ . Lo que muestra que  $\ddot{\alpha}$  es normal a  $\dot{\alpha}$ . Por lo tanto,  $n$  es normal a  $\dot{\alpha}$  y recibe el nombre de **vector normal** de  $\alpha$  en  $s$ . El plano determinado por el vector tangente unitario y el vector normal, es decir por  $\dot{\alpha}$  y  $n$ , recibe el nombre de **plano osculador** de  $\alpha$  en  $s$ , ver Figura 2.1.

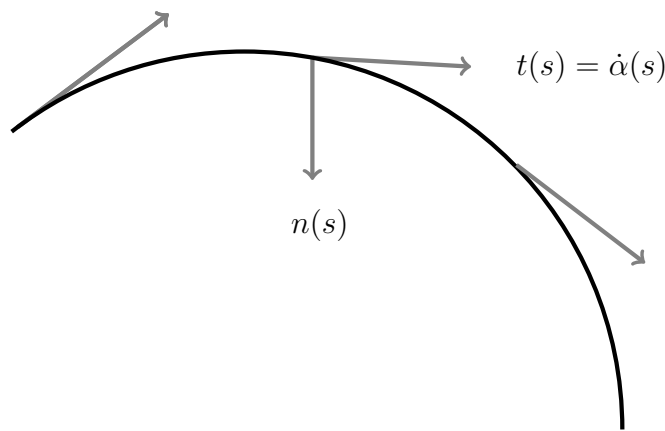


Figura 2.1

Un plano donde  $k = 0$  el vector normal (y por lo tanto, el plano osculador) no está definido. En lo que sigue, las curvas serán parametrizadas por la longitud de arco sin puntos singulares de orden 1 (esto es,  $\ddot{\alpha} \neq 0$ ). Se denota con

$$t = \dot{\alpha} \quad (2.2)$$

el vector tangente unitario de  $\alpha$  en  $s$  (Observe que se está utilizando a  $t$  de dos maneras diferentes una como parámetro y ahora como vector tangente unitario). Así

$$\dot{t} = kn. \quad (2.3)$$

El vector

$$b = t \times n \quad (2.4)$$

tiene las siguientes propiedades:

- (a) Como  $b$  se expresa como un determinante, es normal a  $t$  y a  $n$ , por lo tanto, al plano osculador y recibe el nombre de **vector binormal** en  $s$ , ver Figura 2.2

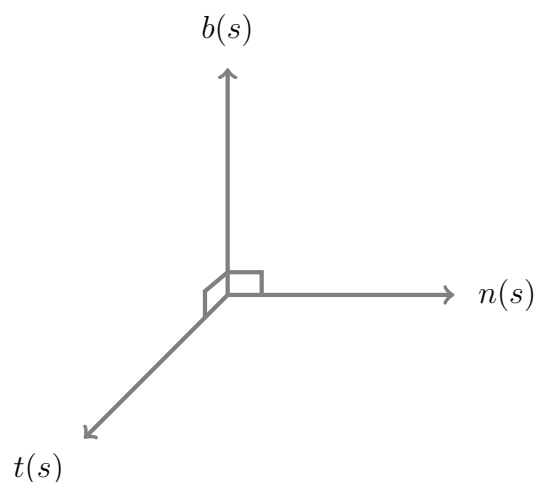


Figura 2.2

- (b) La identidad de Lagrange implica

$$\|b\|^2 = \|t \times n\|^2 = \|t\|^2\|n\|^2 - \langle t, n \rangle = 1 \quad (2.5)$$

- (c) Como  $\|b\|^2 = 1$ , entonces  $\langle b, b \rangle = 1$  y así

$$\langle \dot{b}, b \rangle = 0,$$

con lo que  $\dot{b} \perp b$ .

(d) Puesto que

$$\dot{b} = \dot{t} \times n + t \times \dot{n} = t \times \dot{n}, \quad (2.6)$$

entonces  $\dot{b} \perp t$ , ver Figura 2.3.

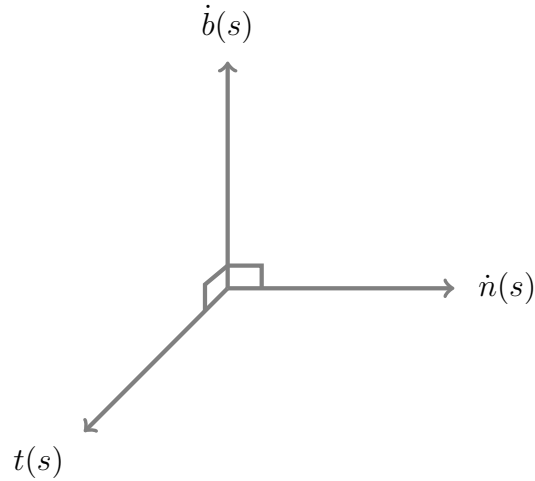


Figura 2.3

(e) Como  $n \perp t$  y  $b = t \times n$ , se obtiene que

$$\{t, n, b\}$$

forman una base de  $\mathbb{R}^3$  para cada  $s$  anclado en  $\alpha(s)$ , es decir, espacio vectorial libre del origen, con sus operaciones usuales, por lo tanto, al expresar

$$\dot{b} = a_1 n + a_2 t + a_3 b$$

resulta (tomando producto interior con  $n$ ,  $t$  y  $b$ ):

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle \dot{b}, n \rangle \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned}$$



con lo que  $\dot{b}$  es paralelo a  $n$  y entonces se escribir

$$\dot{b} = \langle \dot{b}, n \rangle = -\tau n$$

Como  $\|b\| = 1$  para todo  $s$ , entonces la longitud  $\|\dot{b}\|$  mide la razón de cambio del plano osculador, en una vecindad de  $s$ , con respecto al plano osculador en  $s$ . Así que  $\|\dot{b}\|$  mide que tan rapido la curva se aleja del plano osculador en  $s$ , en una vecindad de  $s$ . Esto proporciona la definición siguiente.

**Definición 2.2.1** Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizada por la longitud de arco, tal que  $\dot{\alpha} \neq 0$ ,  $s \in I$ . El número  $\tau$  definida por  $\dot{b} = -\tau n$  se llama **torsión** de  $\alpha$  en  $s$ .

**Ejemplo 2.2.1** Por definición, la torsión de una curva regular contenida en  $\mathbb{R}^2$  es cero.

**Ejemplo 2.2.2** Sea  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva regular de clase  $\mathcal{C}^3(I)$ . Si  $n$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $\alpha$ , entonces  $\alpha$  es plana si y sólo si  $\tau = 0$ .

**Solución** Si  $\alpha$  es una curva plana, es decir  $\alpha(I)$  está contenida en un plano, entonces el plano de la curva coincide con el plano osculador y así  $\tau = 0$ .

Recíprocamente, si  $\tau = 0$  ( $k \neq 0$ ) y usando parametrización por longitud de arco, entonces

$$\dot{b} = \tau n = 0n = 0$$

con lo que  $b(s) = b_0$ , para todo  $s$  (es decir, constante en  $\mathbb{R}^3$ ), por lo tanto

$$\langle \alpha(s), b_0 \rangle' = \langle \dot{\alpha}(s), b_0 \rangle.$$

Como  $\dot{\alpha}(s) \perp b(s) = b_0$ , entonces  $\langle \dot{\alpha}, b_0 \rangle = 0$ . Por integración

$$\langle \alpha(s), b_0 \rangle = c \text{ (constante).}$$

Esto es,  $\alpha = \alpha(s)$  es una curva plana situada en el plano  $\langle \alpha, b_0 \rangle = c$  (constante). En particular,  $\alpha = \alpha(s)$  está en su plano osculador.

**Ejemplo 2.2.3** Calcular la torsión de la hélice vertical circular de ecuación

$$\alpha(s) = \left( a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{d}{c}s \right), \quad c = \sqrt{a^2 + d^2}$$

con  $s \in \mathbb{R}$ .

### Solución

Claramente  $\alpha$  está parametrizada por longitud de arco.

$$t = \dot{\alpha} = \left( -\frac{a}{c} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{d}{c} \right), \quad \ddot{\alpha} = \left( -\frac{a}{c^2} \cos \frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, 0 \right).$$

También,

$$n = \left( -\cos \frac{s}{c}, -\operatorname{sen} \frac{s}{c}, 0 \right)$$

así que,

$$b = \dot{\alpha} \times n = \left( \frac{d}{c} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, -\frac{d}{c} \cos \frac{s}{c}, \frac{a}{c} \right),$$

con lo que,

$$\dot{b} = \left( \frac{d}{c^2} \cos \frac{s}{c}, \frac{d}{c^2} \operatorname{sen} \frac{s}{c}, 0 \right) = -\frac{d}{c^2} n,$$

por lo tanto,

$$\tau = \frac{d}{c^2} = \frac{d}{a^2 + b^2}$$

En contraste con la curvatura de una curva, la torsión de una curva puede ser positiva o negativa.

Note que al cambiar la orientación, el vector binormal cambia de signo ya que  $b = t \times n$ . Sigue entonces que  $\dot{b}$  y por lo tanto, la torsión permanece invariante bajo cambio de orientación.

## § 2.3 Fórmula de Frenet-Serret

A cada valor de el parámetro  $s$ , se le ha asociado tres vectores ortogonales entre si y unitarios:

$$t, \quad n, \quad b$$

donde

1.  $t = \dot{\alpha}$ ,  $\ddot{\alpha} = k n$  y  $b = t \times n$ . Estos tres vectores ortogonales unitarios así formados se conocen como **triedro de Frenet-Serret** en  $s$ .

2.  $\dot{t} = k n$ ,  $\dot{b} = -\tau n$

3.  $b \times t = n$ , ya que

$$b \times t = (t \times n) \times t = -t \times (t \times n) = -[\langle t, n \rangle t - \langle t, t \rangle n] = n$$

4.  $b \times n = -t$ , ya que

$$b \times n = (t \times n) \times n = -n \times (t \times n) = -[\langle n, n \rangle t - \langle n, t \rangle n] = -t$$

Otra información geométrica local la proporciona el cálculo de  $n'$ . Esto es, como  $n = b \times t$ , entonces en el punto  $s$  se tiene

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \dot{b} \times t + b \times \dot{t} = -\tau (n \times t) + k (b \times n) \\ &= \tau b + k(-t) = -kt + \tau b \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} \dot{t} &= & k n \\ \dot{n} &= & -k t & + & \tau b \\ \dot{b} &= & & -\tau n \end{cases} \quad (2.7)$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{n} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

se llama FÓRMULA DE FRENET-SERRET (por conveniencia se ha omitido la letra  $s$ ).

Se continúa entonces con el estudio de la torsión para posteriormente poder estudiar de manera directa e inversa las fórmulas de Frenet.

## § 2.4 Expresiones de la Torsión

**Teorema 2.4.1** (Torsión en función del parámetro longitud de arco.)

Sea

$$\alpha : I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad a < b$$

una curva parametrizada por la longitud de arco. Entonces:

$$\tau = \frac{\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha} \rangle}{\langle \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle}$$

**Demostración** Se va a calcular  $\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha} \rangle$ . Como  $\ddot{\alpha} = kn$ , entonces

$$\ddot{\alpha} = \dot{k}n + k\dot{n} = \dot{k}n + k(-kt + \tau b) = \dot{k}n - k^2t + k\tau b.$$

También,

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha} &= (k n) \times (\dot{k} n - k^2 t + k\tau b) \\ &= 0 - k^3(n \times t) + k^2\tau(n \times b) \\ &= -k^3(n \times t) + k^2\tau(n \times b). \end{aligned}$$

Como  $n \times t = -b$  y  $n \times b = t$ , entonces

$$\ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = k^3b + k^2\tau t,$$

y

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha} \rangle &= \langle t, k^3b + k^2\tau t \rangle \\ &= 0 + \langle t, k^2\tau t \rangle \\ &= k^2\tau \langle t, t \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\ddot{\alpha} = kn$ , entonces  $\langle \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle = k^2$  y así

$$\tau = \frac{\langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \times \ddot{\alpha} \rangle}{\langle \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha} \rangle}.$$



**Teorema 2.4.2 (La torsión en función de cualquier parametro)**

Si  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $t$  cualquier parámetro y  $\alpha \in \mathcal{C}(I)$ , entonces se verifica que

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} \quad (2.8)$$

**Demostración** Como

$$\alpha' = \dot{\alpha} \frac{ds}{dt}, \quad \alpha'' = \ddot{\alpha} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{\alpha} \frac{d^2s}{dt^2},$$

entonces

$$\alpha' \times \alpha'' = (\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \left( \frac{ds}{dt} \right)^3.$$

Puesto que  $\ddot{\alpha} = kn$ , entonces

$$\alpha' \times \alpha'' = (\dot{\alpha} \times n)k \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 = (t \times n)k \left( \frac{ds}{dt} \right)^3$$

Calculando  $\alpha'''$ ,

$$\begin{aligned} \alpha''' &= \frac{d \left( \ddot{\alpha} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \dot{\alpha} \frac{d^2s}{dt^2} \right)}{dt} \\ &= \ddot{\alpha} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 2\ddot{\alpha} \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \ddot{\alpha} \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \dot{\alpha} \frac{d^3s}{dt^3} \\ &= \ddot{\alpha} \left( \frac{ds}{dt} \right)^3 + 3\ddot{\alpha} \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} + \dot{\alpha} \frac{d^3s}{dt^3} \end{aligned}$$

y como  $\ddot{\alpha} = kn$ , y  $\dot{\alpha} \times n \perp \dot{\alpha}$ , entonces

$$\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = \langle t \times n, \ddot{\alpha} \rangle k \left( \frac{ds}{dt} \right)^6. \quad (2.9)$$

Ahora se calcula  $\ddot{\alpha}$ , en efecto (en variable  $s$ )

$$\ddot{\alpha} = \frac{d \left( \frac{d^2\alpha}{ds^2} \right)}{ds} = \frac{d(kn)}{ds} = \dot{k}n + k\dot{n}.$$

De  $b \times t = n$ ,  $\dot{n} = \dot{b} \times t + b \times \dot{t}$ , se tiene que

$$\ddot{\alpha} = \dot{kn} + k \left[ \dot{b} \times t + b \times \dot{t} \right].$$

Puesto que  $\dot{b} = -\tau n$ ,  $n = b \times t$ ;  $\dot{t} = kn$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= k [b \times (kn) + (-\tau n) \times t] + \dot{kn} \\ &= k^2(b \times n) - k\tau(n \times t) + \dot{kn} \\ &= k^2(b \times n) + k\tau(t \times n) + \dot{kn} \end{aligned}$$

así que  $b \times n = -t$ , implica

$$\ddot{\alpha} = -k^2t + k\tau b + \dot{kn}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle &= \langle t \times n, -k^2t + k\tau b + \dot{kn} \rangle k \left( \frac{ds}{dt} \right)^6 \\ &= \langle b, b \rangle (k^2) \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^6. \end{aligned}$$

Esto muestra que

$$\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = k^2 \tau \left( \frac{ds}{dt} \right)^6$$

y como  $\frac{ds}{dt} = \|\alpha'\|$ , se obtiene

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{k^2 \|\alpha'\|^6}.$$

Como

$$k^2 = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}{\|\alpha'\|^6},$$

se obtiene

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.$$



**Ejemplo 2.4.1** *Calcular la torsión de la hélice dada por*

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad -\infty < t < \infty.$$

**Solución:** Como

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= (a \cos t, a \sin t, bt), & \alpha' &= (-a \sin t, a \cos t, b) \\ \alpha'' &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), & \alpha''' &= (a \sin t, -a \cos t, 0), \end{aligned}$$

entonces

$$\alpha' \times \alpha'' = (ab \sin t, -ab \cos t, a^2)$$

y por lo tanto

$$\|\alpha' \times \alpha''\|^2 = a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4 = a^2(a^2 + b^2).$$

También

$$\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = a^2 b \sin^2 t + a^2 b \cos^2 t = a^2 b.$$

Con lo que

$$\tau = \frac{a^2 b}{a^2(a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

**Teorema 2.4.3 Teorema Fundamental de la Teoría Local de Curvas** *Dada las funciones diferenciables  $k = k(s)$  y  $\tau = \tau(s)$ ,  $s \in I$ , existe una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $s$  es la longitud de arco,  $k$  es la curvatura y  $\tau$  es la torsión de  $\alpha$ . Además cualquier curva  $\bar{\alpha}$ , que satisface las mismas condiciones, difiere de  $\alpha$  por un movimiento rígido; esto es, existe una transformación lineal ortogonal  $\rho$  de  $\mathbb{R}^3$  con determinante positivo y un vector  $c$  tal que*

$$\bar{\alpha} = \rho \circ \alpha + c$$

Una demostración completa usa el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, además que usa otros resultados de Geometría de superficies bi-dimensional. Por tal motivo la prueba no se presentará en este momento. Ver, por ejemplo [7], página 309.

NOTA. En el caso particular de una curva plana  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , siempre es posible asociar un signo a la curvatura  $k$ ; para esto, sea  $\{e_1, e_2\}$  una base para  $\mathbb{R}^2$ , por ejemplo  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ ; y se define el vector normal  $n(s)$ ,  $s \in I$ , de tal manera que las bases  $\{t(s), n(s)\}$  y  $\{e_1, e_2\}$  tengan la misma orientación. Entonces la curvatura se define por

$$\frac{dt}{ds} = k n$$

y así puede ser positiva o negativa. Trivialmente,  $|k|$  coincide con la definición anterior y  $k$  cambia de signo cuando se cambia la orientación de  $\alpha$  o de  $\mathbb{R}^2$ .

## § 2.5 Ejercicios

1. Demostrar que la curva

$$\gamma(t) = \left( \frac{1+t^2}{t}, t+1, -\frac{1-t}{t} \right)$$

es planar.

2. Probar que si todas las tangentes a una curva son paralelas a un plano, entonces la curva es planar.
3. Demostrar que en las ecuaciones de Frenet - Serret,  $t$ ,  $n$  y  $b$  son ortogonales uno al otro.
4. Sea  $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

- (a) Reparametrizar  $\gamma$  por longitud de arco.
- (b) Calcular la curvatura, torsión y el plano osculador en cada punto de  $\gamma$ .
- (c) Sea  $\gamma(t)$  una curva con velocidad unitaria en  $\mathbb{R}^3$  y se asume que la curvatura  $k(t)$  es no-cero para todo  $t$ . Se define una nueva curva  $\beta$  por

$$\beta(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt}.$$



---

Demostrar que  $\beta$  es regular y que, si  $s$  es la longitud de arco, parámetro de  $\beta$ , entonces

$$\frac{ds}{dt} = k.$$

Probar que la curvatura de  $\beta$  es

$$\left(1 + \frac{\tau}{k^2}\right)^{1/2}.$$

5. Se considera la curva definida en forma implícita por  $F(x, y, z) = 0$   $G(x, y, z) = 0$ . Hallar la expresión de la recta tangente en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ .
6. Hallar la recta tangente y el plano normal a la curva de ecuaciones  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ,  $9x^2 + 4y^2 - 13z^2 = 0$  en el punto  $(1, 1, 1)$ .
7. Hallar la ecuación del plano osculador de la curva

$$x = \sinh t, \quad y = \cosh t, \quad z = 4t$$

en un punto genérico a ella.

# Parte II

## Superficies Regulares

# Capítulo 3

## Superficies y Ejemplos Elementales

### § 3.1 Introducción

Intuitivamente, se considera una superficie, como un conjunto de puntos del espacio que localmente es como una vecindad del plano. Esto ocurre cuando la superficie es localmente la imagen de una función suficientemente suave, es decir, regular desde una vecindad de un punto del plano en puntos del espacio. Como lo que se necesita es extender y aplicar a superficies los métodos del Cálculo, se supone que la función es de clase  $\mathcal{C}^\infty(U)$ , para algún abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  y además que la superficie tiene en cada punto un plano tangente y por lo tanto, el rango de la matriz jacobiana de la función es dos. Intuitivamente, de las superficies que se desean y más elementales son las imágenes de funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty$  estudiadas en los cursos de Cálculo.

### § 3.2 Imagen de una Función Diferenciable.

Sea  $U \neq \emptyset$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$  y

$$M = \text{Im}(F) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$$

la imagen de  $f$ . Entonces se tiene el par  $(U, \alpha)$  donde  $\alpha$  es la función  $\alpha : U \rightarrow M$ , definida por  $\alpha(x, y) = (x, y, f(x, y))$  y trivialmente satisface

- (a)  $\alpha$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty(U)$ ;
- (b)  $\alpha$  es un homeomorfismo. Esto es  $\alpha^{-1} : M \rightarrow U$ , dada por

$$\alpha^{-1}(x, y, f(x, y)) = (x, y)$$

también es biyectiva y continua;

- (c) Para todo  $q = (x, y) \in U$   $df_q$  es inyectiva.

### § 3.3 Parametrizaciones Locales

Se hace necesario presentar formalmente las observaciones anteriores (a), (b) y (c) mediante la siguiente

**Definición 3.3.1 Parametrización Local.** *Sea  $U$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^2$ , y  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ , la función*

$$\alpha : U \rightarrow M, \quad \text{o el par } (U, \alpha)$$

*se llama una parametrización local de  $M$  si*

- (a)  $\alpha$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty(U)$ ;
- (b)  $\alpha$  es un homeomorfismo. Esto es  $\alpha$  es inyectiva, continua con inversa continua;
- (c) para todo  $q = (x, y) \in U$   $df_q$  es inyectiva.

$\alpha(U)$  recibe el nombre de VENCIDAD COORDENADA y al par  $(U, \alpha)$  se le llama una parametrización local de  $M$  o simplemente una parametrización de  $M$ .

### 3.3.1 Esfera $S^2$ .

Sea

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A continuación se usarán coordenadas rectangulares para mostrar que todo punto de  $S^2$  se puede cubrir mediante la imagen de una parametrización de  $S^2$ .

En efecto, primero, verifiquemos que  $\alpha_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida con

$$\alpha_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad (x, y) \in U_1$$

donde  $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  es una parametrización de  $S^2$ , por ser la imagen de una función  $\mathcal{C}^\infty(U)$ .

Se puede ahora terminar de cubrir la esfera  $S^2$  con parametrizaciones similares como sigue

$$\alpha_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}), \quad (x, y) \in U_1$$

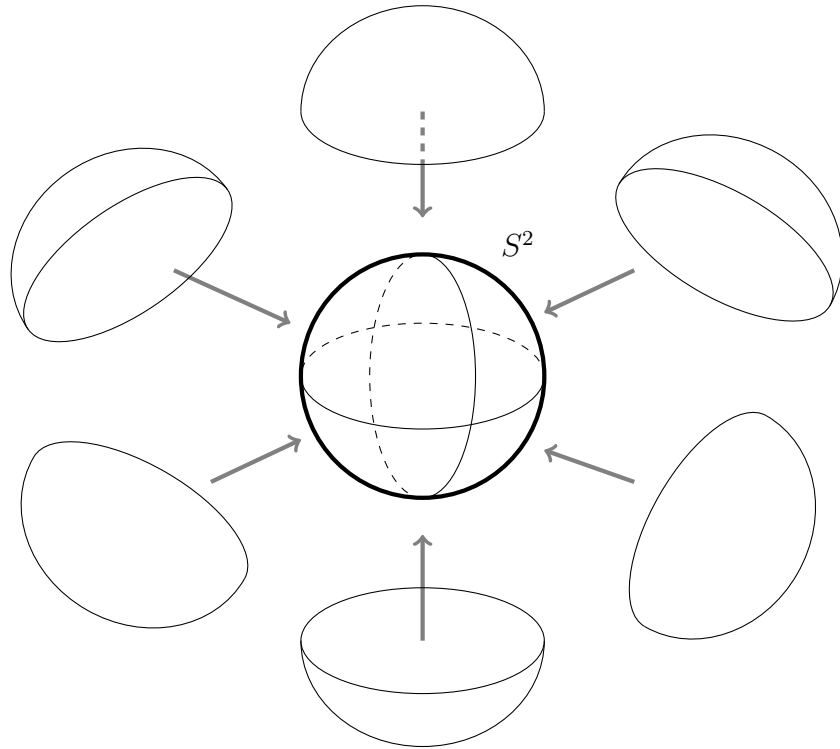
entonces  $\alpha_1(U_1) \cup \alpha_2(U_1)$  cubre  $S^2$  menos el ecuador y usando los planos  $xz$  y  $yz$  se pueden definir las siguientes parametrizaciones

$$\alpha_3(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z), \quad \alpha_4(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$$

Con  $U_2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 < 1\}$  y

$$\alpha_5(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z), \quad \alpha_6(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z)$$

Con  $U_3 = \{(y, z) : y^2 + z^2 < 1\}$ . Estas 6 parametrizaciones cubren completamente a  $S^2$ , ver Figura 3.1.

Figura 3.1: Atlas de  $S^2$ 

### § 3.4 Superficies Regulares

El ejemplo anterior, permite hacer la siguiente

**Definición 3.4.1** *Se dice que un conjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si para cada punto  $p \in M$  existe un conjunto abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^3$  y una función  $\alpha : U \rightarrow V \cap M$  de un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $V \cap M \subseteq \mathbb{R}^3$ , ver Figura 3.2. tal que*

- (a)  $\alpha$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty(U)$ ;
- (b)  $\alpha$  es un homeomorfismo. Esto es  $\alpha$  es inyectiva, continua con inversa continua;

(c) Para todo  $q = (x, y) \in U$   $df_q$  es inyectiva.

Es decir, un conjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si cada punto  $p \in M$  admite una parametrización de clase  $\mathcal{C}^\infty$  de la forma (Figura 3.2)

$$\alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

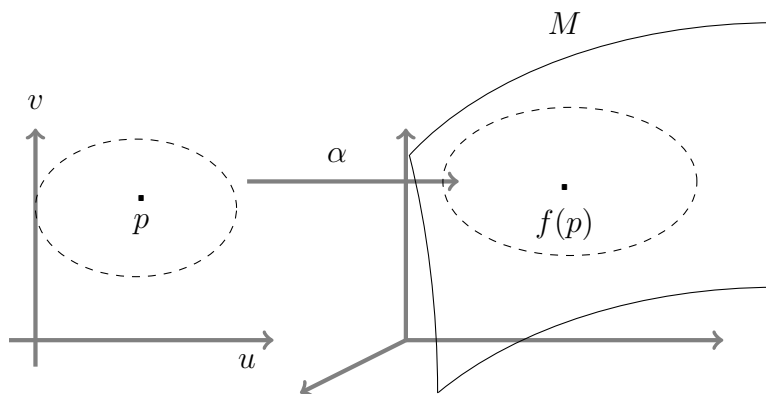


Figura 3.2

### 3.4.1 Ejemplos

- (a) Cada función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$  en un conjunto abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , la gráfica de  $f$ , proporciona una superficie regular.
- (b)  $S^2$  es una superficie regular.

### 3.4.2 Observaciones.

- (a) En la definición parametrización la condición (c) es equivalente a que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \times \frac{\partial \alpha}{\partial v} \neq 0, \quad (3.1)$$

ya que para  $\alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$   $(x, y) \in U$ , la  $d\alpha_q$  es 1-1 si y sólo si los vectores columnas de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

son linealmente independientes (imagen directa e inversa de una transformación lineal  $1 - 1$ ), equivalentemente, a que el producto vectorial sea no nulo.

(b) La ecuación (3.1) es equivalente a  $(q = (x, y) \in U)$

$$\text{Rango}(df_q) = \text{Rango} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = 2 \quad (3.3)$$

(c) La ecuación (3.1) también es equivalente a que uno de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

es no nulo.

A las variables  $u$  y  $v$  se las denomina parámetros,  $\alpha(U)$  recibe el nombre de una vecindad coordinada, el par  $(U, \alpha)$  es una parametrización y el par  $(\alpha(U), \alpha^{-1})$  recibe el nombre carta.

Un Lema que en ocasiones es de gran utilidad es el siguiente



**Lema 3.4.1** Sea  $p$  un punto de una superficie regular  $M$  y sea

$$\alpha : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

una función con  $p \in \alpha(U)$  que satisface las condiciones (a) y (c) de la definición de superficie regular. Si  $\alpha$  es 1-1, entonces  $\alpha^{-1}$  es continua.

**Demostración** Se escribe

$$\alpha(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

y sea  $q \in U$ , por la condición (a) y (c), se puede admitir, intercambiando los ejes coordenados si es necesario, que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

Sea  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Entonces  $\pi \circ \alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y

$$J(\pi \circ \alpha) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 \quad (3.5)$$

y por el teorema de la función inversa, se obtienen vecindades  $V_1$  de  $q$  en  $U$  y  $V_2$  de  $\pi \circ \alpha(q)$  en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\pi \circ \alpha : V_1 \rightarrow V_2$  es un difeomorfismo sobre  $V_2$

Se asume que  $\alpha$  es 1-1. Entonces restringido a  $\alpha(V_1)$  y como:

$$\alpha^{-1} = (\pi \circ \alpha)^{-1} \circ \pi,$$

entonces  $\alpha^{-1}$  es continua como composición de funciones continuas. Como  $q$  es arbitrario,  $\alpha^{-1}$  es continua en  $\alpha(U)$ .  $\checkmark$

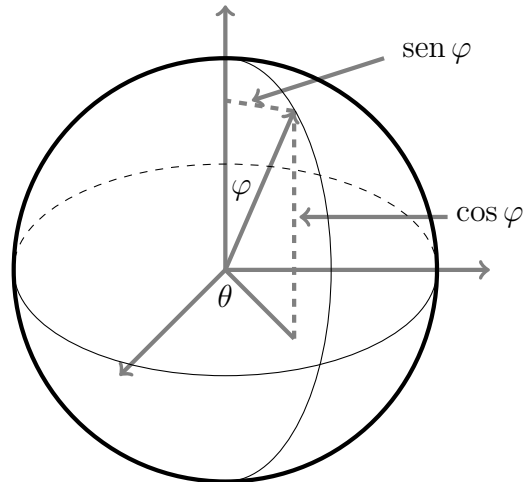
**Ejemplo 3.4.1 (Coordenada Esféricas de  $S^2$ ).** Considere

$$S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

ver Figura 3.3 y

$$\alpha(\theta, \varphi) = (\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, \cos \varphi)$$

se buscará un dominio adecuado para  $\alpha$  de tal manera que se obtenga una parametrización local para  $S^2$ .

Figura 3.3 para  $S^2$ 

La primera condición (a) de superficie regular se satisface de manera inmediata. De la condición (c) se observa que

$$\begin{aligned}
 |\alpha_\theta \times \alpha_\varphi| &= \left| \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\text{sen } \varphi \text{ sen } \theta & \text{sen } \varphi \text{ cos } \theta & 0 \\ \text{cos } \varphi \text{ cos } \theta & \text{cos } \varphi \text{ sen } \theta & -\text{sen } \varphi \end{vmatrix} \right| \\
 &= |(-\text{cos } \theta \text{ sen}^2 \varphi, -\text{sen } \theta \text{ sen}^2 \varphi, -\text{sen } \varphi \text{ cos } \varphi)| \\
 &= \sqrt{\text{cos}^2 \theta \text{ sen}^4 \varphi + \text{sen}^2 \theta \text{ sen}^4 \varphi + \text{sen}^2 \varphi \text{ cos}^2 \varphi} \\
 &= \sqrt{\text{sen}^4 \varphi + \text{sen}^2 \varphi \text{ cos}^2 \varphi} \\
 &= |\text{sen } \varphi|
 \end{aligned}$$

que es cero en  $\varphi = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Esto es,  $\alpha$  es no-regular a lo largo de las rectas  $\varphi = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Entonces para que  $\alpha$  sea una parametrización local de  $S^2$  sólo se necesita redefinir bien su dominio para asegurar que sea 1-1 y entonces aplicar el Lema anterior. Pero, para que esto suceda se toma

$$U = \{(\theta, \varphi) : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$$

Además, obsérvese que  $\alpha(U)$  cubre a  $S^2 - C$  donde  $C$  es la semi-circunferencia

$$C = \{(x, y, z) \in S^2 : y = 0, x \geq 0, -1 < z < 1\}.$$

Se nota que  $\alpha(\theta, \varphi)$  sólo omite una semi-circunferencia de  $S^2$  (incluyendo los dos polos) y que  $S^2$  se puede cubrir con dos vecindades coordenadas de este tipo. El par  $(S^2, \alpha)$  también recibe el nombre de coordenadas esféricas de  $S^2$ .

El siguiente ejemplo es muy importante, son muchas las superficies que son casos particulares, como la esfera  $s^2$ , el elipsoide, el cilindro entre muchos otros.

**Ejemplo 3.4.2 (Superficie de Revolución)** Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  el conjunto obtenido al rotar una curva plana regular  $C$  (generatriz), alrededor de un eje, llamado eje de rotación, que se encuentra en el mismo plano de la curva y no interseca la curva.

Se tomará el plano  $xz$  como plano de la curva y el eje  $z$  como eje de rotación, ver Figura 3.4. Sea

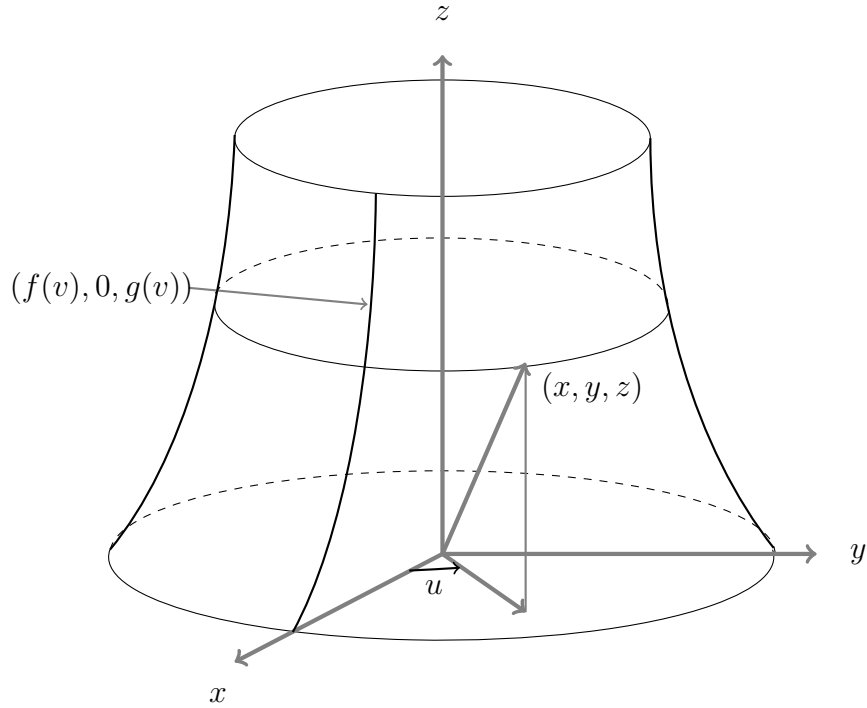


Figura 3.4: Superficie de revolución

Si  $(x, y, z) \in M$ , entonces haciendo uso de una matriz de rotación alrededor del eje  $z$  sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj), ver por ejemplo [4] página 407 o [15] página 399, 400; tenemos

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v) \\ 0 \\ g(v) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

con lo que,

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \operatorname{sen} u, \quad z = g(v),$$

con  $0 < u < 2\pi, v \in (a, b)$ . Y si

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, a < v < b\},$$

$$\alpha(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad \forall (u, v) \in U. \quad (3.7)$$

La idea ahora es demostrar que  $(U, \alpha)$  es una parametrización local de la superficie de revolución  $M$ . En efecto,

1. claramente  $\alpha$  es diferenciable,
2. la diferencial de  $\alpha$ ,  $d\alpha$  es inyectiva. Pues,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right\| &= \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -f(v) \sin u & f(v) \cos u & 0 \\ f'(v) \cos u & f'(v) \sin u & g'(v) \end{vmatrix} \right\| \\ &= \left\| \left( f(v)g'(v) \cos u, f(v)g'(v) \sin u, f'(v)f(v) \right) \right\| \\ &= \sqrt{[f(v)g'(v)]^2 + [f'(v)f(v)]^2} \\ &= |f(v)| \|(f(v), g(v))'\| \neq 0. \end{aligned}$$

3.  $\alpha$  es un homeomorfismo. Primero se demostrará que  $\alpha$  es 1-1, como  $(f(v), 0, g(v))$  es una parametrización de la curva regular  $C$ , entonces dado  $z$  y  $x^2 + y^2 = [f(v)]^2$ , se determina a  $v$  de manera única. Esto hace que  $\alpha$  sea 1-1. Se hace notar que, como  $(f(v), 0, g(v))$  es una parametrización de  $C$ ,  $v$  es una función continua de  $z$  y de  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , por lo tanto, una función continua de  $(x, y, z)$ .

Para demostrar que  $\alpha^{-1}$  es continua sólo resta demostrar que  $u$  es una función continua de  $(x, y, z)$ . Para ver esto, obsérvese que si  $u \neq \pi$  (y usando que  $f(v) \neq 0$ ) se obtiene

$$\begin{aligned} \tan \frac{u}{2} &= \frac{\sin \frac{u}{2}}{\cos \frac{u}{2}} = \frac{2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}}{2 \cos^2 \frac{u}{2}} = \frac{\sin u}{1 + \cos u} \\ &= \frac{y}{1 + \frac{x}{f(v)}} = \frac{y}{f(v) + x} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Con lo que

$$u = 2 \tan^{-1} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por lo tanto, si  $u \neq \pi$ ,  $u$  es una función continua de  $(x, y, z)$ .

Usando el procedimiento, inmediatamente anterior, pero con  $\cot \frac{u}{2}$  y  $u$  en un intervalo pequeño alrededor de  $\pi$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \cot \frac{u}{2} &= \frac{\cos u/2}{\sin u/2} = \frac{2 \cos u/2 \sin u/2}{2 \sin^2 u/2} \\ &= \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por lo tanto,

$$u = 2 \cot^{-1} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}},$$

así que,  $u$  es una función continua de  $(x, y, z)$ . Esto muestra que  $\alpha^{-1}$  es continua y completa la verificación de la parametrización. Para terminar el ejemplo falta al menos una parametrización que se obtiene utilizando la anterior con una rotación de un ángulo pequeño de  $u_0$ .

### § 3.5 Cambio de Parámetro

En la mayoría de los casos los puntos de una superficie regular están en varias parametrizaciones o vecindades coordenadas, por ejemplo, esto sucede en el caso de la esfera  $S^2$ . Cada punto del interior del primer octante pertenece, por lo menos, a dos vecindades coordenadas. Por lo tanto, se hace necesario entender que los puntos de una superficie no dependen de la escogencia de una parametrización. Esto es, si un punto  $p$  de una superficie está en dos vecindades coordenadas se debe tener un procedimiento para pasar de una parametrización a la otra. Esto es asegurado por el siguiente Teorema.

**Teorema 3.5.1 (Cambio de parámetro)** *Sea  $p$  un punto de una superficie regular  $M$ , y sean  $\alpha : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ ,  $\beta : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  dos parametrizaciones de  $M$  en  $p$  tal que  $p \in \alpha(U) \cap \beta(V) = W$ . Entonces el cambio de coordenadas*

$$h = \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W)$$

*es un difeomorfismo, ver Figura 3.5. Esto es,  $h$  es diferenciable y su función inversa  $h^{-1}$  es diferenciable.*

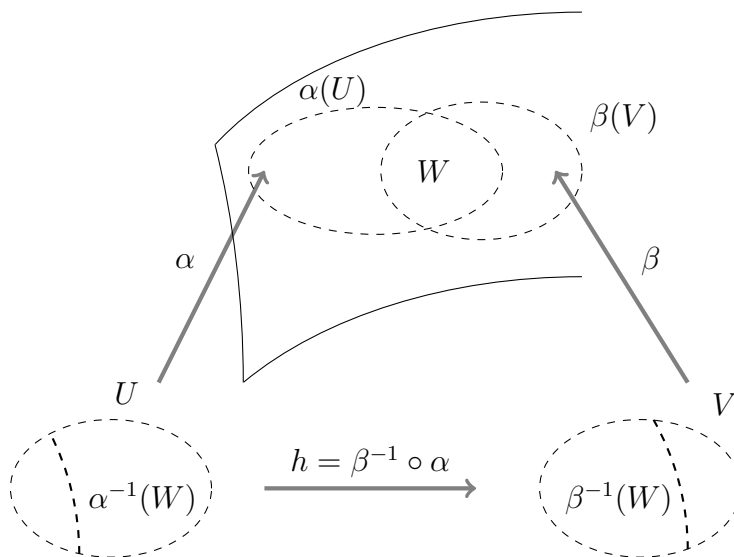


Figura 3.5

**Demostración** Es una aplicación del Teorema de la Función Inversa. En efecto,  $h = \beta^{-1} \circ \alpha$  es un homeomorfismo, ya que es compuesta de dos homeomorfismos. Situación que no se puede concluir, por argumento análogo, que  $h$  sea diferenciable, ya que  $\beta^{-1}$  no necesariamente está definida en un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$  y aún no se conoce cual es el significado de una función diferenciable sobre  $M$ .

El procedimiento es como se muestra a continuación. Sean  $r \in \beta^{-1}(W)$  y  $h(q) = r$ . Si

$$\beta(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

es una parametrización, entonces se puede suponer, renombrando los ejes en caso de ser necesario, que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

Se extiende  $\beta$  a la función  $F : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in V, t \in \mathbb{R}.$$

Es claro que  $F$  es diferenciable y que la restricción  $F|_{V \times \{0\}} = \beta$ , y por un cálculo simple, se obtiene

$$\det dF_q = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix}_q = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0.$$

En estas condiciones es posible entonces aplicar el Teorema de la Función Inversa, que garantiza la existencia de un par de conjuntos abiertos  $V_1$  de  $\beta(q)$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $V_2$  de  $q \times 0$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $F$  es un difeomorfismo, es decir  $F^{-1}$  existe y es diferenciable en  $V_1$ .

Por la continuidad de  $\beta$ , existe un conjunto abierto  $U_1$  de  $r \in V$  tal que  $\beta(U_1) \subseteq V_1$ . Note que, sobre  $U_1$ ,  $h|_{U_1} = F^{-1} \circ \alpha|_{U_1}$  es una composición de funciones diferenciables. De esta manera, se puede aplicar la regla de la cadena para concluir que  $h$  es una función diferenciable en  $q = h^{-1}(r)$ : Como  $r$  es arbitrario, entonces  $h$  es diferenciable sobre  $x^{-1}(W)$ .

El mismo argumento se le puede aplicar para demostrar que  $h^{-1}$  es una función diferenciable y así  $h$  es un difeomorfismo.  $\diamond$

### Observaciones

Sea  $M$  una superficie



1. Si

$$(U, \alpha) \text{ y } (V, \beta)$$

son parametrizaciones de  $M$  con  $p \in \alpha(U) \cap \beta(V) = W$ , entonces el teorema de cambio de parámetro dice que

$$h = \beta^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W) \rightarrow \beta^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo; por lo tanto, si las coordenadas de  $(U, \alpha)$  y  $(V, \beta)$  son  $x_1, x_2$  y  $y_1, y_2$  respectivamente, entonces  $h$  se puede representar por las funciones

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

y para cada  $q$  en el dominio de  $h$ ,

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} \neq 0.$$

2. La prueba del Teorema de Cambio de Parámetro, garantiza que  $\alpha$  y  $\alpha^{-1}$  son diferenciables.
3. Cada superficie  $M$  posee una familia de funciones inyectivas  $\psi_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , de conjuntos abiertos  $U_i$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $M$  tales que
- $\bigcup_i \psi_i(U_i) = M$ ,
  - Para todo par  $i, j$  con  $\psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\psi_i^{-1}(W)$  y  $\psi_j^{-1}(W)$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2$  y las funciones  $\psi_j^{-1} \circ \psi_i$  son diferenciables.
  - Se puede obtener una familia  $\{U_i, \psi_i\}$  que sea máxima relativo a las condiciones (a) y (b), agregando las faltantes. A tal familia se le llama una estructura diferencial máxima para  $M$ .

En la práctica, es suficiente trabajar con la familia  $\{U_i, \psi_i\}$  de tal manera que satisfaga (a) y (b) y en tal caso, se le dice que la familia es una estructura diferencial para  $M$ .

(d) A la familia

$$\{(V, \psi_i^{-1})\}, \quad V = \psi(U_i)$$

se le llama un atlas (consecuentemente, atlas maximal) y al par

$$(V, \psi^{-1})$$

una carta.

4. En la teoría de superficies se puede trabajar con un atlas, estructura diferenciable o con parametrizaciones siempre que exista la suficiente claridad en la forma como se desea trabajar.

### § 3.6 Funciones Diferenciables entre Superficies

En esta sección se extiende la noción de funciones diferenciables, conocida en Cálculo, a funciones definidas sobre superficies regulares.

**Definición 3.6.1** Sean  $M$  y  $N$  superficies regulares. Entonces una función  $f : M \rightarrow N$  se dice diferenciable en  $p \in M$  si dada una parametrización  $(V, \beta)$  con  $f(p) \in \beta(V)$ , existe una parametrización  $(U, \alpha)$  tal que  $p \in \alpha(U)$ ,  $f(\alpha(U)) \subseteq \beta(V)$  y la función

$$\beta^{-1} \circ f \circ \alpha : U \rightarrow V \tag{3.10}$$

es una función diferenciable, ver Figura 3.6.

La función  $\beta^{-1} \circ f \circ \alpha$  recibe el nombre de expresión de  $f$  en coordenadas respecto a las parametrizaciones  $(U, \alpha)$  y  $(V, \beta)$ ; su dominio es el conjunto  $U$ . En la Figura 3.6,  $q = \alpha^{-1}(p)$  y  $r = \beta^{-1}(f(p))$ .

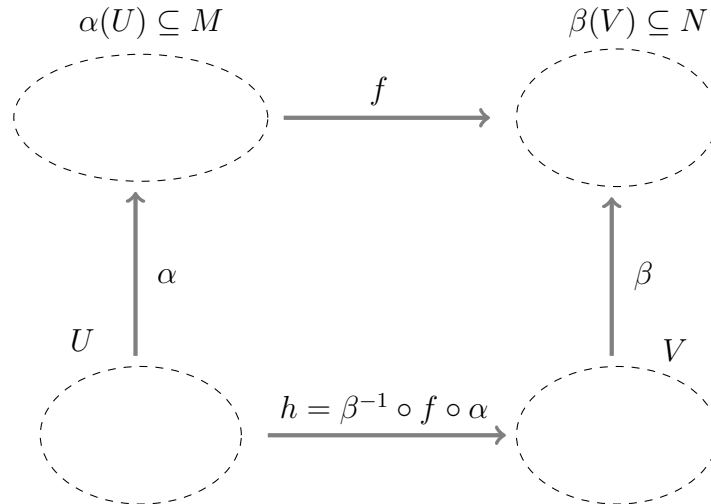


Figura 3.6

Esta definición está bien hecha ya que es independiente del sistema de coordenadas escogidas para  $p$  y  $f(p)$ . En efecto, sean  $(U_1, \alpha_1)$  y  $(V_1, \beta_1)$ ; otras parametrizaciones con  $p \in \alpha_1(U_1)$  y  $f(\alpha(U_1)) \subseteq \beta_1(V_1)$ . Entonces

$$\beta_1^{-1} \circ f \circ \alpha_1 = (\beta_1^{-1} \circ \beta) \circ (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha) \circ (\alpha^{-1} \circ \alpha_1)$$

es compuesta de funciones diferenciables. Por lo tanto,  $\beta_1^{-1} \circ f \circ \alpha_1$  es diferenciable.

Se consideran  $M$  y  $N$  superficies regulares. Entonces una función biyectiva  $f : M \rightarrow N$  tal que  $f$  y  $f^{-1}$  son funciones diferenciables se llama un DIFEOMORFISMO y las dos superficies se dicen DIFEOMORFAS si existe un difeomorfismo de una a la otra; las superficies son necesariamente de la misma dimensión.

### § 3.7 Ejercicios

1. Tomar

$$u = \frac{x}{3} - \frac{y}{4}, \quad v = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$$

para encontrar una parametrización que cubra el paraboloides hiperbólico

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = z.$$

2. ¿Cuáles de las siguientes superficies cuádricas son regulares?

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad (a, b > 0) \quad (\text{Paraboloides}).$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a, b, c > 0) \quad (\text{Elipsoide}).$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a, b, c > 0) \quad (\text{Hiperboloides, una hoja}).$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a, b, c > 0) \quad (\text{Hiperboloides, dos hojas}).$$

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2, \quad (a > 0, z \neq 0) \quad (\text{Cono circular}).$$

3. A cada una de las superficies cuádricas regulares del punto 2 encontrarles dos estructuras diferenciables. ¿Cuáles son superficies de revolución?
4. Probar que cada conjunto abierto de una superficie regular es una superficie regular.
5. Probar que el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ ,  $z \in \mathbb{R}$  es una superficie regular.
6. Hallar la superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor de la recta  $x = y = z$  la curva de ecuaciones  $y = x^2$ ,  $x + y = 0$ . Encontrar un sistema de parametrizaciones.
7. Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación lineal invertible, probar entonces que  $T$  envía superficies regulares en superficies regulares.
8. Se indica con  $\mathbb{RP}^2$  al conjunto de todas las rectas en  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen  $\{(0, 0, 0)\}$ . Es decir,  $\mathbb{RP}^2$  es el conjunto de direcciones de  $\mathbb{R}^3$ ; probar que  $\mathbb{RP}^2$  es una superficie regular.
9. Sea  $A : S^2 \rightarrow S^2$  tal que  $A(x) = -x$ , probar que  $A$  es una función suave.

# Capítulo 4

## Más Ejemplos de Superficies Regulares

### § 4.1 Introducción

Se trata de presentar unos ejemplos de superficies que no pueden pasar desapercibidos por su utilidad en el entendimiento de la geometría de las superficies. Se utilizan como ejemplos y contra-ejemplos en posteriores estudios.

### § 4.2 Toro

- (a) El toro se puede realizar especificando las orientaciones de pegamiento de los lados opuestos de un rectángulo, como se muestra en la primera gráfica de la Figura 4.1.

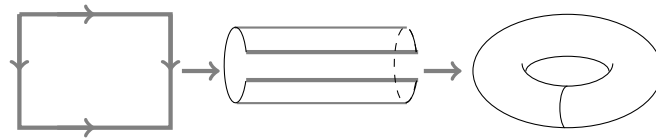


Figura 4.1

- (b) **Toro de Revolución  $T^2$ .** El Toro de Revolución  $T^2$  es la superficie generada por la rotación de una circunferencia  $S^1$  de radio  $r$  alrededor de una recta perteneciente al plano de la circunferencia a una distancia  $a > r$  del centro de la circunferencia.

En búsqueda de una parametrización, se considera el plano  $xz$ , la circunferencia de radio  $r > 0$  de centro  $(a, 0, 0)$ ,  $a > r$  y el  $z$  su eje de rotación. Entonces  $S^1$  tiene por ecuación, ver Figura 4.2:

$$x = a + r \cos v, \quad y = 0, \quad z = r \operatorname{sen} v, \quad 0 < v < 2\pi.$$

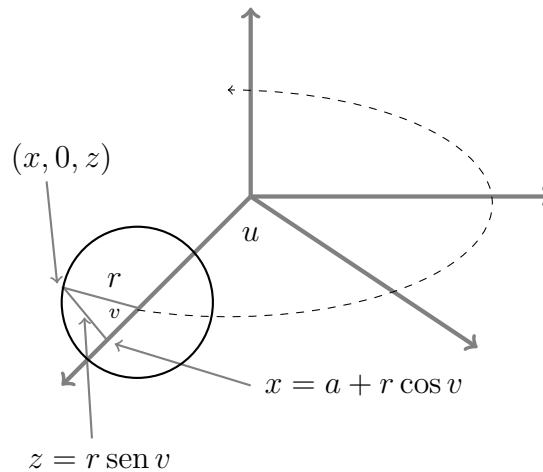


Figura 4.2

Tratándose de un caso particular de una superficie de revolución ya estudiada, una tal parametrización del Toro  $T^2$  se obtiene uti-

lizando una matriz de rotación al rededor del eje  $z$ , por ejemplo, sentido positivo, en efecto,

$$(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cos v \\ 0 \\ r \operatorname{sen} v \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

con  $0 < v < 2\pi$ ,  $0 < u < 2\pi$ . Y así

$$\begin{aligned} x &= (a + r \cos v) \cos u \\ y &= (a + r \cos v) \operatorname{sen} u \\ z &= r \operatorname{sen} v \end{aligned} \quad (4.2)$$

con  $0 < v < 2\pi$ ,  $0 < u < 2\pi$ .

Ahora se puede observar inmediatamente que el toro  $T^2$  se puede cubrir por 3 parametrizaciones similares a la anterior. Como el toro  $T^2$  es una superficie de revolución no hay que probar las condiciones de superficie regular.

### § 4.3 Banda de Möbius

La Banda Möbius  $M$  se obtiene, desde el punto de vista suave, identificando los lados opuestos de un rectángulo, dando una torsión en el rectángulo, de modo que se identifique cada punto del segmento  $\overline{cd}$  con su simétrico del lado correspondiente, Figura 4.3.

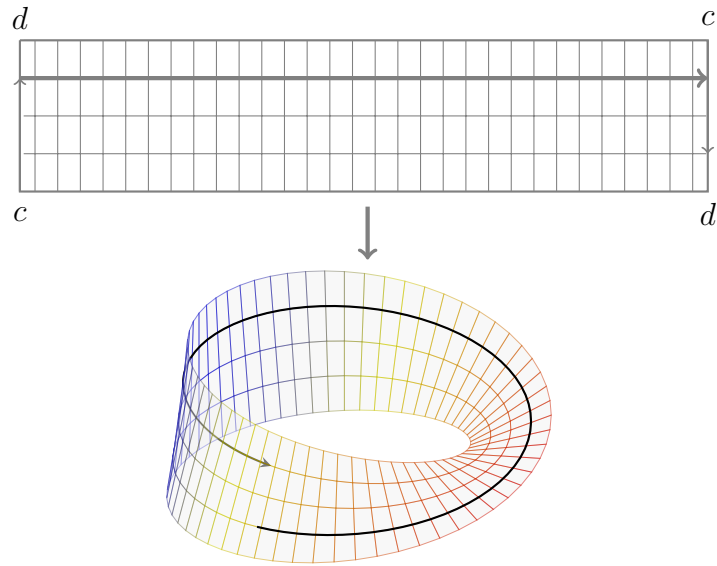


Figura 4.3

Se considera la generatriz de la banda de Möbius, el segmento  $\overline{cd}$  de longitud  $2d$  y que  $-d \leq v \leq d$ , se hace coincidir con el eje  $z$  y su punto medio con el origen  $0$  del espacio  $xyz$ , como en la Figura 4.4, luego se gira un ángulo de  $u/2$ .

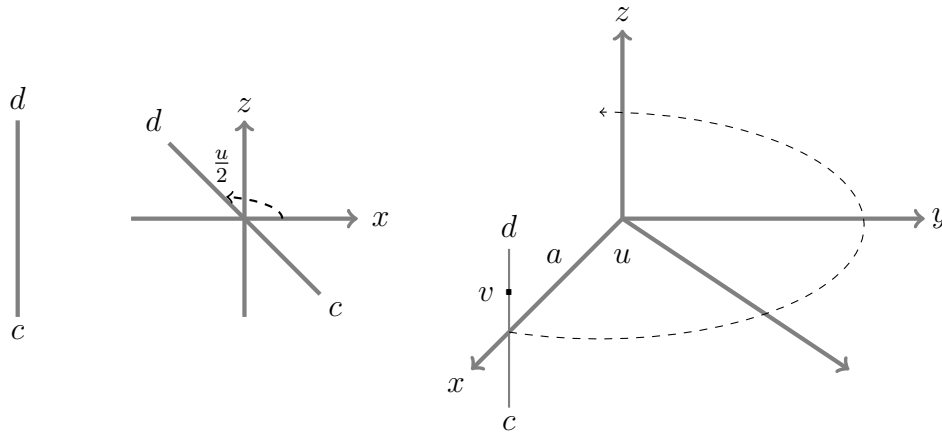


Figura 4.4



1. Si la rotación es en torno al eje  $z$  y en el plano  $xz$  como en la Figura 4.4, entonces las coordenadas de la generatriz en el giro son

$$x = v \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{u}{2}\right), \quad y = 0, \quad z = v \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{u}{2}\right),$$

es decir,

$$x = -v \sin \frac{u}{2}, \quad y = 0, \quad z = v \cos \frac{u}{2}$$

con  $-d \leq v \leq d$ ,  $-0 \leq u \leq 2\pi$ .

Pero, si la rotación es en torno al eje  $y$  y en el plano  $yz$ , entonces las coordenadas de la generatriz en el giro son

$$x = 0, \quad y = -v \sin \frac{u}{2}, \quad z = v \cos \frac{u}{2}.$$

2. A continuación se traslada la generatriz al punto  $(a, 0, 0)$  o al punto  $(0, a, 0)$ , según el caso que desee considerar y se aplica la rotación alrededor del eje  $z$ ; en efecto,

(a) en torno al eje  $z$ , tenemos

$$x = a - v \sin \frac{u}{2}, \quad y = 0, \quad z = v \cos \frac{u}{2}$$

al aplicar una matriz de rotación alrededor del eje  $z$ ; se obtiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - v \sin \frac{u}{2} \\ 0 \\ v \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} x &= (a - v \sin \frac{u}{2}) \cos u \\ y &= (a - v \sin \frac{u}{2}) \sin u \\ z &= v \cos \frac{u}{2} \end{aligned} \tag{4.3}$$

con  $-d \leq v \leq d$ ,  $-0 \leq u \leq 2\pi$ .

- (b) Si se traslada la generatriz sobre el eje  $y$  en el plano  $yz$  al punto  $(0, a, 0)$ , entonces

$$x = 0, \quad y = a - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}, \quad z = v \cos \frac{u}{2}$$

y al aplica una matriz de rotación alrededor del eje  $z$ ; se obtiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & \operatorname{sen} u & 0 \\ -\operatorname{sen} u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a - v \operatorname{sen} \frac{u}{2} \\ v \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix}.$$

Con lo que

$$\begin{aligned} x &= (a - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}) \operatorname{sen} u \\ y &= (a - v \operatorname{sen} \frac{u}{2}) \cos u \\ z &= v \cos \frac{u}{2} \end{aligned} \tag{4.4}$$

con  $-d \leq v \leq d$ ,  $-0 \leq u \leq 2\pi$ .

## § 4.4 Garrafa o Botella de Klein

- (a) La Botella de Klein, o Garrafa de Klein se puede pensar como un toro torcido, en el siguiente sentido: el toro se obtiene identificando los lados opuestos de un rectángulo; en la Garrafa de Klein uno de los lados a identificar se refleja respecto a su centro antes de la identificación. Entonces Botella de Klein se puede realizar en  $\mathbb{R}^3$  con auto-intersecciones.

Primero se identifican los lados que tienen la misma orientación, ver Figura 4.5.

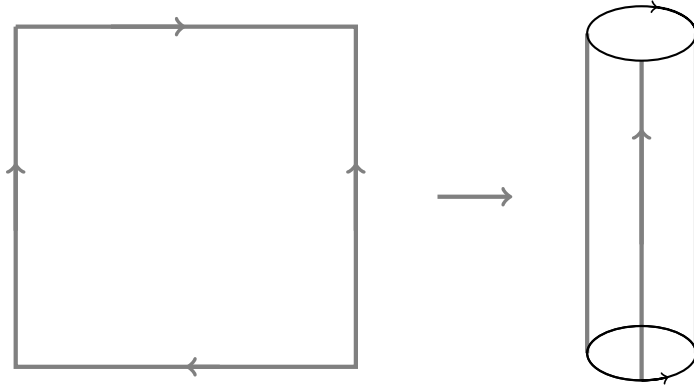


Figura 4.5

Para terminar la identificación de tal manera que coincidan las orientaciones es necesario hacer un hueco en el cilindro (proporcionar una auto-intersección) y obtener entonces la identificación correcta, como en la Figura 4.6.

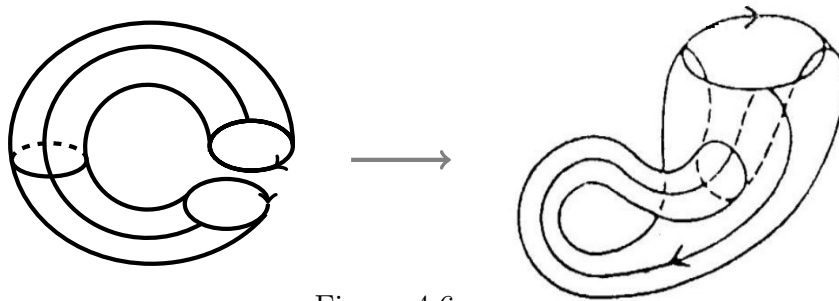


Figura 4.6

- (b) Ahora se procede a obtener las parametrizaciones de la Botella de Klein. Esto se puede realizar sin auto-intersección como subconjunto de  $\mathbb{R}^4$  que se obtiene de la siguiente manera (Figura 4.7).

Sean  $0x$ ,  $0y$ ,  $0z$ , y  $0w$  los cuatro ejes de  $\mathbb{R}^4$ . Se considera una circunferencia  $S$  de radio  $r$  contenido en el plano  $x0z$  y de centro  $C$  en el eje  $ox$ , situada a una distancia  $a > r$  de  $0$ . La Botella de Klein es la generada por la rotación de esta circunferencia de modo que si  $C$  describe un ángulo  $u$  en el plano  $x0y$  el plano de la circunferencia  $S$  describe una rotación de un ángulo de  $u/2$  al rededor de  $0C$  en el espacio  $0C0z0w$  (esta última rotación es posible ya que se trabaja en  $\mathbb{R}^4$ ).

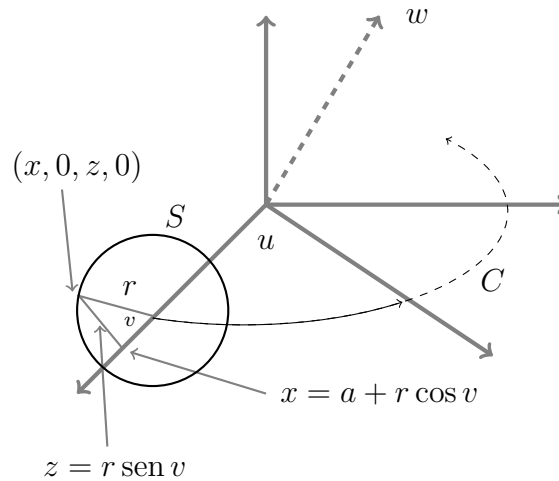


Figura 4.7

Las ecuaciones paramétricas para la circunferencia  $S$ , en el plano  $xz$ , son

$$x = a + r \cos v, \quad y = 0, \quad z = r \operatorname{sen} v, \quad w = 0$$

Para calcular las coordenadas de  $(x, y, z, w)$  de la Botella de Klein se debe tener en cuenta dos rotaciones: la primera, cuando  $S$  rota con centro en  $C$  describiendo un ángulo  $u$  en el plano  $x0y$ . La

segunda, se obtiene cuando el plano de la circunferencia  $S$  describe una rotación de un ángulo  $\frac{u}{2}$  alrededor de  $0C$  en el espacio  $0C\ 0z\ 0w$ , que es posible ya que el trabajo se hace en  $\mathbb{R}^4$ .

Entonces, usando la matriz de rotación, de orientación positiva, se obtiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & -\operatorname{sen} u & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \frac{u}{2} & -\operatorname{sen} \frac{u}{2} \\ 0 & 0 & \operatorname{sen} \frac{u}{2} & \cos \frac{u}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cos v \\ 0 \\ r \operatorname{sen} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Lo que muestra que una parametrización de la Botella de Klein está dada por

$$f_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

definida por

$$f_1(u, v) = \begin{cases} x = (a + r \cos v) \cos u, \\ y = (a + r \cos v) \operatorname{sen} u, \\ z = r \operatorname{sen} v \cos \frac{u}{2}, \\ w = r \operatorname{sen} v \operatorname{sen} \frac{u}{2}, \end{cases}$$

con

$$V_1 = \{(u, v) : 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi\}$$

En realidad, es una parametrización, pues modela la superficie de revolución que se ha llamado garrafa de Klein.

Es claro que  $f_1(V_1)$  contiene los puntos de la Garrafa de Klein que no están sobre las circunferencia  $u = 0$  y  $v = 0$ .

Como ejercicio se hacen algunas observaciones.

- (a) Se demostrará que  $f_1$  es biyectiva sobre su imagen se supone primero que  $z \neq 0$ . Entonces  $\operatorname{sen} v \neq 0$  y  $\cos \frac{u}{2} \neq 0$ . Como  $0 < u/2 < \pi$ , la expresión

$$\frac{w}{z} = \tan \frac{u}{2}$$

determina de manera única a  $u$ . Al conocer de manera única a  $u$  y al observar la Figura 4.7 se tiene que  $r \cos v = \sqrt{x^2 + y^2} - a$ , es decir,

$$\cos v = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - a}{r}$$

de la definición de  $f_1$  también se obtiene

$$\operatorname{sen} v = \frac{w}{r \cos \frac{u}{2}};$$

estas dos últimas ecuaciones determinan de manera única a  $v$ . Si  $v = \pi$  o  $u = \pi$  de nuevo se verifica la biyectividad. Además, se observa que  $f_1$  es continua, pues es diferenciable, con inversa continua.

- (b) Otra parametrización se obtiene como sigue: se considera la función  $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada por

$$f_2(u, v) = \begin{cases} x = (a + r \cos \bar{v}) \cos \bar{u}, \\ y = (a + r \cos \bar{v}) \operatorname{sen} \bar{u}, \\ z = r \cos \bar{v} \cos\left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \\ w = r \cos v \operatorname{sen}\left(\frac{\bar{u}}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Geoméricamente, equivale a medir  $\bar{u}$  a partir del eje  $0y$  esto es

$$V_2 = \{(\bar{u}, \bar{v}) : \frac{\pi}{2} < \bar{u} < \frac{5\pi}{2}, \quad 0 < \bar{v} < 2\pi\}$$

y se tiene que  $f_2(V_2)$  incluye los puntos de la botella de Klein con  $u = 0$ . Por el procedimiento anterior se verifica que  $f_2$  es una parametrización y biyectiva sobre su imagen.

Se observa que  $f_1(V_1) \cap f_2(V) = W$  no es conexo y tiene dos componentes conexas

$$W_1 = \{f_1(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi\}, \quad W_2 = \{f_1(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}\}.$$

El cambio de coordenadas está dada por: en  $W_1$

$$f_2^{-1} \circ f_1(u, v) = \begin{cases} \bar{u} = u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} = v \end{cases}$$

en  $W_2$

$$f_2^{-1} \circ f_1(u, v) = \begin{cases} \bar{u} = u - \frac{3\pi}{2} \\ \bar{v} = 2\pi - v \end{cases}$$

que son diferenciables.

(c) De manera análoga, se obtiene otra parametrización

$$f_3 : V_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

cuya imagen cubra la circunferencia  $v = 0$  y procediendo como anteriormente se demuestra que el cambio de coordenadas  $f_j^{-1} \circ f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son diferenciables. Los puntos (b) y (c) serán importantes, en el capítulo de orientación, para mostrar ejemplos de superficies que no son orientables.

(d) Por último la familia  $(V_i, f_i)$  es una estructura diferenciable, no máxima, para la botella de Klein.

## § 4.5 Plano Projectivo Real $\mathbb{RP}^2$ .

Se indica por  $\mathbb{RP}^2$  al conjunto de todas las rectas de  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el origen  $0 = (0, 0, 0)$ , esto es, el conjunto de todas las direcciones de  $\mathbb{R}^3$ .

Observe que

$$\mathbb{RP}^3 = (\mathbb{R}^3 - \{0\}) / \sim$$

donde la relación de equivalencia  $\sim$  está definida por

$$x = (x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) = y$$

si y sólo si para algún  $\lambda \neq 0$ ,  $x_i = \lambda y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Se denota con  $[(x_1, x_2, x_3)]$  a la clase de equivalencia de  $(x_1, x_2, x_3)$ , con algún  $x_i \neq 0$ . En búsqueda de una estructura diferenciable para  $\mathbb{RP}^2$ , observe que

$$[(x_1, xx_2, x_3)] = \left[1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right], \quad \text{si } x_1 \neq 0.$$

$$[(x_1, xx_2, x_3)] = \left[\frac{x_1}{x_2}, 1, \frac{x_3}{x_2}\right], \quad \text{si } x_2 \neq 0.$$

$$[(x_1, xx_2, x_3)] = \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1\right], \quad \text{si } x_3 \neq 0.$$

En  $\mathbb{RP}^3$  se definen los subconjuntos  $V_1, V_2, V_3$  dados por

$$V_i = \{[x_1, x_2, x_3] : x_i \neq 0\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Realmente,  $V_i$  es el complemento, en  $\mathbb{R}^3$ , del plano  $x_i = 0$ . Se demostrará que se puede tomar a los  $V_i$  como vecindades coordenadas, donde las coordenadas de  $V_i$  son

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_2}{x_1}, & y_2 &= \frac{x_3}{x_1} & \text{para } V_1, \\ y_2 &= \frac{x_1}{x_2}, & y_2 &= \frac{x_3}{x_2} & \text{para } V_2, \\ y_3 &= \frac{x_1}{x_3}, & y_2 &= \frac{x_2}{x_3} & \text{para } V_3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Entonces se definen las funciones

$$\begin{aligned} \alpha_1(y_1, y_2) &= [1, y_1, y_2], & (y_1, y_2) &\in \mathbb{R}^2, \\ \alpha_2(y_1, y_2) &= [y_1, 1, y_2], & (y_1, y_2) &\in \mathbb{R}^2, \\ \alpha_3(y_1, y_2) &= [y_1, y_2, 1], & (y_1, y_2) &\in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Se demostrará que  $\{(\mathbb{R}^2, \alpha_i) : i = 1, 2, 3\}$  es una estructura diferenciable de en  $\mathbb{RP}^2$ . En efecto, claramente cada función  $\alpha_i$  es biyectiva y además

$$\bigcup_{i=1}^n \alpha_i(\mathbb{R}^2) = \mathbb{RP}^2.$$



Al aplicar  $\alpha_i^{-1}$  al conjunto  $V_i \cap V_j$  se pierde la componente  $i$ -ésima, por lo tanto, sus coordenadas de  $\alpha_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  son de la forma

$$\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_j \neq 0\};$$

que es abierto, por lo tanto,  $\alpha_i^{-1}(V_i \cap V_j)$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$ .

Ahora se calcula

$$\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(y_1, y_2) = \alpha_j^{-1}[y_1, 1, y_2] = \alpha_1^{-1}\left[1, \frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}\right] = \left[\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}\right] \quad (4.8)$$

que es trivialmente diferenciable. De igual manera siguen las otras composiciones  $\alpha_j^{-1} \circ \alpha_i$ . Lo que completa nuestra búsqueda.

## § 4.6 Ejercicios

1. Obtener una representación de  $\mathbb{RP}^2$  a partir de  $\mathbb{S}^2$ .
2. Mostrar una representación gráfica de la banda de Möbius, en  $\mathbb{RP}^2$ .
3. Probar que los planos que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^3$  forman una curva regular al quitarles el  $\{(0,0,0)\}$ .
4. Sea  $X$  el conjunto de todos los planos que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^4$ . Probar que  $M = X - \{(0, 0, 0, 0)\}$  forma una superficie regular.



# Capítulo 5

## Superficies y Vectores Tangentes

### § 5.1 Introducción

Primero se presentará, de manera introductoria, la definición de  $k$ -superficie o superficie  $k$ -dimensional, el concepto de vector tangente a una  $k$ -superficie, la diferencial de una función sobre superficies y por último el fibrado tangente. Estos temas son fundamentales en el estudio de la Geometría de superficies y variedades.

### § 5.2 Superficies de Dimensión $k$

El concepto de superficie regular admite, sin ningún tipo de complicación, una generalización a dimensiones más altas, pero aún manteniendo un espacio ambiente:

**Definición 5.2.1** *Un subconjunto  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  es una superficie regular de dimensión  $k$  o simplemente una  $k$ -superficie si para cada  $p \in M$ , existe un conjunto abierto  $V$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$  y una función*

$$\alpha : U \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow V \cap M,$$

*de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^k$  en  $V \cap M$  tales que*

*(a)  $\alpha$  es un homeomorfismo diferenciable;*

(b) la diferencial,  $(d\alpha)_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es inyectiva para todo  $q \in U$ .

El par  $(U, \alpha)$  recibe el nombre de parametrización de  $M$  alrededor  $p$ ;  $\alpha(U)$  se le dice una vecindad coordenada alrededor de  $p$ .

### Observaciones

Sea  $M$  una  $k$ -superficie y  $p \in M$ .

- (a) Es costumbre notar  $M^k$  para indicar que  $M$  es una  $k$ -superficie
- (b) En la práctica, se dice que  $(U, \alpha)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  indicando las coordenadas de  $U$  en  $\mathbb{R}^k$  que se van a usar, por ejemplo,  $(U, \alpha)$  es una parametrización de  $M$  en  $p$  con coordenadas  $x_1, \dots, x_k$ .
- (c) Los resultados del capítulo 4 tales como cambio de parámetro, funciones diferenciables sobre superficies son aplicables a  $k$ -superficies de igual manera como se aplican a superficies bi-dimensionales.
- (d) Como cada punto de  $p \in M$  está en una vecindad coordenada de  $M$ , entonces existe una familia de homeomorfismos

$$\varphi_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \varphi(U_i) \subseteq M,$$

donde cada  $U_i$  es un abierto de  $\mathbb{R}^k$  tal que

- (i) se satisface

$$\bigcup_i \varphi_i(U_i) = M;$$

- (ii) para cada  $i, j$  con  $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\varphi_i^{-1}(W)$  y  $\varphi_j^{-1}(W)$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^k$  y las funciones  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  son funciones diferenciables;
- (iii) La familia  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  se puede conseguir máxima relativo a las condiciones (i) y (ii), agregando las faltantes.

A la familia  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  que satisface (i) y (ii), se le conoce con el nombre de **Estructura diferenciable** para  $M$ .

**Ejemplo 5.2.1 La imagen de una función diferenciable es una  $k$ -superficie.** En efecto, sea  $\Omega$  un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^k$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función diferenciable. Entonces la imagen de  $f$  es el conjunto:

$$Im(f) = \{(x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_m(x)) : x = (x_1, \dots, x_k) \in \Omega\},$$

y como se observa  $\varphi : \mathbb{R}^k \rightarrow Im(f)$  dada por

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, f_1(x), \dots, f_m(x))$$

es diferenciable con inversa diferenciable y  $\varphi(\mathbb{R}^k) = Im(f)$ . Esto es  $Im(f)$  es una  $k$ -superficie regular con una sólo parametrización.

**Ejemplo 5.2.2 Esfera de dimensión  $n$ .** Sea  $M = S^n$ , la esfera de radio 1, dada por

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

y se construirá una biyección  $f$  de la siguiente manera: Se proyectan los puntos de la esfera desde el polo norte sobre  $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n \times \{0\}$ , entonces a cada punto de la esfera le corresponde un punto sobre  $\mathbb{R}^n$ , con excepción del polo norte y a cada punto de  $\mathbb{R}^n$  le corresponde un punto sobre la esfera y sólo uno. Esta correspondencia se denomina proyección estereográfica (ver, Figura 5.1).

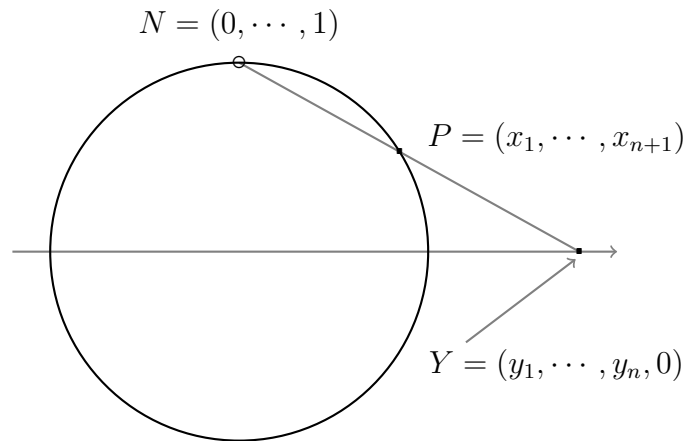


Figura 5.1

La proyección estereográfica se expresa analíticamente como sigue: sea  $N = (0, \dots, 1)$  (polo norte); se conecta cualquier punto  $Y = (y_1, \dots, y_n, 0)$  de  $\mathbb{R}^n$  con  $N$  por medio de una recta y se observa que esta recta corta a la esfera  $S^n$  en un único punto  $P = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ .

La ecuación de la esfera  $n$ -dimensional es

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1. \quad (5.1)$$

Como los puntos  $N, P$  y  $Y$  son colineales se debe tener  $\vec{NP} = t\vec{NY}$  para algún número real  $t \neq 0$ , de donde

$$\begin{aligned} x_1 &= ty_1, & x_2 &= ty_2, & \dots, & x_n &= ty_n, & x_{n+1} &= 1 - t, \\ y_1 &= \frac{x_1}{t}, & y_2 &= \frac{x_2}{t}, & \dots, & y_n &= \frac{x_n}{t}, & 1 - x_{n+1} &= t, \end{aligned}$$

como  $x_1^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1$  se obtiene que  $t = 2/(1 + y_1^2 + \dots + y_n^2)$ . Luego la proyección estereográfica es la función

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{N\}; \quad f(y_1, \dots, y_n) = (ty_1, \dots, ty_n, 1 - t),$$

y su función inversa  $f^{-1}$  es

$$f^{-1} : S^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dada por la fórmula

$$f^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n).$$

Para cubrir el polo norte, se hace necesario proyectar desde otro punto de la esfera, por ejemplo, desde el polo sur, esto es, si  $S = (0, \dots, 0, -1)$  y  $P = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ , con  $P \neq S$ , entonces la proyección desde el polo sur esta dada por

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{S\}; \quad g(y_1, \dots, y_n) = (ty_1, \dots, ty_n, t - 1).$$

con  $t = 2/(1 + y_1^2 + \cdots + y_n^2)$ . Además

$$g^{-1} : S^n - \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad g^{-1}(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n).$$

Tomando  $V_1 = \mathbb{R}^n = V_2$ , entonces la colección  $\{(V_1, f), (V_2, g)\}$  satisface

- (a)  $S^2 = f(V_1) \cup g(V_2)$ ,
- (b)  $f$  y  $g$  son homeomorfismos (y además diferenciables),
- (c) Inmediatamente se tiene que  $df|_q$  y  $dg|_q$  son 1-1 para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ .

Además, se observa que si  $f(V_1) \cap g(V_2) = S^n - \{N, S\} = W$  es no vacío y es un conjunto abierto en la Topología de subespacio sobre  $S^n$ , también  $f^{-1} \circ g$  está dada por

$$f^{-1} \circ g(y_1, \cdots, y_n) = \frac{1}{y_1^2 + \cdots + y_n^2}(y_1, \cdots, y_n)$$

que es una función diferenciable de  $\mathbb{R}^n - \{(0, \cdots, 0)\}$  sobre  $\mathbb{R}^n - \{(0, \cdots, 0)\}$ . Esta propiedad se trata en la siguiente sección.

**Ejemplo 5.2.3 Espacios Projectivos Reales.** Se considera

$$\mathbb{R}^{m+1} = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{m+1 \text{ factores}}$$

con el origen eliminado, esto es,  $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$  los puntos

$$x = (x_1, \cdots, x_{m+1}) \quad \text{e} \quad y = (y_1, \cdots, y_{m+1})$$

se dicen equivalentes ( $\sim$ ) si y sólo si  $y_i = \lambda x_i$  ( $i = 1, \cdots, m+1$ ) para algún  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . La clase de equivalencia  $[x]$  de  $x$  se puede ver como una recta que pasa por el origen de  $\mathbb{R}^{m+1}$  con origen eliminado. Entonces

$$\mathbb{R}P^m = [\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}] / \sim = \{[x] : x \in \mathbb{R}^{m+1} - \{0\}\}$$

se conoce con el nombre de ESPACIO PROYECTIVO REAL de dimensión  $m$ ;  $x_1, \dots, x_{m+1}$  sus coordenadas homogéneas. La proyección natural es

$$\pi : [\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}] \rightarrow \mathbb{RP}^m$$

definida con  $\pi(x) = [x]$ . Se demostrará que  $\mathbb{RP}^m$  se puede cubrir con  $m+1$  vecindades coordenadas proporcionando así una estructura diferenciable sobre  $\mathbb{RP}^m$ .

Denotando los puntos sobre  $\mathbb{RP}^m$  con  $[x_1, \dots, x_{m+1}]$ , se observa que si  $x_i \neq 0$ , entonces

$$[x_1, \dots, x_{m+1}] = \left[ \frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_i} \right].$$

Sean  $W_1, \dots, W_{m+1}$  de  $\mathbb{RP}^m$  definidos por

$$W_i = \{[x_1, \dots, x_{m+1}] : x_i \neq 0\}$$

Cada  $W_i$  se puede observar como el conjunto de rectas en  $\mathbb{R}^{m+1}$  que pasan por el origen y no están en el hiperplano  $x_i = 0$ . Los  $W_i$  son vecindades coordenadas de  $\mathbb{RP}^m$  con coordenadas

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, y_m = \frac{x_{m+1}}{x_i}.$$

Y por lo tanto, se definen las funciones  $\varphi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow W_i$  con

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_m) = [x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_m].$$

Se demostrará que la familia  $\{(\mathbb{R}^m, \varphi_i)\}$  es una estructura diferenciable para  $\mathbb{RP}^m$ .

Por construcción  $\cup W_i = \mathbb{RP}^m$ .

$\varphi_i$  es biyectiva y continua. En efecto,  $\varphi_i^{-1}([x])$  ( $[x] \in \mathbb{RP}^m$ ) es

$$\varphi_i^{-1}([x_1, \dots, x_{m+1}]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1})$$



donde  $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_{m+1})$  y observe que  $\varphi_i^{-1}$  está bien definida, pues si

$$x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \sim (y_1, \dots, y_{m+1}) = y,$$

entonces existe  $\lambda \neq 0$ , tal que  $y = \lambda x$  y así

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1}([x]) &= \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1}) \\ &= \frac{1}{\lambda x_i}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{i-1}, \lambda x_{i+1}, \dots, \lambda x_{m+1}) \\ &= \frac{1}{y_i}(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{m+1}) \\ &= \varphi_i^{-1}([y]). \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} \circ \varphi_i(x) &= \varphi_i^{-1}([(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_m)]) \\ &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_m) = x. \end{aligned}$$

Análogamente,  $\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}(w) = w$ . Como la proyección natural es una función continua,  $\varphi_i$  y  $\varphi_i^{-1}$  son funciones continuas. Entonces las funciones  $\varphi_i$  ( $i = 1, \dots, m+1$ ) son homeomorfismos.

Sobre la intersección  $W_i \cap W_j$ , sea  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $x_i \neq 0$ ,  $x_j \neq 0$  y suponer que  $i < j$ , entonces su función cambio de coordenadas es:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} \circ \varphi_j(x) &= \varphi_i^{-1}([(x_1, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_m)]) \\ &= \frac{1}{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_j, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Así, sobre  $W_i \cap W_j$ , las coordenadas son

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \quad y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \quad y_{j-2} = \frac{x_{j-1}}{x_i}, \\ y_{j-1} &= \frac{1}{x_i}, \quad y_j = \frac{x_j}{x_i}, \dots, \quad y_m = \frac{x_m}{x_i} \end{aligned}$$

que son funciones diferenciables en variable real.

Es costumbre, en terminología clásica, llamar a las coordenadas de  $W_i$  coordenadas no homogéneas correspondientes a las coordenadas homogéneas  $(x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ .

### § 5.3 Vectores Tangentes

La definición de vector tangente sobre una superficie que se presentará permite manipularlo como un operador diferencial, primero se hace la traducción de lo que sucede en  $\mathbb{R}^k$  a esta terminología.

- (a) **Caso  $\mathbb{R}^k$ .** Sea  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$  una curva regular en el conjunto abierto  $\Omega$  con  $\alpha(0) = p$ , entonces

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_k(t)),$$

por lo tanto,

$$\alpha'(0) = \left( \frac{d\alpha_1}{dt}(0), \dots, \frac{d\alpha_k}{dt}(0) \right) = (v_1, \dots, v_k) = v \in \mathbb{R}^k;$$

sea  $f$  una función a valor real derivable en  $\Omega$ , entonces se puede restringir  $f$  a la curva  $\alpha$  y así

$$\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\alpha(t))}{\partial x_i} \Big|_{t=0} \frac{d}{dt} \alpha_i(t) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_p$$

esta última expresión por Cálculo elemental en  $\mathbb{R}^n$  es la derivada direccional de  $f$  en dirección del vector  $v$  en el punto  $p$ , que se denota con

$$f'(v, p), \quad \text{o} \quad v(f)|_p.$$

Se observa que  $v$  actúa como un operador sobre el espacio vectorial de las funciones diferenciables. Específicamente, si  $f$  es una función diferenciable sobre un conjunto abierto de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$v$  asigna a  $f$  el número real  $v(f)$  que es la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $v$  en el punto  $p$ . Esto es,

$$v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \Big|_{t=0} = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p + \cdots + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_p. \quad (5.2)$$

Lo que permite ver a  $v$  como un operador, con dominio  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  y codominio  $\mathbb{R}$ , para cada  $p \in \Omega$ .

### Observaciones

Al presentar a  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$  como una superficie regular, la parametrización natural es  $(\Omega, i)$ , donde  $i : \Omega \rightarrow \Omega$  es la función identidad, por lo tanto se tienen cada una de las siguientes afirmaciones triviales

- (1) si  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_k = (0, \dots, 0, 1)$ , entonces

$$e_1 = \frac{\partial i}{\partial x_1} \Big|_p, \dots, e_k = \frac{\partial i}{\partial x_k} \Big|_p;$$

es decir cada  $e_j$ , elemento básico de  $\mathbb{R}^k$ , vectores tangente en  $p$ , se encuentra derivando parcialmente la parametrización en  $p$  respecto al parámetro  $x_j$  del sistema de coordenada, que omitiendo la parametrización y el punto  $p$ , por ser obvio que están presentes, se escribe

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, e_k = \frac{\partial}{\partial x_k};$$

- (2) los operadores básicos dados en la parte (1), actúan de la siguiente forma

$$e_j : C^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

es el operador diferencial que para toda  $f \in C^\infty(\Omega)$

$$e_j(f) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, k;$$

(3) la acción del vector  $v$  se se escribe como

$$v(f) = \left[ v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right] (f)$$

con lo que

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (5.3)$$

y  $\partial/\partial x_j$  actúa como la derivada respecto a  $x_j$  del sistema de coordenadas;

(4) la operación del vector  $v$  sobre funciones diferenciables satisface dos propiedades importantes

$$\begin{aligned} v(f + \lambda g) &= v(f) + \lambda v(g) \\ v(fg) &= g(p)v(f) + f(p)v(g), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables alrededor de  $p$ . y  $\lambda$  es un número real. La primera propiedad dice que  $v$  actúa linealmente sobre funciones diferenciables y la segunda dice que  $v$  satisface la regla del producto o regla de Leibniz. Lo que proporciona que cada vector tangente, en subconjuntos abiertos no vacíos de  $\mathbb{R}^k$ , se puede ver como una derivación. Estas observaciones motivan la definición de vector tangente sobre superficies regulares como derivadas direccionales o bien derivaciones sobre funciones diferenciables.

(b) **Caso superficies regulares.** Sea  $M^m$  una superficie regular y  $U$  un conjunto abierto en  $M$ , entonces el conjunto de todas las funciones de clase  $C^\infty$  definidas sobre  $U$ ,  $C^\infty(U)$ , es un álgebra conmutativa sobre  $\mathbb{R}$  con las operaciones de suma, producto por escalares y producto entre funciones como en los cursos de Cálculo y se denota por  $\mathcal{C}^\infty(U)$ .

Sea ahora  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable, llamada una curva diferenciable sobre  $M$ . Se supone que  $\alpha(0) = p \in M$ , el *vector*

*tangente a la curva*  $\alpha$  en  $t = 0$ , y por lo tanto a  $M$ , es la función (realmente operador diferenciable)  $\alpha'(0) : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0}. \quad (5.5)$$

Un *vector tangente* en  $p \in M$  es el vector tangente en  $t = 0$  de alguna curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ . El conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$  se denota con  $T_p M$ .

Se espera pues, que se mantengan las propiedades observadas en caso de  $\mathbb{R}^k$ ; en efecto, se escoge una parametrización  $(U, x)$  en  $p = x(0)$ , y se puede entonces expresar la curva  $\alpha$  y la función  $f$  en términos de esta parametrización, para  $q = (x_1, \dots, x_k) \in U$

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_k(t)).$$

Por lo tanto, usando regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ x(x_1(t), \dots, x_k(t))) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^k x'_i(0) \left. \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i} \right|_0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

como de costumbre, tomando el operador

$$e_i = \left. \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial x_i} \right|_0 : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \rightarrow \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_0 \quad (5.7)$$

donde  $F = f \circ x$ . se puede escribir

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^k x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 (f) = \left[ \sum_{i=1}^k x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 \right] (f) \quad (5.8)$$

de donde

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^k x'_i(0) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_0 \quad (5.9)$$

### Observaciones

- (1) El vector  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  es el vector tangente en  $p \in M$  a la curva coordenada (ver Figura 5.2)

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

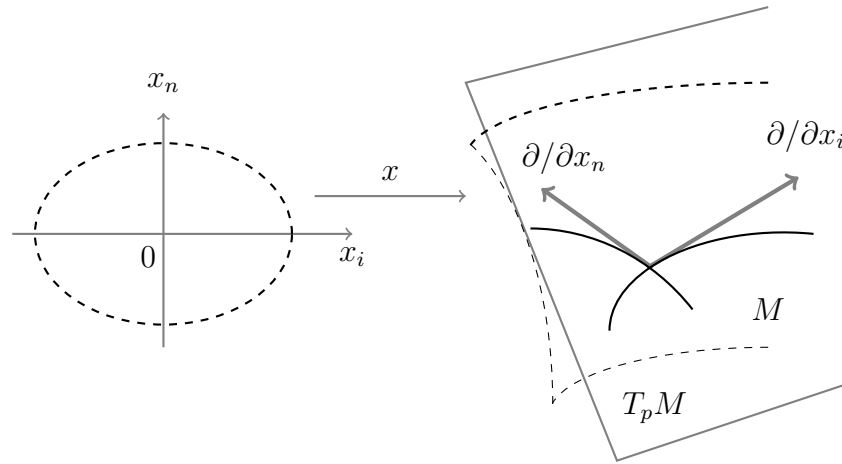


Figura 5.2

- (2) La expresión (5.9) demuestra que el vector tangente a una curva  $\alpha$  en  $p$  sólo depende de las derivadas de un sistema de coordenadas
- (3) La expresión 5.9 también demuestra que el conjunto  $T_p M$ , con las operaciones usuales entre funciones, forma un espacio vectorial.
- (4) Al escoger una parametrización  $(U, x)$  alrededor de  $p \in M$ , inmediatamente se determina un conjunto de vectores tangente en  $p$ ,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}$$

que generan a  $T_p M$ . Este conjunto resulta también linealmente independiente, para ver esto, basta tomar una combinación

lineal igualada a cero y hacerla actuar sobre cada función coordenada para obtener que los coeficientes de dicha combinación son todos nulos. Por lo tanto,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\} \quad (5.10)$$

forma una base para  $T_pM$ .

- (5) Es inmediato que la estructura lineal de  $T_pM$  no depende de la parametrización  $x$ .
- (6) También, se observa que 5.9 proporciona las características naturales de que cada vector tangente es un operador diferencial de  $\mathcal{C}^\infty(U)$  en  $\mathbb{R}$ .

### § 5.4 Diferencial entre Superficies de Dimensión $k$

Sean  $M^m$  y  $N^n$  superficies regulares y sea  $\varphi : M \rightarrow N$  una función diferenciable. La diferencial  $\varphi_*$  (o  $d\varphi$ ) de  $\varphi$  en  $p \in M$  es la función (ver Figura 5.3)

$$\varphi_* : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$$

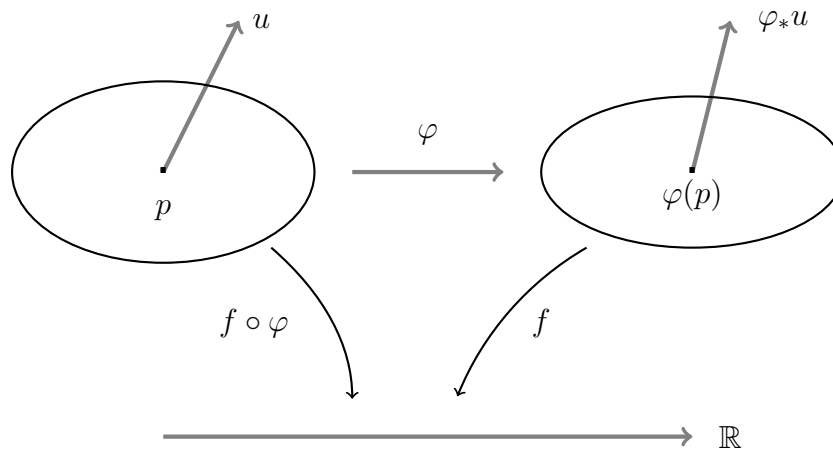


Figura 5.3

definida de la siguiente forma: sean  $u \in T_p M$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(N)$ , entonces

$$\varphi_*(u)(f) = u(f \circ \varphi) \quad \circ \quad d\varphi(u)(f) = u(f \circ \varphi).$$

Para que esta definición quede bien hecha se debe demostrar que  $\varphi_*(u)$  es un vector tangente de  $N$  en  $\varphi(p)$ . Esto es, se debe demostrar que la función  $\varphi_*(u) : \mathcal{C}^\infty(N) \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal y satisface la regla del producto. Sean  $u, v \in T_p M$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Entonces de la definición de suma de vectores tangentes,

$$\varphi_*(\lambda u + \mu v)(f) = (\lambda u + \mu v)(f \circ \varphi) = \lambda u(f \circ \varphi) + \mu v(f \circ \varphi) = \lambda \varphi_* u(f) + \mu \varphi_* v(f)$$

lo que muestra la linealidad. Para ver que satisface del producto, sean  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(N)$ , entonces

$$\begin{aligned} \varphi_*(u)(fg) &= u((fg) \circ \varphi) = u[(f \circ \varphi) \cdot (g \circ \varphi)] \\ &= g(\varphi(p))u(f \circ \varphi) + f(\varphi(p))u(g \circ \varphi) \\ &= g(\varphi(p))\varphi_*(u)(f) + f(\varphi(p))\varphi_*(u)(g). \end{aligned}$$

Lo que termina la demostración.

EL CASO ESPECIAL  $N = \mathbb{R}$  (Figura 5.4) es importante y proporciona la justificación del uso del término DIFERENCIAL.

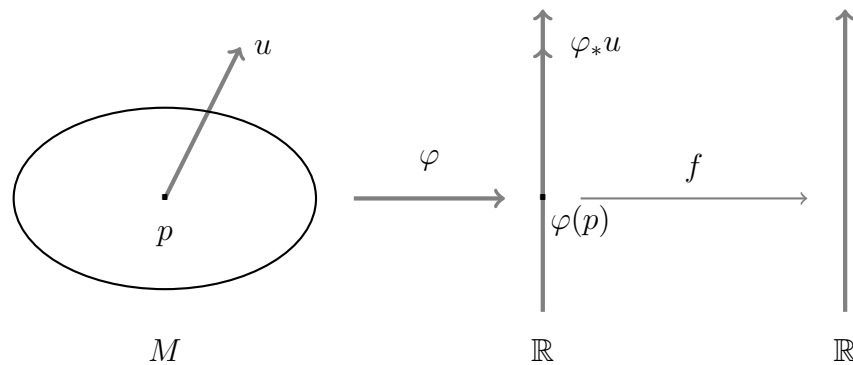


Figura 5.4



Si  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , entonces se tiene por definición de diferencial que (ver Figura 5.4):

$$[d\varphi(u)](f) = u(f \circ \varphi).$$

Como superficie regular,  $\mathbb{R}$  tiene asociada la única parametrización  $(\mathbb{R}, id)$  donde  $id$  es la función identidad con una sólo componente. Además  $T_{\varphi(p)}N = T_{\varphi(p)}\mathbb{R}$  es uni-dimensional, y por lo tanto  $d\varphi(u)$  y  $\partial/\partial x$  (en  $\mathbb{R}$ ) son linealmente dependientes y así

$$u(f \circ \varphi) = [d\varphi(u)](f) = k \frac{\partial}{\partial x}(f)$$

donde  $k \in \mathbb{R}$ . Tomando  $f(x) = id(x) = x$  se tiene  $u(\varphi) = k$ , por lo tanto,

$$[d\varphi(u)](f) = u(\varphi) \frac{\partial}{\partial x}(f),$$

es decir, la única componente del vector  $d\varphi(u)$  es  $u(\varphi)$ . Con lo que se puede establecer entonces un isomorfismo natural entre  $T_{\varphi(p)}N$  y  $\mathbb{R}$  identificando cada vector tangente con su única componente; con lo que se escribe

$$d\varphi(u) = u(\varphi). \quad (5.11)$$

**Teorema 5.4.1** Sean  $M, N, P$  superficies regulares y  $\varphi : M \rightarrow N$ ,  $\psi : N \rightarrow P$  funciones diferenciables. Entonces para cualquier  $p \in M$

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_*.$$

Se recuerda que por notación  $\varphi_* = d\varphi$ . Además que  $\varphi_*$  toma valor en  $p$ ,  $\psi_*$  en  $\varphi(p)$  y  $(\varphi \circ \psi)_*$  en  $p$  (ver Figura 5.5)

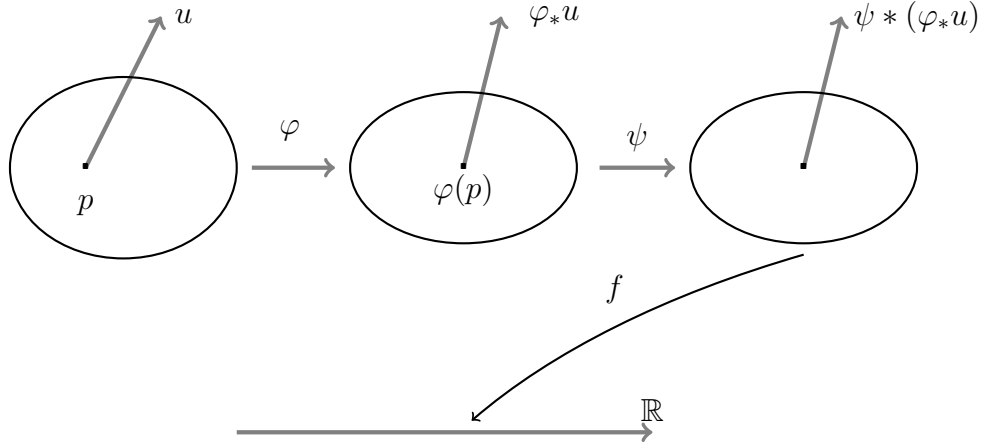


Figura 5.5

**Demostración** Sean  $p \in M$ ,  $u \in T_pM$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$ , (Figura 6.5), entonces por definición de una función diferenciable

$$\psi_*(\varphi_*(u))(f) = \varphi_*(u)(f \circ \psi) = u(f \circ \psi \circ \varphi) = (\psi \circ \varphi)_*(u)(f).$$

Luego

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_*$$

Lo que termina la demostración.  $\square$

## § 5.5 Inmersiones, Submersiones y Encajes

**Definición 5.5.1** Sea  $M^m$  y  $N^n$  superficies regulares.

- (a) Una función diferenciable  $\varphi : M \rightarrow N$  es una *inmersión* si

$$d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$$

es inyectiva para todo  $p \in M$ , en cuyo caso  $m \leq n$ .

- (b) Si  $\varphi$ , además de satisfacer (a) es un homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subseteq N$ , donde  $\varphi(M)$  se considera con la topología de subconjunto, se dice que  $\varphi$  es un *encaje*.

(c) Una función  $\psi : M \rightarrow N$  es una *submersión* si

$$d\psi_p : T_p M \rightarrow T_{\psi(p)} N$$

es sobreyectiva para todo  $p \in M$  en cuyo caso  $m \geq n$ .

**Ejemplo 5.5.1** La función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), t \in \mathbb{R}$$

es una inmersión con una auto-intersección para  $t = \pm 2$ , Figura 5.6, por lo tanto, no es un encaje ni submersión.

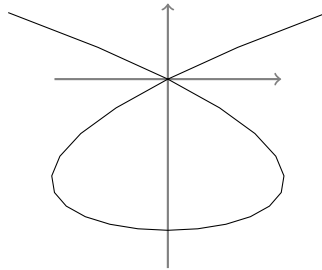


Figura 5.6

## § 5.6 Espacio Cotangente

De nuevo se considera una superficie regular  $M$  de dimensión  $k$  y una parametrización  $(U, x)$  con sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_k)$  de un punto  $p \in M$  con  $x(p) = 0$ , entonces una base para  $T_p M$  asociada a esta parametrización es

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\}.$$

Cada vector  $\partial/\partial x_i$  es una derivación de la forma

$$f \rightarrow \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}, \quad \text{con } f \in C^\infty(M).$$

Como

$$df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}.$$

entonces se puede tomar  $f$  como la función coordenada  $\bar{x}_i = \pi_i \circ x$ , y por lo tanto, su expresión en coordenadas,  $\bar{x}_i \circ x^{-1}(x_1, \dots, x_k) = x_i$  con lo que

$$dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij},$$

por lo tanto, la base dual de  $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$  es  $\{dx_1, \dots, dx_k\}$  en  $(T_p M)^*$  que se denotará con  $T_p^* M$  y para cada punto de  $U$ . El espacio  $T_p^* M$  se conoce como ESPACIO COTANGENTE en el punto  $p$ . Así, un vector cotangente tiene la forma

$$\omega = \sum_{i=1}^k a_i(p) dx_i|_p, \quad p \in U \quad (5.12)$$

o simplemente, cuando no existe confusión

$$\omega = \sum_{i=1}^k a_i dx_i, \quad p \in U \quad (5.13)$$

se puede escribir

$$\omega = \sum_{i=1}^k \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i. \quad (5.14)$$

En particular,

1. si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, entonces

$$df = \sum_{i=1}^k df\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i}(f) dx_i = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i} dx_i.$$

2. Si  $u = (u_1, \dots, u_k)$  entonces

$$df(u) = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i} dx_i(u) = \sum_{i=1}^k u_i \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}.$$

3. Como  $T_p M$  y  $T_p^* M$  son espacios vectoriales de dimensión finita y con igual dimensión, son algebraicamente isomorfos.

## § 5.7 Fibrado Tangente y Cotangente

Sean  $M$  una  $k$ -superficie y  $TM$  el conjunto

$$TM = \{(p, u) : p \in M \text{ y } u \in T_p M\}, \quad (5.15)$$

entonces  $TM$  recibe el nombre de **fibrado tangente** de  $M$ . De igual manera, el conjunto  $T^*M$  es

$$T^*M = \{(p, u) : p \in M \text{ y } u \in T_p^* M\}, \quad (5.16)$$

entonces  $T^*M$  recibe el nombre de **fibrado cotangente** de  $M$ .

Se demostrará que  $TM$  y  $T^*M$  son  $2k$ -superficies.

**Teorema 5.7.1**  *$TM$  y  $T^*M$  son superficies regulares de dimensión  $2k$ .*

**Demostración** Se demostrará con detalle que  $TM$  es una superficie regular de dimensión  $2k$ . En efecto, sea  $(p_0, u_0) \in TM$ , entonces  $p_0 \in M$  y  $u_0 \in T_{p_0} M$ , por lo tanto, existe una parametrización de  $M$ ,  $(U_i, \varphi_i)$ , con  $p_0 \in V_i = \varphi_i(U_i)$  y con sistema de coordenadas  $(x_1, \dots, x_k)$ . Se considera la proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  definida por  $\pi(p, u) = p$ , y también

$$\pi^{-1}(V_i) = \{(p, u) : p \in V_i\}.$$

Sea  $(p, u) \in \pi^{-1}(V_i)$ , entonces  $p$  tiene coordenadas  $(x_1, \dots, x_k)$  es decir

$$\varphi_i^{-1}(p) = (x_1, \dots, x_k)$$

y  $u$  es de la forma

$$u = \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

La función  $\beta_i : \varphi_i^{-1}(V_i) \times \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \pi^{-1}(V_i)$  definida por

$$\beta_i(x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_k) = (p, u)$$

es una función inyectiva del abierto  $\varphi_i^{-1}(V_i) \times \mathbb{R}^k$  sobre el subconjunto abierto  $\pi^{-1}(V_i)$  de  $\mathbb{R}^{2k}$ .

Se toman los conjuntos  $\pi^{-1}(V_i)$  como las vecindades coordenadas sobre  $TM$  y las biyecciones apropiadas  $(\varphi_i^{-1}(V_i) \times \mathbb{R}^k, \beta_i)$  forman un sistema de parametrizaciones cuyas imágenes cubren a  $TM$ . Para demostrar esta afirmación, se debe probar la compatibilidad de las parametrizaciones. En efecto, sea  $(U_j, \varphi_j)$  otra parametrización para  $M$  con  $V_j = \varphi_j(U_j)$  tal que  $p \in V_i \cap V_j$  y con sistema de coordenadas  $(y_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) y por lo tanto, las  $(x_i)$  (y sus derivadas) se relacionan con las  $(y_i)$  (y sus derivadas) difeomorficamente. Entonces  $(p, u) \in \pi^{-1}(V_i \cap V_j)$ ,

$$u = \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^k b_j \frac{\partial}{\partial y_j}$$

y como  $\partial/\partial x_i$  se puede expresar en términos de  $\partial/\partial y_i$ , esto es,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^k c_j \frac{\partial}{\partial y_j},$$

calculando esta expresión en  $y_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

de donde

$$b_j = \sum_{i=1}^k a_i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Como cada  $\partial y_j/\partial x_i$  es una función diferenciable de  $x_i$ , entonces cada  $b_j$  es una función diferenciable de  $(a_1, \dots, a_k, x_1, \dots, x_k)$  y puesto que los  $y_i$  son funciones diferenciables de las  $x_i$ , se concluye que las coordenadas

$$(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_k) \quad \text{y} \quad (y_1, \dots, y_n, b_1, \dots, b_k)$$

están relacionadas difeomorficamente. Con lo que  $TM$  es una superficie regular de dimensión  $2k$ .

La demostración de que  $T^*M$  es una superficie regular de dimensión  $2k$  es paso a paso similar, por lo tanto se deja como ejercicio.



## § 5.8 Ejercicios

1. Calcular una base para el espacio tangente  $T_pM$  cuando

(a)  $M = S^2$ ,  $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,

(b)  $M = \{(x, y, x^2 + y^2) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $p = (2, 0, 4)$ .

2. Sea  $M$  una  $k$ -superficie, verificar entonces que  $T_pM$  y  $T_p^*M$  son  $k$ -superficies

3. ¿Es la función  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por

$$\varphi(t) = \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \frac{e^{-t} - e^t}{2} \right)$$

un encaje?.

4. Sea

$$D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Probar que  $D^2$  como superficie regular es difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ . Obtener una generalización a dimensión  $k$  de este ejercicio.

5. (a) Si  $f$  y  $g$  son inmersiones, demostrar que  $f \times g$  también lo es.

(b) Si  $f$  y  $g$  son encajes, demostrar que  $f \circ g$  también lo es.

6. Probar que cada conjunto abierto de una  $k$ -superficie es una  $k$ -superficie.

7. Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal invertible, probar entonces que  $T$  envía superficies regulares en superficies regulares.

8. Probar que si  $M^m$  y  $N^n$  son superficies regulares, entonces  $M \times N$  es una  $(n + m)$ -superficie.

9. Probar que todo espacio vectorial de dimensión finita  $n$ , es una  $n$ -superficie.
10. Probar que el toro  $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ ,  $n$ -superficie.
11. Probar que  $S^2 \times S^3$  es una 5-superficie. Encontrar una estructura diferenciable para esta superficie.
12. Demostrar que el espacio de todas las matrices de tamaño  $n \times n$  es una  $n^2$ -superficie.
13. Sea  $Gl(n)$ , el conjunto de todas las matrices invertibles con entradas reales. Demostrar que  $Gl(n)$  es una  $n^2$ -superficie.
14. ¿Son las matrices simétricas de tamaño  $n \times n$  una superficie regular?. Justificar la respuesta.
15. Sea  $T : S^n \rightarrow S^n$  definida por  $T(x) = -x$  (función antipodal). Demostrar que  $T$  es un difeomorfismo de  $S^n$  sobre  $S^n$ .
16. Sea  $A$  una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Demostrar que la función  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $T(x) = Ax + b$  es un difeomorfismo de  $\mathbb{R}^n$  si y sólo si  $A$  es no-singular.
17. Sea  $M$  una  $k$ -superficie. Demostrar que  $T^*M$  es una superficie regular de dimensión  $2k$ .



# Capítulo 6

## Campos Vectoriales

### § 6.1 Introducción

Se presentará una introducción a la teoría de los campos vectoriales sobre una  $k$ -superficie incluyendo curvas integrales y la derivada de Lie para campos vectoriales sobre una  $k$ -superficie.

### § 6.2 Campos Vectoriales

Sea  $M$  una  $k$ -superficie de  $\mathbb{R}^n$  y sea

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Un **campo vectorial**  $X$  sobre  $M$  es una función

$$X : M \rightarrow TM$$

tal que  $p \rightarrow X(p) = X_p \in T_p M$ .

A continuación siguen un par de ejemplos.

1. Sea  $X$  el campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  definido por  $X(x, y) = (x, y)$ .

Figura 6.1

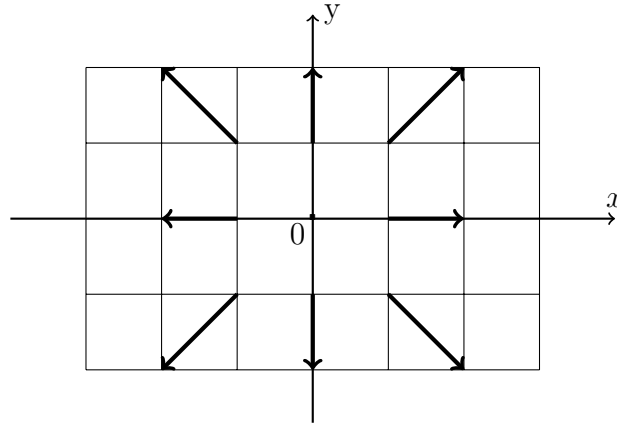


Figura 6.1

2. Sea  $Y$  el campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  definido por  $Y(x, y) = (y, -x)$ .

Figura 6.2.

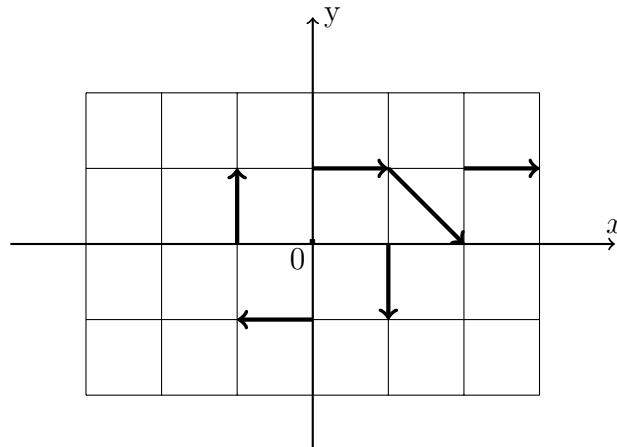


Figura 6.2

Un campo vectorial se dice **diferenciable** si la función  $X : M \rightarrow TM$  es diferenciable. Al considerar una parametrización  $(U, x)$  de  $M$ , centrada en  $p \in M$ , con funciones de coordenadas  $x_1, \dots, x_k$  es posible escribir cualquier campo  $X$  en esta parametrización

$$X(p) = X_p^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + X_p^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (6.1)$$

donde cada  $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $X^i : p \rightarrow X_p^i$  es una función en  $U$  y  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\}$  es la base asociada con la parametrización  $x$ . Es claro que  $X$  es diferenciable si y sólo si las funciones  $X^i$  son diferenciables para alguna (y en este caso, para toda) parametrización.

Como cada campo vectorial se comporta también como una derivación  $X : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{F}$  del conjunto  $\mathfrak{D}$  de las funciones diferenciables en  $M$  en el conjunto  $\mathfrak{F}$  de las funciones en  $M$ , definidas por

$$(Xf)(p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^k X_p^i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Big|_0 \quad (6.2)$$

donde  $F = f \circ x$  es la expresión de  $f$  en la parametrización  $(U, x)$ . Es inmediato verificar que, la función  $Xf$  en 6.2 no depende de la escogencia de la parametrización.

Se observa que si  $\varphi : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable en una vecindad de  $\varphi(p)$ , entonces

$$[d\varphi(v)](f) \Big|_{\varphi(p)} = v(f \circ \varphi) \Big|_p \quad \circ \quad d\varphi(v)f(\varphi(p)) = v(f \circ \varphi)(p) \quad (6.3)$$

En efecto, sea  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  una curva diferenciable tal que  $\alpha(0) = p$ ,  $v = \alpha'(0)$ , entonces

$$[d\varphi(v)](f) \Big|_{\varphi(p)} = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha) \Big|_p = v(f \circ \varphi) \Big|_p.$$

**Lema 6.2.1** Sean  $X, Y$  campos vectoriales diferenciables sobre una  $k$ -superficie  $M$ . Entonces existe un único campo vectorial  $Z$  sobre  $M$  tal que, para todo  $f \in \mathfrak{D}$  y para cada  $p \in M$ ,

$$Z_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

### Demostración

Primero se demuestra la unicidad bajo el supuesto que existe. Por lo tanto, sea  $p$  un punto de  $M$  y  $(U, x)$ , con coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$ , una parametrización local de  $M$  centrada en  $p \in U$ .

(a) Unicidad. Si

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

las expresiones de  $X$  e  $Y$  en esta parametrización. Entonces para todo  $f \in \mathcal{D}$ , con expresión en coordenadas  $F = f \circ x$  y omitiendo el punto  $p$ , se tiene,

$$\begin{aligned} XYf &= X \left( \sum_j Y^j \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \\ YXf &= Y \left( \sum_i X^i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Por lo tanto,  $Z$ , en esta parametrización, está dado por

$$\begin{aligned} Z(f) &= XYf - YXf = \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_i \sum_j \left( X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial F}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

con lo que

$$Z_i = \sum_j \left( X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x_j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x_j} \right) \quad (6.6)$$

(b) Existencia. Se define  $Z_\alpha$  en cada vecindad coordenada  $U_\alpha$  de la estructura diferenciable  $(U_i, x_i)$  de  $M$  por la expresión anterior. Por la unicidad,  $Z_i = Z_j$  en  $x_i(U_i) \cap x_j(U_j) \neq \emptyset$ , lo que permite definir  $Z$  en toda la variedad  $M$ .

Lo que demuestra el Lema.  $\diamond$

**Definición 6.2.1 [Corchete de Lie].** Sean  $X$  e  $Y$  campos vectoriales diferenciables sobre una  $k$ -superficie  $M$ . Se define el campo vectorial  $[X, Y]$ , llamado **Corchete de Lie** de  $X$  e  $Y$  por

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$$

para todo  $p \in M$  y toda función diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 6.2.1 Propiedades del Corchete de Lie

La operación corchete de Lie tiene las siguientes propiedades

**Proposición 6.2.1** Sean  $X, Y$  y  $Z$  campos vectoriales diferenciables sobre una  $k$ -superficie  $M$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  y sean  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  funciones diferenciables, entonces

(a) *Anticonmutatividad*

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

(b) *Linealidad*

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

(c) *Identidad de Jacobi*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

(d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

**Demostración** Son inmediato (a) y (b). Para demostrar (c), se observa que

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX \\ [[Y, Z], X] &= [YZ - ZY, X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY \\ [[Z, X], Y] &= [ZX - XZ, Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ \end{aligned}$$

al sumar estas igualdades miembro a miembro y usando (a) se concluye (c).

Finalmente, se demuestra (d)

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) = fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X \\ &= fg[Y, Y] + fX(g)Y - gY(f)X \end{aligned}$$

✓

### § 6.3 Curvas Integrales y Flujo Local

Como una  $k$ -superficie es localmente difeomorfa a un  $\mathbb{R}^k$ , el Teorema fundamental de existencia, unicidad y dependencia de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que es un Teorema local, se extiende naturalmente a las  $k$ -superficies. Es necesario enunciarlo explícitamente para usarlo posteriormente.

Sea  $X$  un campo vectorial diferenciable sobre una  $k$ -superficie  $M$  y sea  $p \in M$ . Entonces existen una vecindad  $U \subseteq M$  de  $p$ , un intervalo  $(-\delta, \delta)$ ,  $\delta > 0$  y una función diferenciable  $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \rightarrow M$  tales que la curva

$$t \rightarrow \varphi(t, q), \quad t \in (-\delta, \delta), \quad q \in U$$

es la única curva que satisface

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = X(\varphi(t, q))$$

con  $\varphi(0, q) = q$ .

Una tal curva  $\alpha : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  que satisface la condición  $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$  con  $\alpha(0) = q$  se llama **trayectoria** o **curva integral** del campo  $X$  que pasa por el punto  $q$  cuando  $t = 0$ .

También se garantiza que por cada punto de cierta vecindad pasa una única curva integral del campo vectorial  $X$ ; la función así obtenida depende diferenciablemente de  $t$  y de la condición inicial  $q$ . Es común utilizar la notación  $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$  y llamar  $\varphi_t : U \rightarrow M$  el **flujo local** de  $X$ .

Además, existe  $\delta > 0$  tal que

- (a)  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$  ( $|s| < \delta$ ,  $|t| < \delta$ ,  $|s+t| < \delta$ ),
- (b)  $\varphi_r \circ (\varphi_s \circ \varphi_t) = (\varphi_r \circ \varphi_s) \circ \varphi_t = \varphi_{r+s+t}$ , ( $|r| < \delta$ ,  $|s| < \delta$ ,  $|t| < \delta$ ,  $|r+s+t| < \delta$ ),
- (c)  $\varphi_0$  es la función identidad,

$$(d) \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}.$$

La prueba de (a) y (b) se obtienen como aplicaciones directa del Teorema fundamental de existencia, unicidad y dependencia de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias, (c) es inmediato y (d) se deducen de (a).

Finalmente, esta colección de transformaciones  $\varphi_t$  se conoce como el **grupo local 1-paramétrico** del campo  $X$ .

A continuación se consideran dos ejemplos.

1. Considere el campo vectorial,  $X(x, y) = (x, y)$ , en  $\mathbb{R}^2$ , Figura 6.1 y calcule, en general, las curvas integrales. En efecto, por definición de curva integral se debe tener

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned} \tag{6.7}$$

con lo que  $x = pe^t$ ,  $y = qe^t$ . Al suponer  $p \neq 0$  se obtiene  $y = \frac{q}{p}x$ . Lo que implica que las trayectorias son rayos que parten desde el origen. El origen es una trayectoria separada.

2. Considere el campo vectorial  $Y(x, y) = (y, -x)$  dado en la Figura 6.2. Se procede, de manera general, a calcular sus trayectorias. En efecto, por definición de trayectoria se debe tener

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

y los autovalores de matriz asociada al sistema son  $\lambda = \pm i$  con  $i = \sqrt{-1}$ .

Los autovalores de  $\lambda = i$  se calculan con

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

con lo que  $u_2 = i u_1$ , es decir, los autovalores están dados por

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i u_2 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = u_1 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (6.10)$$

y así las trayectorias están dadas por (ver, por ejemplo, [23] página 569, para las soluciones complejas):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

$a, b \in \mathbb{R}$ .

## § 6.4 Derivada de Lie para Campos Vectoriales

Los campos vectoriales se pueden derivar con respecto a otro campo vectorial. El resultado de la derivada se conoce como la DERIVADA DE LIE PARA CAMPOS VECTORIALES y se define a continuación. Se fija un campo vectorial  $X$  sobre una  $k$ -superficie  $M$ . Se usará  $X_t$  para denotar el grupo local a un parámetro de transformaciones asociado con el campo vectorial  $X$ . Sea  $Y$  otro campo vectorial diferenciable sobre  $M$ . Se definirá la derivada de  $Y$  con respecto a  $X$  en un punto  $m \in M$ . Primero se sigue con la curva integral de  $X$  alrededor del punto  $m$ ,  $X_t(m)$  y se evalúa  $Y$  en este punto. Entonces trasladamos  $Y_m$  hacia  $T_{X_t(m)}M$  via la diferencial  $X_{t*}$  del difeomorfismo  $X_t$ . En  $T_{X_t(m)}M$  se toma la diferencia de los vectores

$$Y_{X_t(m)} \quad \text{y} \quad X_{t*}Y_m$$

se divide esta diferencia por  $t$  y entonces se toma límite cuando  $t \rightarrow 0$ . El resultado es un campo vectorial que se denomina DERIVADA DE LIE de  $Y$  respecto a  $X$  en  $m$  y se denota por  $(L_X Y)_m$ . Esto es, se define (ver Figura 6.3)

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{X_t(m)} - X_{t*}Y_m}{t}, \quad (6.12)$$

este límite siempre existe como se verá posteriormente.



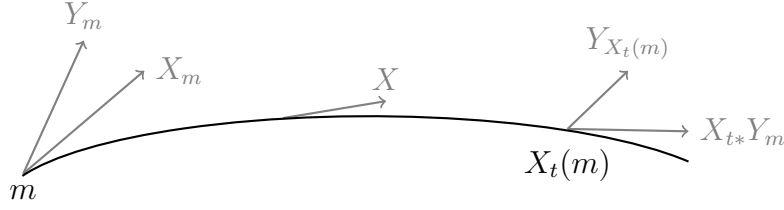


Figura 6.3

### 6.4.1 Observaciones

1. La derivada de Lie toma la siguiente forma (ver Figura 6.3):

$$\begin{aligned} (L_X Y)_m &= \lim_{t \rightarrow 0} X_{t*} \frac{X_{-t*} Y_{X_t(m)} - Y_m}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X_{-t*} Y_{X_t(m)} - Y_m}{t}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

2. De (6.13), se puede expresar la derivada de Lie como

$$(L_X Y)_m = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X_{-t*} Y_{X_t(m)} \quad (6.14)$$

3. Se puede considerar el campo vectorial  $Y$  y el respectivo campo vectorial  $X_{t*}Y$  que en general no son comparables, pero al evaluarlos en un mismo punto, sus resultados estarán en un mismo espacio tangente y se pueden restar, sumar o multiplicar por escalares así que también es costumbre presentar la derivada de Lie en el punto  $m$  como

$$(L_X Y)_m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Y - X_{t*}Y](X_t(m)), \quad (6.15)$$

en realidad los dos límites coinciden.

4. Para no entrar en una discusión de formas se define la derivada de Lie de una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , en dirección de un campo vectorial  $X$  sobre  $M$ , como  $X(f)$ , es decir

$$L_X f = X(f)$$

**Lema 6.4.1 (Lema de Hadamard).** *Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable en un  $U$  de  $x$ . Entonces para  $t$  suficientemente pequeño, existe una función  $g_t$  continuamente diferenciable en  $t$  y cerca al punto  $x$ , tales que*

$$g_0(x) = X_x(f)$$

y

$$f(X_t x) = f(x) + t g_t(x)$$

esto es

$$f \circ X_t = f + t g_t.$$

Esto es, una versión del Teorema del Valor Medio en el contexto de curvas integrales o en el **grupo local 1-paramétrico** del campo  $X$ .

Al aceptar el Lema de Hadamard por un momento, se puede verificar la existencia del límite. En efecto,

$$\begin{aligned} (L_X Y)_m(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{X_t(m)} - X_{t*} Y_m}{t}(f) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{X_t(m)}(f) - Y_m(f + t g_t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{X_t(m)}(f) - Y_m(f)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} Y_x(g_t) \\ &= X_x\{Y(f)\} - Y_x(\lim_{t \rightarrow 0} g_t) \\ &= X_x Y(f) - Y_x X(f); \end{aligned} \tag{6.16}$$

no sólo se ha demostrado que el límite existe, también se ha demostrado que

$$L_X Y = [X, Y]$$

el corchete de Lie.

**Demostración del Lema de Hadamard.** Se define

$$F(t, s) = (f \circ X_t)(x), \quad x \in U \subseteq M.$$

Se fija  $t$  y  $x$  y se hace  $\mathcal{F}(s) = F(st, x)$ . Si se denota con  $F_1$  la derivada de  $F$  respecto la primera variable, entonces

$$\begin{aligned} f \circ X_t(x) - f(x) &= \mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(0) = \int_0^1 \mathcal{F}'(s) ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} F(st, x) = \int_0^1 t F_1(st, x) ds \end{aligned} \quad (6.17)$$

así, al definir

$$g_t(x) = \int_0^1 F_1(st, x) ds,$$

entonces

$$f \circ X_t(x) - f(x) = t g_t(x).$$

Aunque, se observe

$$\begin{aligned} g_0(x) &= \int_0^1 F_1(0, x) ds = F_1(0, x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t, x) - F(0, x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ X_t(x) - f(x)}{t} = X_x(f). \end{aligned} \quad (6.18)$$

## § 6.5 Ejercicios

1. Sea  $M = \mathbb{R}^2$ . Calcular las curvas integrales de los siguientes campos vectoriales:
  - (a)  $a(x, y) = (y, x)$ ,
  - (b)  $b(x, y) = (x - y, x + y)$ .
2. Un campo vectorial se dice **completo** si el dominio de cualquier curva integral se puede extender a todo  $\mathbb{R}$ . Determinar si los siguientes campos vectoriales son completos

(a)  $c(x, y) = (-y, x),$

(b)  $d(x, y) = (x - y, y),$

en  $\mathbb{R}^2$ .

3. Probar las propiedades de grupo local 1-paramétrico presentadas en la página 110.
4. Sea  $\gamma(t)$  una curva integral de un campo vectorial  $X$  de  $M$ . Suponga que  $\gamma(t) = 0$  para algún  $t$ . Probar que  $\gamma$  es una función constante, es decir, su rango consiste de un punto.
5. Sean  $M$  una  $k$ -superficie  $(U, \varphi)$  una parametrización local con coordenadas  $x_1, \dots, x_k$ , entonces probar que

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0.$$

6. En  $\mathbb{R}^2$ , calcular  $L_i X$  donde  $i = (1, 0)$  y  $X = (x, 0)$ .
7. Sean  $M$  una  $k$ -superficie  $X, Y, Y_1, Y_2$  campos vectoriales  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Entonces probar
  - (a)  $[X, Y]_p(fg) = f(p)[X, Y]_p(g) + g(p)[X, Y]_p(f),$
  - (b)  $L_X(Y_1 + Y_2) = L_X Y_1 + L_X Y_2,$
  - (c)  $L_X(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot L_X Y,$
  - (d)  $L_{[X, Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X.$

# Capítulo 7

## Orientación

### § 7.1 Introducción

En el caso de  $\mathbb{R}^n$ , los sistemas de coordenadas  $(x_i), (y_i)$  en  $\mathbb{R}^n$ , que ambos podrían ser la identidad  $i$ , se dicen **consistentemente orientadas** o simplemente **consistentes** si el Jacobiano del cambio de parámetro

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$$

es positivo en donde esté definido.

1. En  $\mathbb{R}^2$  los sistemas coordenados relacionados por

$$y_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \operatorname{sen} \theta, \quad y_2 = -x_1 \operatorname{sen} \theta + x_2 \cos \theta,$$

es decir, relacionados por una rotación, son consistentes.

2. En  $\mathbb{R}^2$  el sistema de coordenadas relacionados por

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = -x_2,$$

es decir, relacionados por una reflexión, no son consistentes.

## § 7.2 Orientación de Superficies

**Definición 7.2.1** Una  $k$ -superficie regular se dice **orientable** si posee una estructura diferenciable tal que para cualquier par de parametrizaciones  $(U, x)$ ,  $(V, y)$  en donde  $x(U) \cap y(V) = W \neq \emptyset$ , los sistemas de coordenadas asociados  $(x_i)$ ,  $(y_i)$  son consistentes, es decir, la función de cambio de coordenadas

$$y^{-1} \circ x : x^{-1}(W) \rightarrow y^{-1}(W)$$

tal que  $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (y_1, \dots, y_k)$  se verifica que

$$\det d(y^{-1} \circ x) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} > 0$$

en cada punto  $x^{-1}(W)$ .

Dos estructuras diferenciables tal que cualquier parametrización de la primera estructura se relaciona por un determinante jacobiano negativo con cualquier parametrización de la otra se dice que tienen orientación **opuesta** para la superficie. Una estructura consistentemente orientada se puede obtener de un atlas con orientación opuesta cambiando el signo de una coordenada en particular, por ejemplo, cambiando el signo en la primera coordenada en cada sistema de coordenadas o tomando una permutación impar en cada sistema.

Cada una de las superficies:

- $\mathbb{R}^k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,
- subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^k$ ,
- imagen de una función diferenciable  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $U$  subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^k$ ,

se pueden cubrir por una sólo carta y por lo tanto son orientables.

El Teorema que sigue demuestra que, toda  $n$ -superficie orientable implica que para cualquier par de parametrizaciones  $(U_1, x)$   $(U_2, y)$  el determinante Jacobiano del cambio de parámetro tiene el mismo signo sobre toda la intersección  $U_1 \cap U_2$ . Situación que resulta de gran utilidad para demostrar que algunas  $k$ -superficies no son orientables.

**Teorema 7.2.1** *Sea  $M$  una  $k$ -superficie orientable, entonces para todo par de parametrizaciones  $(U_1, x)$  y  $(U_2, y)$  de  $M$  con coordenadas  $(x_i)$ ,  $(y_i)$ , respectivamente,  $U_1$  y  $U_2$  conexos,  $x(U_1) \cap y(U_2) = W \neq \emptyset$ , implica que*

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$$

*tiene el mismo signo sobre  $x^{-1}(W)$ .*

**Demostración** Como  $U_1$  y  $U_2$  heredan la orientación de  $M$ , entonces existe una estructura diferenciable  $(V_i, \psi_i)$  sobre  $U_1$  para el cual el determinante Jacobiano es positivo sobre la intersección de cualquier par de cartas. Entonces según  $U_1$ , que es conexo, es o no consistentemente orientado con el atlas  $\{(V_i, \psi_i)\}$  y

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)}$$

es mayor o menor que cero en cada punto de  $U_1$  y en particular, en cada punto de  $U_1 \cap U_2$ , donde  $(z_i)$  son las funciones de coordenadas para la parametrización  $(V_i, \psi_i)$  apropiada a los puntos en asunto. De la misma forma,

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)}$$

es mayor o menor que cero en cada punto de  $U_1 \cap U_2$  de acuerdo como  $(U_2, y)$  sea consistente o de orientación opuesta a la estructura diferenciable  $(V_i, \psi_i)$ . Como

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} = \frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)}$$

entonces que

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$$

es positivo sobre  $U_1 \cap U_2$  si  $(U_1, x)$  y  $(U_2, y)$  son ambos consistentemente orientados o ambos opuestamente orientados a  $(V_i, \psi_i)$ ; será negativo sobre todo  $U_1 \cap U_2$  si la orientación  $(U_1, x)$  y  $(U_2, y)$  con respecto a  $(V_i, \psi_i)$  son diferentes.  $\checkmark$

**Ejemplo 7.2.1** Ahora, se está en condiciones para presentar un ejemplo de una 2–superficie que no es orientable, se trata de la famosa **banda de Möbius** que se obtiene siguiendo la idea elemental que proporciona la construcción de un cilindro a partir de un rectángulo de papel y pegando dos lados paralelos, es decir, identificando estos lados. Se puede, por ejemplo, dar una media vuelta a uno de estos lados en el proceso para entonces obtener como resultado la **banda de Möbius**.

Siguiendo la idea anterior, se puede definir la banda de Möbius como el cociente  $X/\sim$ , donde  $X$  es la banda

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, -1 < y < 1\}$$

y  $\sim$  es la relación definida por  $(x, y) \sim (z, w)$  si y sólo si  $z = x + 2$  y  $w = -y$ ; con lo que  $(x, y) \sim (x + 2, -y)$ , ver Figura 7.1.



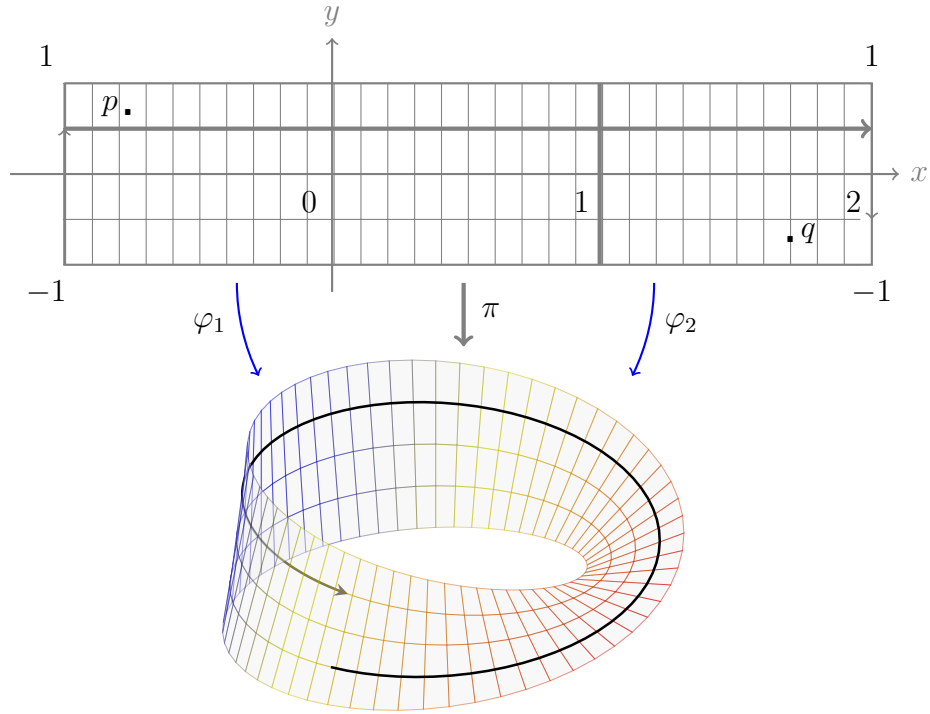


Figura 7.1

También,

$$(-1, -1) \sim (1, 1), \quad (-1, 1) \sim (1, -1), \quad p \sim q.$$

Sea  $\pi : X \rightarrow X/\sim$  tal que  $\pi(x, y)$  sea la clase de equivalencia de  $(x, y)$  bajo la relación  $\sim$ . Entonces  $X/\sim$  se puede cubrir con la imagen de dos parametrizaciones  $(U_1, \varphi_1)$  y  $(U_2, \varphi_2)$  donde

$$U_1 = \{(x, y) : -1 < x < 1, \quad -1 < y < 1\}$$

$$U_2 = \{(x, y) : 0 < x < 2, \quad -1 < y < 1\},$$

$\varphi_1 : U_1 \rightarrow X/\sim$  definida por  $\varphi_1(x, y) = \pi(x, y)$ ,  $(x, y) \in U_1$ . De igual manera,  $\varphi_2$  es la función

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow X/\sim.$$

definida también por  $\varphi_2(x, y) = \pi(x, y)$ ,

Se puede escribir entonces

$$W = \varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2) = \pi((-1, 1) \times (-1, 1)) \cup \pi((1, 2) \times (-1, 1))$$

que es unión de dos conjuntos abiertos disyuntos. Como los puntos de  $(0, 1) \times (-1, 1)$  están uno a uno relacionados con  $(1, 2) \times (-1, 1)$ , entonces

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : ((0, 1) \cup (1, 2)) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dada por

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si } (x, y) \in (0, 1) \times (-1, 1) \\ (x - 2, -y) & \text{si } (x, y) \in (1, 2) \times (-1, 1) \end{cases}$$

claramente es una función diferenciable. Por lo tanto,

$$\det d(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in (0, 1) \times (-1, 1) \\ -1 & \text{si } (x, y) \in (1, 2) \times (-1, 1) \end{cases}$$

Lo que muestra que la **banda de Möbius** no es orientable.

**Ejemplo 7.2.2** Una  $k$ -superficie que admite un atlas de dos parametrizaciones  $(U_1, x)$ ,  $(U_2, y)$  para la cual  $U_1 \cap U_2$  es conexo, es orientable.

**Demostración** Se supone que las parametrizaciones  $(U_1, x)$ ,  $(U_2, y)$  tienen sistemas de coordenadas  $(x_i)$ ,  $(y_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Entonces, como  $U_1 \cap U_2$  es conexo,

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_k)}{\partial(x_1, \dots, x_k)}$$

tiene signo constante sobre  $U_1 \cap U_2$ . Si el signo es positivo, entonces los sistemas de coordenadas son consistentes y la superficie es orientable. Si el signo es negativo, entonces los sistemas de coordenadas  $(x_1, \dots, x_k)$  y  $(-y_1, \dots, y_k)$  son consistentemente orientados y de nuevo la  $k$ -superficie es orientable.  $\checkmark$

**Ejemplo 7.2.3** Como caso particular del ejemplo anterior se tiene que cada una de las esferas  $S^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  es una  $n$ -superficie orientable, ya que mediante la proyección estereográfica  $S^n$ , para cada  $n = 1, 2, 3, \dots$  admite un atlas con dos cartas y la intersección de las dos vecindades coordenadas es conexa.

**Teorema 7.2.2** Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  una superficie regular, de dimensión  $m$ ; si existen  $n - m$  campos vectoriales normales continuos

$$v_1, \dots, v_{n-m} : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

linealmente independientes en cada  $p \in M$ , entonces  $M$  es orientable.

**Demostración** Sea  $\mathcal{P}$  el conjunto de todas las parametrizaciones  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq M$  tales que

- i)  $U_0$  es convexo, por ejemplo bolas centradas en el origen, y
- ii) Para todo  $x \in U_0$ , la matriz de tamaño  $n \times n$ ,

$$\Phi(x) = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x), v_1(\varphi(x)), \dots, v_{n-m}(\varphi(x)) \right]$$

cuyas columnas son los vectores indicados tiene determinante positivo.

Para cada  $x \in U_0$ , Note que  $\Phi(x)$  es invertible ya que sus primeras  $m$  columnas forman una base para  $T_{\varphi(x)}M$  y las restantes forman una base para el complemento ortogonal de ese subespacio en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $\Phi(x)$  depende continuamente de  $x$ , su determinante no cambia de signo en el conjunto conexo  $U_0$ .

Si para una cierta parametrización  $\det \Phi(x) < 0$  se puede cambiar el signo de  $\varphi$  y obtener  $\varphi_1 \in \mathcal{P}$ , con la misma imagen  $U$ . Por lo tanto,  $\mathcal{P}$  es un atlas para  $M$ . Para demostrar que  $\mathcal{P}$  es coherente, sean

$$\varphi : U_0 \rightarrow U, \quad \psi : V_0 \rightarrow V$$

pertenecientes a  $\mathcal{P}$  y  $p = \varphi(x) = \psi(x) \in U \cap V$ . Si  $(\psi^{-1} \circ \phi)'(x) = (A_{ij}) = A$ , entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^m A_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(y).$$

Esto indica, en términos de matrices, que  $\Phi(x) = \Psi(y) \times \bar{A}$ , con  $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n - m$ . Como  $\det \Phi(x) > 0$  y  $\det \Psi(x) > 0$ , resulta entonces que

$$0 < \det \bar{A} = \det A = \det(\psi^{-1} \circ \phi)'(x).$$

Y la demostración se ha terminado.  $\diamond$

### § 7.3 Orientación de Superficies e Imagen Inversa

Primero se dan las condiciones para que la imagen inversa de un punto, bajo una función diferenciable, sea una superficie regular. En efecto, una función diferenciable

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

definida en un conjunto abierto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice que tiene en  $p \in A$  un punto crítico si  $dF_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  no es sobreyectiva. La imagen  $F(p) \in \mathbb{R}^m$  de un punto crítico se llama valor crítico. Un punto de  $\mathbb{R}^m$  se dice valor regular si no es un valor crítico.

La terminología se motiva desde el caso particular en que  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de valor real en una variable real. Un punto  $p \in A$  es crítico si  $f'(p) = 0$ , esto es, la diferencial  $df_p$  envía todo vector de  $\mathbb{R}$  en cero, lo que implica que la  $df_p$  no es sobreyectiva. También note que cualquier  $a \notin f(A)$  es trivialmente un valor regular.

Si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable y  $p = (p_1, \dots, p_n)$ , entonces la diferencial  $df_p$  aplicado al vector  $e_i = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$  se obtiene calculando el vector tangente en  $f(p)$  a la curva

$$x_i \rightarrow f(p_1, \dots, p_{i-1}, x_i, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

y entonces

$$df_p(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

Se concluye que la matriz asociada con  $df_p$  relativo a la base

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

es dada por

$$df_p = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_p$$

Note, por lo menos en este caso, que la  $df_p$  no es sobreyectiva es equivalente a que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$$

Por lo tanto,  $a \in f(A)$  es un valor regular de  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si y sólo si

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0, \quad \text{para algún } i = 1, \dots, n$$

en cada uno de los puntos de la imagen inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in A : f(x_1, \dots, x_n) = a\}.$$

De igual manera, si  $f = (f_1, \dots, f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $a \in A$  es un valor regular de  $f$  (con lo que  $n \geq m$ ),  $p \in f^{-1}(a)$  e indicando con

$$q = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{n=m+k}$$

y si  $a$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $df_p$  es sobreyectiva, con lo que se puede suponer (haciendo una reordenación de las variables si es necesario) que

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(p) \neq 0,$$

ya que el rango de de la diferencial de  $f$  en  $p$  es  $m$ . Se demostrará el siguiente resultado:

**Lema 7.3.1** *Considere  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función diferenciable y  $a \in f(A)$  es un valor regular de  $f$ , entonces  $f^{-1}(a)$  es una superficie regular, de dimensión  $k = n - m$ .*

**Demostración** Sea  $p \in f^{-1}(A)$ . Se hace la siguiente notación

$$x = (x_1, \dots, x_k), \quad y = (y_1, \dots, y_m), \quad a = (a_1, \dots, a_m)$$

$$(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$$

y  $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$  denota a la función  $f$ .

Como  $a$  es un valor regular de  $f$ . se asume, reordenando los ejes si es necesario, que

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(p) \neq 0$$

en  $p$ . Se define la función  $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$F(x, y) = (x_1, \dots, x_k, f_1(x, y), \dots, f_m(x, y)),$$

entonces

$$\det(dF_p) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(p) \neq 0$$

El teorema de la función inversa garantiza la existencia de conjuntos abiertos  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $F(p)$  tal que  $F : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo. Y sigue que  $F^{-1} : V \rightarrow U$  también es un difeomorfismo y tiene la forma

$$F^{-1}(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m) = (x_1, \dots, x_k, g(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m)).$$

Haciendo  $(x, t) = (x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m) \in V$ ,

$$g(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m) = (g_1(x, t), \dots, g(x, t)),$$

y se denota la función proyección de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}^k$  por  $\pi$ , esto es

$$\pi(x, y) = x.$$

Ahora, cualquier punto  $(x, y) \in f^{-1}(a) \cap U$  tiene la forma

$$\begin{aligned} (x, y) &= F^{-1} \circ F(x, y) = F^{-1}(x_1, \dots, x_k, f(x, y)) \\ &= F^{-1}(x, a) = (x, g(x, a)) \end{aligned} \quad (7.1)$$

con  $x$  en el abierto  $\pi(U)$  de  $\mathbb{R}^k$ . Sea  $h(x) = g(x, a)$ , entonces

$$f^{-1}(a) \cap U = \{(x, h(x)) : x \in \pi(U)\} = \text{gráf } h \cap U. \quad (7.2)$$

Lo que muestra que  $f^{-1}(a) \cap U$  es una carta local de  $p$ , por ser la gráfica de una función diferenciable y por lo tanto cualquier punto  $p \in f^{-1}(a)$  se puede cubrir con una carta local; lo que demuestra que  $f^{-1}(a)$  es una  $k$ -superficie.  $\diamond$

Como caso particular, se presenta una prueba relativamente simple para ver que

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

es una  $n$ -superficie: sea  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definida con

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Observe que  $f^{-1}(1) = S^n$  y como  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ , entonces  $x \neq 0$  y para algún  $i = 1, \dots, n+1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \neq 0,$$

con lo que 1 es valor regular de  $f$ , por lo tanto  $S^n$  es una  $n$ -superficie regular.

**Ejemplo 7.3.1** Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función suave con  $n \geq m$ , entonces  $M = f^{-1}(c)$  es una superficie orientable, si  $c$  es un valor regular de  $f$ .

**Solución.** En efecto, sea  $c = (c_1, \dots, c_m)$  entonces  $M \subseteq f_i^{-1}(c_i)$  para cada  $i = 1, \dots, m$ . Así, para cada  $p \in M$  y cada  $v \in T_p M$ , sea  $\lambda : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  un camino diferenciable, con  $\lambda(0) = p$ ,  $\lambda'(0) = v$  entonces  $f_i(\lambda(t)) = c_i$  para todo  $t$  y cada  $i = 1, 2, \dots, m$  y por lo tanto,

$$0 = \langle \text{grad } f_i(p), \lambda'(t) \rangle \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

lo que muestra que  $\text{grad } f_i \perp M$ . Además  $\text{grad } f \in C^\infty(M)$ .

Como  $c$  es valor regular de  $f$  en cada punto  $p \in M = f^{-1}(c)$ , la derivada

$$f'_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

es sobreyectiva. Por lo tanto, las  $m$ -filas de la matriz de  $f'_p$  son linealmente independientes y esas filas son los vectores  $\text{grad } f_i|_p$ . Lo prueba el ejemplo, en virtud del último teorema.

## § 7.4 Ejercicios

1. Demostrar que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ , es decir el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^2$ , es orientable.
2. Demostrar que

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \right\}$$

con  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $c > 0$  es orientable.

3. Demostrar que el toro  $T^2$  de revolución es orientable.
4. Probar que el hiperboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es una superficie orientable.



- 
5. Probar que toda  $k$ -superficie difeomorfa a una superficie orientable es orientable.
  6. Demostrar que el fibrado tangente de una  $k$ -superficie es orientable.
  7. Demostrar que si una 2-superficie regular  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  contiene una Banda de Möbius, entonces  $M$  no es orientable.
  8. Usar campos vectoriales normales para dar otra demostración de la no orientabilidad Banda de Möbius.
  9. Probar que la Botella Klein no es orientable.
  10. Demostrar que  $\mathbb{R}P^m$ 
    - (a) es orientable si  $m$  es impar;
    - (b) no orientable si  $m$  es par.
  11. Demostrar que  $Gl(n)$  el conjunto de todas las matrices invertibles de tamaño  $n \times n$  con entradas reales es una  $n^2$ -superficie orientable.
  12. Sea  $O(n)$  el conjunto de todas las matrices ortogonales, esto es, el conjunto de todas las matrices  $A$  de tamaño  $n \times n$  tales que  $A \times A^t = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad. Probar
    - (a)  $S(n)$  es una  $n(n+1)/2$ -superficie, donde  $S(n)$  es el conjunto de todas las matrices simétricas,
    - (b) si  $f : M(n) \rightarrow S(n)$  es la función definida por  $f(A) = AA^t$ , entonces  $df_A(B) = BA^t + AB^t$ ; y que  $O(n) = f^{-1}(I)$ ,
    - (c)  $I$  es valor regular de  $f$  si y sólo si  $df_A$  es sobreyectiva para todo  $A \in O(n)$ . (Use el hecho que si  $C \in S(n)$ , entonces
 
$$C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t,$$
    - (d)  $O(n)$  es una  $n(n-1)/2$ -superficie regular orientable,
    - (e)  $O(n) \subseteq S^n \times \cdots \times S^n$ , ( $n$ -factores de  $S^n$ ).
-

## Parte III

### Geometría Diferencial de Superficies en $\mathbb{R}^3$

# Capítulo 8

## Primera Forma Fundamental

### § 8.1 Introducción

Se introducirá la primera forma fundamental, expresión que permite calcular longitud de curvas, áreas sobre superficies. Posteriormente, se analizan algunas de sus propiedades y se caracteriza el área de una superficie en función de su primera forma fundamental.

### § 8.2 Primera Forma Fundamental

Sea  $M$  una 2–superficie, se restringe el trabajo a una vecindad coordinada  $(U, x)$  de  $M$ . Así que  $x(u, v)$  con  $(u, v) \in U$ ; y se considera la curva  $\Gamma$  sobre  $M$  definida por la imagen bajo  $x$  de

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in J = [a, b]$$

A lo largo de la curva  $\Gamma$ ,  $x$  es una función de  $t$ , es decir,  $\Gamma$  es de la forma

$$r(t) = x(u(t), v(t)),$$

con  $t$  en un intervalo  $J$ .

La longitud de arco  $s = s(t)$  está relacionado con el parámetro  $t$  ( $t$  en el

interior de  $J$ ) por la fórmula

$$s = \int_{t_0}^t \|r'(t)\| dt, \quad a < t_0 < t, \quad (8.1)$$

aunque  $r'(t) \in T_{r(t)}M$ , se puede usar el producto interior del ambiente,  $\mathbb{R}^3$ , para obtener entonces

$$\begin{aligned} ds^2 &= \|r'(t)\|^2 = \langle r'(t), r'(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv, \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle du du + 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle du dv + \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle dv dv, \end{aligned}$$

haciendo

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \quad F = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \quad G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle. \quad (8.2)$$

y escribiendo  $A^2 = A \cdot A$ , entonces

$$I = ds^2 = E du^2 + 2F dudv + G dv^2 \quad (8.3)$$

recibe el nombre de primera forma cuadrática fundamental o primera forma fundamental.

## Observaciones

1. La primera forma fundamental se puede escribir

$$I = ds^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

la matriz

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada a  $I$ .

2. La primera forma fundamental es definida positiva. En efecto, como

$$ds^2 = (du \ dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

y como los puntos de la superficie  $M$  son regulares, se tiene

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle > 0, \quad G = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle > 0,$$

entonces la identidad de Lagrange implica que

$$|\mathcal{F}_1| = EG - F^2 = \left\| \frac{\partial}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial}{\partial v} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle^2 = \left\| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right\|^2 > 0$$

y el criterio de Sylvester, en Álgebra Lineal, asegura que la primera forma fundamental es definida positiva<sup>1</sup>.

3.  $ds^2$  es invariante bajo un cambio de parámetro.

Es una aplicación de la regla de la cadena en la forma cuadrática al hacer el cambio de variable. En efecto, Sea  $M$  una superficie y  $x(u, v)$  un sistema de coordenadas locales. Si se realiza el cambio de parámetros  $u = u(\alpha, \beta)$ ,  $v = v(\alpha, \beta)$ , entonces la primera forma fundamental en los parámetros  $\alpha, \beta$  satisface (para simplificar, por

---

<sup>1</sup>Ver, por ejemplo, HERNANDEZ E. *Álgebra y Geometría*, Addison-Wesley. 1994. página 542

un momento, se denotará  $A^2 = \langle A, A \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \tilde{E}d\alpha^2 + 2\tilde{F}d\alpha d\beta + \tilde{G}d\beta^2 \\
 &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta}d\beta, \frac{\partial x}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta}d\beta \right\rangle \\
 &= \left( \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) d\alpha + \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \beta} \right) d\beta \right)^2 \\
 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial v}{\partial \beta} d\beta \right) \right)^2 \\
 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right\rangle \\
 &= E du^2 + 2F dudv + G dv^2.
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $ds^2$  es invariante bajo cambio de parámetros.

### § 8.3 Longitud y Área

En lo que sigue se mantiene la misma notación anterior,

1. La distancia entre  $p = x(u(t_0), v(t_0))$  y  $q = x(u(t), v(t))$  sobre la curva  $\Gamma$  puede expresarse en la forma siguiente:

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{E \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left( \frac{dv}{dt} \right)^2} dt. \quad (8.4)$$

2. Sea  $M$  una 2-superficie, se supone que la vecindad coordenada  $(U, x)$  de  $M$ , es tal que  $\overline{x(U)} = M$ . Por lo tanto,

$$\text{Área}(M) = \iint_U \left\| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right\| du dv = \iint_U \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

por lo tanto, el elemento de área  $dA$ , es dado por

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (8.5)$$

3. El vector normal exterior a la superficie  $N = N(u, v)$  o función de Gauss está dada por

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|}, \quad (8.6)$$

lo que equivale a,

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (8.7)$$

## § 8.4 Ángulos de Curvas

Dada una parametrización  $x(u, v) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie regular y una curva  $\Gamma$  sobre ella, la dirección de la tangente o dirección tangente, viene asociada a

$$\frac{dv}{du} \text{ o } (du, dv).$$

Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos curvas sobre la superficie con  $\frac{dv}{du}$  y  $\frac{\delta v}{\delta u}$  sus direcciones tangentes, respectivamente, donde se ha empleado la notación  $\delta u$ ,  $\delta v$  para distinguirlas de  $du$ ,  $dv$ ; teniendo en cuenta que  $\delta$  tiene el mismo sentido que  $d$ .

Se supone que las curvas tienen un punto  $p$  regular común, sea  $\theta$  el ángulo que forman ambas curvas en el punto  $p$  y se define el ángulo que forman dos curvas como el ángulo que forman dos vectores en dirección de sus tangentes.

Por medio de  $E, F, G$  se puede expresar el ángulo  $\theta$  de dos direcciones tangentes a la superficie, se tiene

$$dx = x_u du + x_v dv, \quad \delta x = x_u \delta u + x_v \delta v$$

y

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{\langle dx, \delta x \rangle}{|dx| |\delta x|} \\
&= \frac{\langle x_u, x_u \rangle du \delta u + \langle x_u, x_v \rangle (du \delta v + dv \delta u) + \langle x_v, x_v \rangle du \delta v}{|dx| |\delta x|} \quad (8.8) \\
&= \frac{E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}
\end{aligned}$$

Son particularmente importantes los siguientes casos de la ecuación 8.8:

1. Para  $\theta = \pi/2$  se tiene la condición de ortogonalidad de dos direcciones sobre la superficie:

$$E du \delta u + F (du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v = 0 \quad (8.9)$$

2. El ángulo  $\theta$  formado por las curvas paramétricas  $u = \text{constante}$  (por consiguiente,  $du = 0$ ,  $dv$  arbitrario) y  $v = \text{constante}$  (esto es,  $du$  arbitrario,  $dv = 0$ ) viene dado por

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \frac{F dv \delta u}{\sqrt{G dv^2} \sqrt{E \delta u^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \\
\text{sen } \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}, \quad (8.10)
\end{aligned}$$

y estas curvas paramétricas son ortogonales si  $F = 0$

## Ejemplos

1. **La esfera de radio**  $a > 0$ . Cuando se eligen como parámetros la latitud  $\theta$  y la longitud  $\varphi$  sus coordenadas están dadas por las ecuaciones (ver, Figura 8.1):

$$\begin{aligned}
x &= a \cos \varphi \cos \theta \\
y &= a \cos \varphi \text{sen } \theta, \quad (\varphi, \theta) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi) \quad (8.11) \\
z &= a \text{sen } \varphi.
\end{aligned}$$



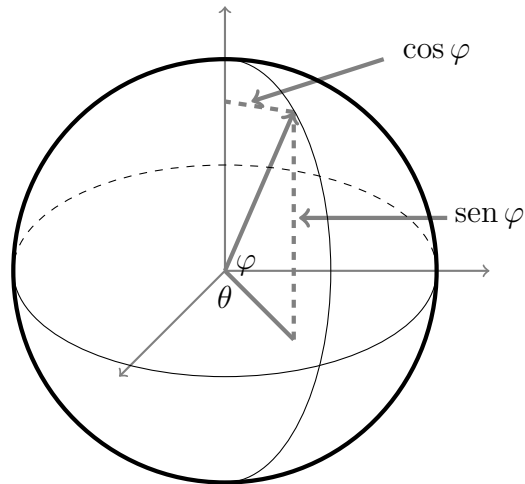


Figura 8.1

Con lo que

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = (-a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, -a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = (-a \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi \cos \theta, 0)$$

resulta entonces que

$$E = \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = a^2, \quad F = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\rangle = 0,$$

$$G = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle = a^2 \cos^2 \varphi$$

con lo que

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2 \cos^2 \varphi d\theta^2. \quad (8.12)$$

Por ser  $F = 0$  se deduce que los meridianos y paralelos son ortogonales entre sí. El siguiente ejemplo proporciona una visión general donde está incluida la esfera.

2. **Superficie de revolución.** Si se elige el eje  $z$  como eje de revolución de la curva  $x = f(v)$ ,  $z = g(v)$  en el plano  $y = 0$  (esta curva es la meridiana de la superficie), la superficie resultante (Figura 4.4 del capítulo 4) está dada por las ecuaciones

$$x = f(v) \cos u, \quad y = f(v) \operatorname{sen} u, \quad z = g(v) \quad (8.13)$$

$$a < v < b \text{ y } 0 < u < 2\pi.$$

Las curvas  $v = \text{constante}$  son los paralelos y las  $u = \text{constante}$ , los meridianos de la superficie. En este caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} &= (-f(v) \operatorname{sen} u, f(v) \cos u, 0) \\ \frac{\partial}{\partial v} &= (f'(v) \cos u, f'(v) \operatorname{sen} u, g'(v)) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle = f^2, & F &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = 0 \\ G &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle = (f')^2 + (g')^2; \end{aligned}$$

con lo que,

$$I = ds^2 = f^2 du^2 + [(f')^2 + (g')^2] dv^2 \quad (8.14)$$

## § 8.5 Ejercicios

1. Las superficies siguientes se dan en forma paramétrica.

(a) Paraboloide hiperbólico:

$$x = au \cosh v, \quad y = bu \operatorname{senh} v, \quad z = u^2.$$

(b) Elipsoide:

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = c \cos u.$$

(c) Hiperboloide de dos hojas:

$$x = a \operatorname{senh} u \cos v, \quad y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad z = c \cosh u.$$

(d) Cono:

$$x = a \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v, \quad y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad z = u^2.$$

(e) Paraboloides elíptico:

$$x = au \cos v, \quad y = bu \operatorname{sen} v, \quad z = u^2.$$

Escribir las ecuaciones de estas superficies en la forma  $F(x, y, z) = 0$ . Calcular la primera forma fundamental, en cada superficie.

2. Demostrar que el paraboloides hiperbólico se puede representar también por las ecuaciones

$$x = a(u + v), \quad y = b(u - v), \quad z = uv,$$

y calcular su primera forma fundamental.

3. Calcular  $ds^2$  para la superficie  $x = u, y = v, z = uv$ ;  
 4. Una superficie  $M$  está dada por la ecuación  $z = f(x, y)$ ;

- (a) Hallar la primera forma fundamental y el vector normal exterior a la superficie  $M$ ;  
 (b) Demostrar que el elemento de área para  $N$  es

$$dA = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx dy,$$

donde  $p = \partial z / \partial x, q = \partial z / \partial y$ .

5. Hallar la primera forma fundamental para la superficie  $M$  de ecuación implícita  $F(x, y, z) = 0$ , en la que se supone que todos sus puntos son regulares.



# Capítulo 9

## Curvatura de Superficies en $\mathbb{R}^3$

### § 9.1 Introducción

Este capítulo se concentrará a iniciar el estudio de la geometría de una superficie  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ , pues allí se encuentran una gran variedad de ejemplos, que permiten estudiar Geometría Diferencial en profundidad y depende de las formas cuadráticas fundamentales de las cuales ya se ha dado la primera que se representa con  $ds^2$ . La *segunda forma fundamental* proporciona información valiosa para estudiar, al menos, curvatura de una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

### § 9.2 Segunda Forma Fundamental

En esta sección se supone que  $M$  es una 2–superficie regular y que  $(U, r)$  es una parametrización alrededor de  $p \in M$ ,  $U$  abierto de  $\mathbb{R}^2$  con lo que

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega \quad (9.1)$$

y el vector unitario normal a  $M$ , en la parametrización  $r$ , está dado por

$$N = N(p) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}(p), \quad (9.2)$$

se observa que,  $N$  es una función de  $M$  en  $T_pM$ , llamada *función de Gauss*, y además  $dN_p$  toma valores en  $T_pM$  y los envía a  $T_pM$ .

Dada sobre  $M$  cualquier curva  $\Gamma$  que pase por el punto  $p$ ; si la curva  $\Gamma$  viene dada cuando  $u = u(s)$  y  $v = v(s)$ , es decir, por la imagen bajo  $r$  de  $\alpha(s) = (u(s), v(s))$  con  $s \in J \subset \Omega$ ,  $s$  el parámetro longitud de arco, entonces se puede representar a  $\Gamma$  sobre  $M$  por

$$\begin{aligned} r(s) &= r(\alpha(s)) = r(u(s), v(s)), \quad s \in J = [0, l] \\ \alpha(s_0) &= p, \quad \text{para algún } s_0 \in J. \end{aligned} \quad (9.3)$$

También sobre  $\Gamma$  se puede escribir

$$N(s) = N(\alpha(s)) = N(r(u(s), v(s))). \quad (9.4)$$

Con lo que

$$\begin{aligned} \alpha'(s_0) &= u \in T_p M, \quad \alpha(s_0) = p \\ dN_p &= dN(\alpha'(s_0)) = dN_p(u) \in T_p M. \end{aligned} \quad (9.5)$$

**Definición 9.2.1 [Segunda Forma Fundamental].** *La forma cuadrática*

$$II_p((u)) = -\langle dN_p(u), u \rangle, \quad \forall u \in T_p M \quad (9.6)$$

*recibe el nombre de Segunda Forma Fundamental de  $M$  en  $p \in M$ .*

y se recuerda que la **Primera Forma Fundamental** en  $p \in M$ , se puede escribir entonces

$$ds^2(u) = I_p(u) = \langle u, u \rangle_p, \quad \forall u \in T_p M. \quad (9.7)$$

### § 9.3 Nociones de Curvatura

Se sigue con la mismas notaciones anteriores; si  $t$  es el vector tangente unitario de  $\Gamma$ , es decir,

$$t = \dot{r} \in T_{r(s)} M,$$

entonces en cada punto  $p \in M$ ,  $\ddot{r} \in T_p\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^3$  y como  $\{\dot{r}, N, N \times \dot{r}\}$  forma una base ortonormal (o simplemente, un referencial ortonormal) para  $T_p\mathbb{R}^3$ , entonces existen escalares  $k_n$ ,  $k_g$ , y  $\alpha$  tales que

$$\ddot{r} = k_n N + k_g(N \times \dot{r}) + \alpha \dot{r}.$$

La componente normal  $k_n$  recibe el nombre de curvatura normal y la componente tangencial  $k_g$  recibe el nombre de curvatura tangencial o geodésica mientras que el vector de curvatura es  $\mathbf{K}=\ddot{r}$ . Al tomar producto interior con  $\dot{r}$  en ambos miembros de esa igualdad se obtiene que  $\alpha = 0$ , y así

$$\ddot{r} = k_n N + k_g(N \times \dot{r}). \quad (9.8)$$

Lo que muestra que  $\ddot{r}$  está en el plano generado por los vectores  $\{N, (N \times \dot{r})\}$ ; de igual manera tomando en esta última ecuación producto interior por  $N$  y  $N \times \dot{r}$  se obtiene

$$k_n = \langle \ddot{r}, N \rangle \quad \text{y} \quad k_g = \langle \ddot{r}, N \times \dot{r} \rangle \quad (9.9)$$

el vector de curvatura  $\mathbf{K}$  en  $p$  es igual a  $dt/ds = \ddot{r}$ . Al descomponer  $\mathbf{K}$  en una componente  $\mathbf{K}_n$  normal y otra componente  $\mathbf{K}_g$  tangente a la superficie (Figura 9.1) se obtiene que  $\mathbf{K}=\mathbf{K}_n+\mathbf{K}_g$  donde

$$\mathbf{K}_n = k_n N \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_g = k_g (N \times \dot{r}); \quad (9.10)$$

éstos reciben el nombre de vectores de curvatura normal y tangencial, respectivamente y  $k = \|\mathbf{K}\|$  es la curvatura en el punto  $p = r(s)$ . La curvatura  $k$  satisface, ver Figura 9.1.

$$k^2 = \|\ddot{r}\|^2 = \langle k_n N + k_g (N \times \dot{r}), k_n N + k_g (N \times \dot{r}) \rangle = k_n^2 + k_g^2.$$

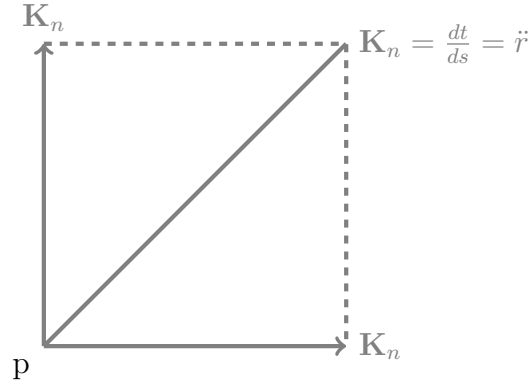


Figura 9.1

El escalar  $k_n$  queda determinado por  $\Gamma$  (no depende de la elección del sentido de  $t$  o  $N$ ); pero el vector  $\mathbf{K}_n$  depende en cuanto a su signo del sentido de  $N$ .

**Ejemplo 9.3.1** *Calcular el valor absoluto de la curvatura geodésica  $k_g$  de un paralelo  $C$  de colatitud  $\varphi$  en la esfera unitaria  $S^2$ .*

**Solución** Esta esfera admite la parametrización

$$\alpha(\theta, \varphi) = (\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta, \cos \varphi)$$

donde  $(\theta, \varphi) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi)$ . Por lo tanto,

$$\alpha_\theta = (-\text{sen } \varphi \text{ sen } \theta, \text{sen } \varphi \cos \theta, 0),$$

$$\alpha_\varphi = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \text{ sen } \theta, -\text{sen } \varphi),$$

y de aquí

$$N = (\pm \text{sen } \varphi \cos \theta, \pm \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta, \pm \cos \varphi).$$

El paralelo  $C$  de colatitud constante  $\varphi$  está parametrizado por la longitud de arco, por lo tanto

$$k^2 = |\ddot{\alpha}(\theta)|^2 = \|(-\text{sen } \varphi \cos \theta, \text{sen } \varphi \text{ sen } \theta, 0)\|^2 = \text{sen}^2 \varphi,$$



también

$$k_n = \langle \ddot{\alpha}(\theta), N \rangle = \pm \operatorname{sen}^2 \varphi.$$

Como  $k^2 = k_n^2 + k_g^2$ , entonces

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = \operatorname{sen}^4 \varphi + k_g^2$$

y así

$$k_g^2 = \operatorname{sen}^2 \varphi - \operatorname{sen}^4 \varphi = \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

A continuación se dan algunas propiedades del vector de curvatura normal  $\mathbf{K}_n$  o simplemente de la curvatura normal  $k_n$  en  $p$ . En efecto,

1. Una interpretación a la Segunda Forma Fundamental  $II_p$  es como sigue: se considera una curva regular  $\Gamma \subset M$ , parametrizada por  $\beta(s)$ , donde  $s$  es la longitud de arco de  $\Gamma$ , con  $\beta(0) = p$ . Si se indica con  $N(s)$  la restricción del vector normal  $N$  a la curva  $\beta(s)$  se obtiene  $\langle N(s), \beta'(s) \rangle = 0$ , de donde

$$\langle N(s), \beta''(s) \rangle = - \langle N'(s), \beta'(s) \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} II_p(\beta'(0)) &= - \langle dN_p(\beta'(0)), \beta'(0) \rangle \\ &= - \langle N'(0), \beta'(0) \rangle = \langle N(0), \beta''(0) \rangle \\ &= \left\langle N, k n + k_g N \times \dot{\beta} \right\rangle (p) \\ &= \langle N, k N \rangle (p) = k_n(p). \end{aligned} \tag{9.11}$$

Esto muestra que el valor de la Segunda Forma Fundamental  $II_p$  evaluada en un vector unitario  $v \in T_p M$  es igual a la curvatura normal de una curva regular que pasa por  $p$  y es tangente a  $v$ . En particular, se obtiene el siguiente resultado debido a **Meusnier**.

**Proposición 9.3.1** *Todas las curvas de una 2-superficie  $M$  que tienen, en un punto  $p \in M$ , la misma recta tangente tiene, en ese punto, la misma curvatura normal.*

2. De la ecuación  $\langle t, N \rangle = 0$ , se obtiene por derivación a lo largo de  $\Gamma$ :

$$\left\langle \frac{dt}{ds}, N \right\rangle = - \left\langle t, \frac{dN}{ds} \right\rangle = - \left\langle \frac{dr}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle, \quad (9.12)$$

Del hecho que

$$\ddot{r} = \frac{dt}{ds} = k_n N + k_g N \times \dot{r},$$

entonces

$$\begin{aligned} k_n &= \langle k_n N, N \rangle = \left\langle \frac{dt}{ds} - k_n N \times \dot{r}, N \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{dt}{ds}, N \right\rangle = - \left\langle \frac{dr}{ds}, \frac{dN}{ds} \right\rangle \end{aligned} \quad (9.13)$$

Como

$$s = \int_{s_0}^s |r'(s)| ds,$$

entonces  $ds^2 = \langle dr, dr \rangle$  y así

$$k_n = - \frac{\langle dN, dr \rangle}{\langle dr, dr \rangle} = \frac{II}{I} \quad (9.14)$$

Se estudia en primer lugar el segundo miembro de esta ecuación.  $N$  y  $r$  son ambas funciones de  $u$  y  $v$  (que a su vez dependen de  $\Gamma$ ). Utilizando las identidades

$$dN = N_u du + N_v dv, \quad dr = r_u du + r_v dv. \quad (9.15)$$

la ecuación (9.14) puede escribirse en la forma:

$$k_n = -\frac{\langle r_u, N_u \rangle du^2 + [\langle r_u, N_v \rangle + \langle r_v, N_u \rangle] du dv + \langle r_v, N_v \rangle dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$$

o bien

$$k_n = \frac{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \quad (9.16)$$

En esta última ecuación

$$e = -\langle r_u, N_u \rangle, \quad 2f = -[\langle r_u, N_v \rangle + \langle r_v, N_u \rangle], \quad g = -\langle r_v, N_v \rangle \quad (9.17)$$

son funciones de  $u$  y  $v$ , que dependen de las derivadas segundas de  $r$  respecto a  $u$  y  $v$ , que difieren, en este aspecto, de  $E, F, G$ , que sólo dependen de las primeras derivadas. Se puede escribir el numerador y el denominador de la ecuación (9.16) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} I &= I_p = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \langle dr, dr \rangle, \\ II &= II_p = e du^2 + 2f du dv + g dv^2 = \langle dN, dr \rangle. \end{aligned} \quad (9.18)$$

3. Por ser

$$\langle r_u, N \rangle = 0 \text{ y } \langle r_v, N \rangle = 0, \quad (9.19)$$

se puede también escribir en lugar de  $e, f, g$ :

$$e = \langle r_{uu}, N \rangle, \quad f = \langle r_{uv}, N \rangle, \quad g = \langle r_{vv}, N \rangle \quad (9.20)$$

$$e = \frac{\langle r_{uu}, r_u \times r_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (9.21)$$

Análogamente

$$f = \frac{\langle r_{uv}, r_u \times r_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\langle r_{vv}, r_u \times r_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (9.22)$$

Estas fórmulas (9.21) y (9.22) permiten, una vez dada las ecuaciones paramétricas sobre una vecindad coordinada de la superficie, calcular inmediatamente  $e$ ,  $f$  y  $g$ .

4. De la ecuación (9.19) se deduce también que

$$\langle r_u, N_v \rangle = \langle r_v, N_u \rangle,$$

de forma que la ecuación (9.17) puede escribirse en esta otra forma más sencilla:

$$e = -\langle r_u, N_u \rangle, \quad f = -\langle r_u, N_v \rangle = -\langle r_v, N_u \rangle, \quad g = -\langle r_v, N_v \rangle. \quad (9.23)$$

## Ejemplos

1. **La esfera de radio**  $a > 0$ . Al elegir como parámetros la latitud  $u$  y la longitud  $v$ , sus coordenadas estan dadas por las ecuaciones (ver, Figura 9.2):

$$r(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, a \sin u) \quad (9.24)$$

con  $(u, v) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$ .

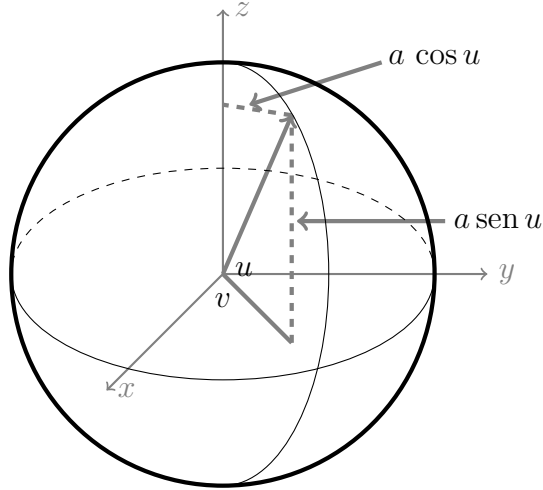


Figura 9.2

$$\begin{aligned}
 r_u &= (-a \operatorname{sen} u \cos v, -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \cos u) \\
 r_v &= (-a \cos u \operatorname{sen} v, a \cos u \cos v, 0) \\
 r_{uu} &= (-a \cos u \cos v, -a \cos u \operatorname{sen} v, -a \operatorname{sen} u), \\
 r_{vv} &= (a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, -a \operatorname{sen} u \cos v, 0), \\
 x_{vv} &= (-a \cos u \cos v, -a \cos u \operatorname{sen} v, 0),
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

y así

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= a^2 du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2, \\
 \sqrt{EG - F^2} &= a^2 \cos u,
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

$$e = \frac{\begin{vmatrix} -a \cos u \cos v & -a \cos u \operatorname{sen} v & -a \operatorname{sen} u \\ -a \operatorname{sen} u \cos v & -a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & a \cos u \\ -a \cos u \operatorname{sen} v & a \cos u \cos v & 0 \end{vmatrix}}{a^2 \cos u} = \frac{a^3 \cos u}{a^2 \cos u} = a.$$

Análogamente, se obtiene

$$f = 0 \quad g = -a \cos^2 v$$

$$II = a(dv^2 + \cos^2 v du^2), \quad (9.27)$$

$$k_n = \frac{II}{I} = \frac{1}{a}.$$

En este caso, I y II son proporcionales.

2. **Superficie de revolución.** Se sabe que al tomar el eje  $z$  como eje de revolución de la curva  $x = \varphi(v)$ ,  $z = \psi(v)$  en el plano  $y = 0$ , la superficie resultante es una superficie de revolución y tiene como parametrización la dada por las ecuaciones

$$r : \quad x = \varphi(v) \cos u, \quad y = \varphi(v) \sin u, \quad z = \psi(v) \quad (9.28)$$

$a < v < b$  y  $0 < u < 2\pi$ . Las curvas  $v = \text{constante}$  son los paralelos y las  $u = \text{constante}$ , los meridianos de la superficie. En este caso

$$\begin{aligned} \partial_1 &= (-\varphi(v) \sin u, \varphi(v) \cos u, 0) \\ \partial_2 &= (\varphi'(v) \cos u, \varphi'(v) \sin u, \psi'(v)) \end{aligned}$$

de donde

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2;$$

con lo que,

$$I = ds^2 = \varphi^2 du^2 + [(\varphi')^2 + (\psi')^2] dv^2 \quad (9.29)$$

El cálculo de la Segunda Forma Fundamental es como sigue, se supone que la curva está parametrizada por la longitud de arco, esto es,

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1,$$

Así,

$$I = ds^2 = \varphi^2 du^2 + dv^2$$

y

$$e = \frac{\langle r_{uu}, r_u \times r_v \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} -\varphi \operatorname{sen} u & \varphi' \cos u & -\varphi \cos u \\ \varphi \cos u & \varphi' \operatorname{sen} u & -\varphi \operatorname{sen} u \\ 0 & \psi' & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}} = -\varphi \psi'$$

$$f = 0, \quad g = \psi' \varphi'' - \psi'' \varphi'$$

Entonces

$$II = -\varphi \psi^2 du^2 + (\psi' \varphi'' - \psi'' \varphi') dv^2.$$

## § 9.4 Curvaturas Principales

Se usará la Primera y Segunda Forma Fundamental para hacer una presentación de las curvaturas principales, Gaussiana y media. Para tal efecto, Sea  $M$  una 2-superficie regular,  $(U, x)$  una parametrización de  $M$ , alrededor de  $p \in U \subseteq M$ , y se escribe  $x = x(u, v)$ ,  $\forall (u, v) \in V = x^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Entonces la Primera y Segunda Forma Fundamental en  $p$  de  $M$  asociada a esta parametrización esta dada por

$$\begin{aligned} I &= I_p = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ II &= II_p = e du^2 + 2f du dv + g dv^2. \end{aligned} \quad (9.30)$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u \rangle, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle, \quad G = \langle x_v, x_v \rangle, \\ e &= -\langle x_u, N_u \rangle, \quad f = -\langle x_u, N_v \rangle = -\langle x_v, N_u \rangle, \quad g = -\langle x_v, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Entonces se introducen las siguientes matrices simétricas

$$\mathcal{F}_1 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (9.31)$$

que son las matrices asociadas a la Primera y Segunda Forma Fundamental, respectivamente, en cada punto  $p \in U \subseteq M$ .

Además observe que si

$$t_1 = \tau_1 x_u + \eta_2 x_v, \quad t_2 = \tau_2 x_u + \eta_2 x_v$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle t_1, t_2 \rangle &= \langle \tau_1 x_u + \eta_2 x_v, \tau_2 x_u + \eta_2 x_v \rangle \\ &= E\tau_1\tau_2 + F(\tau_1\eta_2 + \tau_2\eta_1) + E\eta_1\eta_2 \\ &= (\tau_1, \eta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

si se escribe

$$T_1 = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

entonces

$$\langle t_1, t_2 \rangle = T_1^t \mathcal{F}_1 T_2. \quad (9.32)$$

Por otro lado, escribiendo el vector tangente  $\dot{r} = \dot{u}x_u + \dot{v}x_v$  como

$$T = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

y por un cálculo similar al anterior se tiene

$$k_n = T^t \mathcal{F}_2 T \quad (9.33)$$

**Definición 9.4.1** *Las Curvaturas Principales de una superficie son las raíces de la ecuación*

$$\det(\mathcal{F}_2 - k\mathcal{F}_1) = 0, \quad (9.34)$$

es decir,

$$\det \begin{pmatrix} e - kE & f - kF \\ f - kF & g - kG \end{pmatrix} = 0 \quad (9.35)$$



Como 9.35 es una ecuación cuadrática de variable  $k$ , existen dos raíces. A priori, estas podrían ser números complejos. Por lo tanto, se demostrará que las curvaturas principales son siempre reales. Note que si  $\mathcal{F}_1$  es la matriz identidad (lo que sucede cuando  $M = \mathbb{R}^2$ ), entonces la ecuación 9.34 se convierte en la ecuación para el cálculo de autovalores de  $\mathcal{F}_2$ ; y un resultado estándar del Álgebra Lineal proporciona que los autovalores de una matriz simétrica son números reales. Como  $\mathcal{F}_1$  es invertible, entonces 9.34 es equivalente a

$$\det(\mathcal{F}_1(\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2 - kI_2)) = 0,$$

esto es,

$$\det(\mathcal{F}_1) \det(\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2 - kI_2) = 0,$$

con lo que,

$$\det(\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2 - kI_2) = 0, \quad (9.36)$$

y así las curvaturas principales son los autovalores de  $\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2$ . Pero el producto de matrices simétricas no necesariamente es simétrica. Con el siguiente Teorema resolvemos esto y mucho más.

**Teorema 9.4.1** *Sea  $M$  una 2-superficie regular y  $p \in M$ . Si  $(U, x)$  con  $x = x(u, v)$  es una parametrización de  $M$  alrededor de  $p$  y  $N$  es la función de Gauss asociada a esta parametrización, entonces*

- (a) *La diferencial  $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$  de la función de Gauss es una transformación lineal auto-adjunta, es decir,*

$$\langle dN_p(u), v \rangle = \langle u, dN_p(v) \rangle.$$

- (b) *existen escalares reales  $a, b, c$  y  $d$  tales que*

$$N_u = ax_u + bx_v, \quad N_v = cx_u + dx_v, \quad (9.37)$$

- (c) *si tiene que*

$$dN_p = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\mathcal{F}_1^{-1}\mathcal{F}_2. \quad (9.38)$$

**Demostración**

- (a) Como  $dN_p$  es una transformación lineal y  $\{x_u, x_v\}$  es una base para  $T_pM$ , es suficiente demostrar que

$$\langle dN_p(x_u), x_v \rangle = \langle x_u, dN_p(x_v) \rangle.$$

Para tal efecto, sea

$$\alpha(t) = x(u(t), v(t)), \quad t \in J = [-a, a], \quad a > 0$$

una parametrización de una curva en  $M$  con  $\alpha(0) = p$ , entonces

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(x_u u'(0) + x_v v'(0)) \\ &= (dN_p) \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0). \end{aligned} \tag{9.39}$$

En particular,

$$dN_p(x_u) = N_u, \quad \text{y} \quad dN_p(x_v) = N_v.$$

Por lo tanto, para demostrar que  $dN_p$  es auto-adjunto, es suficiente probar que

$$\langle N_u, x_v \rangle = \langle x_u, N_v \rangle.$$

Pero esto se obtiene de la siguiente manera, como  $\langle N, x_u \rangle = 0 = \langle N, x_v \rangle$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle N_v, x_u \rangle + \langle N, x_{vu} \rangle &= 0 \\ \langle N_u, x_v \rangle + \langle N, x_{uv} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \langle N_u, x_v \rangle &= - \langle N, x_{vu} \rangle \\ &= - \langle N, x_{uv} \rangle \\ &= \langle x_v, N_v \rangle. \end{aligned}$$

Lo que demuestra que  $dN_p$  es auto-adjunto. Y la parte (a) queda demostrada.

(b) Como

$$N = \frac{x_u \times x_v}{\|x_u \times x_v\|},$$

entonces  $N \perp N_u$  y  $N \perp N_v$ ; lo que muestra que  $N_u, N_v \in T_p M$ , por lo tanto existen escalares  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tales que

$$N_u = a x_u + b x_v, \quad N_v = c x_u + d x_v$$

(c) Por la parte (b),

$$N_u = a x_u + b x_v, \quad N_v = c x_u + d x_v,$$

y tomando producto interior por  $x_u, x_v$  se tiene

$$\begin{aligned} -e &= aE + bF & -f &= cE + dF \\ -f &= aF + bG & -g &= cF + dG \end{aligned}$$

esto muestra que

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$-\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Y el Teorema queda demostrado.  $\diamond$

**Definición 9.4.2** Sea  $M$  una 2-superficie. Si  $k_1, k_2$  son las Curvaturas Principales en  $p$ , entonces

(a)  $K = k_1 k_2$  recibe el nombre de Curvatura Gaussiana de  $M$  en  $p$ .

(b)  $H = (k_1 + k_2)/2$  recibe el nombre de Curvatura Media de  $M$  en  $p$ .

**Definición 9.4.3** Un punto  $p$  de una 2-superficie  $M$  se dice

(a) Elíptico si  $\det(dN_p) > 0$ .

- (b) *Hiperbólico* si  $\det(dN_p) < 0$ .  
 (c) *Parabólico* si  $\det(dN_p) = 0$  y  $dN_p \neq 0$ .  
 (d) *Planar* si  $dN_p = 0$ .

**Observaciones.** Para una 2–superficie  $M$  y por el Teorema inmediatamente anterior se tiene

1. en cada punto  $p \in M$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = dN_p.$$

2. Las Curvaturas Principales son los autovalores de  $-dN_p$ ,  $p \in M$ .  
 3. Como

$$-\mathcal{F}_1^{-1} \mathcal{F}_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

entonces resolviendo se tiene

$$\begin{aligned} a &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} & c &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ b &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} & d &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

4. Si  $k_1, k_2$  son las Curvaturas Principales, entonces la Curvatura Gaussiana satisface

$$K = k_1 k_2 = \det(dN_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

5. Para calcular la Curvatura Media, se recuerda que  $-k_1, -k_2$  son autovalores de  $dN$ . Por lo tanto,  $k_1$  y  $k_2$  satisfacen la ecuación

$$dN(v) = -kv = -kI(v)$$

para todo  $v \in T_p M$ ,  $v \neq 0$ , donde  $I$  es la función identidad, con lo que

$$\det \begin{pmatrix} a + k & c \\ b & d + k \end{pmatrix} = 0,$$

equivalentemente,

$$k^2 + (a + d)k + ad - bc = 0 \quad (9.40)$$

como  $k_1$  y  $k_2$  son raíces de la ecuación 9.40, se tiene que

$$-(k_1 + k_2) = a + d,$$

por lo tanto,

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = -\frac{1}{2}(a + d) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (9.41)$$

Así,

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

y por lo tanto,

$$k = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

De esta relación, se tiene que si  $k_1(q) \geq k_2(q)$ ,  $q \in M$ , entonces las funciones  $k_1$  y  $k_2$  son funciones continuas en  $M$ . Más aún,  $k_1$  y  $k_2$  son funciones diferenciables en  $M$ , excepto posiblemente, en los puntos umbílicos de  $M$ , esto es, cuando  $k_1 = k_2$ , equivalentemente, cuando  $H^2 = K$ .

## § 9.5 Ejercicios

Calcular la Segunda Forma Fundamental, las Curvaturas Principales, la Curvatura Gaussiana y Media de las superficies que se dan a continuación. Además encuentre cuales puntos son elípticos, hiperbólicos, parabólicos y planares.

1. Paraboloide hiperbólico:

$$x = au \cosh v, \quad y = bu \sinh v, \quad z = u^2.$$

2. Elipsoide:

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v, \quad y = b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = c \cos u.$$

3. Hiperboloide de dos hojas:

$$x = a \operatorname{senh} u \cos v, \quad y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad z = c \cosh u.$$

4. Cono:

$$x = a \operatorname{senh} u \operatorname{senh} v, \quad y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \quad z = u^2.$$

5. Paraboloide elíptico:

$$x = au \cos v, \quad y = bu \operatorname{sen} v, \quad z = u^2.$$

6. Calcular la Segunda Forma Fundamental para la superficie  $x = u, y = v, z = uv$ ; también la Curvatura Gaussiana y Media.
7. Encontrar una fórmula para la Segunda Forma Fundamental cuando la superficie está dada por la ecuación  $z = f(x, y)$ . Además calcular su Curvatura Gaussiana y Media.
8. Una superficie regular está dada por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ . ¿Podría dar una fórmula para la curvatura Gaussiana y media?
9. Hallar los puntos umbilicales del elipsoide y demostrar que los planos tangentes en dichos puntos son paralelos a las secciones cíclicas de aquél; es decir, a los planos que cortan al elipsoide en circunferencias.

**Geometría Intrínseca:**  
**Superficies en  $\mathbb{R}^3$**

La Primera Forma Fundamental de una superficie  $M$  se puede usar para calcular conceptos métricos simples sobre  $M$  (longitud, ángulo, área, ect). El punto importante es que tales cálculos se pueden hacer conociendo la Primera forma fundamental, sin salir de la superficie. Por esta causa, se dicen que estos conceptos son intrínsecos a la superficie.

La Geometría de la Primera Forma Fundamental no se limita a los conceptos simples mencionados anteriormente como se puede ver en los próximos capítulos, en otras ramas de la Geometría y las matemáticas. El estudio de las propiedades geométricas que sólo dependen de la Primera Forma Fundamental se conoce con el nombre de **GEOMETRÍA INTRÍNSECA** de las superficies.



# Capítulo 10

## Isometrías y Símbolos de Christoffel

Este capítulo trata de ISOMETRÍAS Y LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL que son necesarios para los próximos desarrollos teóricos.

### § 10.1 Isometrías

La definición de isometría se torna esencialmente precisa a la noción intuitiva de dos superficies que tienen la misma Primera Forma Fundamental y se puede incluir en la categoría de los conceptos intrínsecos.

**Definición 10.1.1** Sean  $M$  y  $\bar{M}$  dos superficies regulares, una función  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  es una isometría si

1.  $\varphi$  es un difeomorfismo,
2. para todo  $p \in M$  y para todo  $w_1, w_2 \in T_p M$ ,

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}. \quad (10.1)$$

Se dice entonces que las dos superficies  $M$  y  $\bar{M}$  son isométricas.

En otras palabras, un difeomorfismo  $\varphi$  es una isometría si la diferencial  $\varphi_*$  preserva producto interior. Si  $\varphi$  es una isometría, entonces

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) \quad (10.2)$$

para todo  $w \in T_p M$ . Recíprocamente, si un difeomorfismo  $\varphi$  preserva la Primera Forma Fundamental, esto es

$$I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)), \forall w \in T_p M, . \quad (10.3)$$

entonces

$$\begin{aligned} 2\langle w_1, w_2 \rangle &= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle_p - \langle w_1, w_1 \rangle_p - \langle w_2, w_2 \rangle_p \\ &= I_p(w_1 + w_2) - I_p(w_1) - I_p(w_2) \\ &= I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1 + w_2)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_1)) - I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w_2)) \\ &= 2\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle \end{aligned} \quad (10.4)$$

y  $\varphi$  es una isometría si y sólo si preserva la Primera Forma Fundamental.

**Definición 10.1.2** Una función  $\alpha : V \rightarrow \overline{M}$  de una vecindad  $V$  de  $p \in M$  es una isometría local en  $p$  si existe una vecindad  $\overline{V}$  de  $\alpha(p) \in \overline{M}$  tal que  $\alpha : V \rightarrow \overline{V}$  es una isometría. Si existe una isometría local en  $M$  para cada  $p \in M$ , la superficie  $M$  se dice localmente isométrica a  $\overline{M}$ .

$M$  y  $\overline{M}$  son localmente isométricas si  $M$  es localmente isométrica a  $\overline{M}$  y  $\overline{M}$  es localmente isométrica a  $M$ .

**Teorema 10.1.1** Supóngase la existencia de parametrizaciones

$$x : U \rightarrow M, \quad \overline{x} : U \rightarrow \overline{M}$$

tales que  $E = \overline{E}$ ,  $F = \overline{F}$ ,  $G = \overline{G}$  en  $U$ . Entonces  $\varphi = \overline{x} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \overline{M}$  es una isometría local.

**Demostración** Sea  $p \in x(U)$  y  $w \in T_p M$ . Entonces  $w$  es tangente a una curva  $x(\alpha(t))$  en  $t = 0$ , donde  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  es una curva en  $U$ ; por lo tanto,  $w$  se puede escribir como ( $t = 0$ , Figura 10.1) :

$$w = x_u u' + x_v v'.$$

Por definición, el vector  $d\varphi_p(w)$  es un vector tangente a la curva

$$\bar{x} \circ x^{-1} \circ x(\alpha(t)),$$

es decir, a la curva  $\bar{x}(\alpha(t))$  en  $t = 0$ . Luego

$$d\varphi(w) = \bar{x}_u u' + \bar{x}_v v' \quad (10.5)$$

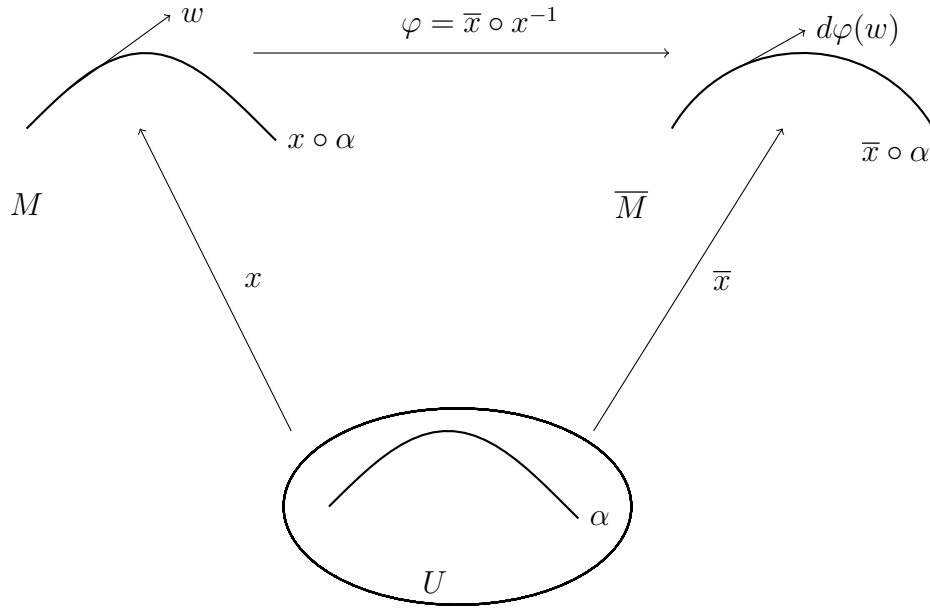


Figura 10.1

Como

$$\begin{aligned} I_p(w) &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2 \\ I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w)) &= \bar{E}(u')^2 + 2\bar{F} u' v' + \bar{G}(v')^2. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Concluimos por hipótesis que  $I_p(w) = I_{\varphi(p)}(d\varphi_p(w))$  para todo  $p \in x(U)$  y todo  $w \in T_p(M)$ ; por lo tanto  $\varphi$  es una isometría local.  $\checkmark$

## § 10.2 Símbolos de Christoffel

Se asocia a cada punto de una superficie un triedro (análogo al triedro de Frenet) y se estudian las derivadas de sus vectores.

Se denota por  $M$ , como de costumbre una superficie regular orientada. Sea

$$x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$$

una parametrización en la orientación de  $M$ . Es posible asociar a cada punto de  $x(U)$  un triedro natural dado por los vectores

$$x_1 = x_u, \quad x_2 = x_v, \quad N.$$

Note que

$$N = \frac{\langle x_1, x_2 \rangle}{|x_1||x_2|}, \quad \langle N, N \rangle = 1, \quad \langle N_1, N \rangle = \langle N_2, N \rangle = 0, \quad (10.7)$$

El estudio de este triedro es el centro de esta sección. Expresando las derivadas de estos vectores en la base  $\{x_1, x_2, N\}$ , y denotando

$$x_{11} = x_{uu}, \quad x_{12} = x_{uv}, \quad x_{22} = x_{vv}, \dots$$

se obtiene

$$\begin{aligned} x_{11} &= \Gamma_{11}^1 x_1 + \Gamma_{11}^2 x_2 + h_{11} N \\ x_{12} &= \Gamma_{12}^1 x_1 + \Gamma_{12}^2 x_2 + h_{12} N \\ x_{21} &= \Gamma_{21}^1 x_1 + \Gamma_{21}^2 x_2 + h_{21} N \\ x_{22} &= \Gamma_{22}^1 x_1 + \Gamma_{22}^2 x_2 + h_{22} N \\ N_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ N_2 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \end{aligned} \quad (10.8)$$

donde  $a_{11} = a$ ,  $a_{12} = b$ ,  $a_{21} = c$ ,  $a_{22} = d$  están dados en el Teorema 9.4.1. Tomando producto interior de las 4 primeras ecuaciones en (10.8) con  $N$  se obtiene inmediatamente

$$h_{11} = e, \quad h_{12} = f, \quad h_{22} = g, \quad (10.9)$$

que son los coeficientes de la Segunda Forma Fundamental. Y los otros coeficientes se deben determinar. Los coeficientes

$$\Gamma_{ij}^m, \quad i, j, m = 1, 2 \quad (10.10)$$

reciben el nombre de Símbolos de Christoffel (segunda clase) de  $M$  en la parametrización  $x$ . Como  $x_{12} = x_{21}$  se concluye inmediatamente que

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \quad \text{y} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2, \quad (10.11)$$

es decir, los Símbolos de Christoffel son simétricos respecto a los índices bajos. A continuación se buscarán fórmulas para calcular los Símbolos de Christoffel. En efecto, considerando las cuatro primeras ecuaciones de (10.8) y usando notación Einstein (índice repetido arriba y abajo o abajo y arriba indica sumatoria) se tiene

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^\alpha x_\alpha + h_{ij} N, \quad (\alpha, i, j = 1, 2). \quad (10.12)$$

Estas cuatro ecuaciones se conocen con el nombre de Ecuaciones de Gauss y al realizar el producto interior con  $x_k$  se obtiene

$$\langle x_{ij}, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^\alpha \langle x_\alpha, x_k \rangle = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha k} \quad (10.13)$$

donde  $g_{\alpha k} = \langle x_\alpha, x_k \rangle$  son los coeficientes de la Primera Forma Fundamental. Las magnitudes  $\Gamma_{ijk} = \langle x_{ij}, x_k \rangle$  se denominan Símbolos de Christoffel de primera especie y es tal que

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha k}. \quad (10.14)$$

Como la matriz de la Primera Forma Fundamental ( $g_{\alpha k}$ ) es invertible con inversa ( $g^{\alpha k}$ ), entonces al utilizar

$$g_{\alpha k} g^{\alpha k} = \delta_\alpha^m$$

se deduce que

$$\Gamma_{ij}^m = \Gamma_{ij}^\alpha \delta_\alpha^m = \Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha k} g^{km} = \Gamma_{ijk} g^{km} \quad (10.15)$$

En búsqueda de una expresión para  $\Gamma_{ijk}$  y por lo tanto, para  $\Gamma_{ij}^m$ , observe

1. la derivada  $\partial_k g_{ij}$  se escribe

$$\begin{aligned}\partial_k g_{ij} &= \partial_k \langle x_i, x_j \rangle \\ &= \langle x_{ik}, x_j \rangle + \langle x_i, x_{jk} \rangle \\ &= \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki}.\end{aligned}\quad (10.16)$$

2. Y ahora

$$\begin{aligned}\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \\ &= \Gamma_{jik} + \Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} + \Gamma_{ijk} - \Gamma_{ikj} - \Gamma_{jki} \\ &= 2\Gamma_{ijk}.\end{aligned}\quad (10.17)$$

Lo que proporciona una fórmula para los  $\Gamma_{ijk}$ .

3. También, se obtiene la siguiente fórmula para los Símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} g^{km} \quad (10.18)$$

que sin usar notación Einstein

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \{ \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} \} g^{km} \quad (10.19)$$

**Ejemplo 10.2.1** *Calcular los Símbolos de Christoffel para una superficie de revolución parametrizada por*

$$x(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(u)).$$

En efecto, sabemos (ver, página 138) que

$$g_{11} = [f(v)]^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = [f'(u)]^2 + [g'(v)]^2,$$

entonces

$$\begin{aligned}\partial_1 g_{11} &= 0, & \partial_1 g_{11} &= 2f f', & \partial_1 g_{12} &= \partial_2 g_{12} = 0, \\ \partial_1 g_{22} &= 0, & \partial_2 g_{22} &= 2[f' f'' + g' g''].\end{aligned}\quad (10.20)$$

Como

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{f^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(f')^2 + (g')^2} \end{pmatrix}$$

entonces, por la fórmula de los Símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{ff'}{f^2}, & \Gamma_{12}^2 &= 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{f'f''}{(f')^2 + (g')^2}. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Por último y por un cálculo directo en (10.19) se obtienen las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{EG - F^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{EG - F^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} \frac{GE_v - FG_u}{EG - F^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \frac{EG_u - FE_v}{EG - F^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{EG - F^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{EG - F^2}. \end{aligned} \quad (10.22)$$

### § 10.3 Ejercicios

1. Encontrar todas las isometrías de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Encontrar las isometrías de  $S^n$  y el toro de revolución.
3. Demostrar las fórmulas dadas en (10.22) para los Símbolos de Christoffel.
4. Calcular los Símbolos de Christoffel de primera y segunda Especie para el Toro de Revolución
5. Probar que  $S^2$  y el Toro de Revolución no son isométricos.

6. ¿Es el elipsoide isométrico a  $S^2$ ?
7. ¿Es el cilindro  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$  localmente isométrico a  $\mathbb{R}^2$ ?



# Capítulo 11

## Sobre el Teorema de Gauss

### § 11.1 Introducción

Como se observó en el capítulo anterior las expresiones de las derivadas de  $x_u$ ,  $x_v$ , en la base  $\{x_u, x_v, N\}$  dependen sólo del conocimiento de los coeficientes de la Primera y Segunda Forma Fundamental de  $M$ . Entonces una forma de obtener relaciones entre estos coeficientes es considerar las expresiones

$$\begin{aligned}(x_{uu})_v - (x_{uv})_u &= 0 \\ (x_{vv})_u - (x_{vu})_v &= 0 \\ N_{uv} - N_{vu} &= 0\end{aligned}\tag{11.1}$$

Introduciendo los valores de las ecuaciones dadas por (10.8), las relaciones (11.1) se transforman en

$$\begin{aligned}A_1x_u + B_1x_v + C_1N &= 0 \\ A_2x_u + B_2x_v + C_2N &= 0 \\ A_3x_u + B_3x_v + C_3N &= 0\end{aligned}\tag{11.2}$$

donde  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  son funciones de

$$g_{11} = E, g_{12} = F, g_{22} = G, e, f, g$$

y de sus derivadas. Como los vectores  $x_u$ ,  $x_v$ ,  $N$  son linealmente independiente, entonces

$$A_i = 0, B_i = 0, C_i = 0, i = 1, 2, 3.$$

Se utilizarán estas relaciones para demostrar la fórmula de Gauss, el Teorema Egregium de Gauss y las ecuaciones de Compatibilidad.

## § 11.2 Fórmula y Teorema Egregium de Gauss

Utilizando los valores en ((10.8)), la primera relación de (11.1) se puede escribir

$$(\Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN)_v - (\Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN)_u = 0. \quad (11.3)$$

Realizando las derivadas y reduciendo términos semejantes, se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 x_{uv} + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + eN_v - (\Gamma_{12}^1 x_{uu} + \Gamma_{12}^2 x_{vu} + fN_u) + (\Gamma_{11}^1)_v x_u + \\ (\Gamma_{11}^2)_v x_v + e_v N - (\Gamma_{12}^1)_u x_u - (\Gamma_{12}^2)_u x_v - f_u N = 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Trasponiendo términos

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 x_{uv} + \Gamma_{11}^2 x_{vv} + eN_v + (\Gamma_{11}^1)_v x_u + (\Gamma_{11}^2)_v x_v + e_v N = \Gamma_{12}^1 x_{uu} + \\ \Gamma_{12}^2 x_{vu} + fN_u + (\Gamma_{12}^1)_u x_u + (\Gamma_{12}^2)_u x_v - f_u N = 0. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Utilizando las las ecuaciones de (10.8)) e igualando coeficientes de  $x_v$  a cero (es decir  $B_1 = 0$ ) se tiene

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + ea_{22} = \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + fa_{21}, \quad (11.6)$$

Como

$$\begin{aligned} ea_{22} - fa_{21} &= e \left( \frac{fF - gE}{EC - F^2} \right) - f \left( \frac{eF - fE}{EG - F^2} \right) \\ &= - \frac{egE - f^2E}{EG - F^2} \\ &= - EK \end{aligned} \quad (11.7)$$

Con lo que se obtiene la fórmula

$$-KE = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2, \quad (11.8)$$

La fórmula (11.8) recibe el nombre de FÓRMULA DE GAUSS.

**Teorema 11.2.1 Teorema Egregium de Gauss.** *La curvatura Gaussiana  $K$  de una superficie es invariante por isometrías locales.*

**Demostración** En efecto, sea  $x : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  una parametrización de  $M$  en  $p$  y sea  $\varphi : V \subseteq M \rightarrow \overline{M}$  donde  $V \subseteq x(U)$  es una vecindad de  $p$  y  $\varphi$  es una isometría local en  $p$ , entonces  $y = \varphi \circ x$  es una parametrización de  $\overline{M}$  en  $\varphi(p)$ .

Como  $\varphi$  es una isometría, los coeficientes de la Primera Forma Fundamental en las parametrizaciones de  $x$  e  $y$  coinciden en los puntos correspondientes  $q$  y  $\varphi(q)$ ,  $q \in V$ , así, los respectivos símbolos de Christoffel también coinciden. Por la Fórmula de Gauss para  $K$  se puede calcular en un punto como función de los símbolos de Christoffel en una parametrización dada en el punto, entonces se sigue que  $K(q) = K(\varphi(q))$ , para todo  $q \in V \subseteq M$ .  $\diamond$

El Teorema de Gauss se considera por la extensión de sus consecuencias, unos de los resultados más importantes de la Geometría de Superficie.

Es un hecho muy importante, extraordinario que un concepto como la curvatura Gaussiana, cuya definición usa de manera esencial, la posición de la superficie en el espacio, no dependa de esta posición pero si apenas de la ESTRUCTURA MÉTRICA, es decir de la Primera Forma Fundamental de la superficie.

Se verá más adelante que son muchos otros conceptos de la Geometría de Superficie que poseen esta característica observada en la Curvatura Gaussiana; esto es, que apenas dependen de la Primera Forma Fundamental de la superficie. Tiene sentido entonces hablar sobre la Geometría de la Primera Forma Fundamental, que llamaremos GEOMETRÍA INTRÍNSECA ya que se puede desarrollar sin tener en cuenta la referencia del espacio

que contiene la superficie (una vez dada la Primera Forma Fundamental o estructura métrica; base para el desarrollo de la Geometría Riemanniana y otras Geometrías).

Para mirar más propiedades geométricas se regresa a los cálculos y entonces igualando los coeficientes de  $x_u$  en (11.5) se observa que la elección  $A_1 = 0$  proporciona:

$$(\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1) + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = FK \quad (11.9)$$

También, igualando en la ecuación (11.5) los coeficientes de  $N$  se obtiene  $C_1 = 0$ . en la forma

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (11.10)$$

La ecuación 11.9 es meramente, cuando  $F \neq 0$ , otra forma de la Fórmula de Gauss.

Aplicando el mismo proceso a la segunda expresión en (11.1) se obtiene  $A_2 = 0$ ,  $B_2 = 0$  que nuevamente proporcionan las Fórmulas de Gauss, es decir, no proporcionan nueva información; mientras que  $C_2 = 0$  está dada por

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{22}^1) - g\Gamma_{12}^2 \quad (11.11)$$

Las ecuaciones (11.10) y (11.11) reciben el nombre de ECUACIONES DE MAINDARDI-CODAZZI.

La Fórmula de Gauss y las Ecuaciones de Maindardi-Codazzi se conocen como ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD de la Geometría de Superficies.

**Ejemplo 11.2.1** *Sea  $M$  una superficie, bajo una parametrización ortogonal, es decir  $F = 0$ , entonces se tiene*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \quad (11.12)$$

**Demostración** Como  $F = 0$  y por (10.22), entonces

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u}{2EG} = \frac{E_u}{2E}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-EE_v}{2EG} = -\frac{E_v}{2G}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v}{2EG} = \frac{E_v}{2E}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{GG_u}{2EG} = \frac{1}{2} \frac{G_u}{G}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v}{2EG} = \frac{G_v}{2G},\end{aligned}\quad (11.13)$$

y al reemplazar en la Fórmula de Gauss, se tiene

$$-KE = \frac{1}{2} \left( \frac{G_u}{G} \right)_u + \frac{1}{2} \left( \frac{E_v}{G} \right)_v - \frac{1}{4} \frac{E_v}{E} \frac{E_v}{G} + \frac{1}{4} \left( \frac{G_u}{G} \right)^2 + \frac{1}{4} \frac{E_v G_v}{G^2} - \frac{1}{4} \frac{E_u G_u}{EG},$$

con lo que

$$-2K = \frac{GG_{uu} - G_u^2}{EG^2} + \frac{GE_{vv} - E_v G_v}{EG^2} - \frac{E_v^2}{2E^2 G} + \frac{G_u^2}{2EG^2} + \frac{E_v G_v}{2EG^2} - \frac{E_u G_u}{2E^2 G},$$

realizando operaciones

$$-2K = \frac{2G_{uu}EG - G_u^2 E + 2E_{vv}GE - E_v G_v E - E_v^2 G - E_u G_u G}{2G^2 E^2},$$

esto es,

$$-2K = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \frac{1}{\sqrt{EG}} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v,$$

y por lo tanto

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right\}.$$

Lo que termina el ejemplo.  $\diamond$

## § 11.3 Ejercicios

1. Sea  $M = \mathbb{R}^2$ , calcular los Símbolos de Christoffel cuando se usan
  - (a) Coordenadas cartesianas.

(b) Coordenadas polares.

2. Usar la fórmula de Gauss para calcular la curvatura Gaussiana en coordenadas cartesianas y polares.
3. Verificar que las ecuaciones (11.9), (11.10) y (11.11) son verdaderas.
4. Sea  $M$  una superficie tales que  $F = 0$  y  $E = 1$  en su Primera Forma Fundamental. Probar entonces que la curvatura Gaussiana  $K$  está dada por

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

5. Dada una superficie de revolución con parametrización

$$\alpha(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u))$$

donde  $(u, v) \in (a, b) \times (0, 2\pi)$ ,  $f > 0$ ,  $\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$ , entonces. probar que la curvatura Gaussiana está dada por

$$K = -\frac{\ddot{f}}{f}.$$

6. Considere la vecindad coordenada para el toro de revolución dada por

$$\alpha(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u),$$

donde  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$  y calcular entonces la curvatura gaussiana.

# Capítulo 12

## Derivada Covariante

En el presente capítulo se generaliza la derivada usual entre vectores del plano desde el punto de vista geométrico, introduciendo así, la derivada covariante como un concepto de importancia en la teoría de las superficies y se usará para transportar paralelamente un vector tangente a lo largo de una curva sobre una superficie.

### § 12.1 Derivada Covariante

Se empieza con la definición de derivada covariante de un campo vectorial (tangente) sobre superficies que es el análogo para la derivación usual en el plano.

**Definición 12.1.1** *Sea  $M$  una superficie regular y  $w$  un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto  $U \subseteq M$ ,  $p \in U$ . Sea  $y \in T_pM$  y se considera la curva parametrizada*

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U,$$

*con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = y$ . Se considera  $w(t)$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  la restricción del campo vectorial  $w$  a la curva  $\alpha$ . El vector obtenido por la proyección de  $(dw/dt)(0)$  sobre el plano  $T_pM$  recibe el nombre de Derivada Covariante en  $p$  del campo vectorial  $w$  conectado (en dirección o relacionado) al*

vector  $y$ . Esta derivada covariante se denota con

$$\left(\frac{Dw}{dt}\right)(0), \quad \text{o} \quad (D_y w)(p),$$

(ver Figura 12.1). o simplemente

$$\frac{Dw}{dt}, \quad \text{o} \quad D_y w,$$

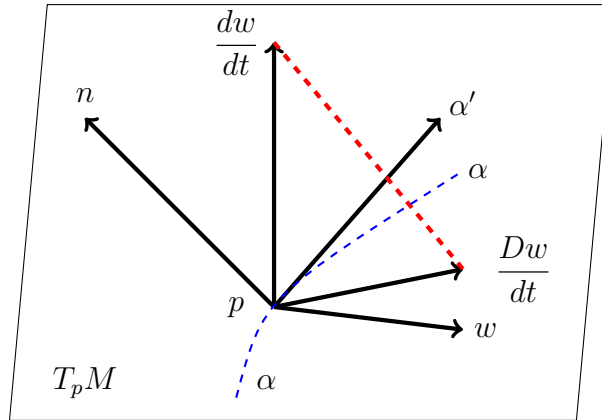


Figura 12.1

La definición 12.1.1 hace uso del vector normal a  $M$  y de una curva particular  $\alpha$ , tangente a  $y$  en  $p$ . Se demostrará que la Derivada Covariante es un concepto de la Geometría Intrínseca y que no depende de la curva escogida  $\alpha$ . Se obtendrá su expresión en función de una parametrización. Sea  $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$  la expresión de una curva  $\alpha$  en un sistema de coordenadas  $x(u, v)$ . y sea

$$w(t) = a(u(t), v(t))x_1 + b(u(t), v(t))x_2 = a(t)x_u + b(t)x_v, \quad (12.1)$$

la expresión de  $w(t)$  en la parametrización  $x(u, v)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= a(t)[x_{11}u' + x_{12}v'] + b(t)[x_{12}u' + x_{22}v'] + a'(t)x_1 + b'(t)x_2 \\ &= a[x_{11}u' + x_{12}v'] + b[x_{12}u' + x_{22}v'] + a'x_1 + b'x_2 \end{aligned} \quad (12.2)$$



Como  $Dw/dt$  es la componente tangencial de  $dw/dt$ , entonces utilizando las expresiones (10.8) para  $x_{11}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{22}$  y haciendo la proyección sobre el tangente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{Dw}{dt} = & (a' + \Gamma_{11}^1 au' + \Gamma_{12}^1 av' + \Gamma_{12}^1 bu' + \Gamma_{22}^1 bv')x_1 + \\ & (b' + \Gamma_{11}^2 au' + \Gamma_{12}^2 av' + \Gamma_{12}^2 bu' + \Gamma_{22}^2 bv')x_2. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Lo que muestra que  $Dw/dt$  sólo depende del vector  $y = (u, v)$  y no depende de la curva  $\alpha$ . Además la superficie aparece en la expresión a través de los Símbolos de Christoffel, esto es, de la Primera Forma Fundamental y así, la derivada covariante es un concepto intrínseco de las superficies regulares.

Si en particular,  $M$  es un plano, se sabe que es posible encontrar una parametrización  $x(u, v) = (u, v)$  tal que  $E = G = 1$  y  $F = 0$ , entonces una rápida mirada sobre las ecuaciones que nos dan los Símbolos de Christoffel se encuentra que  $\Gamma_{ij}^m = 0 \forall i, j, m$  y sigue entonces que

$$\frac{Dw}{dt} = a'x_1 + b'x_2 = (a, b)',$$

coincidiendo con la derivada usual en  $\mathbb{R}^2$ .

La Derivada Covariante es, por lo tanto, una generalización de la derivada usual de campos vectoriales en el plano. Otra consecuencia de la ecuación 12.3 es que la definición de derivada covariante puede aplicarse a campos vectoriales que estén definidos sólo en puntos de una curva parametrizada.

## § 12.2 Transporte Paralelo

**Definición 12.2.1** *Un campo vectorial  $w$  a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow M$  ( $M$  una superficie regular) se dice paralelo si*

$$\frac{Dw}{dt} = 0, \quad (\forall t \in I). \quad (12.4)$$

En el caso particular del plano euclideo, la noción de campo paralelo a lo largo de una curva parametrizada se reduce a la noción de campo constante a lo largo de la curva; esto es, la longitud del vector y el ángulo que forma con una dirección fija son constantes (Figura 12.2).

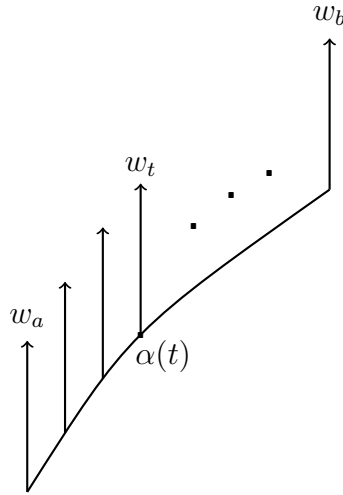


Figura 12.2

**Proposición 12.2.1** Sean  $v$  y  $w$  campos vectoriales paralelos a lo largo de la curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow M$ . Entonces  $\langle v(t), w(t) \rangle$  es constante. En particular,

- (a)  $|v(t)|$  y  $|w(t)|$  son constantes,
- (b) el ángulo entre  $v(t)$  y  $w(t)$  es constante.

**Demostración** Como  $w$  es un campo vectorial paralelo a lo largo de la curva  $\alpha$ , significa que  $\frac{dw}{dt} \perp T_{\alpha(t)}$ , es decir,

$$\langle v(t), w'(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I.$$

Por la misma razón,

$$\langle v'(t), w(t) \rangle = 0, \quad t \in I,$$

y así,

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), w(t) \rangle = \langle v'(t), w(t) \rangle + \langle v(t), w'(t) \rangle = 0,$$

con lo que  $\langle v(t), w(t) \rangle$  es constante.  $\checkmark$

**Proposición 12.2.2** *Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva parametrizada en  $M$  y sea  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ . Entonces existe un único campo vectorial paralelo  $w(t)$  a lo largo de  $\alpha$ , con  $w(t_0) = w_0$ .*

La demostración es una consecuencia inmediata del teorema de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

**Definición 12.2.2** *Sean  $M$  una superficie regular,  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva parametrizada y  $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$ ,  $t_0 \in I$ . Sea  $w$  un campo vectorial paralelo a lo largo de  $\alpha$ , con  $w(t_0) = w_0$ . El vector  $w(t_1)$ ,  $t_1 \in I$  se le llama transporte paralelo de  $w_0$  a través (o a lo largo) de  $\alpha$  en el punto  $t_1$ .*

**Observaciones:**

- (a) Si  $\alpha : I \rightarrow M$ ,  $t \in I$  es una curva regular, entonces el transporte paralelo no depende de la parametrización de  $\alpha(I)$ . En efecto, si  $\beta : J \rightarrow M$ , con parámetro  $\sigma \in J$  es otra parametrización regular de  $\alpha(I)$ , entonces se tiene de la ecuación (12.3) que

$$\frac{Dw}{d\sigma} = \frac{Dw}{dt} \frac{dt}{d\sigma}, \quad t \in I, \sigma \in J. \quad (12.5)$$

Como  $\frac{dt}{d\sigma} \neq 0$ ,  $w(t)$  es paralelo si y sólo si  $w(\sigma)$  es paralelo.

- (b) Fijo dos puntos  $p, q \in M$  y una curva parametrizada  $\alpha : (0, l) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(l) = q$ , se denota

$$P_\alpha : T_pM \rightarrow T_qM$$

la función que envía cada  $v \in T_pM$  en su Transporte Paralelo a lo largo de  $\alpha$  en  $q$ , la Proposición 12.2.1 afirma que esta función es una isometría.

### § 12.3 Ejercicios

En los siguientes ejercicios se consideran  $\gamma$  una curva de clase  $\mathcal{C}^\infty$  de  $I = (a, b)$  en  $M$ ,  $v$  y  $w$  campos vectoriales de clase  $\mathcal{C}^\infty(M)$  y  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , demostrar las igualdades del 1 al 4.

$$1. \frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle$$

$$2. \frac{d}{dt} \langle v, w \rangle = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle$$

$$3. \frac{D}{dt}(v + w) = \frac{Dv}{dt} + \frac{Dw}{dt}$$

$$4. \frac{D}{dt}(fv) = \left(\frac{df}{dt}\right)v + f \frac{Dv}{dt}$$

5. Justificar que el Transporte Paralelo es una isometría.

6. Sean  $M$  una 2–superficie orientada,  $\alpha : (0, l) \rightarrow M$  una curva de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha(l) = q$ , entonces probar que el Transporte Paralelo  $P_\alpha$  preveva la orientación.

# Capítulo 13

## Curvatura Tangencial o Geodésica

### § 13.1 Introducción

Este capítulo trata de mirar un poco hacia atrás y al futuro; cuando se presentó la curvatura normal y la curvatura geodésica quedó una deuda sobre la información de la curvatura tangencial o geodésica que es de gran utilidad en estudios posteriores. Por lo tanto, se retoma la curvatura geodésica para obtener conceptos y fórmulas importantes. Se estudia el valor algebraico de la derivada covariante y se encuentran relaciones con la curvatura geodésica.

### § 13.2 Sobre la Curvatura Geodésica

A continuación se retoman algunos hechos importantes de la curvatura geodésica presentados en el Capítulo 9 cuando se estudió la Segunda Forma Fundamental. Para tal efecto, se considera una curva  $\alpha = \alpha(s)$ , donde  $s$  es el parámetro longitud de arco, sobre una superficie  $M$  :

- (a) Cuando  $\alpha$  está parametrizada por la longitud de arco, es decir,  $t = s$  y de la definición de curvatura geodésica, se tiene

$$k_g = \left\langle \frac{d\dot{\alpha}}{ds}, N \times \dot{\alpha} \right\rangle. \quad (13.1)$$

O bien,

$$k_g = \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \times N \rangle. \quad (13.2)$$

- (b) La curvatura geodésica de una curva, cambia de signo cuando se cambia la orientación de la curva o de la superficie  $M$ .
- (c) Desde un punto de vista externo a la superficie, el valor absoluto de la curvatura geodésica  $k_g$  de  $\alpha$  en  $p = \alpha(t)$  es el valor absoluto de la componente tangencial del vector  $\ddot{\alpha} = kN$ , donde  $k$  es la curvatura de  $\alpha$  en  $p = \alpha(t)$  y  $N$  es el vector normal a  $\alpha$  en  $p$ ; y también se recuerda que

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2$$

donde  $k_n$  es la curvatura normal de  $\alpha$  en  $p$ .

**Ejemplo 13.2.1** *Demostrar que la curvatura geodésica  $k_g$  de una curva parametrizada por la longitud de arco y descrita por  $x = x(s) = x(u(s), v(s))$  en una carta  $x = x(u, v)$  viene dada por*

$$k_g = \left[ \Gamma_{11}^2 \left( \frac{du}{ds} \right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \left( \frac{dv}{ds} \right) + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \left( \frac{du}{ds} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 - \Gamma_{22}^1 \left( \frac{dv}{ds} \right)^3 + \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right] \sqrt{EG - F^2}. \quad (13.3)$$

**Solución.** Como

$$\dot{\alpha} = \frac{dx}{ds} = x_u \frac{du}{ds},$$

entonces

$$\ddot{\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}}{ds} = x_{uu} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2x_{uv} \left( \frac{du}{ds} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right) + x_{vv} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + x_u \frac{d^2u}{ds^2} + x_v \frac{d^2v}{ds^2}$$

Haciendo uso de (13.8) se tiene

$$\begin{aligned}
k_g &= \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \times N \rangle \\
&= \langle x_u, x_{uu} \times N \rangle \left( \frac{du}{ds} \right)^3 + (2\langle x_u, x_{uv} \times N \rangle + \langle x_v, x_{uu} \times N \rangle) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \left( \frac{dv}{ds} \right) \\
&\quad + (\langle x_u, x_{vv} \times N \rangle + 2\langle x_v, x_{uv} \times N \rangle) \left( \frac{du}{ds} \right) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \langle x_v, x_{vv} \times N \rangle \left( \frac{dv}{ds} \right)^3 \\
&\quad + \langle x_u, x_v \times N \rangle \left( \frac{du}{ds} \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \frac{dv}{ds} \right).
\end{aligned}$$

La ecuación de Gauss,  $x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + h_{11} N$  proporciona

$$\begin{aligned}
\langle x_u, x_{uu} \times N \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle x_u, x_u \times N \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_u, x_v \times N \rangle + h_{11} \langle x_u, N \times N \rangle \\
&= \Gamma_{11}^2 \langle x_u, x_v \times N \rangle \\
&= \Gamma_{11}^1 |x_u \times x_v|^2 / |x_u \times x_v| = \Gamma_{11}^2 \sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
\langle x_v, x_{uu}, N \rangle &= -\Gamma_{11}^1 \sqrt{EG - F^2}, & \langle x_u, x_{uv}, N \rangle &= \Gamma_{12}^2 \sqrt{EG - F^2} \\
\langle x_v, x_{uv}, N \rangle &= -\Gamma_{12}^1 \sqrt{EG - F^2}, & \langle x_u, x_{vv}, N \rangle &= \Gamma_{22}^2 \sqrt{EG - F^2} \\
\langle x_v, x_{vv}, N \rangle &= -\Gamma_{22}^1 \sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la anterior ecuación para  $k_g$  se obtiene la fórmula deseada.

### § 13.3 Valor algebraico de la Derivada Covariante

Se estudiará el valor algebraico de la derivada covariante y algunas de sus relaciones, por lo tanto, se considera una superficie regular orientada  $M$  contenida en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\alpha : I = (a, b) \rightarrow M$ ,  $a < b$  una curva parametrizada sobre  $M$  y  $w(t)$ ,  $t \in I$  un campo vectorial unitario sobre  $\alpha$ .

Como  $\langle w, w \rangle = 1$ , entonces

$$\left\langle \frac{dw}{dt}, w \right\rangle = 0.$$

Sea  $N$  la función de Gauss sobre  $M$  y en particular sobre  $\alpha$ . Observe que

$$\{N, w, N \times w\}$$

forma una base para  $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^3$ , tangente en  $\alpha(t)$ , para cada punto  $t \in I$ . Por lo tanto,

$$\frac{Dw}{dt} = a_1N + a_2w + \lambda N \times w, \quad (13.4)$$

como  $N \perp (Dw/dt)$ , entonces tomando en (13.4) producto interno con  $N$ , se obtiene  $a_1 = 0$ . Y al multiplicar por  $w$ , se tiene

$$a_2 = \left\langle \frac{Dw}{dt}, w \right\rangle$$

y como

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{dw}{dt} - k_n N,$$

entonces

$$a_2 = \left\langle w, \frac{dw}{dt} - k_n N \right\rangle = \left\langle w, \frac{dw}{dt} \right\rangle - k_n \langle w, N \rangle = 0$$

con lo que

$$\frac{Dw}{dt} = \lambda(N \times w). \quad (13.5)$$

**Definición 13.3.1** *El número real anterior  $\lambda = \lambda(t)$ , denotado con  $[Dw/dt]$ , se le da el nombre de VALOR ALGEBRAICO DE LA DERIVADA COVARIANTE de  $w$  en  $t$ .*

## Observaciones

- (a) El signo de  $[Dw/dt]$  depende de la orientación de  $M$  y a partir de ahora, la orientación de  $M$  juega un papel importante en los conceptos que serán introducidos, mientras que la curvatura geodésica cambia de signo con un cambio de orientación sobre  $M$ .



(b) Al tomar producto interior con  $N \times w$  en (13.5) se obtiene

$$\lambda = \left\langle \frac{Dw}{dt}, N \times w \right\rangle = \left\langle \frac{dw}{dt} - k_n N, N \times w \right\rangle = \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w \right\rangle.$$

Con lo que

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \left\langle \frac{dw}{dt}, N \times w \right\rangle. \quad (13.6)$$

(c) Cuando  $\alpha$  está parametrizada por la longitud de arco, es decir,  $t = s$  se tiene que

$$k_g = \left\langle \frac{d\dot{\alpha}}{ds}, N \times \dot{\alpha} \right\rangle = \left[ \frac{D\dot{\alpha}}{ds} \right]. \quad (13.7)$$

O bien,

$$k_g = \langle \dot{\alpha}, \ddot{\alpha} \times N \rangle = \left[ \frac{D\dot{\alpha}}{ds} \right]. \quad (13.8)$$

Sean  $v$  y  $w$  dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de una curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow M$  con  $|v(t)| = |w(t)| = 1$ ,  $t \in I$ ,  $I$  un intervalo abierto. Se desea definir una función diferenciable  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  que mida el ángulo formado por  $v(t)$  y  $w(t)$  en la orientación de  $M$ . Para tal asunto, se considera el campo vectorial  $\bar{v}$  de tal manera que  $\{v(t), \bar{v}(t)\}$  sea una base ortonormal positiva para cada  $t \in I$ ; con lo que  $w(t)$  se puede escribir

$$w(t) = a(t)v(t) + b(t)\bar{v}(t), \quad (13.9)$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones diferenciables en  $I$  y  $a^2 + b^2 = 1$ . Bajo estas condiciones se puede enunciar y demostrar el siguiente

**Lema 13.3.1** *Sea  $\varphi_0$  tal que  $a(t_0) = \cos \varphi_0$  y  $b(t_0) = \sin \varphi_0$ . Entonces*

(a) *la función diferenciable*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - a'b) dt \quad (13.10)$$

*es tal que  $\cos \varphi(t) = a(t)$ ,  $\sin \varphi(t) = b(t)$ ,  $t \in I$  y  $\varphi(t_0) = \varphi_0$ .*

(b) La siguiente fórmula es válida

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] - \left[ \frac{Dv}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt} \quad (13.11)$$

donde  $\varphi$  mide, diferenciablemente, el ángulo de  $v$  a  $w$  dado en la parte (a).

### Demostración

(a) Basta demostrar que la función

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \operatorname{sen} \varphi)^2 = 2 - 2(a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi)$$

es idénticamente nula, o

$$A = a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi = 1.$$

Utilizando la definición de  $\varphi$  y el hecho que  $a a' = b b'$ , se obtiene

$$\begin{aligned} A' &= -a (\operatorname{sen} \varphi) \varphi' + b (\cos \varphi) \varphi' + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\ &= -a (\operatorname{sen} \varphi) (ab' - a'b) + b (\cos \varphi) (ab' - a'b) + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\ &= -b' (\operatorname{sen} \varphi) (a^2 + b^2) - a' (\cos \varphi) (a^2 + b^2) + a' \cos \varphi + b' \operatorname{sen} \varphi \\ &= 0. \end{aligned} \quad (13.12)$$

Por lo tanto,  $A(t)$  es constante y como

$$A(t_0) = a(t_0) \cos \varphi_0 + b(t_0) \operatorname{sen} \varphi_0 = \cos^2 \varphi_0 + \operatorname{sen}^2 \varphi_0 = 1.$$

Lo que demuestra la parte (a).

(b) Primero se demostrará la fórmula para el caso  $\varphi \neq 0$ . Como  $\cos \varphi = \langle v, w \rangle$ , se tiene derivando respecto a  $t$

$$\langle v', w \rangle + \langle v, w' \rangle = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi$$

que puede ser escrito

$$\left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi$$

de donde

$$\left[\frac{Dv}{dt}\right]\langle N \times v, w \rangle + \left[\frac{Dv}{dt}\right]\langle v, N \times w \rangle = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi,$$

o sea,

$$\left(\left[\frac{Dv}{dt}\right] - \left[\frac{Dw}{dt}\right]\right)\langle N \times v, w \rangle = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi.$$

De aquí

$$\left(\left[\frac{Dv}{dt}\right] - \left[\frac{Dw}{dt}\right]\right) \operatorname{sen} \varphi = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi.$$

y como  $\varphi \neq 0$ , esto demuestra (b) en este caso.

Si  $\varphi = 0$  en un punto  $p \in \alpha(I)$  o  $\varphi = 0$  en una vecindad  $V$  de  $p$  o existe una sucesión  $p_n \rightarrow p$  con  $\varphi(p_n) \neq 0$ . En el primer caso  $\varphi' = 0$  en  $V$ ,  $v = w$  y la parte (b) vale trivialmente. En el segundo caso, se aplica la parte (a) y (b) sigue por continuidad.

Lo que demuestra el Lema. ◇

Como consecuencia de la parte (b) del Lema inmediatamente anterior es la siguiente.

Si se considera una curva regular en la superficie  $M$ , y  $\alpha$  su parametrización con parámetro la longitud de arco  $s$  en  $p$ , y  $v(s)$  un campo paralelo a lo largo de  $\alpha(s)$ , entonces tomando  $w(s) = \alpha'(s)$  se obtiene

$$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds}\right] = \frac{d\varphi}{ds} \quad (13.13)$$

En otras palabras la curvatura geodésica es la velocidad de variación del ángulo que la tangente a la curva hace con una dirección paralela a lo largo de la curva.

En el caso del plano, la dirección paralela es fija y la curvatura geodésica se reduce a la curvatura usual.

Siempre que se hable de una parametrización de una superficie orientada se está suponiendo la compatibilidad entre la parametrización y la orientación dada y al hablar del ángulo entre dos campos vectoriales a lo largo de una curva se está considerando a una de las determinaciones diferenciables dadas por el Lema inmediatamente anterior.

**Teorema 13.3.1** Sean  $x(u, v)$  una parametrización ortogonal (esto es,  $F = 0$ ) en una vecindad de una superficie orientada  $M$  y  $w(t)$  un campo vectorial unitario diferenciable sobre la curva  $x(u(t), v(t))$ . Entonces

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt} \quad (13.14)$$

donde  $\varphi(t)$  es el ángulo de  $x_u$  a  $w(t)$  en la orientación dada. En particular, tomando  $w(t) = \alpha'(t)$  se tiene

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt} \quad (13.15)$$

**Demostración** Los vectores  $e_1 = x_u/\sqrt{E}$ ,  $e_2 = x_v/\sqrt{G}$  son unitarios, tangentes a las curvas coordenadas y  $e_1 \times e_2 = N$ , donde  $N$  es la orientación dada de  $M$ . Utilizando el Lema 13.3.1, entonces

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \left[ \frac{De_1}{dt} \right] = \frac{d\varphi}{dt}$$

donde  $e_1(t) = e_1(u(t), v(t))$  es el campo  $e_1$  restringido al la curva  $x(u(t), v(t))$ .

Pero

$$\begin{aligned} \left[ \frac{De_1}{dt} \right] &= \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \times e_1 \right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2 \right\rangle \\ &= \langle (e_1)_u, e_2 \rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2 \rangle \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Como  $F = 0$ , entonces

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle = -\frac{1}{2}E_v,$$

con lo que,

$$\langle (e_1)_u, e_2 \rangle = \left\langle \left( \frac{x_u}{\sqrt{E}} \right)_u, \left( \frac{x_v}{\sqrt{G}} \right) \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{E_v}{\sqrt{EG}}.$$

Análogamente,

$$\langle (e_1)_v, e_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{G_u}{\sqrt{EG}}.$$

Por lo tanto,

$$\left[ \frac{Dw}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right\} + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Terminando la demostración.  $\square$

### § 13.4 Ejercicios

1. Probar que si  $A, B$  son vectores de  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$\langle A, B, A \times B \rangle = |A \times B|^2$$

2. Considerar una curva regular parametrizada por la longitud de arco y descrita por  $x = x(s) = x(u(s), v(s))$  sobre una carta  $x = x(u, v)$  de una superficie  $M$ . Probar

$$\langle x_v, x_{uu}, N \rangle = -\Gamma_{11}^1 \sqrt{EG - F^2}, \quad \langle x_u, x_{uv}, N \rangle = \Gamma_{12}^2 \sqrt{EG - F^2}$$

$$\langle x_v, x_{uv}, N \rangle = -\Gamma_{12}^1 \sqrt{EG - F^2}, \quad \langle x_u, x_{vv}, N \rangle = \Gamma_{22}^2 \sqrt{EG - F^2}$$

$$\langle x_v, x_{vv}, N \rangle = -\Gamma_{22}^1 \sqrt{EG - F^2}.$$

3. Demostrar que si una curva sobre una superficie tiene curvatura normal y geodésica idénticamente nula en todo punto, es parte de una línea recta.

4. Considere la superficie de revolución

$$\alpha(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \operatorname{sen} v, g(u)),$$

donde  $u \rightarrow (f(u), 0, g(u))$  es una curva parametrizada por la longitud de arco en  $\mathbb{R}^3$ . Calcular la curvatura geodésica de

- (a) un meridiano  $v = \text{constante}$ ,
- (b) un paralelo  $u = \text{constante}$ ,
- (c) hacer lo mismo, pero para la esfera  $S^2$ .

5. (**Liouville**). Sea  $M$  una superficie orientada. Si

- (a)  $\alpha(s)$  es una curva regular  $C$  parametrizada por la longitud de arco en una vecindad de  $p \in \operatorname{Im}(\alpha) \subseteq M$  sobre la superficie orientada  $M$
- (b)  $x(u, v)$  una parametrización ortogonal de  $M$  alrededor  $p$  y  $\varphi(s)$  es el ángulo que forma  $x_u$  con  $\dot{\alpha}(s)$  en la orientación dada.

Entonces

$$k_g = (k_g)_1 \cos \varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\varphi}{ds},$$

donde  $(k_g)_1$  y  $(k_g)_2$  son las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas  $v = \text{constante}$ ,  $u = \text{constante}$  respectivamente.

# Capítulo 14

## Geodésicas

### § 14.1 Introducción

Las curvas parametrizadas  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  del plano a lo largo de las cuales el campo vectorial tangente  $\gamma'(t)$  es paralelo son precisamente las rectas de este plano. Las curvas parametrizadas que satisfacen una condición análoga en una superficie se les llama GEODÉSICAS.

### § 14.2 Geodésicas

**Definición 14.2.1** Una curva parametrizada, no constante,  $\gamma : I \rightarrow M$  se le llama una geodésica en  $t \in I$  si su campo de vectores tangentes  $\gamma'(t)$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$  en  $t$ , es decir

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0; \quad (14.1)$$

y se dice que  $\gamma$  es una geodésica parametrizada si y sólo si  $\gamma$  es una geodésica para todo  $t \in I$ .

Por la proposición 12.2.1, se obtiene inmediatamente que  $|\gamma'(t)| = c \neq 0$ . Por lo tanto, se puede introducir la longitud de arco

$$s = s(t) = \int_0^t |\gamma'(t)| dt = ct,$$

y concluir que el parámetro  $t$  de una geodésica parametrizada  $\gamma$  es proporcional a la longitud de arco de  $\gamma$ . Evidentemente, la noción de geodésica es un concepto local. Cuando el parámetro es el propio longitud de arco, es decir,  $c = 1$ , se dirá que la geodésica  $\gamma$  está normalizada.

Se determinarán las ecuaciones locales que una geodésicas  $\gamma$  debe satisfacer en un sistema de coordenadas  $(U, x)$ , con coordenadas  $u, v$  alrededor del punto  $\gamma(t_0) = p$ . En  $U$ ,

$$\gamma(t) = x(u(t), v(t))$$

Tomando  $w(t) = \gamma(t)$  en la ecuación (12.3) tenemos que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{du}{dt}x_u + \frac{dv}{dt}x_v$$

Y  $\gamma$  será una geodésica si  $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ , entonces al tomar  $w(t) = \gamma'(t)$  en la ecuación (12.3) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Todo esto prueba el siguiente

**Teorema 14.2.1** *Una parametrización por la longitud de arco de la curva  $x = x(s) = x(u(s), v(s))$  de clase  $\mathcal{C}^2$  en una carta  $x = x(u, v)$  de clase  $\mathcal{C}^2$ , es una geodésica si y sólo si  $u(s)$  y  $v(s)$  stisfacen las ecuaciones*

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 &= 0. \end{aligned} \tag{14.2}$$



## § 14.3 Ejemplos

**Ejemplo 14.3.1** PLANO. El plano euclideo  $(\mathbb{R}^2, g)$  donde  $g$  es la métrica euclidea como métrica semi-Riemanniana, es tal que  $g_{11} = g_{22} = 1$  y  $g_{12} = 0 = g_{21}$ , y se tiene que la derivada covariante compatible con esta métrica es la derivada usual del Cálculo en dos variables y por lo tanto  $\gamma(t) = (a(t), b(t))$   $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  es una geodésica si y sólo si  $a''(t) = 0$  y  $b''(t) = 0$ , y al resolver las ecuaciones resulta

$$\gamma(t) = (a_1, b_1)t + (a_0, b_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

y  $a_i, b_i$  constante, que son las geodésicas o rectas del plano.

**Ejemplo 14.3.2** SUPERFICIE ESFÉRICA. Se considera la esfera unitaria  $S^2$  y la vecindad coordinada  $(U, x)$  donde  $U = (-\pi/2, \pi/2) \times (0, 2\pi)$  y

$$x(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \cos \phi, \text{sen } \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

Además,

$$E = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = 1, \quad F = g_{12} = \langle x_\theta, x_\phi \rangle = 0$$

$$G = g_{22} = \langle x_\phi, x_\phi \rangle = \text{sen}^2 \theta.$$

Entonces su Primera Forma Fundamental y su tensor métrico son

$$ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad g = d\theta \otimes d\theta + \text{sen}^2 \theta d\phi \otimes d\phi. \quad (14.3)$$

La matriz asociada al tensor métrico y su inversa

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}$$

Los Símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= -\text{sen } \theta \cos \theta \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}, & \Gamma_{22}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (14.4)$$

Las ecuaciones para sus geodésicas son

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{ds^2} - \operatorname{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \left(\frac{d\theta}{ds}\right) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Como las geodésicas son las líneas que minimizan la longitud entre dos puntos suficientemente cercanos, y al estar parametrizada por la longitud, se satisface

$$1 = \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2, \quad (14.6)$$

entonces se trabaja con la segunda ecuación de (14.5) junto con (14.6), ya que de estas dos ecuaciones se obtiene la segunda ecuación de (14.5), y además parece ser lo menos complicado. Observe que  $\operatorname{sen}^2\theta$  es un factor integrante de la segunda ecuación de (14.5), entonces

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{d\varphi}{ds} \operatorname{sen}^2\theta \right) = 0$$

Por lo que, existe una constante  $k$  tal que

$$\frac{d\varphi}{ds} \operatorname{sen}^2\theta = k.$$

Por la ecuación (14.6), se tiene entonces

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi/ds}{d\theta/ds}\right)^2 = \frac{k^2}{\operatorname{sen}^2\theta (\operatorname{sen}^2\theta - k)}. \quad (14.7)$$

Con lo que

$$\pm \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{k}{\operatorname{sen}\theta \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta - k}}. \quad (14.8)$$

Haciendo la sustitución  $t = \cot\theta$  usando la identidad  $1 + \cot^2\theta = \operatorname{csc}^2\theta$  se encuentra que

$$\pm \varphi = \operatorname{arcsen}\left(\frac{kt}{\sqrt{1-k^2}}\right) + C$$

donde  $C$  es una constante. Lo que equivale a tener

$$\operatorname{sen}(\pm\varphi + C) = \frac{k \cot \theta}{\sqrt{1 - k^2}}$$

es decir,

$$\pm \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \cos C + \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} C - \frac{k \cos \theta}{\sqrt{1 - k^2}} = 0$$

$$(\operatorname{sen} C)x + (\pm \cos C)y - \frac{kz}{\sqrt{1 - k^2}} = 0$$

que representa la intersección de planos que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^3$  intersección con la esfera  $S^2$ . Esto es, los círculos máximos de  $S^2$ , ver Figura 14.1.

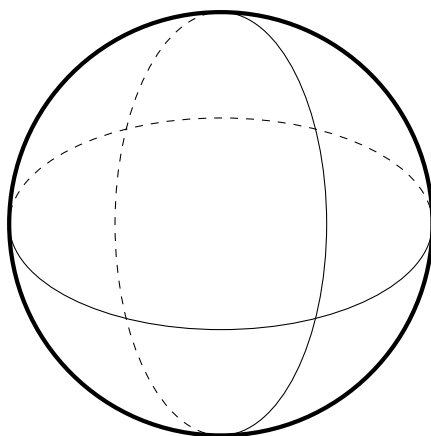


Figura 14.1: geodésicas de  $S^2$

A continuación se presentan más propiedades de las geodésicas que serán de gran utilidad.

**Lema 14.3.1** *Si  $u(s)$  y  $v(s)$  son soluciones de (14.2) de modo que en algún punto*

$$s = s_0, \quad E_0 \left( \frac{du}{ds} \right)_0^2 + 2F_0 \left( \frac{du}{ds} \right)_0 \left( \frac{dv}{ds} \right)_0 + G_0 \left( \frac{dv}{ds} \right)_0^2 = 1,$$

entonces  $s$  es un parámetro por longitud de arco a lo largo de la curva  $x = x(u(s), v(s))$ .

**Demostración** Por el Teorema 14.2.1,  $u(s)$ ,  $v(s)$  es una solución de dichas ecuaciones diferenciales si y sólo si el vector  $dt/ds$ , donde

$$t = \frac{dx}{ds} = x_u \frac{du}{ds} + x_v \frac{dv}{ds},$$

verifica

$$\left\langle \frac{dt}{ds}, x_u \right\rangle = 0 \quad \text{y} \quad \left\langle \frac{dt}{ds}, x_v \right\rangle = 0,$$

o lo que es equivalente a

$$\left\langle \frac{dt}{ds}, U \right\rangle = 0,$$

para todo vector tangente  $U$ . Pero, entonces será

$$\frac{d|t|^2}{ds} = \frac{d}{ds} \langle t, t \rangle = 2 \left\langle \frac{dt}{ds}, t \right\rangle = 0,$$

pues  $t$  es un vector tangente. Por lo tanto, integrando se tiene que  $|t|^2 = c = \text{constante}$ . Pero, en  $s = 0$ ,

$$\begin{aligned} |t_0|^2 &= \left| (x_u)_0 \left( \frac{du}{ds} \right)_0 + (x_v)_0 \left( \frac{dv}{ds} \right)_0 \right|^2 \\ &= E_0 \left( \frac{du}{ds} \right)_0^2 + 2F_0 \left( \frac{du}{ds} \right)_0 \left( \frac{dv}{ds} \right)_0 + G_0 \left( \frac{dv}{ds} \right)_0^2 \\ &= 1. \end{aligned} \quad (14.9)$$

De modo que  $|t|^2 = |dx/ds|^2 = 1$  para todo valor de  $s$ .

Lo que termina la demostración. ✓

**Teorema 14.3.1** *En una vecinda de un punto  $p$  de una superficie regular existe una y sólo una geodésica que pasa por el punto  $p$  en una dirección dada. La geodésica es de clase  $\mathcal{C}^n$  con  $n \geq 3$ .*

**Demostración** De manera natural, se considera como candidata a geodésica por un punto arbitrario  $x(u_0, v_0)$  en las direcciones numéricas

$$[(du/dt)_0, (dv/dt)_0]$$

a la curva

$$x(u(t), v(t))$$

en donde  $u(s)$ ,  $v(s)$  son soluciones de las ecuaciones (14.2) que satisfacen las condiciones

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad \frac{du}{ds}(0) = \left(\frac{du}{ds}\right)_0, \quad \frac{dv}{ds}(0) = \left(\frac{dv}{ds}\right)_0. \quad (14.10)$$

Si en las ecuaciones (14.2) los  $\Gamma_{ij}^k$  son de clase  $\mathcal{C}^1$ , entonces de acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales, existirá una solución única,  $u(s)$ ,  $v(s)$  alrededor de  $s = 0$  que satisfacen las condiciones dadas. Sin embargo, en general,  $s$  no representa la longitud de arco a lo largo de

$$x = x(u(s), v(s))$$

y en consecuencia, del Teorema 14.2.1, sobre las ecuaciones de Geodésicas, no se deduce directamente que  $x = x(u(s), v(s))$  sea una geodésica. Pero en el Ejemplo 14.3.1 se demostró que si  $[(du/ds)_0, (dv/ds)_0]$  de modo que inicialmente sea

$$\left|\frac{dx}{ds}\right|^2 = E\left(\frac{du}{ds}\right)_0^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)_0\left(\frac{dv}{ds}\right)_0 + G\left(\frac{dv}{ds}\right)_0^2 = 1$$

entonces  $|dx/ds|=1$  para todo valor de  $s$ ; es decir,  $s$  será igual a la longitud de arco y por lo tanto, según el teorema anterior,  $x = x(u(s), v(s))$  es la única geodésica que pasa por el punto  $x(u_0, v_0)$  en la dirección  $[(du/ds)_0, (dv/ds)_0]$ .

Evidentemente, como los números directores  $[(du/ds)_0, (dv/ds)_0]$  satisfacen la ecuación anterior, se les puede hallar para una dirección cualquiera,  $[du_0, dv_0]$  con sólo hacer  $(du/ds)_0 = du_0/\lambda$  y  $(dv/ds)_0 = dv_0/\lambda$ , siendo

$$\lambda = E_0 du_0^2 + 2F_0 du_0 dv_0 + G_0 dv_0^2.$$

Por último, los  $\Gamma_{ij}^k$  serán de clase  $\mathcal{C}^1$  si  $x = x(u, v)$  es de clase  $\mathcal{C}^3$   $\diamond$

**Lema 14.3.2** *Sea  $x = x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , una curva  $C$  suave en una superficie regular. Sea, además,  $x = x(s, t)$  la familia de geodésicas representadas con el parámetro longitud de arco que salen de  $C$  y son ortogonales a ella, es decir,  $x(0, t) = x(t)$  y  $\langle x_s(0, t), x'(t) \rangle = 0$ . Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x = x(s, t)$  es una parametrización regular para  $-\epsilon < s < \epsilon$  y  $a < t < b$ .*

**Demostración** Sea  $p$  un punto arbitrario de  $C$  y  $x = x(u, v)$  una carta que contenga a  $p$ . Sea además,  $u = u_0(t)$ ,  $v = v_0(t)$  la curva del plano que se aplican sobre un abierto que contiene a  $p$ , y sea  $u = u(s, t)$ ,  $v = v(s, t)$  la familia de curvas que se aplican sobre las geodésicas descritas por  $x = x(s, t)$ . De acuerdo con el teorema 14.2.1, para todo  $t$ ,  $u(s, t)$  y  $v(s, t)$  son las únicas soluciones de las ecuaciones diferenciales (14.2) que cumplen las condiciones iniciales

$$u(0, t) = u_0(t), \quad v(0, t) = v_0(t), \quad u_s(0, t) = \xi(t), \quad v_s(t) = \eta(t)$$

aquí  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  son de clase  $\mathcal{C}^1$  y están determinadas de manera única por las ecuaciones

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + g\eta^2 = 1, \quad (14.11)$$

$$E\xi \frac{du_0}{dt} + F\left(\xi \frac{dv_0}{dt} + \eta \frac{du_0}{dt}\right) + G\eta \frac{dv_0}{dt} = 0, \quad (14.12)$$

$$\det \begin{pmatrix} \xi & du_0/dt \\ \eta & dv_0/dt \end{pmatrix} > 0. \quad (14.13)$$

La ecuación (14.11) nos asegura que, inicialmente  $|x_s(0, t)| = 1$ ; la ecuación (14.12) indica que el ángulo  $\angle (x_s(0, v), dx/dt) = 0$ , es decir, las geodésicas cortan a  $C$  ortogonalmente y la ecuación (14.13) determina la orientación de las geodésicas  $x = x(s, t)$ . Observe que el determinante es diferente de cero, porque las geodésicas cortan a  $C$  ortogonalmente.

Pero, entonces, según la teoría, las soluciones de las ecuaciones diferenciales dependen de sus condiciones iniciales; por lo tanto, se deduce que  $u(s, t)$ ,  $v(s, t)$  tienen segundas derivadas continuas en algún conjunto

abierto de  $C$ . Además, el jacobiano  $\partial(u, v)/\partial(s, t)$  es diferente de cero y en  $(0, t)$  y se tiene

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \Big|_{(0, t)} = \det \begin{pmatrix} u_s(0, t) & u_t(0, t) \\ v_s(0, t) & v_t(0, t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \xi & du_0/dt \\ \eta & dv_0/dt \end{pmatrix} \neq 0. \quad (14.14)$$

Así que en un conjunto abierto del punto  $p$ , la función

$$x = x(s, t) = x(u(s, t), v(s, t))$$

es una parametrización regular de clase  $\mathcal{C}^2$ . Como  $C$  es compacta, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $x = x(s, t)$  es una reparametrización paramétrica regular de clase  $\mathcal{C}^2$  para  $-\epsilon < s < \epsilon$ ,  $a < t < b$ .



## § 14.4 Coordenadas Geodésicas

Son muchas las situaciones donde resulta conveniente conocer la forma de introducir coordenadas en superficies cuyas curvas de parámetros tengan propiedades especiales. Una carta local donde las curvas de parámetro sean ortogonales y una de las familias de tales curvas esté formada por geodésicas, recibe el nombre de CONJUNTO DE COORDENADAS GEODÉSICAS.

Las coordenadas geodésicas se pueden introducir en una superficie de varias formas, una es la siguiente. Suponga que  $x = x(u)$ ,  $a < u < b$  es un arco  $C_0$  de clase al menos  $\mathcal{C}^2[a, b]$  en una superficie regular. Por el Teorema 14.3.1, por cada punto  $x(v_0)$  de  $C_0$  pasa una única geodésica  $x = x(u, v_0)$  perpendicular a  $C_0$  a lo largo de la cual  $u$  es el parámetro longitud de arco y tal que  $x(0, v_0) = x(v_0)$ , ver Figura 14.2.

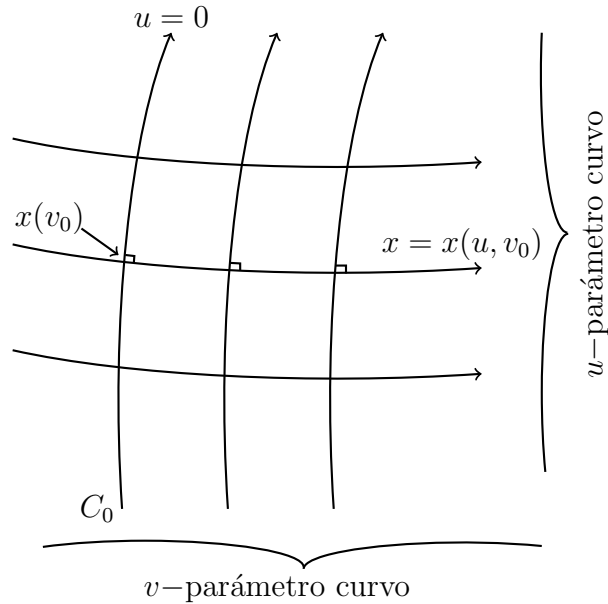


Figura 14.2

**Teorema 14.4.1** Si  $x = x(v)$ ,  $a \leq v \leq b$ , es un arco arbitrario de clase  $\mathcal{C}^2$  en una superficie regular  $M$ , entonces existe  $\epsilon > 0$  y un conjunto de coordenadas geodésicas,  $(F = 0)$ ,  $x = x(u, v)$ ,  $-\epsilon < u < \epsilon$ ,  $a < v < b$ , en  $M$  de clase  $\mathcal{C}^2$  tal que  $x(0, v) = x(v)$  y las curvas de parámetro  $u$  son parametrizaciones, por la longitud de arco de geodésicas.

**Demostración** Por la Proposición 14.3.2, para  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeño, la función  $x = x(u, v)$ ,  $-\epsilon < u < \epsilon$ ,  $a < v < b$ , es una parametrización regular de la superficie  $M$ . Nuestro objetivo ahora es demostrar que las curvas de parámetro  $u$  y las de parámetro  $v$  son ortogonales. En efecto, se considera la derivada

$$F_u = \frac{d}{du} \langle x_u, x_v \rangle = \langle x_{uu}, x_v \rangle + \langle x_u, x_{uv} \rangle \quad (14.15)$$



Como  $u$  es la longitud de arco, entonces  $E = \langle x_u, x_u \rangle = 1$ , con lo que

$$\langle x_{uv}, x_u \rangle = 0$$

También, como  $u$  es la longitud de arco,  $x_u$  es la tangente unitaria a las curvas de parámetro  $u$  y  $x_{uu}$  el vector de curvatura de las mismas. Pero, a lo largo de una geodésica, el vector de curvatura tiene dirección y sentido de la normal de superficie. Por lo tanto,

$$\langle x_{uu}, x_u \rangle = \langle x_{uu}, x_v \rangle = 0.$$

Como consecuencia de la ecuación (14.15), se tiene que  $F_u = 0$ . Por lo tanto,  $F = \text{constante}$  en todos los puntos de la geodésica  $v = \text{constante}$  ortogonal a  $C_0$ . Es decir  $F = 0$  para  $u = 0$  y para cada valor de  $v$ . Por lo tanto,  $F = 0$ .

Lo que proporciona que las curvas de parámetro  $u$  y  $v$  son ortogonales entre sí y por lo tanto,

$$x = x(u, v)$$

es un conjunto de coordenadas geodésicas. ✎

## § 14.5 Hacia las Coordenadas Geodésicas Polares

Otro sistema de coordenadas que permite estudiar con facilidad algunos apartes de la geometría diferencial de superficies son los sistemas de coordenadas geodésicas polares que se presentarán en esta sección, para tal efecto primero se presenta el siguiente

**Lema 14.5.1** *Existe  $\epsilon > 0$  tal que un sistema de coordenadas polares geodésicas  $x = x(r, \theta)$  en un punto  $p$  de una 2-superficie es una parametrización regular para  $0 < r < \epsilon$ ,  $-\infty < \theta < \infty$ , que aplica a  $0 < r < \epsilon$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , biyectivamente sobre una vecindad reducida de  $p$ .*

**Demostración** Se considera la carta  $x = x(u, v)$  que contenga a  $p$ , tal que transforma a  $(0, 0)$  en  $p$  y que en ese punto, es  $x_u = g_1$  y  $x_v = g_2$ ,

siendo  $g_1$  y  $g_2$  vectores tangentes ortogonales respecto de los cuales se mide  $\theta$ . Observe que en  $p$ ,

$$E = \langle x + u, x_v \rangle = 1, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle = 0, \quad G = \langle X_v, x_v \rangle.$$

Ahora, las ecuaciones diferenciales respecto de la carta  $x = x(u, v)$ , es decir

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dt^2} + \Gamma_{11}^1 \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^1 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \Gamma_{11}^2 \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \Gamma_{22}^2 \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (14.16)$$

con las condiciones iniciales

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \frac{du}{dt}(0) = \xi, \quad \frac{dv}{dt}(0) = \eta. \quad (14.17)$$

De acuerdo con la teoría de las ecuaciones diferenciales para cada uno de los  $\xi, \eta$  en una vecindad de  $t = 0$ , existe una solución, única,  $u(t; \xi, \eta)$ ,  $v(t; \xi, \eta)$ , que posee derivadas continuas de segundo orden respecto de  $t, \xi, \eta$ . Como las ecuaciones son lineales y homogéneas con relación con relación a las derivadas de segundo orden y a los productos de las dos primeras derivadas, se deduce que, dada cualquier solución

$$u(t; \xi, \eta), \quad v(t; \xi, \eta)$$

las funciones

$$u(s; \rho\xi, \rho\eta), \quad v(s; \rho\xi, \rho\eta),$$

en donde  $t = \rho s$ , constituyen también una solución de la ecuación diferencial para  $\rho s$  pequeño y verifican las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u|_{s=0} = u|_{t=0} = 0, \quad v|_{s=0} = v|_{t=0} = 0, \\ u_s|_{s=0} = u_t|_{t=0} = \rho\xi, \quad v_s|_{s=0} = v_t|_{t=0} = \rho\eta. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(t; \xi, rho) = u(s; \xi, \eta), \quad y \quad v(t; \xi, \eta) = v(s; \rho\xi, \rho\eta).$$

En particular, para  $s = 1$  se tiene que

$$u(t; \xi, rho) = u(1; \xi, \eta), \quad y \quad v(t; \xi, \eta) = v(1; \rho\xi, \rho\eta).$$

Ahora, sea  $x = \rho\xi$ ,  $y = \rho\eta$  y considere la transformación de parámetro

$$u = u^*(x, y), \quad v = v^*(x, y),$$

en donde

$$u^*(x, y) = u(1; u, y), \quad v^*(x, y) = v(1, x, y).$$

En la forma anterior, una vecindad del origen en el plano  $xy$  se transforma en una vecindad del origen del plano  $uv$ . Las ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales permiten ver que  $u^*(0, 0) = 0$  y  $v^*(0, 0) = 0$ . Además en  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  y todos los  $\xi$ ,  $\eta$ , se tiene

$$\xi = u_t = u_x^* x_t + u_y^* y_t = u_x^* \xi + u_y^* \eta$$

$$\eta = v_t = v_x^* x_t + v_y^* y_t = v_x^* \xi + v_y^* \eta.$$

De donde,  $u_x^* = 1$ ,  $u_y^* = 0$  y  $v_y^* = 1$  y en esta forma, el jacobiano

$$\frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(x, y)} \Big|_{(0,0)} = \det \begin{pmatrix} u^* & v^* \\ v_x^* & v_y^* \end{pmatrix}_{(0,0)} = 1.$$

Puesto que el jacobiano es continuo, entonces es diferente de cero en alguna vecindad de  $(0, 0)$ . De esta manera,

$$u = u^*(x, y), \quad v = v^*(x, y)$$

es una transformación admisible de coordenadas de clase al menos  $\mathcal{C}^2$  que aplica una vecindad del origen del plano  $xy$  biyectivamente en una vecindad del origen del plano  $uv$ . Ahora, considere la aplicación

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(x, y) = \mathbf{x}(u^*(x, y), v^*(x, y)). \quad (14.18)$$

Ésta es una carta local de clase  $\mathcal{C}^2$  de la superficie, en una vecindad de  $p$ , que aplica el punto  $(0, 0)$  en  $p$ . Se verifica entonces que en  $p$ ,

$$\mathbf{x}_x^* = \mathbf{x}_u, \quad \mathbf{x}_y^* = \mathbf{x}_v;$$

y entonces en  $p$

$$E^* = 1, \quad F^* = 0, \quad G^* = 1.$$

Por último, sea  $\xi = \cos \phi$  y  $\eta = \sin \phi$ , de modo que

$$x = \rho \cos \phi \quad y = \rho \sin \phi,$$

y considere la función descrita por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\rho, \phi) = \mathbf{x}^*(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi).$$

Es evidente que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\rho, \phi)$  es una parametrización regular (de clase  $\mathcal{C}^2$ ) que aplica a  $0 < \rho < \epsilon$ , y  $0 \leq \phi < 2\pi$  inyectivamente sobre una vecindad reducida de  $p$ . Pues, para estos  $\rho$ ,  $\phi$   $x = \rho \cos \phi$   $y = \rho \sin \phi$  es. inyectiva sobre un entorno no reducido del origen en el [plano  $xy$ .

Solo falta demostrar que ciertamente  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\rho, \phi)$  es el sistema dado de coordenadas polares geodésicas, es decir,  $\mathbf{x}^{**}(r, \theta) = \mathbf{x}(r, \theta)$ . Entonces para un  $\phi_0$  fijo se obtiene

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\rho, \phi_0) = \mathbf{x}(u^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0), v^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0))$$

en donde

$$u^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0) = u(1; \rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0) = u(\rho, \cos \phi_0, \sin \phi_0).$$

Y análogamente,

$$v^*(\rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0) = v(1; \rho \cos \phi_0, \rho \sin \phi_0) = v(\rho, \cos \phi_0, \sin \phi_0).$$

Pero,  $u$  y  $v$  son soluciones de las ecuaciones diferenciales, (14.2) que satisfacen la condición inicial (14.17) donde inicialmente

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \xi^2 + \eta^2 = \sin^2 \phi_0 + \cos^2 \phi_0 = 1.$$

Por lo tanto,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{**}(\rho, \phi_0)$  es una parametrización por longitud de arco de la geodésica que pasa por  $p$ , en la dirección de los vector tangente

$$\mathbf{x}_u \cos \theta_0 + \mathbf{x}_v \sin \theta_0 = g_1 \cos \theta_0 + g_2 \sin \theta_0$$

Y como estas geodésicas son únicas, se tiene entonces que

$$\mathbf{x}^{**}(r, \theta) = \mathbf{x}(r, \theta),$$

lo que completa la demostración.  $\checkmark$

### 14.5.1 Coordenadas Geodésicas Polares

Sean  $p$  un punto de una superficie regular,  $g_1$  y  $g_2$  dos vectores ortonormales y paralelos al plano tangente a la superficie en  $p$ , como se muestra en la Figura 14.3.

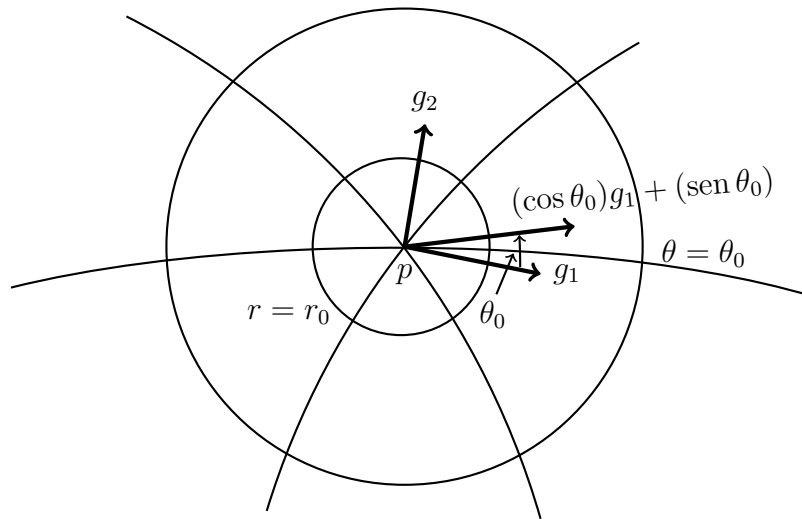


Figura 14.3

De acuerdo al Teorema 14.3.1 a cada número real  $\theta_0$  correspondiente a una única geodésica, representada por la longitud de arco,  $x = x(r, \theta_0)$ ,

que pase por  $p$  y tenga dirección del vector tangente

$$(\cos \theta_0)g_1 + (\operatorname{sen} \theta_0)g_2$$

En el Lema 14.5.1 se demostró que existe un  $\epsilon > 0$  tal que

$$0 < r < \epsilon, \quad x = x(r, \theta)$$

sea una parametrización regular y por lo tanto, un conjunto de coordenadas geodésicas, al que se le da el nombre de COORDENADAS GEODÉSICAS POLARES en  $p$ .

Se demostró además, que para un cierto

$$0 < r < \epsilon, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$x = x(r, \theta)$  es una función biyectiva sobre una vecindad reducida de  $p$ . De esta forma, la geodésica que une a  $p$  con cada punto de su vecindad es única. Las curvas  $r = \text{constante}$ , de parámetro  $\theta$  se denominan CIRCUNFERENCIAS GEODÉSICAS y los correspondientes valores de  $r$  reciben el nombre de radios de las circunferencias geodésicas.

Como en las coordenadas geodésicas en general, la Primera Forma Fundamental en el caso de las coordenadas geodésicas polares,  $x = x(r, \theta)$ ,  $r > 0$ , es de la forma

$$I = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2.$$

## § 14.6 Arcos de Longitud Mínima

Si  $p$  y  $q$  son puntos de una superficie bastante cerrada tal que en  $p$  existe un conjunto de coordenadas geodésicas polares  $x = x(t, \theta)$  que contenga a  $q$ , como aparece en la Figura 14.4

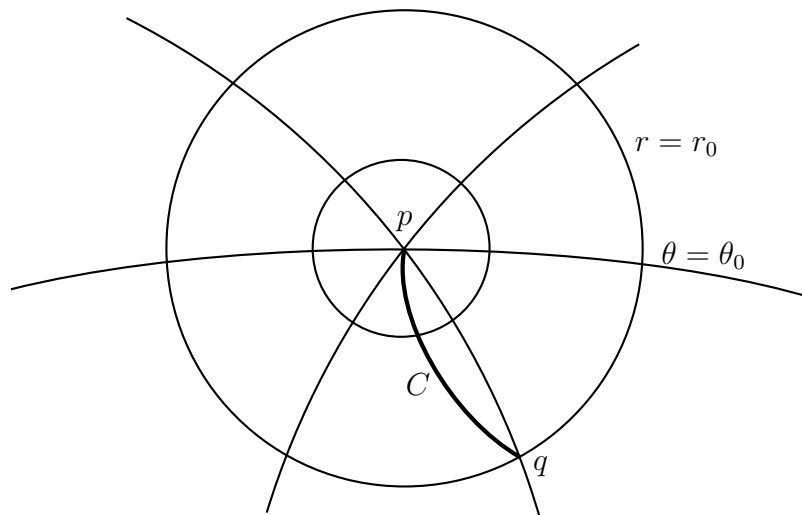


Figura 14.4

entonces se demostrará que la geodésica  $\theta = \text{constante}$  que contenga a  $q$  es el único arco de longitud mínima entre  $p$  y  $q$ .

Suponga que  $q$  pertenece a la circunferencia geodésica  $r = r_0$  y a la geodésica  $\theta = \theta_0$  y que  $x = x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  es un arco  $C$  de  $M$  que une a  $p$  con  $q$ . Por el momento, se supone que  $C$  está contenido en  $x = x(r, \theta)$ . Entonces la longitud  $l(C)$  del arco  $C$  es

$$\begin{aligned} l(C) &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + G(r, \theta) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} dt \\ &\geq \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} dt, \quad (\text{pues } G > 0) \\ &\geq \int_a^b \left(\frac{dr}{dt}\right) dt = \int_0^{r_0} dr = r_0 \end{aligned} \quad (14.19)$$

Pero,  $r_0$  es la longitud de la geodésica  $\theta = \theta_0$  entre  $p$  y  $q$ , la anterior igualdad de signos tiene lugar si y sólo si  $\frac{d\theta}{dt} = 0$  o sea,  $\theta = \text{constante}$ .

De esta forma, la geodésica  $\theta = \theta_0$  es entre todos los arcos contenidos en  $x = x(r, \theta)$  el único de longitud mínima que une a  $p$  y  $q$ .

Ahora se puede demostrar que éste es en realidad el menor de todos los arcos regulares de  $M$  que une a  $p$  con  $q$ . En efecto, suponga que  $x = x(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , sea un arco  $C$  que une a  $p$  con  $q$  y hace parte de  $x = x(r, \theta)$ , como se observa en la Figura 14.5.

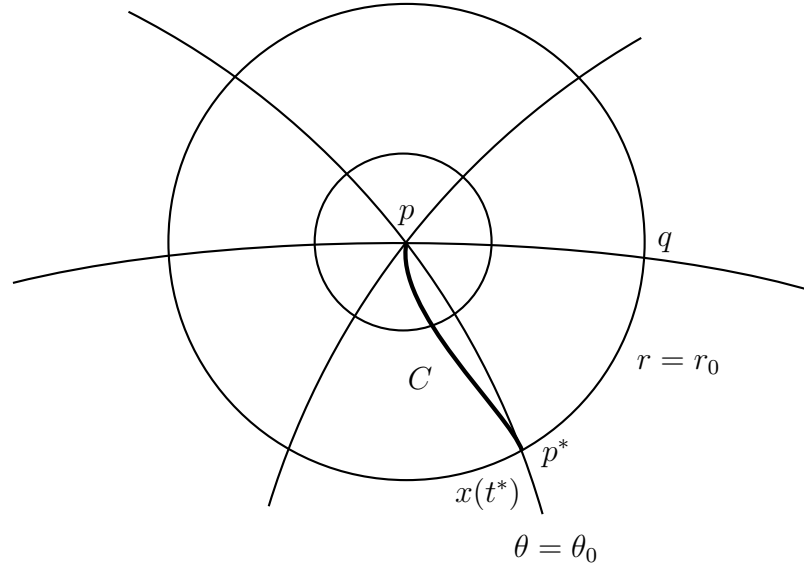


Figura 14.5

Entonces es posible ver que en algún punto  $x = x(x^*)$  con  $t^* < t$ ,  $C$  corta la circunferencia geodésica  $r = r_0$ , por ejemplo, en  $\theta^*$  y está contenido en  $x = x(r, \theta)$  si  $a \leq t \leq t^*$ .

Ahora bien, si se designa por  $C^*$  la parte de  $C$  que está contenida correspondiente al intervalo  $a \leq t \leq t^*$ , entonces  $C^*$  es un arco regular en  $x = x(r, \theta)$  que une a  $p$  con  $p^*$  que es el punto correspondiente a  $(r_0, \theta^*)$ . La argumentación anterior, aplicada a los puntos  $p$  y  $p^*$  nos proporciona la expresión:  $l(C^*) > r_0$ , pero  $l(C) > l(C^*)$ , y por lo tanto  $l(C) > r_0$  que es la longitud de la geodésica  $\theta = \theta_0$  que une a  $p$  y  $q$ . De lo que se tiene el siguiente

**Teorema 14.6.1** *Si  $p$  y  $q$  son puntos sobre una superficie  $M$  tal que existe un conjunto de coordenadas geodésicas polares en  $p$  que contiene también*



a  $q$ , entonces existe un único arco de longitud mínima entre  $p$  y  $q$ , dado por la geodésica que une a  $p$  y  $q$ .

A partir de este Teorema se puede demostrar:

**Proposición 14.6.1** *Si  $C$  es un arco de longitud mínima entre dos puntos sobre una superficie regular, entonces  $C$  es una geodésica (Ejercicio 7).*

## § 14.7 Ejercicios

1. Calcular las geodésicas, asociadas a la Primera Forma Fundamental como tensor métrico, de
  - (a) Paraboloides:  $x_3 = x_1^2 + x_2^2$
  - (b) Hiperboloides elípticos:  $x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0$
2. Suponga que  $x = x(s) = x(u(s), v(s))$  es la representación por longitud de arco de una geodésica sobre una parametrización  $x = x(u, v)$  para una superficie regular tal que

$$E = E(u), \quad F = 0, \quad G = G(u);$$

demostrar que  $\sqrt{G} \cos \theta = C = \text{constante}$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre la geodésica y las curvas a  $v$ -parámetro  $u = \text{constante}$ , es decir,  $\theta = \angle(t, x_v)$ .

3. Sea  $x = x(u, v)$  una parametrización de una superficie regular tal que

$$E = E(u), \quad F = 0 \quad \text{y} \quad G = G(u).$$

Entonces probar

- (a) Las curvas  $u$ -paramétricas y  $v$ -constantes son geodésicas;
- (b) la curva  $v$ -paramétrica,  $u = u_0$  es una geodésica si y sólo si  $G_u(u_0) = 0$ ;

- (c) La curva de la forma  $x = x(u, v(u))$  es una geodésica si y sólo si

$$v = \pm \int \frac{C\sqrt{E}}{\sqrt{G}\sqrt{G - c^2}} du \quad (C = \text{constante}).$$

4. Probar la Proposición 14.6.1.
5. Sean  $M$  y  $\bar{M}$  superficies bi-dimensionales y  $f : M \rightarrow \bar{M}$  una isometría local. Probar que para dos puntos  $p$  y  $q$  en  $M$  la distancia intrínseca  $D(f(p), f(q)) \leq D(p, q)$ .

# Capítulo 15

## Teorema de Gauss-Bonnet

### § 15.1 Introducción

Es fácil imaginarse el estrecho que existe entre el Análisis, Álgebra y Geometría de Superficie; pero uno de los resultados más sorprendente y encantadores de la Geometría Diferencial de Superficies, fue publicado por Bonnet en 1848 referido a una región acotada por una curva simple no necesariamente geodésica, que hoy recibe el nombre de Teorema de Gauss-Bonnet. El nombre de Gauss quedó inmerso en el teorema, puesto que en el año 1827 publicó un caso especial para triángulos geodésicos sobre superficies. En términos generales el presente capítulo tiene como fin demostrar el teorema de Gauss-Bonnet en sus versiones *local y global*, como etapa final de un curso introductorio de Geometría de Superficies.

El teorema de Gauss-Bonnet es un maravilloso y profundo ejemplo de conexión entre dos ramas de las matemáticas que de entrada parecieran no tener mucha relación. Por un lado, la curvatura Gaussiana, invariante o propiedad geométrica de una superficie y por otro la característica de Euler que es un invariante topológico, puente entre Geometría Diferencial de Superficies y Topología Diferencial.

Una de las más interesantes características de la Geometría Diferencial de Superficies es la relación entre las propiedades locales y las propiedades

que dependen de la superficie entera. Por lo que una de las propiedades más notables en este sentido es el mismo Teorema de Gauss-Bonnet. En su trabajo fundamental (*Considerations on curved surfaces*, 1827), Gauss probó el caso especial de su Teorema para triángulos geodésicos y anticipó su importancia para el desarrollo de la Geometría Diferencial. El Teorema para regiones más generales es debido a O. Bonnet (*Jour. Ecole Polytech.* 19 (1848), 1-146). Con la llegada de la Topología, llegó a ser evidente que la formulación global del Teorema de Gauss-Bonnet establecía una conexión entre la Topología y la Geometría Diferencial. La extensión de ese resultado a dimensiones mayores llegó a ser un problema matemático interesante, después de muchos estudios preliminares una solución satisfactoria fue obtenida en 1944 por S.S Chern.

Para ver otras presentaciones del tema, de manera similar, se puede consultar por ejemplo, [7], [10], [17], [28], entre otros.

## § 15.2 Sobre el Teorema Local de Gauss-Bonnet

Un caso particular de este teorema lo presentó Gauss en un artículo que versaba sobre triángulos geodésicos de una superficie (es decir, triángulos cuyos lados son arcos de geodésicas). En líneas generales, éste afirma que el exceso con respecto a  $\pi$  de la suma de los ángulos interiores  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  de un triángulo geodésico,  $\Omega$ , es decir, sus lados son geodésicas, es igual a la integral extendida a  $\Omega$  de la curvatura gaussiana  $K$ ; es decir,

$$\sum_{i=0}^2 \varphi_i - \pi = \iint_{\Omega} K dA \quad (15.1)$$

Como se probará una vez se demuestre el Teorema de Gauss Bonnet local, ver página 219.

Para empezar con el estudio del teorema de Gauss-Bonnet Local, se presentarán a continuación unos preliminares.

**Definición 15.2.1** *Una función continua  $\alpha : [0, l] \rightarrow M$  del intervalo*

$[0, l]$  en una superficie regular  $M$ , se dice que es una CURVA PARAMETRIZADA REGULAR A TROZOS, CERRADA Y SIMPLE si

1.  $\alpha(0) = \alpha(l)$ ,
2.  $t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in [0, l)$  implica que  $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ ,
3. existe una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$  de  $[0, l]$  tal que  $\alpha$  es diferenciable y regular en cada  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, k$ .

Intuitivamente, esto significa que  $\alpha$  es una curva cerrada (condición 1), sin auto-intersecciones (condición 2) que, posiblemente, no tiene recta tangente sólo en un número finito de puntos (condición 3).

Los puntos  $\alpha(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$  se le llaman vértices de  $\alpha$  y los trazos  $\alpha([t_i, t_{i+1}])$  se llaman arcos regulares de  $\alpha$ .

Por la condición de regularidad, en cada vértice  $\alpha(t_i)$  existe el límite a la izquierda, es decir, para  $t < t_i$

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} \alpha'(t) = \alpha'(t_i^-) \neq 0,$$

y el límite a derecha, es decir, para  $t > t_i$

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} \alpha'(t) = \alpha'(t_i^+) \neq 0.$$

Ahora se asume que  $M$  está orientada y que  $|\theta_i|$ ,  $0 < |\theta_i| \leq \pi$ , la determinación más pequeña del ángulo entre  $\alpha'(t_i^-)$  y  $\alpha'(t_i^+)$ , ver Figura 16.1.

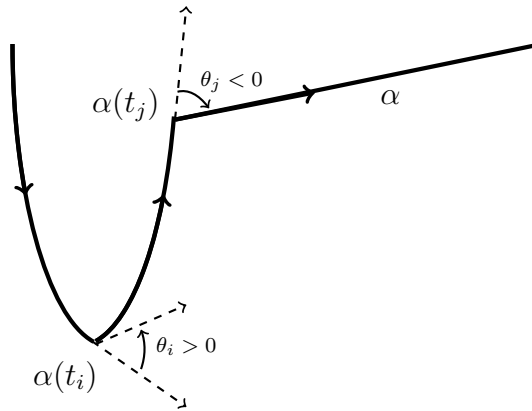


Figura 16.1: ángulo externo con orientación

Se le dará a  $\theta_i$  el signo del determinante  $(\alpha'(t_i^-), \alpha(t_i^+), N)$ . Esto significa que si el vértice  $\alpha(t_i)$  no es una cúspide (Figura 16.1), el signo de  $\theta_i$  está dado por la orientación de  $M$  y el ángulo con signo  $\theta_i$  es tal que  $-\pi < \theta_i < \pi$  se llama ángulo externo del vértice  $\alpha(t_i)$ .

En el caso que el vértice  $\alpha(t_i)$  sea una cúspide, esto es,  $|\theta| = \pi$ , ver Figura 16.2, se escoge el signo de  $\theta_i$  como sigue:

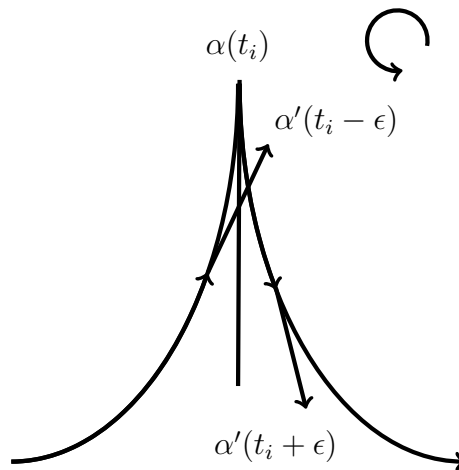


Figura 16.2

Por la condición de regularidad, se puede ver que existe  $\epsilon' > 0$  tal que el determinante

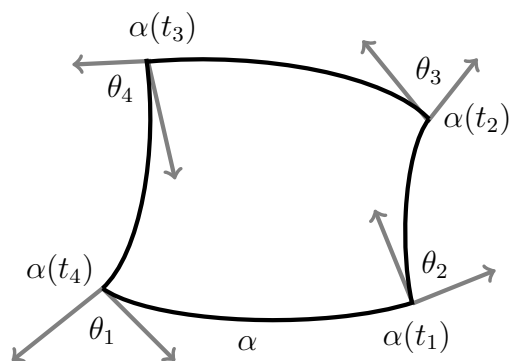
$$(\alpha'(t_i - \epsilon), \alpha'(t_i + \epsilon), N)$$

no cambia de signo para  $0 < \epsilon < \epsilon'$ , y le damos a  $\theta_i$  el signo de este determinante.

### 15.2.1 Notaciones y Observaciones

Sea  $M$  una superficie regular orientada y  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  una parametrización compatible con la orientación de  $M$ ; se asume que  $U$  es un conjunto homeomorfo a un disco abierto del plano.

1. Se considera  $\alpha : [0, l] \rightarrow x(U) \subset M$  una curva parametrizada regular a trozos, cerrada y simple, con vértices  $\alpha(t_i)$  y ángulos externos  $\theta_i$ ,  $i = 0, \dots, k$ ; ver Figura 16.3.



Ángulo exteriores,  $k = 4$

Figura 16.3

2.  $\alpha$  está positivamente orientada si para cada  $\alpha(t)$ , perteneciente a un arco regular, la base ortogonal positiva  $[\alpha'(t), h(t)]$  satisface la

condición de que  $h(t)$  apunta hacia arriba de  $\Omega$ ; más preciso, para cualquier curva  $\beta : I \rightarrow \Omega$  con  $\beta(0) = \alpha(t)$  y  $\beta'(0) \neq \alpha'(t)$  se tiene que  $\langle \beta'(0), h(t) \rangle > 0$ . Intuitivamente, esto significa que si uno está caminando sobre la curva  $\alpha$  en la dirección positiva y apunta con la cabeza hacia  $N$ , entonces la región  $\Omega$  está a la izquierda, ver Figura 16.4.

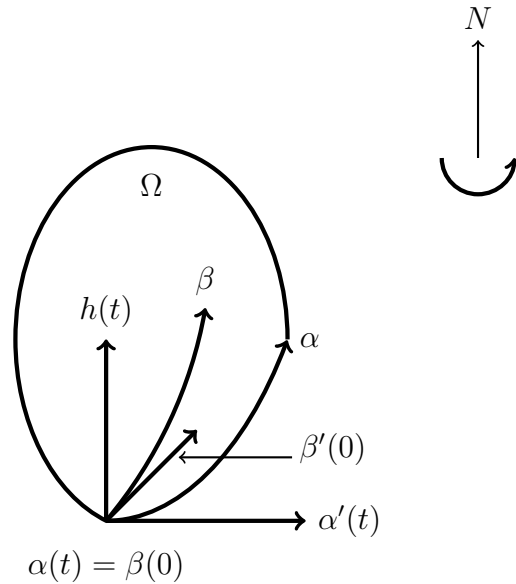


Figura 16.4

3. Considere la función diferenciable  $\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$  que mide en cada punto  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  el ángulo positivo desde  $x_u$  a  $\alpha'(t)$  de acuerdo con el Lema 13.3.1.
4. Una región  $\Omega \subset M$  (unión de un conjunto conexo con su frontera) se le llama REGIÓN SIMPLE si  $\Omega$  es homeomorfo a un disco y la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  es el trazo de una curva parametrizada, simple, cerrada, regular a trozos  $\alpha : I \rightarrow M$ .



El siguiente hecho topológico se usará más adelante

**Teorema del Índice de Rotación** para curvas simples cerradas, también conocido como **Número de Rotación** de una curva simple cerrada, se puede expresar con las notaciones dadas hasta el momento, en 15.2.1 de la forma

$$\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi \quad (15.2)$$

donde el signo positivo o negativo depende de la orientación de  $\alpha$ .

Una demostración del **Teorema del Índice de Rotación** para curvas simples cerradas se puede encontrar casi que en cualquier texto de topología, por ejemplo en [21], página 458; también se puede ver en [28], vol. 2, página 20. El Teorema fue presentado en su forma original por H. HOPF, *Compositio Math.* 2(1935), pág. 50-60.

5. Sea  $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  una parametrización de  $M$  compatible con su orientación y  $\Omega \subset x(U)$  una región acotada de  $M$ . Si  $f$  es una función diferenciable sobre  $M$ , entonces es un resultado del Cálculo sobre superficies que

$$\iint_{x^{-1}(\Omega)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

no depende de la parametrización  $x$  y es denotada por

$$\iint_{\Omega} f \, dA$$

donde  $dA$  es el elemento de área.

Ahora, se puede enunciar el **Teorema Local de Gauss-Bonnet**; también conocido como **Fórmula Local de Gauss-Bonnet** seguido de su demostración.

**Teorema 15.2.1 [Teorema Local de Gauss-Bonnet]** *Se considera  $M$  una superficie orientada y  $x : U \rightarrow M$  una parametrización alrededor de un punto  $p \in M$ , si*

- (a)  *$x$  ortogonal, es decir,  $F = 0$ , donde  $U \subset \mathbb{R}^2$  es homeomorfo a un disco abierto.*
- (b)  *$x$  es compatible con la orientación de  $M$ .*
- (c)  *$\Omega \subset x(U)$  una región simple de  $M$  y sea  $\alpha : I \rightarrow M$  tal que  $\partial\Omega = \alpha(I)$ , además parametrizada por la longitud de arco  $s$ , siendo  $\alpha(s_0), \dots, \alpha(s_k)$  y  $\theta_0, \dots, \theta_k$  los vértices y los ángulos externos de  $\alpha$ , respectivamente.*

Entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_{\Omega} K dA + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi \quad (15.3)$$

donde  $k_g$  es la curva geodésica de los arcos regulares de  $\alpha$  y  $K$  es la curvatura Gaussiana de  $M$ .

**Demostración** Sean  $u(s)$  y  $v(s)$  la expresión de  $\alpha$  en la parametrización  $x$ , con lo que se tiene

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\varphi}{ds}$$

donde  $\varphi_i = \varphi_i(s)$  es una función diferenciable que mide el ángulo positivo de  $x_u$  a  $\alpha'(s)$  en  $[s_i, s_{i+1}]$ . Integrando la expresión precedente sobre cada intervalo  $[s_i, s_{i+1}]$  y sumando los resultados,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi}{ds} ds.$$

Por el teorema de Green se deduce que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \\ \iint_{x^{-1}(\Omega)} \left[ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right] dudv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi}{ds} ds \end{aligned}$$

Puesto que la parametrización es ortogonal. A partir de la fórmula de Gauss para  $F=0$ , sabemos que

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

de aquí

$$\begin{aligned} \iint_{x^{-1}(\Omega)} \left\{ \left( \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} dudv &= - \iint_{x^{-1}(\Omega)} K\sqrt{EG} dudv \\ &= - \iint_{\Omega} K dA \end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud al Teorema de Rotación de las Tangentes

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) = \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i.$$

Como la curva  $\alpha$  está orientada positivamente, el signo de  $2\pi$  será positivo, de aquí concluimos que

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

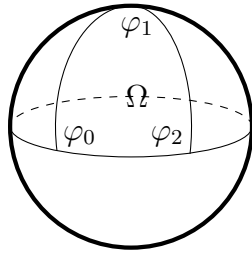
Lo que demuestra el Teorema ◇

### § 15.3 Algunas Observaciones

1. Cuando en (15.3),  $\Omega$  es un triángulo geodésico se tiene entonces que  $k_g = 0$ ; y al incluir los ángulos internos  $\varphi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , éstos satisfacen  $\theta_i = \pi - \varphi_i$ . Entonces se obtiene, como caso particular, el resultado de Gauss:

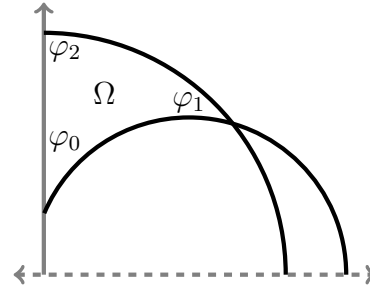
$$\sum_{i=0}^2 \varphi_i - \pi = \iint_{\Omega} K dA \quad (15.4)$$

2. En el caso de la esfera unitaria  $S^1$ , Figura 16.5,



Triángulo geodésico en  $S^2$

Figura 16.5.



Triángulo geodésico de  $H^2$

Figura 16.6

la curvatura Gaussiana de  $S^2$  es  $K = 1$  y por lo tanto,

$$\sum_{i=0}^2 \varphi_i - \pi = \text{área}(\Omega) \quad (15.5)$$

3. En el Modelo de Poincaré: la curvatura Gaussiana  $K = -1$ , entonces la Fórmula Local de Gauss-Bonnet proporciona el resultado de Gauss (Figura 16.6):

$$\sum_{i=0}^2 \varphi_i - \pi = -\text{área}(\Omega) \quad (15.6)$$

## § 15.4 Hacia el Teorema Global de Gauss-Bonnet

Para globalizar el teorema de Gauss-Bonnet se necesitan más preliminares topológicos.

**Definición 15.4.1** *Sea  $M$  una superficie regular. Se dice que una región  $\Omega \subset M$  es regular si  $\Omega$  es compacta y su frontera  $\partial\Omega$  es la unión de un número finito de curvas regulares a trozos, cerradas y simples que no se cortan.*

**Definición 15.4.2** *Se le llama triángulo a una región simple con sólo tres vértices, y ángulos externos  $\varphi_i, i = 0, 1, 2$ .*

**Definición 15.4.3** *Una triangulación de una región regular  $\Omega \subset M$  es una familia finita de triángulos  $T_i, i = 1, 2, \dots, n$  tal que*

$$(a) \bigcup_{i=1}^n T_i = \Omega$$

(b) *Si  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ , entonces  $T_i \cap T_j$  es un lado común a  $T_i$  y a  $T_j$  o consta de un vértice de  $T_i$  y de  $T_j$*

**Definición 15.4.4** *Considere una triangulación  $\Gamma$  de una región regular  $\Omega \subset M$  de una superficie regular  $M$ , denotaremos por  $F$  al número de triángulos (caras), por  $E$  al número de lados (aristas) y por  $V$  al número de vértices de la triangulación. El número*

$$F - E + V$$

*se denomina la característica de Euler-Poincaré*

### 15.4.1 Algunos Resultados

Las afirmaciones (1), (2), (3) y (4) que siguen se admiten sin demostración. Una exposición de estos hechos se puede encontrar en [2] Capítulo 1, o en libros de Homología Simplicial.

- (1) Cada región regular de una superficie regular admite una triangulación.
- (2) Si  $\Omega \subseteq M$  es una región regular de una superficie  $M$ , la característica de Euler-Poincaré no depende de la triangulación de  $\Omega$ . En consecuencia, resulta conveniente denotarla por  $\chi(\Omega)$ .

Se considera  $M$  una superficie orientada y  $\{x_\alpha\}, \alpha \in A$  una familia de parametrizaciones compatibles con la orientación de  $M$

- (3) Sea  $\Omega \subseteq M$  una región regular de  $M$ , entonces existe una triangulación  $\Gamma$  de  $\Omega$  de forma que cada triángulo  $T \in \Gamma$  está contenido en alguna vecindad coordenada de la familia  $\{x_\alpha\}$ . Además, si la frontera de cada triángulo de  $\Gamma$  está positivamente orientada, entonces triángulos adyacentes determinan orientaciones opuestas en el lado común, ver Figura 16.7.

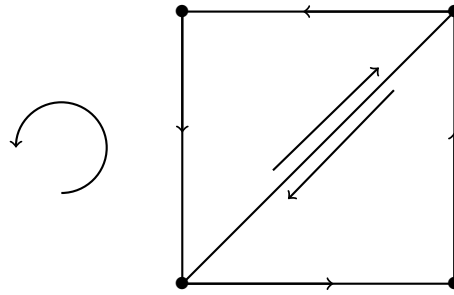
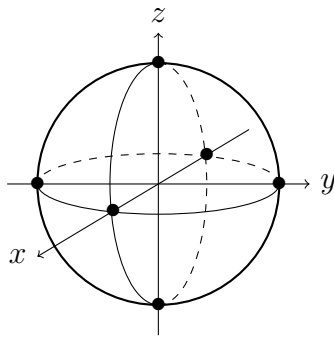
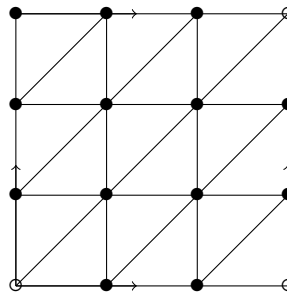


Figura 16.7

**Ejemplo 15.4.1 (La esfera  $S^2$ )** Una triangulación de la esfera unidad  $S^2$  con ocho polígonos (triángulos) se obtiene intersectando la esfera con los tres planos coordenados, Figura 16.8.

Figura 16.8:  $S^2$ Figura 16.9. toro  $T^2$ 

En este caso,  $V = 6$ ,  $E = 12$  y  $F = 8$  y así  $\chi(S^2) = 2$ .

**Ejemplo 15.4.2 (El Toro  $T^2$ )** Una triangulación del toro  $T^2$  es como sigue, se subdivide un cuadrado en triángulos, ver Figura 16.9, esto proporciona una triangulación con  $V = 9$ ,  $E = 27$  y  $F = 18$ . Se debe contar con cuidado ya que en la identificación o al pegar los bordes del cuadrado como lo indican las flechas de los lados opuestos, los cuatro vértices del cuadrado deben contarse sólo por un vértice para el toro. No toda triangulación es aceptable, ver ejercicio ??, de este Capítulo. Así

$$\chi(T^2) = 9 - 27 + 18 = 0 = 2 - 2(1).$$

Una de las versiones más importantes del Teorema de Gauss Bonnet es la que aplica a superficies regulares compactas  $M$ . Es un resultado sorprendente aún cuando existan muy pocas superficies regulares en  $\mathbb{R}^3$  salvo difeomorfismos, que puedan describirse explícitamente. La más simple es la esfera  $S^2$ , la siguiente es el toro, y se pueden unir tales toros para obtener bi-toros (unión de dos toros), tri-toros(unión de tres toros), como en la Figura 16.10.

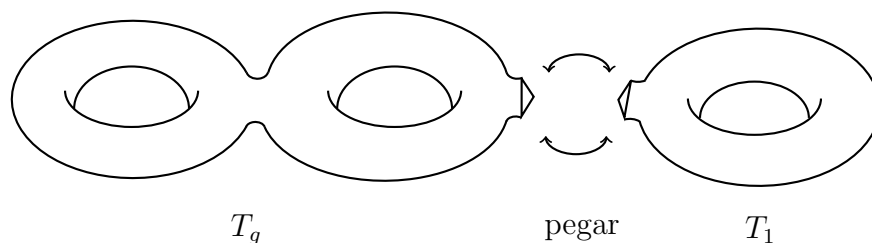


Figura 16.10

Estas superficies se denotan por  $T_g$  donde  $g$  es el número de agujeros (huecos) llamado el GÉNERO de la superficie (se toma  $g = 0$  para la esfera).

Se acepta, sin prueba, el siguiente resultado.

- (4) Para cualquier entero  $g \geq 0$ , a  $T_g$  se le puede dotar de un atlas haciéndolo una superficie regular. Además, cualquier superficie regular compacta en  $\mathbb{R}^3$  es difeomorfa a uno de los  $T_g$ .

**Proposición 15.4.1** *La característica de Euler-Poincaré de  $T_g$ , de género  $g$  tiene la forma  $\chi(T_g) = 2 - 2g$ , es decir, es uno de los valores*

$$2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$$

**Demostración** La demostración es por Inducción Matemática, ya se demostró para  $g = 0$  (la esfera  $S^2$ ) y también para  $g = 1$  (toro de revolución).

Se supone que se realiza el pegado quitando un triángulo de la triangulación en  $T_g$  y en  $T_1$ , se pegan los correspondientes lados (con una triangulación adecuada de  $T_g$  y de  $T_1$ ), ver Figura 17.7. Si  $V'$ ,  $E'$  y  $F'$  son el número de vértices, aristas y polígonos (triángulos) en la triangulación de  $T_g$  y  $V''$ ,  $E''$  y  $F''$  son los de  $T_1$ . Entonces los números  $V$ ,  $E$  y  $F$  para  $T_{g+1}$  están dados por

$$\begin{aligned} V &= V' - 3 + V'' - 3 + 3 = V' + V'' - 3 \\ E &= E' - 3 + E'' - 3 + 3 = E' + E'' - 3 \\ F &= F' - 1 + F'' - 1 = F' + F'' - 2 \end{aligned} \quad (15.7)$$

Por supuesto,  $V$  es el número  $V'$  de vértices en  $T_g$  más el número  $V''$  en  $T_1$  excepto que 3 vértices de los triángulos a lo largo de  $T_g$  y de  $T_1$  que han sido pegados se han contado dos veces, por lo tanto,  $V = V' + V'' - 3$ ; el mismo argumento se aplica a las aristas;  $F$  es inmediato ya que se quita un triángulo en  $T_g$  y en  $T_1$  que al pegar no forman parte de la triangulación de  $T_{g+1}$ . Luego

$$\begin{aligned} \chi(T_{g+1}) &= V - E + F \\ &= (V' + V'' - 3) - (E' + E'' - 3) + (F' + F'' - 2) \\ &= V' - E' + F' + V'' - E'' + F'' - 2 \\ &= \chi(T_g) + \chi(T_1) - 2 \\ &= 2 - 2g + 0 - 2 \quad (\text{por hipótesis de inducción}) \\ &= 2 - 2(g + 1). \end{aligned} \quad (15.8)$$

Lo que demuestra el resultado para  $g + 1$ . ☑



Al considerar las notaciones dadas en la definición 15.4.3, es bien conocido que el Cálculo en dos variables proporciona que la suma

$$\sum_{j=1}^k \iint_{x_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j \quad (15.9)$$

no depende de la triangulación ni tampoco de la familia  $\{x_j\}$  de parametrizaciones de  $M$ .

Por lo tanto, esta suma tiene significado geométrico y se denomina la integral sobre la región  $\Omega$ , denota por

$$\iint_{\Omega} f dA.$$

A continuación se presenta el **Teorema Global de Gauss-Bonnet**, también conocido como **Fórmula Global de Gauss-Bonnet**.

**Teorema 15.4.1 (Teorema Global de Gauss-Bonnet)** *Sea  $M$  una superficie regular orientada, si*

- (a)  $\Omega \subset M$  es una región regular y  $C_1, \dots, C_n$  las curvas regulares a trozos, cerradas y simples que forman la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .
- (b) Cada  $C_i$  está positivamente orientada y  $\theta_1, \dots, \theta_p$  el conjunto de todos los ángulos externos de las curvas  $C_1, \dots, C_n$ ,

entonces

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_{\Omega} K dA + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(\Omega)$$

donde  $s$  denota la longitud de arco de  $C_i$  y la integral sobre  $C_i$  significa la suma de las integrales que corresponden a los arcos regulares de  $C_i$ ,  $K$  la curvatura Gaussiana y  $dA$  es el elemento de área.

**Demostración** Se considera una triangulación  $\Gamma$  de la región  $\Omega$  de forma que cada triángulo  $T_i$  esté contenido en una vecindad coordenada de una familia de parametrizaciones ortogonales, compatibles con la orientación de  $M$ ; tal triangulación existe en virtud de 15.4.1(2). Además, si la frontera de cada triángulo de  $\Gamma$  está orientada positivamente, se obtienen orientaciones opuestas en los lados que son comunes a triángulos adyacentes, ver Figura 17.8.

Aplicando a cada triángulo el Teorema de Gauss-Bonnet Local y sumando los resultados se obtiene, utilizando la ecuación (15.9) y el hecho de que cada triángulo interior se recorre dos veces en orientaciones opuestas

$$\sum_{i=1} \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_{\Omega} k d\theta + \sum_{j,k=1}^{F,3} \theta_{jk} = 2\pi F.$$

donde  $F$  denota el número de triángulos de  $\Gamma$  y  $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$  son los ángulos externos de cada triángulo  $T_j$ .

Se puede introducir ahora los ángulos interiores del triángulo  $T_j$ , dados por  $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ .

De la siguiente forma,

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = \sum_{j,k} \pi - \sum_{j,k} \varphi_{jk} = 3\pi F - \sum_{j,k} \varphi_{jk}$$

A continuación se presenta la notación se empleará:

$E_e$  = el número de aristas externas de  $\Gamma$ .

$E_i$  = el número de aristas internas de  $\Gamma$ .

$V_e$  = el número de vértices externos de  $\Gamma$ .

$V_i$  = el número de vértices internos de  $\Gamma$ .

Como las curvas  $C_i$  son cerradas,  $E_e = V_e$ . Además, es sencillo demostrar por inducción que

$$3F = 2E_i + E_e$$

y por lo tanto,

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - \sum_{j,k} \varphi_{jk}.$$

Observe ahora que los vértices externos pueden ser o bien vértices de alguna curva  $C_i$  o vértices introducidos por la triangulación. Entonces sea  $V_e = V_{ec} + V_{et}$ , donde  $V_{ec}$  es el número de vértices de las curvas  $C_i$  y  $V_{et}$  es el número de vértices externos de la triangulación que no son vértices de alguna de las curvas  $C_i$ . Como la suma de ángulos alrededor de cada vértice interno es  $2\pi$ , se obtiene

$$\sum_{j,k} \theta_{jk} = 2\pi E_i + \pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \sum_l (\pi - \theta_l).$$

Sumando y restando  $\pi E_e$  a la expresión precedente y tomando en consideración que  $E_e = V_e$ , se concluye que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \theta_{jk} &= 2\pi E_i + 2\pi E_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{et} - \pi V_{ec} + \sum_l \theta_l \\ &= 2\pi E - 2\pi V + \sum_l \theta_l. \end{aligned}$$

Reuniendo los resultados anteriores se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_{\Omega} K d\theta + \sum_{l=1}^p \theta_l &= 2\pi(F - E + V) \\ &= 2\pi\chi(\Omega). \end{aligned}$$

Y la demostración ha terminado. ☑

**Corolario 15.4.1.1** Si  $\Omega$  es una región simple de  $M$ , entonces

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_{\Omega} K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi.$$

Teniendo en cuenta que una superficie regular compacta es una región cuya frontera es vacía, entonces se obtiene

**Corolario 15.4.1.2** Sea  $M$  una superficie regular compacta y orientable; entonces

$$\iint_M K dA = 2\pi\chi(M)$$

**Corolario 15.4.1.3** Si  $T_g$  es una superficie regular compacta orientable de género  $g$ , entonces

$$\iint_{T_g} K dA = 4\pi(1 - g)$$

## § 15.5 Ejercicios

1. Calcular la característica de Euler Poincaré para la Botella de Klein y el espacio proyectivo bi-dimensional.
2. Considere un cuadrado y la subdivisión en triángulos que se da en la Figura 16.11. Verificar que esta triangulación no es aceptable para el cilindro ni para el Toro.

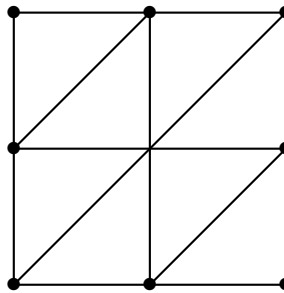


Figura 16.11

3. Sea  $T$  el toro de revolución, si  $K$  es la curvatura Gaussiana de  $T$ , probar que

$$\iint_T K dA = 0$$

usando el Teorema Global de Gauss Bonnet y por cálculo directo.

4. Considere al elipsoide  $M$  dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales positivos, entonces

- (a) probar que tal elipsoide es difeomorfo a la esfera unitaria;  
 (b) probar que

$$\int_M K dA = 4\pi,$$

donde  $K$  es la curvatura Gaussiana;

- (c) verificar que una parametrización de tal elipsoide (parametrización latitud, longitud) es

$$x(\theta, \varphi) = (a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, b \sin \theta);$$

- (d) verificar que la PFC y SFC están dadas por

$$I = (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + a^2 \cos^2 \theta d\varphi^2$$

$$II = \frac{ab(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}};$$

- (e) probar que la curvatura Gaussiana está dada por

$$K = \frac{b^2}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2}$$

- (f) Intentar calcular la integral dada en (b) directamente para concluir que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ab^2 \cos \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} d\theta = 2.$$

5. La curvatura total de una superficie  $M$  se define por

$$\int_M K dA,$$

donde  $K$  es la curvatura gaussiana de  $M$  y  $dA$  es la forma de área para  $M$ .

Considere la superficie  $M$  formada por la esfera unitaria  $S^2$  con 4 asas, determinar la curvatura total de  $M$ .

# Bibliografía

- [1] AHLFORS LARS, Complex Analysis. Third Edition. McGraw-Hill International Editions.1979. *Excelente libro para Cálculo y Análisis Complejo. Para su lectura sólo se necesita una cierta madurez matemática junto con un curso, visto previamente, de Cálculo Vectorial Euclideo.*
- [2] AHLFORS-SARIO, Riemann Surfaces. Princeton University Press.1960. *Excelente libro.*
- [3] APOSTOL TOM, Calculus vol. 1 y 2. Segunda edición. Reverté. 1982. *Excelente para principiantes, en el mundo de las Matemáticas, que deseen estudiar los fundamentos de Cálculo Euclideo, Álgebra lineal Introductoria y una breve introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Muchas universidades lo siguen como textos en los cursos de Matemáticas para Ingeniería y estudiantes de Matemáticas y Física.*
- [4] Anton H., Introducción al Álgebra Lineal. Es un buen libro para principiantes en el estudio del Álgebra Lineal
- [5] BERGER - GAUDUCHON - MAZET, Le Spectre d'une Variété Riemannienne. Springer - Verlag. New York. 1971. *Excelente libro, es fundamentalmente una introducción a la Geometría Espectral, presenta invariantes Riemannianos que estan ligados al espectro de una*

- variedad Riemanniana, bajo la acción del operador Laplaciano en variedades Riemanniana, la forma asintótica de la solución fundamental de la ecuación del calor sobre una variedad Riemanniana y luego la usa para encontrar invariantes Riemannianos.*
- [6] BISHOP & CRITTENDEN, *Geometry of Manifolds*. AMS Chelsea Publishing. 2001. Es un buen libro de Geometría Diferencial de capítulos relativamente cortos para una mejor lectura y cuya dirección apunta a la Geometría Riemanniana.
- [7] DO CARMO, M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Printece - Hall, New Jersey. 1976. *Es un libro prácticamente clásico, básico y presenta de manera adecuada los temas de geometría diferencial en superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , hace un buen aprovechamiento de la geometría intrínseca de las superficies bi-dimensionales, además deja claro el problema local y global de las superficies; como temas importantes para entrar a estudiar, con bases sólidas, el área de la GEOMETRÍA DIFERENCIAL. Este libro está escrito en 503 páginas y consta de 5 capítulos de los cuales 4 son básicos que, naturalmente, deberían ser estudiados en un primer curso introductorio.*
- [8] DO CARMO, M., *Geometría Riemanniana*. 2ª ed. Rio de Janeiro. Brasil. 1988. *Este libro, de 299 páginas relativamente clásico, presenta los temas introductorios y básicos de la Geometría Riemanniana, es muy ameno en su lectura, pero de cuidado. La Geometría Riemanniana es buena parte del núcleo básico para estudio de la Geometría diferencial, es comparable con el Análisis Funcional en el estudio del Análisis Matemático Teórico y Aplicado.*
- [9] FOMENKO, A. T., *Symplectic Geometry*. Moscuw. 1998. *Es un libro de 387 páginas empieza el estudio de la Geometría Simpléctica desde los espacios vectoriales reales de dimensión par con productos interiores simplécticos y entra suavemente en el estudio de la Geometría Simpléctica de Variedades Diferenciables tocando posteriormente los*



---

*sistemas Hamiltonianos y los métodos efectivos de construcción de sistemas completamente integrables entre otros. El autor hace agradable el estudio de la Geometría Simpléctica y la muestra como una área importante de la Matemática.*

- [10] FRANKEL, T., *The Geometry of Physics*. Cambridge University. 2001. *Este libro de 666 páginas, muy interesante para profesionales que desean usar los Métodos de la Geometría Diferencial como herramienta para modelar los problemas de la Física Teórica, en particular, hace un gran esfuerzo para presentar, de manera adecuada, la combinación entre el Análisis Matemático, la Geometría y la Física. Una lectura de este libro sería muy provechosa si se ha estudiado un curso básico de Geometría de superficie.*
- [11] GALLOT-HULLIN-LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*. 2<sup>a</sup> ed., Springer. 1990. *Este libro de 284 páginas de un buen nivel introductorio básico de la Geometría Riemanniana y Análisis Geométrico, tiene como base previa el estudio de los Fundamentos de Variedades Diferenciables y Grupos de Lie, por ejemplo [30].*
- [12] GAUSS, K.F., *General Investigations of Curved Surfaces*. Raven Press, New York, 1965. *Se recuerda que se debe tener condiciones de tratar de entender este artículo. Será necesario paciencia y mente abierta.*
- [13] GOODMAN SUE, *Beginning Topology*. Thomson. 2005. *Es un libro de 236 páginas muy excelente para ser introducción a la Topología*
- [14] GUILLEMIN & POLLACK, *Differential Topology*. Prentice - Hall. 1974. *Es una excelente introducción a la Topología Diferencial de 222 páginas y muy bien conocido en el mundo matemático por sus temas (Manifold and Smooth Maps, Transversability and Intersection, Oriented Intersection, Theory and Integration on Manifold) son muy agradables para su lectura.*

- [15] HERNANDEZ EUGENIO, Álgebra y Geometría. 2<sup>a</sup> ed. Addison-Wesley. 1994. *Es un libro adecuado para el que desea relaciones inmediatas de la geometría elemental a medida que se va sumergiendo en el estudio del Álgebra Lineal.*
- [16] LANGE SERGE, Álgebra Lineal. Fondo Educativo Interamericano. 1976. *Es una introducción, muy adecuada, al Álgebra Lineal muy bien conocido en el mundo matemático y agradable en su lectura. En su tercera parte tiene un tópico importante para el estudio de la Geometría Diferencial: Productos multilineales, que se resume en una introducción al álgebra tensorial y exterior.*
- [17] LIPSCHUTS MARTIN, Differential Geometry. Mc Graw-Hill. 1969. (Hay versión en Español). *Es un libro de 269 página que estudia la Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, desde un punto de vista elemental, presentando teoría con muchos problemas resueltos y propuestos.*
- [18] HOWARDS H., HUTCHINGS M., MORGAN F., The isoperimetric Problem on surfaces. Monthly, vol. 106, Number 5, (1999) 430 - 439.
- [19] LIMA, ELON LARGE, Curso de Análise. Vol. 1 y 2. Terceira Ed. IMPA-Brasil. 1981. *Es un par libros interesante que se salen un poco de los temas que naturalmente se estudian en Cálculo y Análisis, especialmente el volumen 2, para ir presentando de manera agradable introducciones básicas para el estudio de la Geometría Diferencial.*
- [20] MUNKRES JAMES, TOPOLOGY 2<sup>nd</sup> ed. Prentice-Hall, Inc. 2000. *El mejor libro de Topología si el destino lo lleva estudiar con profundidad Geometría Diferencial, es elegante y agradable su lectura.*
- [21] MUNKRES JAMES, TOPOLOGÍA. Segunda edición. Pearson Educación. Madrid, 2002. (*Versión en Español de [20]*).

- 
- [22] MUNKRES JAMES, Elements of Algebraic Topology. Addison-Wesley. 1984. *Buen libro de Topología Algebraica, los temas son ampliamente tratados, la lectura es muy amena y con los suficientes ejemplos.*
- [23] NAGLE-SAFF-SNIDER, Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Tercera edición. Addison-Wesley. Es un gran libro, sobre todo para los principiantes.
- [24] O'NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry: Application to Relativity. University of California. Los Angeles California. Academic Press. 1983. 468 páginas. *Excelente libro de Geometría Semi-Riemanniana con aplicaciones especiales a la Teoría de la Relatividad y a la Cosmología.*
- [25] POOR, W., Differential Geometric Structures. Dover Publications. New York. 1981. Es un buen libro que presenta las Estructuras Geométricas Diferenciables más usadas tales como: Grupos de Lie, Fibrados Principales y Asociados, Teoría de Conexión sobre Fibrados, Fibrados Vectoriales Riemannianos, Estructura Armónica sobre Variedades Riemannianas, Estructura Simpléctica, entre otras. Estas estructuras son de verdadera importancia para los matemáticos que desean trabajar e investigar en Geometría Diferencial.
- [26] RUDIN WALTER, Principles of Mathematical Analysis. Third edition. 1976. Es un libro sintético, excelente, agradable de leer que todo matemático alguna vez lo ha consultado o leído y es de lo mejor que se encuentra sobre Fundamentos de Análisis Matemático.
- [27] ROSENBERG, S., The Laplacian on Riemannian Manifold. London Mathematical Society. Student texts **31**. Es un buen libro para el que desee sumergirse en Análisis Geométrico, Geometría Espectral, entre otros, pasando primero por la Geometría Riemanniana y luego ubicarse en investigación en alguna de estas áreas.

- [28] SPIVAK, M., A comprehensive Introduction to DIFFERENTIAL GEOMETRY. Publish or Perish. 1990. *Es una interesante recopilación, 2.785 páginas en 5 volúmenes, de estudios en Geometría Diferencial. Todo estudiante de Geometría Diferencial ha consultado muchas veces estos cinco volúmenes.*
- [29] SPIVAK, M., Cálculo en Variedades. Reverté. 1975. *Excelente libro introductorio al Cálculo en  $\mathbb{R}^n$  y en Variedades, tiene 134 páginas, es la traducción de la obra original: CALCULUS IN MANIFOLD, W. A. Benjamin, inc., New York, 1965.*
- [30] UENO KENJI, An Introduction to Algebraic Geometry. Translations of MATHEMATICAL MONOGRAPHS. American Mathematical Society. 1997. *Interesante libro para sumergirse en el estudio de la Geometría algebraica de Curvas.*
- [31] WARNER F. W., Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer. 1983. *Un excelente libro de 274 páginas, muy importante en el área de la Geometría Diferencial, contiene de manera muy adecuada, simplificada y agradable los temas de ANÁLISIS VECTORIAL necesarios para estudiar y entender comodamente la Geometría Diferencial y en particular para abordar las áreas de Geometría Semi-Riemanniana, Riemanniana, Sub-Riemanniana, Análisis Geométrico y Simpléctica entre otras líneas específicas y de investigación de la Geometría Diferencial.*

# Índice Alfabético

- Ángulos de curvas, 135
- arcos de longitud mínima, 206
- banda de Möbius, 71
- botella de Klein, 74
- campo vectorial completo, 115
- campo vectorial paralelo, 178
- campos vectoriales, 105
- característica de Euler Poincaré, 221
  - $T_g$ , género  $g$ , 224
  - botella de Klein, 228
  - espacio proyectivo, 228
- carta, 56
- coordenada esféricas, 57
- coordenadas
  - geodésicas, 199
- coordenadas geodésicas polares, 201, 205
- corchete de Lie, 108
- curva
  - plana, 41
- curva parametrizada, 25
- curva regular a trozos, 213
  - cerrada, simple, 213
- curvas integrales, 110
- curvas regulares, 25
- curvatura, 30, 141
  - gaussina, 156
  - geodésica, 143
  - normal, 143
  - coordenadas polares, 34
  - de una curva, 29
    - media, 156
    - tangencial, 143
- curvatura Gauss,  $F = 0$ , 172
- curvatura geodésica, 181
- curvatura tangencial, 181
- curvaturas principales, 151, 156
- derivada covariante, 175
- derivada de Lie, 112
- diferencial en  $k$ -superficies, 95
- ecuaciones de Compatibilidad, 172
- ecuaciones de Maindardi-Codazzi, 172
- encaje, 98
- esfera  $n$ -dimensional, 85
- esfera  $S^2$ , 53

- 
- espacio cotangente, 99  
 espacios proyectivos, 87  
 expresión para la curvatura, 32  
  
 fórmula curvatura geodésica, 182  
 fórmula de Frenet-Serret, 43  
 fórmula de Gauss, 171  
 Fórmula Símbolos de Christoffel, 166  
 fibrado cotangente, 101  
 fibrado tangente, 101  
 flujo local, 110  
 función de Gauss, 141, 153  
  
 garrafa de Klein, 74  
 geodésicas, 191
  - ecuaciones, 192
  - esfera, 193
  - plano, 193
 geometría intrínseca, 159  
 grupo local 1-paramétrico, 114  
  
 hélice, 27, 31  
  
 identidad de Jacobi, 109  
 imagen de una función diferenciable, 51  
 inmersión, 98  
 isometría, 161
  - local, 162  
 k-superficie, 83  
  
 lema de Hadamard, 114  
 longitud de arco, 26  
  
 notación Einstein, 165  
  
 orientación de superficie, 118  
 orientación de superficies por imagen inversa, 124  
  
 parámetro, 25, 56  
 parametrización, 52  
 plano osculador, 38  
 plano proyectivo, 79  
 primera forma fundamental, 132  
 proyección estereográfica, 86  
 punto crítico, 124  
 punto singular, 25  
  
 regla de la cadena, 97  
  
 símbolos de Christoffel, 161, 164  
 segunda forma fundamental, 141, 142  
 submersión, 99  
 superficies  $k$ -dimensional, 83  
 superficie
  - de revolución, 150
  - superficie de revolución, 59
 superficies, 51
  - no orientable, 120
 superficies regulares, 54  
  
 teorema de Gauss, 169  
 teorema de Gauss Bonnet
  - global, 225
  - local, 212, 218
 teorema del índice de rotación, 217  
 teorema egregium de Gauss, 170, 171  
 teorema fundamental de curvas, 47  
 toro, 69, 223
-

---

bi-toros, 223  
  parametrización, 71  
  revolución, 70  
  tri-toros, 223  
torsión, 38, 41, 43  
  en función de cualquier parámetro,  
    45  
  en función del parámetro longi-  
    tud de arco, 44  
transporte paralelo, 177  
trayectoria, 110  
triangulación, 221  
  esfera, 222  
  toro, 223  
triángulo geodésico, 212  
triedro de Frenet-Serret, 43  
  
valor algebraico derivada covariante,  
  183  
valor crítico, 124  
valor regular, 124  
vecindad coordenada, 52, 56  
vector binormal, 39  
vector de curvatura, 143  
vector normal, 38  
vector tangente, 90  
vector velocidad, 26