UNIVERSIDAD DISTRITAL FCO. JOSÉ DE CALDAS - FACULTAD DE INGENIERÍA
EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL. 2022-3. Diciembre 12 de2022

Nombre del estudiante:________________________________ Código:_______________

Nombre del profesor del curso:__________________________ Grupo:_______________

Instrucciones:

- No se permite el uso de calculadoras ni celulares
- El tiempo máximo para el examen es 1 hora 40 minutos
- Marque con esfero sólo una respuesta correcta en el cuadro de respuestas **SIN ENMENDADURAS**.
- En la hoja de examen registre todos los procedimientos.

1. Para que la función *f* definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\le 2\\ ax^2-bx+3 & 2<x<3\\ 2x-a-b & x\ge 3\end{cases}$$

sea continua en todo su dominio, los valores de *a* y *b* deben ser respectivamente:

a) $a=-\frac{1}{3}\quad b=-\frac{1}{3}$ b) $a=-\frac{1}{6}\quad b=\frac{1}{3}$

c) $a=\frac{1}{3}\quad b=-\frac{1}{6}$ d) $a=\frac{1}{3}\quad b=\frac{1}{6}$

2. De la curva $2xy+\pi seny=2\pi$ es correcto afirmar que en el punto $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$:

a) La ecuación de la recta tangente es $y=\frac{\pi}{2}x+\pi$

b) La ecuación de la recta normal es $y=\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi^2-4}{2\pi}$

c) La ecuación de la recta tangente no está definida

d) La ecuación de la recta normal es $y=\frac{-\pi}{2}x-\frac{4+\pi^2}{2\pi}$

3. Si $g(x)=ln\left(\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right)$ entonces:

a) $g'(x)=\frac{4e^{4x}}{e^{8x}-1}$ b) $g'(2)=0$

c) $g'(0)=0$ d) $g'(x)=\frac{8e^{4x}}{e^{8x}-1}$

4. Para la función $h(x)=\frac{x^2-4}{x^3+7x^2-18x}$ es correcto afirmar que su gráfica tiene:

a) Una asíntota horizontal: la recta $y=1$

b) Una asíntota vertical: la recta $x=1$

c) Una asíntota vertical: la recta $x=-9$

d) Una asíntota oblicua: la recta $y=x$

5. El valor de $\lim\limits_{x\to 0}(x+cos2x)^{\csc(3x)}$ es:

a) $e^{\frac{1}{3}}$ b) $\frac{1}{3}e^{-3}$ c) $\frac{1}{3}e^{3}$ d) $e^{-\frac{1}{3}}$

6. Un depósito cónico (vértice abajo) tiene 10m de diámetro en la parte superior y 10m de altura. Si el agua fluye en él a razón de 5m^3/min, la razón de cambio de la altura del agua cuando la altura es 8m es :

a) $\frac{5}{32\pi}$ m/min b) $\frac{5}{\pi}$ m/min c) $\frac{5}{16\pi}$ m/min d) $\frac{5\pi}{32}$m/min

7. De la función $f(x)=\begin{cases}x^2-2x & si\ \ x\le 1\\ x-2 & si\ \ x>1\end{cases}$

Es correcto afirmar que:

a) f es discontinua en $x=1$

b) f es derivable en $x=1$

c) f no es derivable en $x=1$

d) f es continua en $x=1$ entonces es derivable en $x=1$

8. Se va a elaborar una caja con base cuadrada y sin tapa, con capacidad de 10 m^3. El material para la base cuesta \$10/m^2, el material para las caras laterales cuesta \$60/m^2. Las dimensiones de la caja para que el costo sea el menor posible son:

a) $\sqrt[3]{10}\,m,\ \sqrt[3]{10}\,m,\ \frac{10}{\sqrt[3]{12}}\ m$

b) $\sqrt[3]{120}\,m,\ \sqrt[3]{120}\,m,\ \frac{10}{\left(\sqrt[3]{120}\right)^2}\ m$

c) $2\sqrt[3]{10}\,m,\ 2\sqrt[3]{10}\,m,\ \frac{10}{4\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}\ m$

d) $\sqrt[3]{12}\,m,\ \sqrt[3]{12}\,m,\ \frac{10}{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}\ m$

9. Si $y=\frac{2}{\sec(2x+1)}$ entonces $y^{(5)}=\frac{d^5y}{dx^5}$ es:

a) 64 Cos (2x + 1) b) 64 Sen (2x + 1)

c) – 64 Cos (2x + 1) d) – 64 Sen (2x + 1)

10. Dada la función $f(x)=\frac{20}{2+3e^{-4x}}$ es correcto afirmar que *f*:

a) Es cóncava hacia arriba en $(-\infty,\infty)$

b) Tiene un punto crítico en $x=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

c) Es creciente en $(-\infty,\infty)$

d) Es decreciente en $(-\infty, 14\,ln(\ 32\ ))$

CUADRO DE RESPUESTAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x\le 2\\ ax^2-bx+3 & 2<x<3\\ 2x-a-b & x\ge 3\end{cases}$$

✓ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$

✓ $\lim\limits_{x\to 2^+} ax^2-bx+3 = 4a-2b+3$

$4a-2b+3=4$
$4a-2b=1$

✓ $\lim\limits_{x\to 3^-} ax^2-bx+3 = 9a-3b+3$

✓ $\lim\limits_{x\to 3^+} 2x-a-b = 6-a-b$

$9a-3b+3=6-a-b$
$10a-2b=3$

$4a-2b=1 \quad (-1)$
$10a-2b=3$

$= -4a+2b=-1$
$10a-2b=3$

$6a = 2 \rightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}}$

$\rightarrow 10a-3=2b$
$10\left(\frac{1}{3}\right)-3=2b$

$\frac{10}{3}-3=2b$
$=\frac{1}{3}=2b \longrightarrow \boxed{b=\frac{1}{6}}$

(d)

$2xy+\pi \,\text{Sen}\, y = 2\pi$
$2y+2xy' + \pi \cos y\, y' = 0$
$y'(2x+\pi\cos y) = -2y$
$y' = \left.\dfrac{-2y}{2x+\pi\cos y}\right|_{(1,\frac{\pi}{2})} = \dfrac{-\pi}{2}$

$y-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}(x-1)$
$= y-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}$
$y = -\frac{\pi}{2}x+\pi$

$y-\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}(x-1)$
$= y-\frac{\pi}{2} = \frac{2x}{\pi}-\frac{2}{\pi}$
$y = \frac{2x}{\pi}-\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}$
$y = \frac{2}{\pi}x+\left(\frac{-4+\pi^2}{2\pi}\right)$
$y = \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi^2-4}{2\pi}$

$g(x)=\ln\left(\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}\right) = \ln(e^{4x}-1)-\ln(e^{4x}+1)$

$g'(x) = \dfrac{4}{e^{4x}-1}e^{4x} - \dfrac{4}{e^{4x}+1}e^{4x} = 4e^{4x}\left(\dfrac{\cancel{e^{4x}}+1-\cancel{e^{4x}}+1}{(e^{4x})^2-1}\right) = \boxed{\dfrac{8e^{4x}}{e^{8x}-1}}$

$h(x)=\dfrac{x^2-4}{x^3+7x^2-18x} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x^2+7x-18)} = \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{x(x+9)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{x+2}{x(x+9)}$

$x\neq 0,\ x\neq -9$

(c)

$\lim\limits_{x\to 0} (x+\cos 2x)^{\csc(3x)}$

$y = \lim\limits_{x\to 0} (x+\cos 2x)^{\csc(3x)}$

$\ln y = \lim\limits_{x\to 0} \csc(3x)\ln(x+\cos 2x)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+\cos 2x)}{\text{Sen}(3x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

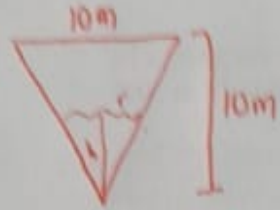
$\stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+\cos 2x}(1-2\,\text{Sen}\,2x)}{3\cos 3x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-2\,\text{Sen}\,2x}{(x+\cos 2x)(3\cos 3x)} = \dfrac{1}{3}$

$\rightarrow \ln y = \frac{1}{3}$

$y = e^{1/3}$

(a)



$\frac{dV}{dt} = 5\frac{m^3}{min}$

$h = 8m$

$\frac{dh}{dt} = ?$

$\frac{r}{5} = \frac{h}{10}$

$2r = h$

$2\frac{dr}{dt} = \frac{dh}{dt}$

$r = \frac{8}{2} = 4$

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dh}{dt}$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left[2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt}\right]$

$5 = \frac{1}{3}\pi\left[2(4)(8)\left(\frac{1}{2}\frac{dh}{dt}\right) + 16\frac{dh}{dt}\right]$

$\frac{15}{\pi} = \left[32\frac{dh}{dt} + 16\frac{dh}{dt}\right]$

$\frac{15}{\pi} = 48\frac{dh}{dt}$

$\frac{15}{48\pi} = \frac{dh}{dt}$

$\boxed{\frac{5}{16\pi} = \frac{dh}{dt}}$ c

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 1 \\ x - 2 & x > 1 \end{cases}$

$\checkmark \lim_{x\to 1^-} x^2 - 2x = 1 - 2 = -1$

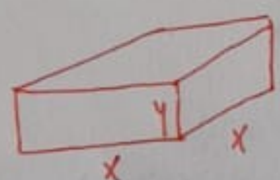
$\checkmark \lim_{x\to 1^+} x - 2 = 1 - 2 = -1$

$= \checkmark$

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

$f'(1) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

c



$V = 10m^3 = x^2 y \longrightarrow y = \frac{10}{x^2}$

$C = 10x^2 + 60(4)xy$

$C = 10x^2 + 240\cancel{x}\left(\frac{10}{x^{\cancel{2}}}\right)$

$C = 10x^2 + \frac{2400}{x}$

$C'(x) = 20x - \frac{2400}{x^2}$

$= \frac{20x^3 - 2400}{x^2}$

$\rightarrow 20x^3 - 2400 = 0$

$x^3 = \frac{2400}{20}$

$x^3 =$

$x =$

$\rightarrow y$

$y = \frac{2}{Sec(2x+1)} = \frac{2}{\frac{1}{Cos(2x+1)}} = 2Cos(2x+1)$

$y' = -4\,Sen(2x+1)$

$y'' = -8\,Cos(2x+1)$

$y''' = 16\,Sen(2x+1)$

$y^{IV} = 32\,Cos(2x+1)$

$y^{V} = -64\,Sen(2x+1)$

d

$\boxed{10}$ $f(x) = \frac{20}{2+3e^{-4x}}$

$$f'(x) = \frac{0 - 20(-12e^{-4x})}{(2+3e^{-4x})^2} = \frac{240e^{-4x}}{(2+3e^{-4x})^2} > 0 \quad \uparrow \quad c$$