Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM

Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Volumen 1, año 2014 ISSN 2422-037X (En linea)

Memorias EDEM-1

Primer Encuentro: Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
Facultad de Ciencias y Educación
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
Especialización en Educación Matemática
Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática
Doctorado Interinstitucional en Educación con énfasis en Educación Matemática

Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM

MEMORIAS EDEM-1. Primer Encuentro: Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos.

Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Volumen 1, año 2014 ISSN 2422-037X (En linea)

Correo electrónico: maestria@udistrital.edu.co - www.udistrital.edu.co

Compilador:
Pedro Javier Rojas Garzón

Comité organizador:
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá
José Torres Duarte
Pedro Javier Rojas Garzón
Gabriel Mancera Ortiz
Jorge Orlando Lurduy Ortegón
Martín Eduardo Acosta Gempeler

Comité científico de evaluación:
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá
Martín Eduardo Acosta Gempeler
Olga Lucía León Corredor
Jorge Orlando Lurduy Ortegón
Pedro Javier Rojas Garzón
Rodolfo Vergel Causado
Luis Ángel Bohórquez
Jaime Humberto Romero Cruz
Néstor Fernando Guerrero Recalde
Deissy Narváez Ortíz
Julio Hernando Romero Rey
Brigitte Johana Sánchez Robayo
Diana Gil Chaves
José Torres Duarte
Alberto Forero
John Helver Bello Chávez
Jaime Fonseca
Gabriel Mancera Ortiz
Claudia Castro
Edwin Carranza
Elizabeth Torres
Camilo Fuentes Leal

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá
Claudia Salazar Amaya

Universidad de Barcelona, Barcelona
Yuly Marcela Vanegas Muñoz

Postura editorial y audiencia: Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM es una publicación anual que tiene por objetivos difundir y debatir los avances en educación matemática, promover la interacción y el diálogo de saberes entre profesores en ejercicio, investigadores, estudiantes para profesor y profesores en formación. En ella se presentan experiencias de aula, resultados de investigación y reflexiones en torno a la educación matemática.
El contenido de la publicación está dirigido a investigadores, especialistas, docentes, estudiantes para profesor y profesores en formación, estudiantes de pregrado y posgrado.

Permiso de reproducción: Los textos de los artículos incluidos en esta edición pueden ser utilizados y reproducidos con fines sin ánimo de lucro, citando la fuente y dando crédito a los autores.

Diseño y edición en formato digital:
Grupo Editorial Gaia
gaiaeditorial@gmail.com
Tel. 310 2668311 Bogotá, Colombia

Corrección de estilo:
Sandra Patricia Rodríguez Lamus
Pedro Enrique Espitia Z.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Nace el EDEM: Encuentro Distrital de Educación Matemática

Desde inicios de la década de los 90, un grupo de docentes del entonces Departamento de Matemáticas de la **Universidad Distrital Francisco José de Caldas** planteamos la necesidad de promover, como equipo, una reflexión en torno a fenómenos relacionados con procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los diferentes niveles de escolaridad, así como la necesidad de construir propuestas específicas de formación inicial, continuada y posgradual de profesores de matemáticas de niños y jóvenes, que incorporaran algunos de los elementos propuestos por la entonces naciente comunidad académica de educadores matemáticos del país, especialmente los relacionados con el campo de Didáctica de las Matemáticas.

El equipo de trabajo mencionado, impulsó la creación de un programa de Especialización en Educación Matemática (EEM), a mediados de los años 90, dirigido a profesores de los diversos niveles educativos, y de la construcción de una propuesta innovadora para la formación inicial de profesores de matemáticas para la educación básica primaria y secundaria, denominado Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM), a finales de los noventa, se diseñaron y desarrollaron programas de formación continuada de docentes, en los que se incorporaron resultados de investigación en educación matemática, orientados a posibilitar el diseño y la implementación de propuestas de trabajo en el aula, en ambientes de aprendizaje que promovieran la participación de niños y jóvenes en procesos significativos de construcción de conocimiento matemático.

En las dos últimas décadas, el equipo de docentes de matemáticas de la **Facultad de Ciencias y Educación** ha creado y consolidado diversos grupos de investigación en el campo de la educación matemática, a la vez que ha logrado mayores niveles de formación, lo cual ha posibilitado ampliar la oferta de programas de formación posgradual, tanto a nivel de maestría como de doctorado. En la actualidad la Universidad Distrital ofrece un programa de formación inicial de profesores de matemáticas con acreditación de alta calidad, LEBEM, una Maestría en Educación, con un énfasis en Educación Matemática (ME), así como un Doctorado en Educación, con un énfasis en Educación Matemática (DIE-UD), apoyado por reconocidos grupos institucionales de investigación, con amplia producción académica, lo cual da cuenta de la consolidación de la comunidad académica de educadores matemáticos, no sólo en la universidad sino a nivel nacional. Adicionalmente, en el proceso de contribuir a la consolidación de la comunidad académica de Educadores Matemáticos del país, los integrantes de los grupos de investigación han participado en la organización y desarrollo de eventos académicos regionales y nacionales en Educación Matemática.

Teniendo en cuenta la influencia de la Universidad en el Distrito Capital, su compromiso con la sociedad y con la formación de profesores que ofrezcan una educación de calidad a nuestros niños, niñas y jóvenes, desde el programa de pregrado LEBEM, y los programas de posgrado EEM, ME y DIE-UD, los profesores e investigadores en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias y Educación reconocimos la necesidad de ofrecer un espacio de interacción entre profesores en ejercicio, investigadores, estudiantes para profesor y profesores en formación, en el que se socializaran experiencias de aula, resultados de investigación y reflexiones en torno a la educación matemática, es decir, un espacio académico en el que sea posible estrechar vínculos entre la Universidad y las Instituciones Educativas Distritales (IED) de educación básica y media, un espacio para el encuentro, en el que se

posibilite la reflexión, la socialización y el aprendizaje desde experiencias pedagógicas y desde resultados de investigación en educación matemática, un espacio en el que se viabilice el *diálogo de saberes*. Con este propósito, ofrecimos a la comunidad académica del Distrito y del país el "**EDEM, Encuentro Distrital de Educación Matemática"** cuya primera versión: EDEM-1, la realizamos en las instalaciones de la IED Juan del Corral de la cuidad de Bogotá, durante los días 11, 12 y 13 de septiembre del año 2014.

En este primer encuentro contamos con cerca de 250 participantes, entre estudiantes para profesor, profesores en formación, profesores en ejercicio e integrantes de reconocidos grupos de investigación de diversas universidades, especialmente del Distrito Capital, en el marco del cual compartieron propuestas, inquietudes, experiencias y producción académica. Entre las actividades programadas se organizaron y desarrollaron cursos cortos, conferencias, talleres, experiencias de aula y reportes de investigación, de las cuales presentamos en estas memorias una síntesis. La temática central del encuentro fue: *Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos*; la conferencia inaugural estuvo a cargo del Doctor Carlos Eduardo Vasco Uribe y la conferencia de clausura a cargo del Doctor Jorge Orlando Lurduy Ortegón, profesores de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Finalmente, agradecemos el apoyo de Borys Bustamante, Vicerrector Académico de la Universidad Distrital y William Castrillón, Decano de la Facultad de Ciencias y Educación de la misma universidad. Así mismo al rector y al coordinador académico de la IED Juan del Corral, a los profesores de ambas instituciones, a los invitados especiales que tuvieron a su cargo las diversas actividades académicas, con los cuales logramos desarrollar exitosamente este Primer Encuentro Distrital de Educación Matemática.

Pedro Javier Rojas Garzón
Comité Organizador EDEM-1

EDEM 1

Instrucciones para consultar en esta edición

1. Acceda a la página de contenido general que se encuentra en la página siguiente.

2. Seleccione la sección que desea consultar:

- Sección: **Comunicaciones breves**
- Sección: **Conferencias**
- Sección: **Cursos cortos**
- Sección: **Experiencias invitadas**
- Sección: **Talleres**

3. De click en el botón IR en frente de la sección a consultar

4. Se abrirá el índice de cada sección, verifique el documento que busca y diríjase a la página indicada.

5. Para regresar al contenido general vaya al final de cada sección y retorne dando click en el botón:

Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM

Contenido

	Pág.	
Sección: Comunicaciones breves	9	IR
Sección: Conferencias	274	IR
Sección: Cursos cortos	286	IR
Sección: Experiencias invitadas	332	IR
Sección: Talleres	391	IR

EDEM 1

Primer Encuentro

Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos

Memorias

Bogotá, septiembre 11, 12 y 13 de 2014

Comunicaciones breves

Índice de esta sección

El juego y otros recursos como instrumentos para el aprendizaje 12

El parqués como estrategia para la enseñanza-aprendizaje de números enteros en grado séptimo 18

Cálculo del área, a través de determinantes 22

Fracción y número racional: Una experiencia de aula con estudiantes de grado once..... 29

Narrativas de la educación matemática para el ejercicio de los derechos humanos 37

Errores en la visualización de figuras en el área de la geometría plana. Estudio de caso 42

La evaluación desde el enfoque de la educación matemática crítica y ruta para propuestas de ambientes de aprendizaje. Algunos aportes 50

Construcción de sistemas de numeración. Propuesta para un aula inclusiva 64

¿Qué es la subitización y cómo desarrollarla en la infancia?..... 72

Utilidad de los recursos didácticos para desarrollar pensamiento espacial en estudiantes de segundo de primaria desde la situación “viaje alrededor del mundo geométrico” 79

Enseñanza y aprendizaje de la simetría axial a través de situaciones adidácticas utilizando Cabri como medio 90

Características de la formación docente para la inclusión de las TIC en la enseñanza de la geometría..... 97

Comunicaciones breves

Índice de esta sección

La argumentación en un contexto de actividad demostrativa con el uso de programas de geometría dinámica. Un estudio en grado séptimo 104

Construcción de esquemas Splitting: Una propuesta transistémica 112

Aproximación a la comprensión de la Proporcionalidad Directa. Reporte de una experiencia 119

La investigación sobre el objeto matemático escolar función lineal en la Educación Superior en Bogotá 1990 – 2012. Una revisión bibliográfica exhaustiva 128

Evaluación de los Significados Personales de los estudiantes en la construcción de la función lineal 135

Comprensión y reflexión de la tarea argumentativa que emerge en la demostración geométrica de estudiantes para profesor 142

Formación en valores y responsabilidad social del profesor de matemáticas 154

Elementos para el análisis del significado sobre el CDC de los estudiantes para profesor de matemáticas: El caso de la proporcionalidad 159

La lectura en clase de matemáticas en el tercer ciclo 167

Importancia de la devolución que hace el profesor en la aplicación de actividades sobre número relativo en los estudiantes de grado sexto 175

Ambiente educativo de las prácticas matemáticas en la Escuela Pedagógica Experimental. Una mirada desde los maestros 180

Comunicaciones breves

Índice de esta sección

Desarrollo de las prácticas docentes en LEBEM en el periodo 2005-1 a 2007-2 186

Proceso de visualización en geometría, perspectiva de género 198

Ciudadanía Ambiental desde las prácticas de medición 208

Las valoraciones sociales en la trayectoria de aprendizaje de las matemáticas. El caso de Lucho 220

Construcción de un producto notable a través de representaciones gráficas 226

Enseñanza de las propiedades y clasificación de los triángulos: Una propuesta inclusiva 232

¿Y dónde está el seno? 238

Transformaciones geométricas a partir de la matematización de los movimientos practicados por la comunidad Uitoto en sus danzas tradicionales 243

Roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas. Estudio de caso en grado octavo 250

Generando argumentación en clase de geometría 255

Propuesta sobre el uso de un software de matemáticas para potenciar el aprendizaje de nociones de cálculo diferencial. Informe de avances 260

Resolución de problemas en el aula de clase de matemáticas 268

El juego y otros recursos como instrumentos para el aprendizaje

Manrique, Sandra - Martín, Jharold - Otero, Jorge

sandra_ym@yahoo.es – harold_013@hotmail.com – uzumajao@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, LEBEM (Colombia)

Resumen

Con este trabajo, se pretende compartir la experiencia en la práctica docente, realizada en el colegio General Santander (Usaquén)[1]. Esta práctica estaba enfocada a la utilización de recursos didácticos para trabajar el pensamiento numérico. Fue desarrollada con los estudiantes de primero y cuarto grado de dicha institución y estuvo basada en los estándares curriculares.

Al final se hizo un contraste con los recursos utilizados mediante el análisis de las evidencias tomadas en cada clase sobre los resultados cuantitativos dejados por los estudiantes y de las observaciones de cada practicante, concluyendo así, que en grado primero, se debían utilizar recursos con los cuales los niños pudieran interactuar y estar más activos.

Palabras clave: Recursos didácticos, interacción, juego, aprendizaje.

1. Introducción

La principal preocupación para los educadores, quienes ya tienen un amplio bagaje y para los que están en formación es cómo atraer la atención de los estudiantes. Una estrategia válida para enfrentar este problema es la utilización de diversos recursos que permitan al estudiante interactuar con el

[1] Aclarando que la planeación fue desarrollada en grupos de trabajo, por lo cual se da reconocimiento a las personas que, en conjunto con nosotros, construyeron dicha planeación: Ana Elizabeth Jiménez, Harold Alberto Hernández y Laura Andrea Pardo (planeación grado 1°) y Cesar Enrique Páez y Judith Rocio Angel (planeación grado 4°).

conocimiento y a su vez construirlo. A lo largo de la práctica se utilizaron algunos de ellos como: Gráfico-textual, manipulativo-tangible y el juego. Cada uno permitió identificar aspectos favorables y otros no tan favorables que contribuyen al proceso de formación como docentes. Además de esto, aquí se presentarán algunos referentes que permitirán ampliar la opinión o la comprensión del lector acerca del concepto de recurso que se tomó para desarrollar dicha experiencia.

2. Referente conceptual

Los recursos didácticos son el apoyo con el que cuenta el docente para lograr, con ayuda de los estudiantes, construir el conocimiento. Estos pueden estar presentes en las distintas fases de la enseñanza, ya sea para introducir a un tema, desarrollarlo o para dar fin a este.

Recurso manipulativo-tangible y gráfico-textual

Godino (s.f.), describe dos tipos de materiales didácticos, entendiendo estos como todo recurso usado en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, los cuales son el material tangible y el grafico-textual, entendiendo el primero, como aquellos en los que el estudiante hace uso de la percepción táctil, mientras que el segundo, el estudiante hace uso de la percepción visual y/o auditiva.

Este material, permite contextualizar las abstracciones matemáticas y facilitar el aprendizaje, de esta manera se crea una interacción entre lenguaje-pensamiento y pensar-simbolizar, fortaleciendo así el razonamiento matemático.

El juego, como recurso didáctico

Vergel, R., Rocha, P. y León, O. (2006) establecen que el juego como recurso didáctico en el que "*los individuos se hacen los dueños de los límites de la realidad, sin otro fin para el que se entrega a esa ocupación, que al ocupación misma, y sin otro objetivo que el placer que ella procura".* Ellos

hacen referencia a que cuando el niño está jugando, se concentran absolutamente en él, haciendo que su alrededor quede en un segundo plano. Por ese mismo motivo, el juego es un excelente recurso, pues el aprendizaje se da de forma inconsciente para ellos.

Además, Salvador, A. (s.f., p. 5), muestra algunas de las ventajas y desventajas que se pueden presentar al usarlo como método de enseñanza, como por ejemplo:

- Un juego bien elegido puede servir para introducir un tema, ayuda a comprender mejor los conceptos o procesos, afianzar los ya adquiridos, adquirir destreza en algún algoritmo o descubrir la importancia de una propiedad, reforzar automatismos y consolidar un contenido.

- Una desventaja es que muchas veces: Se puede jugar sin aprender nada.

De este modo, se determina que el juego son aquellas actividades en las que el estudiante debe realizar algún esfuerzo físico o mental, además sugiere competición y requiere de concentración y atención, muchas veces también a lo que hacen sus compañeros. Así, el juego ayuda a estimular la participación del niño de forma natural, tal como lo señala Yuste, F. C. (2005), quien también afirma que un juego puede desarrollarse en diferentes contextos lo que permite acercar un poco más las matemáticas a la vida de los niños, dejando de ser tan abstractas. Asimismo, permite que el docente haga un seguimiento a su trabajo para luego identificar fortalezas y debilidades. Sin olvidar que este último es quién hace que este recurso sea o no productivo para el aprendizaje del niño.

3. Descripción de la experiencia

El grupo estructuró la práctica en tres fases: La primera, de **planeación,** donde gracias a referencias bibliográficas y a los estándares curriculares, se decidía la actividad y el tipo de recurso más acordes a la temática que se iba a trabajar y cómo se iba a desarrollar la clase. En la segunda fase, de **aplicación**, se ponía en práctica la actividad, donde el niño podría interactuar con el recurso seleccionado. Además, en esta fase se reunía información, la cual sería analizada en la tercera fase, de **evaluación**, y de donde se

empezarían a sacar conclusiones acerca de la conveniencia del recurso, por medio del contraste entre los objetivos y los resultados, y de la metodología implementada.

Haciendo referencia a la clase en sí, se aplicaron distintos tipos de recursos. Uno de ellos el juego, el cual permitió hacer reconocimiento del grupo, respecto a la parte introductoria. Del mismo modo, para desarrollar conceptos, procesos o afianzar los ya adquiridos, como lo marca Salvador (s.f.). Los recursos manipulativos ayudaban a que el niño los explorara y razonara sobre su uso, de ese modo los relacionaban con lo estudiado y se hacía una profundización del tema. Lo gráfico-textual ya se usaba como guía de las actividades y principalmente en la última fase, pues se buscaba recopilar información y tener evidencia del trabajo de los niños. Para dicha recopilación, también se usaban fotos y audios. Que se creían, aportarían al proceso de formación de los estudiantes. Esta se tabulaba para desarrollar más fácilmente su análisis, el cual estaba basado en los criterios de evaluación establecidos en la planeación.

4. Reflexiones

Terminada la práctica y analizados los resultados cuantitativos y cualitativos, se identificaron algunas ventajas y desventajas de usar un tipo de recurso en específico.

Gráfico-textual:
Durante la práctica se aplicaron varias veces recursos con estas características, en este caso guías. En el grado primero se tuvieron dificultades con este tipo de recurso, pues la mayoría de los niños no sabían leer, por lo que era necesario explicar un punto, trabajar en él, explicar el siguiente y así sucesivamente. En grado cuarto, la mayoría de los estudiantes entendía con facilidad la actividad por medio de este recurso, más si la actividad se desarrollaba en otro espacio (otra hoja, el tablero o el cuaderno).

Algo para resaltar, es que a la hora de recopilar información era muy útil este tipo de recurso, servía como evidencia del trabajo realizado por el estudiante, permitiendo al docente realizar un mejor análisis y una retroalimentación con él, remarcándole los aspecto a mejorar y las fortalezas.

Manipulativo-tangible:

Este tipo de recurso, utilizado en ambos grados, facilitaba que el estudiante entendiera mejor el tema y se familiarizara con el mismo. Puesto que, ponía en práctica lo que se estaba trabajando o ayudaba a que el niño viera de forma más concreta lo que se quería explicar.

A diferencia del recurso gráfico-textual, en grado primero, las explicaciones eran más cortas y los niños llegaban a entender más rápido. Sin embargo, se seguían teniendo dificultades con el tiempo que debía durar cada actividad, pues, aunque este material llamaba la atención del niño, después de llegar a cierto momento de la clase, los estudiantes dejaban de prestar atención y lo dejaban de utilizar de manera correcta, por lo tanto era necesario cambiar el recurso o la metodología.

En grado cuarto, se podía llegar a utilizar más de una vez un mismo recurso en diversas actividades, ya que, los estudiantes llegaban a construir nuevos conocimientos, diferentes a los que se pretendían enseñar.

El juego, como recurso didáctico:

Es utilizado para que los estudiantes aprendan de forma implícita, pues se pretende que "se diviertan aprendiendo". A la mayoría de ellos les agradó la idea de jugar, no vieron las actividades como una obligación si no como algo poco acostumbrado en el aula de clases. Al momento de aplicarlo, el docente debe estar atento a que todos participen, si alguien se distrae de la idea del juego, distraerá a los demás. Algo que se evidenció, es que entre más grandes los niños, más difícil es implementar el juego como recurso, ya que están acostumbrados a una dinámica muy tradicional, donde cada actividad y cada explicación se hace dentro del salón. Por lo que, cuando se hacía una actividad afuera, se desenfocaban muy fácil de esta. Al no estar en el aula, se despendían de la idea de que aún se estaba en la clase de matemáticas. Para evitar eso, se desarrolló el juego dentro del aula, algo que resultó útil pues facilita la observación y da un poco más de control sobre él al docente.

Todo esto, recalcando que se debe usar el juego con conciencia, pues lo que menos se quiere es que se convierta en solo eso, un juego que no aporte algo a la educación de los niños. Si es así, es una herramienta importante para

desarrollar muchas actitudes, destrezas y generar autonomía en el niño, lo cual le va a muy ser útil a lo largo de su vida académica

Referencias bibliográficas

- Godino, J. (s.f.). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas: Superando algunas posiciones ingenuas.* Recuperado de: *http://princesacatherine.blogspot.com/2012/08/uso-de-material-tangible-y-grafico.html.*
- Salvador, A. (s.f.). *El juego como recurso didáctico en el aula de matemáticas.* Recuperado de: http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/grupomaic/conferencias/12.Juego.pdf.
- Vergel, R., Rocha, P., & León, O. (2006). *El juego, resolución de problemas y el proyecto de aula como dispositivos en las didácticas de la matemática y la estadística.*
- Yuste, F. C. (2005). *La matemática aplicada a la vida cotidiana* (Vol. 115). Graó.

El parqués como estrategia para la enseñanza-aprendizaje de números enteros en grado séptimo

Garzón Lennis, Diego Alfredo
diegogarzon12@hotmail.es
Universidad de Cundinamarca, (Colombia)

Resumen

El parqués es uno de los juegos de mesa más populares en Colombia, de muy poca complejidad y, un juego para casi todas las edades, mientras que por el contrario las matemáticas son una ciencia abstracta en la cual hay grandes dificultades en su enseñanza. Por esta razón hemos decidido unir el juego y la ciencia con el fin de que los estudiantes aprecien las matemáticas y las vean de forma divertida y sencilla. Además que logren entender que las matemáticas y el juego van de la mano; que vean un poco de ciencia en el juego y un poco de juego en la ciencia.

Palabras clave: Parqués, juegos de mesa, matemáticas, enseñanza-aprendizaje, ciencia.

1. Introducción

La Unidad Educativa Técnica Municipal Ciudad Eben-Ezer localizada en el municipio de Fusagasugá departamento de Cundinamarca es una institución de carácter oficial que presta sus servicios desde grado preescolar hasta la media técnica, distribuido en cuatro diferentes sedes en las cuales prestan sus servicios para primaria, secundaria y media vocacional. Esta última presta sus servicios no hace más de 10 años, es decir es una institución nueva en

relación a las demás que se encuentran en dicho municipio. La institución se fundó un año más tarde que el barrio que lleva por nombre ciudad Eben-Ezer el cual fue un proyecto de intereses social que se gestó bajo la administración del alcalde William García Fallad (2001-2004) que incluía el colegio para secundaria y media, el detalle está en que la administración no le alcanzó su periodo para finalizar las obras de la sede y así la institución no pudo comenzar a prestar sus servicios educativos, esto llevo a que los residentes del barrio que entre otras cosas eran en su gran mayoría familias de bajos recursos, exigir el funcionamiento del colegio puesto que no había ruta de transporte y las otras instituciones se encontraban muy retiradas. La presión obligó a la alcaldía municipal a tomar la decisión un poco acelerada de iniciar actividades en una de las sedes de primaria, la cual no estaba adaptada para la demanda de los estudiantes, no contaba con docentes ni materiales de trabajo, lo que conllevo a que fuera una institución de baja calidad educativa. Hoy en día sigue siendo un colegio joven con muchas necesidades pero maduro y con gran actitud.

Por todas estas razones decidimos aplicar allí este proyecto, porque la institución tiene factores importantes como lo son la búsqueda de la excelencia en el área de matemáticas, el sentido de pertenencia de los docentes que laborar en esta institución, entre otros.

2. Referente conceptual

Con el proyecto se busca el **aprendizaje significativo** en los estudiantes que, según el teórico norteamericano David Ausubel, es el tipo de aprendizaje en que un estudiante relaciona la información nueva con la que ya posee, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones en este proceso. Dicho de otro modo, la estructura de los conocimientos previos condiciona los nuevos conocimientos y experiencias, y éstos, a su vez, modifican y reestructuran aquellos. Este concepto y teoría están enmarcados en el marco de la psicología constructivista.

3. Descripción de la experiencia

Mediante el juego del parqués se explicó de qué forma hacer operaciones básicas con números enteros de manera mucho más fácil, rápida y divertida de lo que se haría normalmente en un aula de clase, "*papel, lápiz y tablero*", con algo muy fácil de comprender para todos los estudiantes colombianos; lanzando dados, es decir tomando algo común y familiar de los estudiante y mostrarle un nuevo camino el cual podrá asociar para solucionar lo que anteriormente les costaba trabajo. También llevarlos a comprender el lenguaje matemático con elementos de uso cotidiano, para que logren asociar la matemática y su uso en la vida diaria, es decir que interactúe y construya por sí mismo una forma práctica para resolver un concepto teórico. Se busca es que el estudiante vea que, lo que para las familias es simplemente un juego, para él sea más que eso, es un componente que le ayuda a resolver "problemas abstractos" que no logra comprender en un ambiente matemático.

Las operaciones que se trabajaron fueron la suma, resta, multiplicación y división en las cuales hay muchas deficiencias, incluso en cursos más avanzados que el mismo séptimo.

4. Reflexiones

El desarrollo de esta actividad pretendía lograr la atracción de los estudiantes hacia las matemáticas, a hacerles entender que las matemáticas no son una ciencia compleja si no que por el contrario son una herramienta que podemos aplicar en cualquier entorno, además que no importa la edad, la raza, el sexo, estrato social, ni mucho menos los conocimientos que cada uno tenga, todos tenemos algo nuevo que aportar a la hora de aprender; esto es muy bueno porque los estudiantes y maestros comprenden que los conocimientos no solo los tiene el maestro si no que, el alumno tiene algo que compartir y mostrar, esto llena de motivación las clases y hace que los estudiantes encuentren el equilibrio entre las matemáticas y su comprensión y hace que el maestro realmente tome una aptitud más amena y constructiva, es decir, abierta al cambio en pro del mejoramiento de cada uno de sus estudiantes.

Por lo tanto podemos concluir que la metodología lúdica con juegos de mesa como el parques funcionan como solución de operaciones básicas de números enteros, y a su vez actúa en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático de los estudiantes de grado séptimo de la institución educativa Eben-Ezer, cabe resaltar que todo esto se consiguió con el espíritu y empeño que se le puso a este proyecto lo que facilito mucho más las cosas y el desarrollo total del mismo.

Referencias bibliográficas

- Ausubel, D. (1963). The Psychology of Meaningful Verbal Learning. New York: Grune & Stratton.
- Jiménez C. (2010). "La lúdica un universo de posibilidades". Recuperado de: http://www.ludicacolombia.com/.

Cálculo del área, a través de determinantes

Rojas Gómez, Jorge Alejandro – Ariza Daza, Aura Alejandra

lalorojas10@hotmail.es– auri_9312@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

El presente informe, pretende mostrar el abordaje realizado para hallar el área bajo una curva sin utilizar las sumas de Riemann, esto con el fin de resaltar la posibilidad de utilizar otros procesos que quizás para muchos son desconocidos, sin embargo, como profesores e investigadores debemos reconocer diferentes maneras de abordar una situación, permitiéndonos así identificar algunos procesos de los estudiantes, al momento de trabajar bajo la metodología de resolución de problemas.

Palabras clave: Área, exhausción y determinantes.

1. Introducción

La presente experiencia de aula tiene lugar en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, dentro de la carrera de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y específicamente en el espacio de formación "Matemática del movimiento III", la situación a abordar consistía en hallar el área de una figura curvilínea, con la condición de no utilizar las sumas de Riemann. Para abordar ésta, los estudiantes Resolutores decidieron ponerle otras condiciones, la primera fue que la figura iba a estar definida en el plano cartesiano y la segunda fue que ésta iba a ser una parábola, dando de ese modo inicio al proceso de abordaje.

2. Referente conceptual

Para el abordamiento de la situación es necesario entender por qué funciona el proceso de exhausción, para esto nos basaremos en la proposición I del libro X de Euclides, la cual nos dice *"dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor, una magnitud mayor que su mitad, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedara una magnitud que será menor que la magnitud dada",* permitiéndonos ver que este proceso no superara el área de la figura a medir.

También es necesario comprender la interpretación geométrica de los determinantes mostrada por Grossman & Flores (2012), en la cual nos permitirá evidenciar la relación entre el área de un paralelogramo y el determinante de una matriz (2x2), esta visión será adaptada para aplicarla en un polígono de n lados, conociendo las coordenadas de sus vértices, sin embargo se trabajará siempre ½ en la columna 3 porque de esta manera podemos realizar la medición de la figura a partir de triángulos, para esto es necesario plantear lo siguiente:

$$A = Det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \frac{1}{2} \\ x_2 & y_2 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se debe tener en cuenta que los vértices deben estar dados en un orden específico, el cual consiste en elegir un primero, el cual nos permitirá ordenar el resto, de acuerdo a su posición con respecto a éste en dirección igual al movimiento de las manecillas del reloj. El orden es importante debido a que este puede ser considerado un proceso de triangulación, con el fin de cubrir el área completa de la figura con n vértices.

3. Descripción de la experiencia

Para el abordamiento de la situación se buscó integrar un proceso de exhausción junto con una generalización haciendo uso de determinantes, para esto se partió de querer hallar el área de una parábola cuya función $f(x) = -x^2 + 2$, en el intervalo [-√2,√2]. Este método se basó en ir inscribiendo polígonos irregulares dentro de la parábola, de la siguiente manera:

Se partirá la base de la parábola en n partes ($n \geq 2$), cada parte tendrá una longitud de $p_n = \frac{2\sqrt{2}}{n}$, y respectivamente cada coordenada estará dada por:

$$\left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}, 0\right) \; con\; i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n$$

La cantidad de lados que ira teniendo el polígono irregular estará dado $2^n + 1$.

Cada vértice del polígono irregular estará dado por las siguientes coordenadas:

$$\left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}, f\left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}, \frac{-8i^2+8in}{n^2}\right)$$

Luego se partirá de una matriz $M_{(n+2)\,x\,2}$ con el fin de determinar el área, la cual estará dada por:

$$A \approx \frac{1}{2}\; Det \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n} & \frac{-8i^2+8in}{n^2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}(2n-n)}{n} = \frac{\sqrt{2}\cancel{n}}{\cancel{n}} = \sqrt{2} & \frac{-8i^2+8in}{n^2} = -\frac{8\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{8\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} = 0 \\ \frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n} & \frac{-8i^2+8in}{n^2} \end{vmatrix}$$

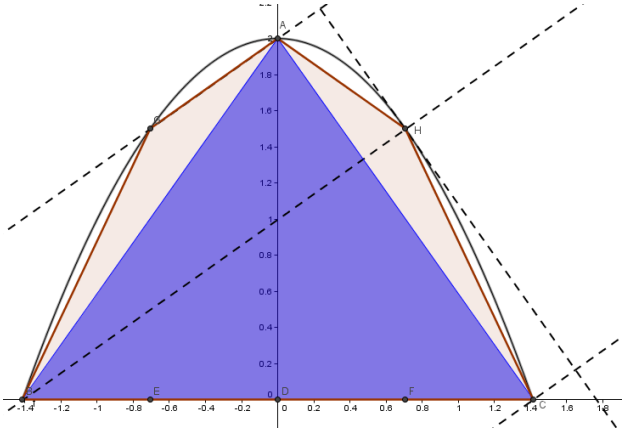
$$\approx \frac{1}{2}\left|a_{11}\cdot a_{22}+a_{21}\cdot a_{32}+\cdots+a_{n1}\cdot 0 - \left(a_{12}\cdot a_{21}+a_{22}\cdot a_{31}+\cdots+a_{n2}\cdot -\sqrt{2}\right)\right|$$

$$\approx \frac{1}{2}\left|a_{11}\cdot a_{22}+a_{21}\cdot a_{32}+\cdots+a_{n1}\cdot 0 - a_{12}\cdot a_{21}+a_{22}\cdot a_{31}+\cdots+a_{n2}\cdot -\sqrt{2}\right|$$

Se llegó a establecer ésta nueva igualdad durante el proceso de calculación de áreas específicas, debido a que nos dimos cuenta que el ½ colocado en la columna 3, al momento de calcular el determinante lo podíamos sacar como un factor común, estableciendo lo siguiente, siendo concordante con lo realizado en el paso anterior.

$$A = Det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \frac{1}{2} \\ x_2 & y_2 & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}Det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}$$

En estos momentos se observaba el área calculada a través de los determinantes funcionaba correctamente, sin embargo, era necesario mostrar que esta aproximación, nunca iba a superar al área de la parábola, siendo necesario mostrar lo propuesto en la proposición I del libro X de Euclides, en la cual se observa que siempre al momento de ampliar la cantidad de lados de nuestro polígono iremos sustrayendo una parte mayor a la mitad, del pedazo faltante, llegando a que nunca sobrepasaremos el área de la parábola.



En este momento se estableció que se cumplían varias condiciones, no obstante, faltaba llegar a establecer la igualdad entre las dos áreas, siendo necesario realizar un proceso de generalización, con el fin de llevar la cantidad de lados de la figura a una cantidad tan grande que permita establecer el valor exacto del área, este proceso consistió en llevar la generalización al límite.

$$A = \frac{1}{2}\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{2}(2(i-1)-n)}{n}\cdot\frac{-8i^2+8in}{n^2}\right) - \left(\frac{-8(i-1)^2+8(i-1)n}{n^2}\cdot\frac{\sqrt{2}(2i-n)}{n}\right)\right|$$

Realizando diferentes procesos algebraicos se llega a establecer que el área es:

$$A = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

La cual se comprobó a través de un proceso de integración, el cual permitió evidenciar que la respuesta es correcta y exacta.

4. Logros y dificultades

Durante y después del abordaje a la situación, se establecieron los siguientes logros y dificultades, sin embargo diremos que toda dificultad se tendrá en cuenta como un logro que permite potenciar el ser profesional:

- Se logró reconocer otras maneras de calcular el área bajo una curva, sirviéndonos este método como base para entender diferentes acciones pensadas por los estudiantes, al abordar problemas de área en figuras curvilíneas, de las cuales no hay una forma específica y rápida de hacerlo.

- Se dificultó comprender la manera en que funcionaba los determinantes de una matriz al momento de calcular el área, sin embargo, se comprendió la existencia de un proceso de triangulación, que da como

resultado el área de un polígono de n lados; resaltando la importancia de la modelación y matematización de los aspectos trabajados, durante cualquier situación.

- La resolución de problemas es un proceso que permite a los estudiantes utilizar sus conocimientos previos en pro de generar otros nuevos, sin embargo, requiere un gran compromiso y autonomía, siendo en ocasiones impredecibles las respuestas de los estudiantes.

5. Reflexiones

El abordaje de situaciones, trabajando bajo la metodología de resolución de problemas, tiene como intención el que los estudiantes pongan en manifiesto sus conocimientos previos con el fin de generar otros nuevos, esta generación de conocimientos si se realiza de una manera apropiada, teniendo presente la idea de modelación y matematización permitirán la generación de muchos aspectos matemáticos y un desarrollo significativo del pensamiento matemático, permitiendo a los estudiantes avanzar en su conocimiento tanto como lo quieran.

Por otra parte esta metodología nos permite relacionar nuestros procesos de abordaje con los que nuestros estudiantes realizan, evidenciando que el conocimiento pasa por muchas fases, unas en las cuales no sabemos qué hacer, y otras en las cuales podemos avanzar demasiado, siendo esta una constante vista no solo en nosotros, sino también en el desarrollo de la humanidad.

Esta metodología y específicamente la situación nos permiten observar que no existe una única manera de solucionar un problema, y que así como nosotros propusimos una manera de solución, existen muchas otras, quizás alguna más complejas o sencillas, sin embargo, debemos reconocerlas como mecanismo de solución, que pueden ser utilizadas por nuestros estudiantes, y mas no por esto debemos homogeneizarlos en la impartición y utilización de un solo método.

Referencias bibliográficas

- Euclides. (1996). Elementos de euclides libros X-XIII. Madrid: Credos.
- Grossman, S., & Flores, J. (2012). Álgebran lineal. México: Mc Graw Hill.

Fracción y número racional: Una experiencia de aula con estudiantes de grado once

Jairo Torres

jairoabdel@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Se reportan los resultados de una experiencia de aula con estudiantes de grado once de un colegio distrital en relación con el número racional. Se describe un fenómeno relacionado con dificultades que encuentran los estudiantes al realizar tareas en diversos contextos que requieren del reconocimiento y uso de diferentes representaciones del número racional; en particular se evidenció las dificultades que ellos encuentran para reconocer las fracciones como relaciones entre la parte y el todo, así como para reconocer relaciones de orden y de equivalencia entre fracciones. Desde un enfoque de investigación-acción, y teniendo en cuenta la propuesta del Ministerio de Educación Nacional desde los estándares de competencias básicas en matemáticas, se abordó este fenómeno educativo a partir del diseño y desarrollo de un conjunto de actividades en torno al trabajo con fracciones, número racional y procesos de aproximación. Se relacionan algunos de los logros alcanzados por los estudiantes.

Palabras clave: Fracción, número racional, orden, equivalencia.

1. Introducción

Las fracciones, su diferencia con los números racionales y sus diversas representaciones han sido objeto de estudio de diferentes investigaciones a nivel nacional e internacional (Centeno, 1988; Llinares y Sánchez, 1988; Maza y Arce, 1991; Freudenthal, 1994; Pretexto, 1997; Fandiño, 2009, entre otros). En dichas investigaciones se reconoce la importancia que tiene la equivalencia de fracciones para la interpretación de la relación de orden y para el desarrollo de los algoritmos de suma y resta de fracciones de diferente denominador, así como la conceptualización de número racional como clase de equivalencia (de todas las fracciones que describen la misma relación entre la parte considerada y el todo).

En la Institución Distrital donde labora el docente investigador, se han aplicado pruebas, en diferentes años y grados, evidenciando que las dificultades que encuentran los estudiantes en relación con las fracciones y el número racional persiste a lo largo de su vida escolar; por tanto, se hace necesario identificar e interpretar las dificultades registradas por los estudiantes para proponerles alternativas diferentes de enseñanza teniendo en cuenta el contexto y la posibilidad de utilizar los conocimientos de esta temática en la solución de problemas cercanos a la realidad escolar; sin desconocer los Estándares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (2003).

2. Marco de referencia

En Colombia, a partir de la Ley General de Educación (115 de 1994), la publicación de los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas (1998) y de los estándares básicos de competencias en matemáticas (2003), las matemáticas escolares se orientan a posibilitar que los estudiantes usen sus conocimientos fuera del ámbito escolar, en contextos donde se requiera formular hipótesis y tomar decisiones para abordar y adaptarse a nuevas situaciones. En ese sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998, p. 35) establece que: “es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de

intercambio de puntos de vista". El docente debe proponer a sus estudiantes diversas posibilidades de aprendizaje de temas considerados básicos, como lo es el relacionado con las fracciones y con los números racionales.

Así, el docente debe preguntarse qué enseñar, cómo enseñar y las posibilidades de aprendizaje de los estudiantes en la escuela, entendiendo la complejidad que representa la comunidad educativa y las potencialidades que es posible desarrollar en las personas a partir de los planes de estudio que apuntan a la construcción de la identidad, la creatividad, la autonomía y el trabajo solidario. El docente debe garantizar procesos de aprendizaje en ambientes de participación y compromiso personal al proponer a los estudiantes situaciones llamativas que les posibilite tanto reconocer y usar conocimientos propios como interactuar con sus compañeros, socializar su producción y aportar en la búsqueda de soluciones y la toma de decisiones conjuntas sobre problemas específicos, a partir de los diferentes puntos de vista, de la información recopilada y del análisis realizado de los datos, que podrían ser utilizados en diferentes contextos; en tal sentido, centrar la mirada en la producción que nace de procesos de interacción, con la orientación del docente, en las posibilidades de usarla en diversos contextos, además de establecer relaciones entre lo concreto y lo abstracto. El docente debe ser un orientador que permita las construcciones y producciones de sus alumnos, como se plantea desde el enfoque de la Educación Matemática Realista (Alsina, 2009).

En este punto, es importante resaltar las ideas de Freudenthal (1994), quien plantea que desde los primeros años el niño tienen una relación directa con las fracciones, en tanto encuentra sentido a expresiones como "la mitad de", "un tercio de", "tres de cinco", pues están describiendo una cantidad o el valor de una magnitud por medio de otra. El niño reconoce la relación parte-todo en contextos lingüísticos y de acción, por ejemplo, es capaz de romper papel en partes (aunque no sean iguales en forma o tamaño. Para este autor, la manipulación y adquisición de diversas imágenes sobre la fracción posibilita reconocerla como "objeto mental", a partir del cual organizar diversos fenómenos de nuestro mundo, analizar sus propiedades y las acciones que se hacen sobre ellos, a la vez que se constituye en un recurso para abordar en la práctica matemática el objeto número racional. En esta misma dirección, Llinares y Sánchez (1988) consideran que las nociones matemáticas no se desarrollan todas de una vez ni al mismo nivel para todos

los estudiantes, y que es posible desarrollar una noción de fracción vinculada a la relación parte-todo en un momento y luego ampliarlo a otros ámbitos, reconociendo diferentes interpretaciones y posibilitando la construcción del concepto del número racional.

3. Aspectos metodológicos

Siguiendo la metodología de Investigación Acción, se parte del reconocimiento de las dificultades expresadas por los estudiantes en diferentes instrumentos de indagación con respecto a las formas de representación de los números racionales. La revisión bibliográfica posibilitó tanto reconocer y comprender algunas dificultades relacionadas con la noción de fracción y el concepto número racional, como también adecuar y proponer una secuencia de actividades para posibilitar su comprensión. Desde esta perspectiva es posible realizar una discusión crítica de carácter cualitativo para comprender los aspectos de la realidad existente e identificar las fortalezas de estudiantes y docentes en sus interacciones sociales ya que se trabaja teniendo en cuenta las condiciones propias del estudiante y su contexto, además, pretende describir la forma como el estudiante interpreta el mundo que le rodea, sus relaciones con las matemáticas e incluso sus relaciones interpersonales (Hopkins, 1989). Así, la investigación-acción; puede verse como un intento de reflexión documentada de las acciones, mediante ciclos de planificación-acción-observación-reflexión.

4. Desarrollo de la propuesta

Se aplicó un instrumento de indagación a estudiantes de grado 11° (33 en total) sobre la interpretación de la fracción como relación parte-todo, el reconocimiento de relaciones de orden y de equivalencia, así como de formas de escritura. Cerca del 9% de ellos no reconoce la relación parte-todo (escribe sólo números naturales); 39% escribe parte-parte; 3% escribe todo-parte y 46% usa la escritura convencional parte-todo; de igual forma se aprecia que varios de ellos no reconoce la necesidad de tener partes de igual

tamaño, en contextos continuos y discretos (congruentes en área o desde el conteo).

El instrumento de indagación aplicado también deja ver la percepción que de área tienen los estudiantes clasificándolos en cuatro niveles así: 7 estudiantes (21%) se catalogan en el nivel 0 de área, ya que no contestan de forma adecuada el ítem 2a en el que se les pide a los estudiantes representar una cuarta parte de un rectángulo dado. Once de los estudiantes (34%) grafican bien el ítem 2a, pero se dejan confundir en los otros ítems que dan la categorización de área y por tanto se clasifican en el nivel 1. En el nivel 2 se clasifican 10 estudiantes (30%) y sólo cuatro estudiantes (12%) se clasifican en el nivel 3. Para estar en el nivel cuatro se necesita que el estudiante de respuesta adecuada a todos los ítems correspondientes al área, sin dejarse confundir en el contexto disconexo del ítem 1e y que mantenga la unidad del rectángulo entregado en el ítem 2b.

De esta manera y teniendo en cuenta los resultados de las pruebas aplicadas a los estudiantes se inició el trabajo de aula con un ejercicio práctico y manual en donde el estudiante recorta tiras de papel para hacer comparativos y referenciar las fracciones que aparecen. Se asumió el lenguaje común inicialmente y luego se plantearon distintas relaciones para llegar a la representación matemática de manera gráfica y escrita; en forma de fracción y en forma decimal con coma. Cada estudiante construye su propio kit de tiras de papel, en diferentes colores y con la ayuda de sus compañeros al socializar sus resultados o sus formas de escribir comienza a aparecer la operatoria y la equivalencia de fracciones. En la socialización de resultados de esta actividad con los estudiantes se evidencio que la escritura de las fracciones es impuesta por los estudiantes considerados más aventajados y que las relaciones que hacen entre las distintas tiras de colores, no se hace de manera segura; sólo aparece de la superposición de tiras al compararlas de manera física; por ejemplo: los estudiantes determinan que cuatro quintos es mayor que tres cuartos por la comparación de tamaños de las tiras de papel y no solo algunos estudiantes tímidamente proponen hacer la división del numerador entre el denominador para hacer la comparación entre números con coma. En este trabajo de intervención en el aula se resalta el hecho de que son los estudiantes quienes se ponen de acuerdo en un pequeño grupo y luego socializan sus resultados con la totalidad de la clase para definir las conclusiones y acuerdos generales entre todos los estudiantes y con las

orientaciones del docente investigador quien siempre estuvo atento al desarrollo de las cinco tareas propuestas para la realización de la intervención.

5. Conclusiones

La aplicación de la intervención de aula propuesta se desarrolló durante el segundo periodo escolar de los cuatro que se trabajan en la institución escolar y de acuerdo a la malla curricular establecida en el PEI. Sin embargo, el trabajo pedagógico y la estrategia de la metodología especifica del aula se continuo trabajando hasta el final del año escolar; así mismo, en la medida en que se desarrollaba la intervención de aula, se estudiaron las respuestas de los estudiantes a las distintas tareas propuestas, se acomodaron nuevas labores dependiendo de las necesidades expresadas en los instrumentos de indagación para beneficiar y orientar la constitución de imágenes mentales de los estudiantes, favoreciendo la comprensión de distintas representaciones de los números racionales, su utilidad y la posibilidad de generar un camino natural hacia las sucesiones, las generalizaciones y procesos de aproximación hacia la noción del límite.

En el reporte de la intervención se registró las respuestas de los estudiantes al inicio y al finalizar el año escolar, con lo cual se observó el desplazamiento en la clasificación que se dio, tanto en el nivel de área como en la forma de escritura de los estudiantes. Se ve que inicialmente, en el nivel cero de área se clasificaron 6 estudiantes (18%) y que en este nivel terminaron clasificados sólo dos estudiantes finalmente (6%).

En el nivel uno, se tenían 15 estudiantes (46%) y al culminar el año escolar se registraron solamente dos estudiantes (6%) en este nivel. El desplazamiento de los estudiantes clasificados inicialmente en el nivel uno, hacia el nivel dos de área, se ve reflejado en la clasificación final en donde aumento el número de estudiantes que paso de 10 estudiantes (30%) a 19 estudiantes (58%) clasificados en el nivel dos al finalizar la intervención. Así mismo, al principio del año sólo dos estudiantes (6%) se clasificaron en el nivel tres de área y al momento del cierre se cuenta con 8 estudiantes (24%) que se desplazaron de los niveles inferiores. Al nivel máximo de área

establecido en el tercer capítulo se desplazaron los dos estudiantes (6%) que inicialmente se habían clasificado en el nivel tres.

También se pudo visualizar como los estudiantes cambiaron su forma de escritura ya que inicialmente sólo 15 estudiantes (45%) escribían parte-todo y al finalizar se ve desplazamientos hacia la forma de escritura matemáticamente aceptada con 20 estudiantes (60%). Un sólo estudiante escribió al final de la intervención todo-parte, pero al igual, se reporta cambio de escritura pues, inicialmente este estudiante escribía con números naturales para referirse a la escritura de fracciones. De la escritura parte-parte se tenía inicialmente registro de 10 estudiantes (30%) y al finalizar se disminuyó en cuatro estudiantes (12%); entonces, 6 estudiantes (18%) siguen manteniendo la escritura parte-parte, a pesar del trabajo realizado.

Referencias bibliográficas

- Arévalo, M. (1998). Ideas básicas para el estudio de las fracciones. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias y Educación, posgrado en Educación Matemática. (Trabajo no publicado).
- Centeno, J. (1988). Números Decimales. ¿Por qué?, ¿Para qué? Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, N° 5. Madrid: Síntesis.
- Fandiño, M. (2009). Las Fracciones. Aspectos conceptuales y Didácticos. Bogotá: Magisterio.
- Freudenthal, H. (1994). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (L., Puig, Trad.). México.
- García, R. y Mayorga, E. (1997). Dificultades en la comprensión del concepto de números fraccionarios: La relación parte – todo. Bogotá D.C. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Facultad de Ciencias y Educación, posgrado en Educación Matemática.
- Grupo Pretexto (1999). La transición Aritmética- Algebra. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colciencias. Bogotá.
- Hopkins, D. (1989). Investigación en el aula. Colección Investigación e Innovación Educativa. Barcelona, PPU.
- Jackson, P. (1998): La vida en las aulas. Madrid, Morata.
- Kieren (1981).Citado en Maza y Arce. (1991).
- Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). Fracciones: La relación parte- todo. Madrid: Síntesis.

- Maza, C. y Arce, C. (1991). Ordenar y clasificar. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje, N° 31. Madrid: Síntesis.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares-Área Matemáticas. Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.edu.gov.co /cvn/1665/article-89869.html
- Ministerio de Educación Nacional (2003). Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: MEN. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Narrativas de la educación matemática para el ejercicio de los derechos humanos

Salas Martínez, Juan Manuel - Guerrero Recalde, Fernando

juanmanuelsalasmartinez@hotmail.com - nfguerreror@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Se pretende desarrollar una secuencia de actividades donde a partir de la modelación matemática y las narrativas, los estudiantes de grado sexto del colegio La Belleza los Libertadores IED, reflexionen sobre la realidad social y analicen los efectos de algunos aspectos sobre la conservación de la naturaleza, empleando las narrativas y la modelación matemática de situaciones relacionadas con la conservación de la naturaleza, para ejercer el derecho a la vida y el deber de protegerla, con la introducción de una secuencia didáctica, el objetivo es analizar las narrativas de los estudiantes de grado sexto, cuando aplican las matemáticas para desarrollar conciencia respecto a la protección de la vida, la investigación es de tipo cualitativo y se desarrollará a partir de la investigación acción, Elliot (2005).

Palabras clave: Narrativas, derechos humanos, educación matemática.

1. Introducción

Se pretende desarrollar una secuencia de actividades donde a partir de la modelación matemática y las narrativas, los estudiantes de grado sexto del colegio La Belleza los Libertadores IED, reflexionen sobre la realidad social y analicen los efectos de algunos aspectos sobre la conservación de la naturaleza, trabajando a partir de las temáticas descritas por Callejo (2000), en relación a la educación matemática y ciudadanía propuestas desde los

derechos humanos, el derecho a la vida y el deber de protegerla, particularmente el objetivo de "cuantificar los efectos directos e indirectos del ahorro de consumo, el reciclaje, la clasificación de basuras... sobre la conservación de la naturaleza" (p. 38), trabajando a partir de los objetos matemáticos de proporcionalidad, estadística, generalizaciones, inferencias y razonamiento aritmético.

Como problema de investigación se tienen los distintos problemas que atentan contra el derecho a la vida y el deber de protegerla, como por ejemplo, el aumento en el nivel de basura, y la variación de estaciones; siendo el conocimiento matemático y en particular la modelación matemática el principal elemento para identificar estos problemas y de esta forma diseñar alternativas de solución, tales como el ahorro de recursos y energía, el reciclaje y la reducción de consumo. Siendo la pregunta de investigación: ¿En qué forma el uso de narrativas en educación matemática contribuye a ejercer entre los estudiantes de grado sexto del colegio La Belleza los Libertadores IED, el derecho a la vida y el deber de protegerla a partir del desarrollo de la modelación matemática de situaciones relacionadas con la conservación de la naturaleza, como ejemplo cuantificar los efectos directos o indirectos del ahorro de consumo, el reciclaje o la clasificación de basuras, entre otros?.

2. Marco de referencia

Es necesario vincular las narrativas hacia la formación en derechos humanos, debido a que "un papel importantísimo de las narraciones en las culturas orales,…consiste en asegurar que los principales mensajes culturales sean retenidos en las memorias vivas y que quienes recuerden estén emocionalmente comprometidos con esos mensajes". Egan (1988).

Las narrativas constituyen un aspecto fundamental para despertar la creatividad de los niños y aprovecharla para potenciar el objeto de enseñanza que se desea implementar, Egan (1994) señala "al utilizar la forma narrativa para planificar la enseñanza, podemos reimplantar este aspecto, importante y olvidado, del pensamiento infantil" (p. 46).

Se hace necesario reconocer al estudiante como ser pensante y de esta forma aprovechar su potencial, Molina (2011) señala:

> Al enseñar, muchas veces, no se establece relación con el pensamiento del estudiante; en otros términos, no se le respeta, ni se le reconoce como a un ser pensante, y el niño es un pensador… Reprimirlo, obligándolo a memorizar y repetir cosas que no le interesan o que no puede investigar, no es algo a lo cual se le pueda llamar educación. (p. 23).

3. Aspectos metodológicos

La investigación es de tipo cualitativo y se desarrollará a partir de la investigación acción, Elliot (2005) señala que "podemos definir la investigación-acción como el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción en la misma" (p. 2), se trata de aportar elementos con el fin de facilitar la reflexión en determinadas situaciones y a la vez de verificar la utilidad y la valides de las teorías e hipótesis.

En la investigación-acción como lo afirma Elliot (2005), se identifica una idea general para luego reconocer la situación, efectuar la planificación, desarrollar la acción en determinadas fases, implementarla, evaluar la acción y revisar el plan general en cada una de las fases.

4. Desarrollo de la propuesta

Para formar en ciudadanía Vanegas y Giménez (2011) describen la necesidad de adquirir habilidades formativas basadas en "(a) reconocer cambios sociales, y aprender a tomar posiciones ante los mismos mediante el uso de los instrumentos sociales y matemáticos al alcance y (b) vivir democráticamente desde la experiencia práctica educativa en la participación y el diálogo."(p. 3).

Callejo (2000), destaca la importancia de las matemáticas como mecanismo fundamental para dimensionar la magnitud del problema y así identificar las dificultades que nos impiden vivir en armonía con la naturaleza y nos conducen a un futuro peligroso si no cambiamos el modelo de desarrollo y detenemos el nivel de utilización. "Por ejemplo, para la predicción del clima

se utilizan modelos numéricos que incluyen una descripción matemática aproximada de los procesos que componen el sistema climático". (Callejo, 2000, p. 38).

Según los Lineamientos Curriculares (1998), algunos de los propósitos generales del currículo en matemáticas, son estimular a los estudiantes y crear situaciones en las que ellos puedan poner en juego sus ideas, inventar otras y descubrir, sin embargo no especifica la forma en la cual pretende que los estudiantes inventen y descubran ideas, siendo la narrativa un elemento fundamental para estimular la imaginación. Egan (1994) destaca "Si seguimos manteniendo como centro de atención la actividad intelectual imaginativa, podremos construir una imagen más esperanzadora y menos restrictiva del niño en cuanto a aprendiz" (p. 36).

5. Conclusiones

En este momento se está revisando las actividades que desarrollarán los estudiantes en relación a la temática a trabajar por tanto los resultados esperados a partir de las actividades son los siguientes:

- Producción de propuestas de alternativas de conservación y prevención a partir de la modelización matemática de situaciones relacionadas con la conservación de la naturaleza, para ejercer el derecho a la vida y el deber de protegerla.

- Construcción de argumentaciones de los estudiantes para la toma de conciencia sobre la magnitud de los problemas que atentan contra la vida y su protección, como por ejemplo la contaminación y la degradación general del medio ambiente.

- Identificación de problemas sociales en la comunidad que nos impiden vivir en armonía con la naturaleza y nos conducen a un futuro peligroso, si no cambiamos el modelo de desarrollo y detenemos el nivel de utilización.

- Reconocimiento de las narrativas como medio para la asunción de posiciones críticas y deliberativas de los estudiantes para ejercer el

derecho a la vida y el deber de protegerla, despertando la creatividad e imaginación en los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Callejo, M. (2000). *Educación matemática y ciudadanía*: propuesta desde los derechos humanos. Santo Domingo, República Dominicana: Centro Cultural Poveda.
- Egan, K. (1994). *Fantasía e imaginación su poder en la enseñanza*. Madrid, España: Ediciones Morata.
- Egan, K. (1988). *La comprensión de la realidad en la educación infantil y primaria*. Madrid, España: Ediciones Morata.
- Elliot, J. (2005). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid, España: Ediciones Morata.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares* - Matemáticas. Bogotá, Colombia: MEN.
- Molina, A. (2011). *Filo-abecedario: problemática educativa crítica filosófica*: homenaje a Estanislao Zuleta. Bogotá, Colombia: Gimnasio Moderno.
- McEwan H y Egan K. (1995). *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación* Buenos Aires, Teachers College Press, Columbia University.
- Vanegas, Y. y Giménez, J. (2011). *Futuros profesores de matemáticas y ciudadanía*. : Recife, Brasil: Memorias, XIII CIAEM – IACME.
- Skovsmose, O., y Valero, P. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogota: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Errores en la visualización de figuras en el área de la geometría plana.

Estudio de caso

Guzmán Ruiz, Cristian Alejandro- Bohórquez Vargas, Johan Manuel

crisalegu@hotmail.com – jm_bv@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

La siguiente investigación (cualitativa), presenta un estudio de caso cuyo objetivo es identificar los errores que presenta un estudiante al visualizar una figura plana contrastada con una transformación (posición); para ello, fue necesario tener en cuenta los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico que plantea Van Hiele para ubicar el nivel en el cual se iba a trabajar con dicho estudiante y su respectivo nivel de dificultad (prueba). Por otro lado, para tipificar los errores se muestra una clasificación dada por Radatz los cuales permiten una amplia concepción de lo que podría resultar del estudio; sin embargo, luego de aplicar una prueba sistematizada, se vio la necesidad de crear unas categorías emergentes que permitieron complementar la investigación.

Palabras clave: Geometría, errores, visualización, pensamiento espacial. estudio de caso.

1. Introducción

Dado que el énfasis de la investigación se centra en el área de le geometría, es necesario saber que el pensamiento espacial dentro del conocimiento matemático es eje fundamental para el desarrollo de habilidades en el espacio y como el trabajo está enfocado hacia el encontrar posibles errores

presentes en el área de la geometría, fue necesario guiar el estudio bajo un artículo llamado "Tipología de errores en la geometría plana" (Franchi L. & Hernández A., 2004); por otro lado, unas clasificaciones que las dan Brousseau y Movshovitz hacia los errores en la geometría muestran una brecha no muy corta entre lo que se plantea en la investigación (estudio específico) y los aspectos generales (en este caso errores) dados en el geometría.

2. Marco de referencia

Según nuestra experiencia como docentes en formación, es notable que el proceso de construcción del pensamiento espacial es lento, desde que se inicia con los elementos geométricos básicos hasta las formas deductivas formales; ahora bien, Piaget (1952) menciona en su teoría de aprendizaje, que el proceso de construcción del espacio y los sistemas geométricos está estrechamente influenciado por las características que tiene cada persona a nivel cognitivo; por ejemplo las influencias que ejercen el entorno social, cultural, físico e histórico y es por ello, que el MEN (1998), sugiere que el estudio de la geometría debería favorecer dichas interacciones (estudiante-entorno).

Para centrar el tema, en los Estándares Básicos para las competencias matemáticas (MEN, 2006), se consideran algunos de los componentes del campo geométrico: los elementos de que constan, las operaciones y las transformaciones con las que se combinan y las relaciones entre ellos. Dado al quehacer educativo, se estaba evidenciando en los estudiantes dificultades a la hora de reconocer e identificar transformaciones en un mismo elemento geométrico y para hacer un estudio más profundo (observando la población a la cual se le va a aplicar el análisis) se toman como referencia dos estándares básicos para las competencias matemáticas en los cuales se ponen en discusión las conjeturas y las verificaciones que hace el estudiante aplicando una transformación de figuras en un plano:

"Conjeturo y verifico los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños"

"Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características" (MEN, 2006).

A partir de los estándares planteados para este caso es evidente que se debe pensar en los procesos a realizar para cumplir con cada estándar, por lo tanto Duval (1999), hace un énfasis en que el aprendizaje de la geometría es un proceso complejo en donde se ponen en discusión diversos factores, como por ejemplo el que trabaja con los procesos cognitivos de visualización y los procesos de justificación. Ahora bien, dentro de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la educación Básica, los estudiantes no logran mirar más allá de las características en las partes constitutivas de un elemento geométrico, esto sucede según el MEN (1998) en el nivel dos del proceso de visualización, pero además se decide hacer una mirada más profunda a los niveles para el desarrollo del pensamiento espacial:

- Nivel 1. Reconocimiento.
- Nivel 2. Análisis.
- Nivel 3. Ordenamiento.
- Nivel 4. Deducción.
- Nivel 5. Rigor.

Es importante resaltar que para poder encontrar elementos prácticos de la geometría en el mundo tridimensional es de vital importancia que la persona tenga una representación del objeto en su imaginación y viceversa; al respecto con esto, Winter (mencionado por Dickson, 1991), confirma la idea afirmando que:

> …A pesar de que vivimos en un mundo tradicional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a los niños son bidimensional […] Es por ello que el estudiante debe desligarse de este mundo, para que luego pueda tener un nivel de visualización aún más profundo del mundo concreto (p. 48).

Otra finalidad de este trabajo es dar a conocer la importancia de trabajar los sistemas geométricos y el pensamiento espacial por medio de transformaciones, ya que el MEN (1998) reitera en que se deben desarrollar todas las representaciones posibles en la imaginación y en el plano incluyendo el dibujo en lo bidimensional.

Ahora bien, es necesario abordar los tipos de errores que se presentan al momento de arribar a un concepto geométrico y Brousseau, Davis y Werner (1986) (citados por Rico, 1995), señalan en el mismo sentido, que los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza. Dado lo anterior, se toma como marco de referencia los errores presentados en el nivel de percepción de elementos constitutivos y nivel 3 de Van Hiele, tal y como lo muestra Radatz (1979) en su clasificación de errores:

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
- Errores debido a rigidez del pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

3. Aspectos metodológicos

El tipo de investigación utilizado es la investigación cualitativa, la cual pretende describir sucesos en su medio natural buscando de esta manera realizar un estudio de caso. Para ello se requiere implementar una prueba escrita que permitirá a la estudiante la solución de los problemas propuestos.

Como instrumento adicional, al momento de la recolección de datos se hace necesario utilizar la entrevista no estructurada, que consiste en realizar preguntas de acuerdo a las respuestas que vayan surgiendo durante la entrevista, de esta manera resulta más factible identificar los errores si se conserva una constante charla, cuestionándola por las estrategias y procedimientos que realizó para llegar a la solución e identificando cada uno de los errores presentes en el desarrollo de la misma.

La prueba fue aplicada el día 27 de marzo de 2012 a una estudiante que cursaba grado tercero, su edad era de 8 años, de la Institución Educativa Distrital José Feliz Restrepo; esta prueba quedó registrada en una grabación

de audio y video que puede ser encontrada en el sitio web http://www.youtube.com/watch?v=c7PZGdrwtR4

Los criterios utilizados para la selección de la muestra fueron básicamente las indicaciones políticas en el área de matemáticas, debido a que el estudio estaba pensado para aplicarse con las transformaciones en el plano de figuras planas, por ello se consignaron autores que remitieran al foco de la investigación; sin embargo, se hicieron algunas asesorías con cuerpos de profesores que hubiesen estudiado dicho tema para especificar la población a la cual se le iba a aplicar la prueba.

Categorías de análisis

Para el análisis de los resultados se requieren de unas categorías, las cuales fueron las siguientes:

- Da una respuesta distinta o adicional a un problema o situación dada.
- Utiliza terminología geométrica inadecuadamente para expresar sus ideas.
- Usa e interpreta definiciones geométricas de forma errónea.
- Enuncia propiedades ciertas sin justificación para mostrar conjeturas.
- No reconoce la congruencia de dos figuras geométricas en una posición no convencional.

Las anteriores categorías fueron diseñadas a partir de la tipología que presenta Radatz mencionada anteriormente.

4. Desarrollo de la propuesta

Al momento de analizar los errores presentados en la solución de los problemas propuestos y las respuestas dadas, se logran identificar en la estudiante los siguientes errores en el área de la geometría plana.

Error	Categoría
Error debido al lenguaje (Radatz)	1
Error debido al nivel teórico (Brousseau)	2
Error debido al uso deformado de definiciones o teoremas geométricos (Movshovitz)	3
Error debido al mal y deficiente nivel de aprendizaje (Radatz)	4
Error debido al mal uso de las figuras en el plano	5

Elementos clave para la elaboración del ejercicio 1

Al momento de comparar las figuras presentadas en la gráfica del ejercicio 1, la estudiante afirma que para ella el paralelogramo es un tapete, además se observa que la estudiante relaciona los elementos geométricos presentados con elementos prototípicos (en este caso, objetos de su vida cotidiana). El instrumento aplicado se puede encontrar en: https://www.dropbox.com/s/so11oid8e27r7xd/Prueba%20de%20Visualizaci%C3%B3n.pdf?dl=0

En el instante en el que la estudiante empieza a observar las diferentes características de cada elemento geométrico, confunde términos geométricos, los cuales utiliza para sustentar su idea: “Dentro del cuadrado hay rectángulos”, afirma.

En torno a la caracterización e identificación de propiedades de los elementos que componen la gráfica presentada, la estudiante utiliza términos geométricos para identificar las características correspondientes: “Veo un cuadrado y un rombo”, al momento de comparar los dos cuadriláteros que se presentan solapados al paralelogramo.

Elementos clave para la elaboración del ejercicio 2

La estudiante reconoce los términos de las figuras geométricas involucradas afirmando que “Ahí hay un triángulo”, al momento de ver las figuras formadas dentro de las que se le presentan.

Relaciona las partes que componen la figura presentada y no encuentra relaciones entre las partes constitutivas de la misma figura cuando éstas están en diferente posición, ella afirma: “En esta figura hay un equis, pero en la otra no” refiriéndose a las líneas internas que dividen al triángulo grande

en triángulos pequeños. Para justificar un poco más los argumentos que utiliza la estudiante se puede decir que el error que presenta es de tipo teórico, debido a que enuncia terminología geométrica inadecuada para expresar sus ideas.

Elementos clave para la elaboración del ejercicio 3

Al momento de abordar el tercer problema, la estudiante dibuja únicamente los elementos iguales e ignora los demás: "Dibujo solo el tapete porque no tengo la necesidad de hacer las otras figuras", es lo que afirma. Es evidente que utiliza proposiciones para darle validez a su argumento, sin embargo son carentes de justificación alguna es por ello que se observa un error debido a la dificultad del lenguaje.

Luego de reconocer las similitudes entre las figuras, la estudiante grafica cada detalle de las que son "iguales", dejando por fuera las diferencias entre las figuras ya que según ella "¿para qué dibujar lo que no está en ambas?".

5. Conclusiones

Luego de realizar el proceso de investigación y clasificar los diferentes errores presentados en la estudiante, se llega a las siguientes conclusiones:

- Los errores que presenta la estudiante son: debidos a la mala interpretación del lenguaje, al nivel teórico, al uso de definiciones y teoremas deformados y al mal uso de las figuras en el plano.

- La asociación de las figuras geométricas con elementos de la vida cotidiana de los estudiantes se presenta como medio de contextualización de la situación, facilitando la comprensión y la visualización de los elementos que se presentan.

Referencias bibliográficas

- Dickson, L. & otros (1991). El aprendizaje de las matemáticas, Madrid: Edit. Labor S.A. p. 48.
- Duval, R. (1999). Visualización, semiosis e intuición en la enseñanza de las funciones matemáticas.
- Hiele, V. En E. Castro (2001), Didáctica de la matemática de la educación primaria. Madrid: Edit. Síntesis. Pág. 376
- MEN. (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. En: Conocimientos básicos. Bogotá: Edit. Magisterio.
- MEN. (2006). Estándares básicos para las competencias matemáticas. Bogotá: Edit. Magisterio.
- Piaget, J. (1952). La construcción de la realidad en el niño. Madrid. p. 23.
- Radatz, H. (1979). Análisis de errores en la educación matemática. Diario de la investigación en educación matemática. Vol. 10. Págs. 163-172
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

La evaluación desde el enfoque de la educación matemática crítica y ruta para propuestas de ambientes de aprendizaje.

Algunos aportes

Clavijo Riveros, Martha Cecilia - Arias Arias, Claudia María - Torres Duarte, José
marthacclavijor@gmail.com - claudiarias_01@hotmail.com - jotorresd@udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Desde la Educación Matemática Crítica se han realizado variadas investigaciones y propuestas de Ambientes de Aprendizaje, sin embargo han surgido inquietudes y se evidencian diferentes estrategias para evaluar el proceso de los estudiantes en cada una de las etapas de manera coherente al enfoque. Es así, como uno de los resultados de la investigación realizada en las instituciones educativas distritales Juan del Corral y Restrepo Millán, se enfocó en identificar algunos de los elementos que debe tener en cuenta el docente de matemáticas para fomentar el pensamiento crítico e indicadores que permitan dilucidar el nivel de pensamiento crítico en el cual se encuentran los estudiantes, destacando así una posible estructura para llevar a cabo Ambientes de Aprendizaje en el aula de matemáticas y categorías de análisis para evaluar las habilidades y disposiciones del pensamiento crítico y la gestión docente.

Palabras clave: Educación Matemática Crítica, Ambientes de Aprendizaje, evaluación y pensamiento crítico.

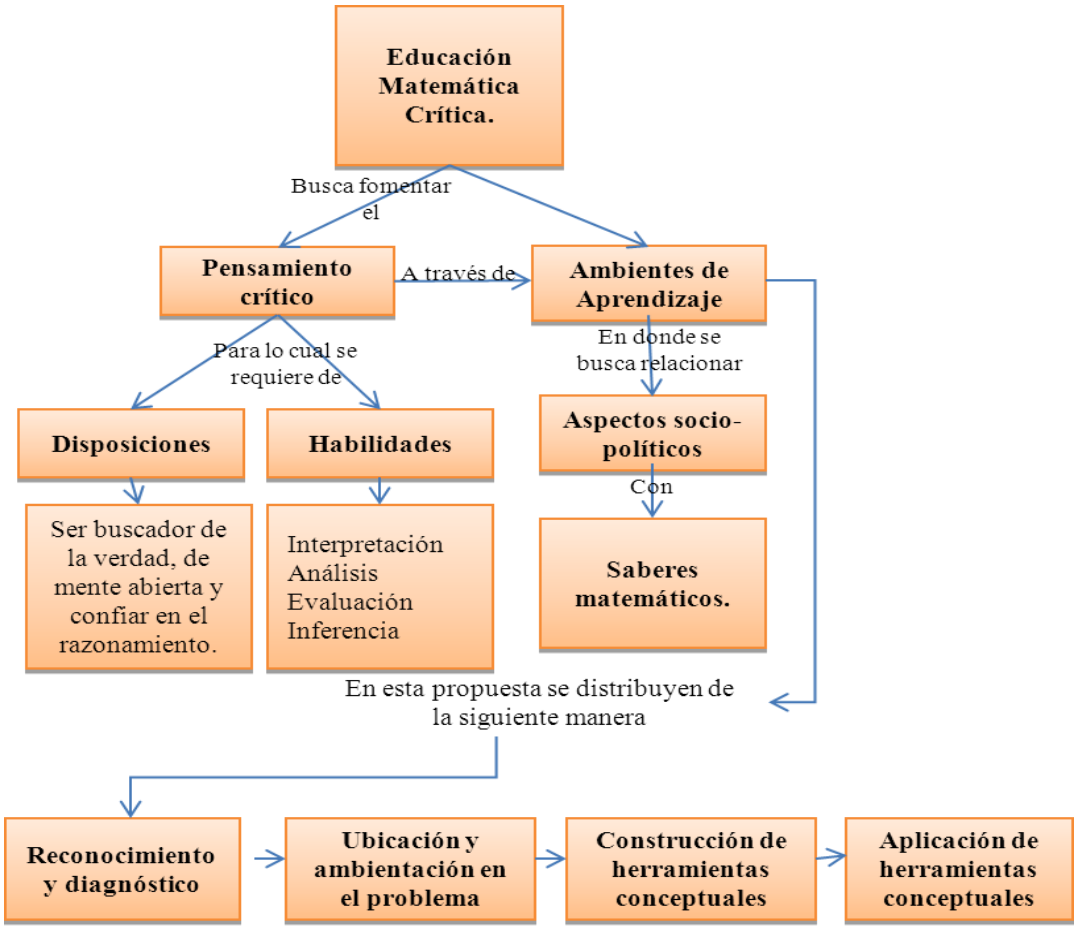
1. Introducción

Los aportes que aquí se describen surgen a partir del trabajo de investigación titulado: *Ambientes de Aprendizaje para el fomento del Pensamiento Crítico: Una propuesta bajo el enfoque de la Educación Matemática Crítica*, desarrollada con una población constituida por estudiantes de Bogotá pertenecientes a grado octavo en el año 2011 de la IED Restrepo Millán ubicada en la localidad Rafael Uribe Uribe y estudiantes de grado octavo y noveno en el año 2012 de la IED Juan del Corral ubicada en la localidad de Engativá.

En este caso, el macro contexto de la población anteriormente descrita presentaba un conflicto político social que ha marcado la historia colombiana, como lo destaca Arroyo (2010), caracterizando y describiendo la disputa entre los mandatarios del país vecino Venezuela y Colombia entre los años 1998 y 2008. Este contexto histórico es el punto de partida bajo el cual se pensaron y propusieron los Ambientes de Aprendizaje en el aula, ligados a diversos aspectos conceptuales que se involucraron en la investigación, tales como: la Educación Matemática Crítica [EMC], el pensamiento crítico (habilidades y disposiciones, gestión docente) y los Ambientes de Aprendizaje. Además de describir la metodología empleada haciendo énfasis en el Análisis de la información y sus categorías, para así mostrar las conclusiones relevantes de la investigación.

2. Marco de referencia

El siguiente esquema sintetiza y relaciona los pilares conceptuales que sustentan lo expuesto en este documento, Educación Matemática Crítica (EMC), Pensamiento Crítico (disposiciones y habilidades) y Ambientes de Aprendizaje.



En el enfoque de la EMC el contexto de los educandos entra a jugar un papel esencial, ya que, este constituye un elemento determinante para involucrar al estudiante en la construcción de su conocimiento (Ángel & Camelo, 2010).

En concordancia a lo anterior, Sánchez y Torres (2009), mencionan que los problemas no están solamente en la "cabeza" de los individuos, sino en la manera como colectivamente y a través de la historia se construyen ideas sobre lo que es válido y legítimo como acción y como pensamiento. Por lo que las problemáticas se pueden encontrar tanto en el nivel de la acción individual como en el nivel de la acción colectiva de grupos de personas y de sistemas sociales.

Ambientes de Aprendizaje (AA)

Para caracterizar las alternativas que se dan en una clase de matemáticas, en la EMC se tienen en cuenta los AA propuestos por Skovsmose (2000), quien

identifica seis alternativas diferentes, que son el resultado de combinar tres tipos de referencia; matemáticas puras, semirrealidad y situaciones de la vida real; con las formas de organización de la actividad de los estudiantes; escenarios de investigación o el paradigma del ejercicio. Los escenarios de investigación como un enfoque alternativo a las actividades que se rigen bajo el paradigma del ejercicio, proponen situaciones en las que se invita al estudiante a explorar e indagar en torno a unas circunstancias dadas en un tipo de referencia específico.

Pensamiento crítico

El fin principal de esta investigación fue el fortalecimiento del pensamiento crítico, el cual es, según el informe Delphi, el "juicio auto regulado y con propósito que da como resultado la interpretación, análisis, evaluación e inferencia, como también la explicación de las consideraciones de evidencia, conceptuales, metodológicas, criteriológicas o contextuales en las cuales se basa ese juicio" (Facione, 2007, p. 21), destacando así las disposiciones, tales como, ser inquisitivo, juicioso, sistemático, buscador de la verdad, de mente abierta, analítico, entre otras; y las habilidades del pensamiento crítico: interpretación, análisis, inferencia y evaluación.

Disposiciones

Teniendo en cuenta lo expuesto por Facione (2007), para el desarrollo o fomento del pensamiento crítico es necesario que además de las habilidades que se describen en el siguiente apartado, el individuo posea ciertas disposiciones. Es decir, una actitud crítica que le permita hacer uso de las habilidades cognitivas de una manera eficiente y coherente con el pensamiento crítico, ya que como lo menciona Delgado y Escurra (2008), mostrar una disposición hacia el pensamiento crítico constituye una motivación interna consistente para enfrentar los problemas y tomar decisiones haciendo uso del pensamiento. Es así como en el desarrollo de esta investigación, se busca potenciar particularmente tres disposiciones, estas son: ser buscador de la verdad, tener confianza en el razonamiento y poseer mente abierta; las cuales le permite al estudiante poner en juego y potenciar las habilidades cognitivas propias del pensamiento crítico. Además de permitirle tomar una postura frente a los conocimientos que adquiere y a la información a la que están expuestos a diario.

Habilidades

Éstas se pueden definir como "la facultad especifica de pensamiento crítico relaciona el campo disciplinario de un dominio, en el cual el sujeto usa el conocimiento y las formas de pensar de su campo de especialización" (Campos, 2007, p. 67); en esta investigación se abordan, específicamente, las habilidades del pensamiento crítico referidas a la interpretación, análisis, evaluación e inferencia.

Gestión docente

La gestión de un docente que ubica su enseñanza en el enfoque de la EMC, reside en la convicción de que el aprendizaje que adquiere un estudiante requiere pensamiento autónomo y reflexivo, donde los estudiantes "hagan uso del conocimiento adquirido para comprenderlo mejor [su entorno], cuestionen su propio conocimiento adquirido y tengan conciencia de su propio conocimiento" (Campos, 2007, p. 67).

Fomento de la participación: Desde el enfoque de la EMC, se hace necesario que la construcción del conocimiento se haga desde la colectividad, por lo que el fomento a la participación debe ser una de las prioridades del docente a la hora de gestionar.

Fomento de normas socio matemáticas: A la par de lo mencionado en el apartado anterior (fomento a la participación), se hace necesario que el docente en el aula fomente normas socio matemáticas, tales como, promover el escuchar con atención las opiniones de los demás, en actividades donde por ejemplo, un estudiante deba resumir en sus propias palabras lo que dijo otro estudiante, etc.

Diseño y planeación: En este orden de ideas, se hace necesario hablar de la tercer sub categoría de análisis planteada para esta investigación en cuanto a la gestión, esta hace referencia al diseño y la planeación, en cuanto a esto Campos (2007), resalta que desde este enfoque se necesita que el docente posea una serie de habilidades personales y manejo de estrategias, técnicas y métodos referidos a su quehacer didáctico en pro del fomento del pensamiento crítico planeando y diseñando actividades pertinentes.

3. Aspectos metodológicos

El macro contexto de la población objeto de estudio de esta investigación se presentó un conflicto político social que ha marcado la historia colombiana. Para describir el contexto histórico en el que se dieron los Ambientes de Aprendizaje en el aula, a continuación se describen los aspectos políticos que influenciaron directamente tanto a los AA como a los estudiantes. Para esto es preciso traer a colación el recuento histórico que realiza Arroyo (2010) de la disputa entre los mandatarios del país vecino Venezuela y Colombia entre los años 1998 y 2008, quien señala que:

> Durante los últimos años la relación Colombia-Venezuela ha estado marcada por una constante inestabilidad. Se debe recordar que durante el gobierno de Andrés Pastrana y Álvaro Uribe se presentaron diferentes situaciones que vinculan a las FARC con Caracas. A su vez Chávez afirma públicamente, en reiteradas oportunidades, de manera implícita su tendencia a apoyar de manera política a las FARC, otorgándoles incluso estatus político. Posteriormente este conflicto pasa de ser una disputa entre mandatarios y se convierte en un punto de discordia entre las dos naciones, y por ende su población (Arroyo, 2010).

Considerando lo anterior, la metodología empleada fue de tipo cualitativo: Investigación Acción Participativa, propia para la EMC pues según Mora (2005), en esta los actores se involucran en la transformación de su medio y de ellos mismos, y en donde la validez intersubjetiva, se construye en la argumentación y en las expresiones libres de los involucrados, Planteando una propuesta de Ambientes de Aprendizaje que configuraron la propuesta de enseñanza y aprendizaje de esta investigación considerando cuatro etapas:

Primera etapa: Reconocimiento y Diagnóstico: se realiza un reconocimiento de las concepciones que tiene el estudiante en torno a la problemática y las interacciones dentro del aula.

Segunda etapa: Ubicación y Ambientación en el problema: Aquí los estudiantes tienen un acercamiento frente a la problemática presente en su macro contexto, así mismo pueden reflexionar en torno a esta.

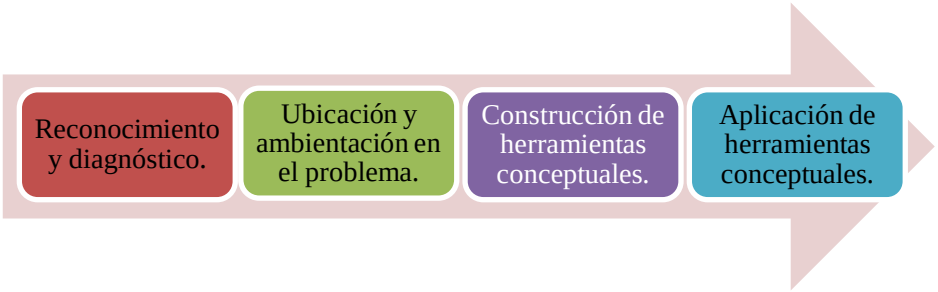
Tercera etapa: Construcción de herramientas conceptuales: En esta, partiendo de la necesidad de los estudiantes por encontrar argumentos sustentados que validen o refuten las críticas hechas a la problemática de su

macro contexto, se plantean tres Ambientes de Aprendizaje que encapsulan las nociones estadísticas inmersas en una encuesta de opinión.

La última etapa: aplicación de las herramientas conceptuales. Busca que a través de un escrito realicen una crítica argumentada a la elaboración y presentación de las encuestas de opinión aplicando las herramientas conceptuales construidas en la etapa anterior.

4. Conclusiones

Se reconoce una estructura que puede guiar las propuestas de enseñanza y aprendizaje desde el enfoque de la Educación Matemática Crítica, estas son:



En cuanto a la etapa 1, *Reconocimiento y Diagnóstico*, el o los Ambientes de Aprendizaje deben estar encaminados a: reconocer las interacciones entre los estudiantes, hacia el docente y hacia las matemáticas, reconocer la problemática del micro contexto o macro contexto de los estudiantes, diagnosticar la calidad de conocimientos previos que poseen con relación a las nociones matemáticas y/o estadísticas que se pueden abordar desde dicha problemática, así como diagnosticar el nivel de apropiación e interés de los estudiantes por el problema.

Como segunda etapa, se encuentra la *ubicación y ambientación en el problema*, en está teniendo definida la problemática y los posibles saberes matemáticos, se ubica al estudiante en la problemática, caracterizándola y recogiendo información necesaria para comprender que en realidad afecta a su macro contexto o micro contexto; a la par se deberá ambientar dicho problema para que lo estudiantes se apropien y evidencien la necesidad de abordarlo, y que además establezcan diversas estrategias para dar solución a la problemática.

Luego, en la tercer etapa, *construcción de las herramientas conceptuales*, los estudiantes al desarrollar una o más estrategias construirán herramientas conceptuales que les permitirán abordar y/o dar solución a la problemática, en este momento evidenciaran la necesidad de hacer uso de saberes matemáticos y/o estadísticos así como su utilidad en situaciones cotidianas. En esta etapa es en la que más podrán emerger Ambientes de Aprendizaje de tipo diferente al 6, según la caracterización realizada por Skovsmose (2000).

Por último, en la cuarta etapa de *aplicación de herramientas conceptuales*, los estudiantes aterrizarán sus propuestas, proyectos, estrategias y soluciones., pues de manera formal harán explícita la aplicación de saberes matemáticos y/o estadísticos que le permitieron dar solución a la problemática.

Se estructuran categorías de análisis que permiten evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje, para cada una de estas se tiene en cuenta la definición, acciones, indicadores y niveles, estas son:

Categorías de análisis para las habilidades del pensamiento crítico, estas nos posibilitan identificar el nivel de pensamiento crítico en el cuál se encuentran cada estudiante iniciando con la interpretación, análisis, evaluación y llegando al nivel máximo inferencia.

Interpretación:
Identificar, clasificar y relacionar la información, de tal manera que pueda expresar y explicar sus significados y su importancia.

Acciones:

- Categorizar datos de la información para describirla.
- Decodificar significados presentes en la información.
- Clarificar los significados contenidos en la información.

Indicador: Interpreta información presentada en las encuestas de opinión dándole importancia a aspectos estadísticos presentes en la ficha técnica y diagrama de barras.

- Nivel 3: Identifica, relaciona, expresa y explica la información contenida en la ficha técnica y el diagrama de barras, de una encuesta de opinión.
- Nivel 2: Identifica y relaciona aspectos presentes en la ficha técnica y el diagrama de barras, de una encuesta de opinión, pero las explicaciones que expresa presentan inconsistencias.
- Nivel 1: Presenta explicaciones inconsistentes que evidencian dificultades al identificar y relacionar aspectos presentes en la ficha técnica y el diagrama de barras, de una encuesta de opinión.

Análisis:
Descomponer una situación compleja en partes separables bajo algún criterio, de tal manera que pueda identificar en ellas cualidades, funciones, relaciones, usos, patrones y significados.

Acciones:
- Examinar cada una de las ideas presentes en la información.
- Identificar factores recurrentes en las partes de una información dada.
- Hallar elementos, relaciones y argumentos que configuran la información.

Indicador:
Analiza información presentada en las encuestas de opinión identificando aspectos estadísticos presentes en la ficha técnica y el diagrama de barras, así como las funciones, relaciones, usos y significados.
- Nivel 3: Identifica en una encuesta de opinión aspectos estadísticos, centrándose en cada uno de ellos para reconocer sus funciones, relaciones, usos y significados.
- Nivel 2: Identifica en una encuesta de opinión aspectos estadísticos, sin embargo no logra reconocer correctamente sus funciones, relaciones, usos y significados.
- Nivel 1: Se le dificulta descomponer la encuesta de opinión y reconocer aspectos estadísticos presentes en ella, por tanto no reconoce funciones, relaciones, usos y significados de la información presentada.

Evaluación:
Asignar un grado de validez o confiabilidad a la información presentada, para finalmente concluir y tomar decisiones

Acciones:
- Sintetizar los análisis previos hechos a la información dada.
- Verificar argumentos y sustentos de la información.
- Juzgar la validez de la información.
- Obtener conclusiones con criterio y argumentadas.

Indicador:
Evalúa la validez de las encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana, para obtener conclusiones y facilitar la toma de decisiones.
- Nivel 3: Presenta conclusiones con juicios de valor argumentados, respecto a la validez de encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana.
- Nivel 2: Presenta conclusiones con argumentaciones poco sustentadas, de la validez de encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana.
- Nivel 1: Se le dificulta determinar la validez de las encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana, pues llega a conclusiones sin sustento, o no lo realiza.

Inferencia:
Establecer relaciones de causa y efecto a partir de la información para deducir y elaborar conjeturas o hipótesis.

Acciones:

- Examinar las evidencias implícitas y explicitas de la información.
- Establecer relaciones de causa y efecto.
- Conjeturar ideas en torno a la información.
- Deducir conclusiones lógicas a partir de la información.

Indicador:

Infiere a partir de información proveniente de las encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana; relaciones de causa y efecto deduciendo y elaborando conjeturas o hipótesis.

- Nivel 3: Deduce, elabora y comprueba conjeturas o hipótesis, a partir de los aspectos estadísticos inmersos en las encuestas de opinión y sus relaciones de causa y efecto.
- Nivel 2: Establece las relaciones de causa y efecto, a partir de los aspectos estadísticos inmersos en las encuestas de opinión; sin embargo se le dificulta deducir, elaborar y comprobar conjeturas o hipótesis.
- Nivel 1: Se le dificulta deducir, elaborar y comprobar conjeturas o hipótesis, a partir de los aspectos estadísticos inmersos en las encuestas de opinión, pues no puede establecer las relaciones de causa y efecto.

Categorías de análisis para las disposiciones del pensamiento crítico, las cuales junto con las descritas previamente determinan una idea holística del pensamiento crítico:

Estas se elaboraron partiendo de lo expuesto por Facione (2007) y Gonzáles (2006), considerando particularmente tres disposiciones, búsqueda de la verdad, confianza en el razonamiento y mente abierta, las cuales, en relación a lo abordado en los AA, definen una actitud crítica.

Búsqueda de la verdad:

Tener actitudes de indagación, de inconformismo con lo que conoce y consulta de fuentes de información, además de ser objetivo cuando está indagando, y procurar obtener información y conocimiento antes de emitir un juicio.

Acciones:

- Ser inquisitivo.
- Privilegiar la búsqueda argumentos razonables.
- Ser objetivo cuando se indaga.

Indicador:

Busca la verdad sustentándose en argumentos razonables, para emitir un juicio con respecto a la información presentada en las encuestas de opinión.

- Nivel 3: Tiene actitudes de indagación y de inconformismo con lo que conoce, por lo que busca información con respecto a encuestas de opinión para emitir un juicio.

- Nivel 2: Tiene actitudes de indagación y de inconformismo con lo que conoce, sin embargo pocas veces busca información con respecto a encuestas de opinión para emitir un juicio.
- Nivel 1: No evidencia actitudes de indagación y de inconformismo con lo que conoce, por lo que acepta cualquier información con respecto a encuestas de opinión para emitir un juicio.

Mente abierta:
Entiende la existencia de opiniones, puntos de vista y/o posturas diferentes a las propias, comprendiéndolas y replanteando su postura, si es necesario.

Acciones:
- Ser flexible a puntos de vista diferentes.
- Reflexionar sobre sus propios puntos de vista.
- Reconsiderar y revisar un juicio dado.

Indicador:
Tiene mente abierta frente a la existencia de puntos de vista diferentes al propio, lo que le permite realizar negociaciones para llegar a un consenso, en torno a las encuestas de opinión.
- Nivel 3: Entiende las opiniones de los demás y realiza una negociación con otros para llegar a un consenso, en torno a las encuestas de opinión.
- Nivel 2: Entiende las opiniones de otros y realiza una negociación, sin embargo se le dificulta llegar a un consenso, pues no tiene mente abierta para puntos de vista diferentes, relacionados con las encuestas de opinión.
- Nivel 1: Se le dificulta entender las opiniones de los demás, por lo que no realiza una negociación con otros para llegar a un consenso con respecto a diferentes puntos de vista relacionados con las encuestas de opinión.

Confía en el razonamiento:
Tener la certeza de que un adecuado proceso de raciocinio le permite acceder a la verdad y/o tomar decisiones con criterio.

Acciones:
- Privilegia el uso de argumentos razonables.
- Está seguro de la validez de los argumentos en un proceso de raciocinio.
- Tiende a tomar decisiones con criterio.

Indicador:
Confía en el razonamiento, pues busca analizar aspectos estadísticos de la encuesta de opinión permitiéndole tomar decisiones con criterio.
- Nivel 3: Privilegia el uso de argumentos razonables, pues está seguro de la validez de su proceso de raciocinio tendiendo a tomar decisiones con criterio respecto a las encuestas de opinión.
- Nivel 2: Privilegia el uso de argumentos razonables, pues está seguro de la validez de su proceso de raciocinio, sin embargo tiende a tomar decisiones sin criterio respecto a las encuestas de opinión.

- Nivel 1: En pocas ocasiones privilegia el uso de argumentos razonables, pues no está seguro de la validez de su proceso de raciocinio y toma decisiones sin criterio respecto a las encuestas de opinión.

Categorías de análisis para la gestión docente en el aula:

Para el planteamiento de estas se consideraron tres aspectos relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje que permitieron fomentar el pensamiento crítico teniendo en cuenta lo expuesto por Hiler y Paul (2006) y Campos (2007). El primero de ellos, se encuentra relacionado con el fomento a la participación; el segundo, en cuanto al diseño y planeación de los AA, y el tercero, en cuanto al fomento de normas socio matemáticas.

Fomento de la participación:
Acciones:

- Hacer preguntas a los estudiantes durante las clases para estimular su curiosidad.
- Utilizar preguntas guía.
- Utilizar el método socrático para plantear preguntas.
- Fomentar el descubrimiento.
- Promover la participación argumentada.

Indicador:
Fomenta la participación, pues formula preguntas para problematizar a los estudiantes, generando interacción entre ellos y con el docente.

- Nivel 3: Realiza preguntas de forma oral y escrita fomentando la curiosidad y el descubrimiento en los estudiantes, permitiéndoles que los estudiantes expresen sus posibles posturas o estrategias.
- Nivel 2: Realiza preguntas, pero en ocasiones no permite libertad de tiempo y/u opinión, limitando la participación de los estudiantes.
- Nivel 1: Se le dificulta realizar preguntas de forma oral y escrita, por lo que no fomenta la participación, la curiosidad y el descubrimiento en los estudiantes.

Diseño y planeación
Acciones:

- Diseña actividades para la enseñanza de nociones estadísticas.
- Diseña Ambientes de Aprendizaje para el fomento del pensamiento crítico.
- Diseña escenarios que motivan a los estudiantes a aprender.

Indicador:
Diseña y planea Ambientes de Aprendizaje motivadores, los cuales fomentan el pensamiento crítico y permite que los estudiantes construyan herramientas estadísticas.

- Nivel 3:. Diseña y planea Ambientes de Aprendizaje motivadores, los cuales fomentan el pensamiento crítico y permite que los estudiantes construyan herramientas estadísticas.

- Nivel 2: Diseña y planea actividades que permiten la construcción de herramientas estadísticas por parte de los estudiantes, sin embargo no son motivadoras ni fomentan el pensamiento crítico.
- Nivel 1: Diseña y planea actividades motivadoras, sin embargo estas no fomentan el pensamiento crítico ni permite que los estudiantes construyan herramientas estadísticas.

Fomento de normas socio matemáticas
Acciones:

- Fomentar el escuchar con atención las opiniones de los demás.
- Poner en consideración de los demás su particular punto de vista.
- Hablar poco para que los estudiantes piensen más.
- Fomentar la colaboración.
- Estimular la auto regulación en los estudiantes.

Indicador:
Fomenta las normas socio matemáticas pues genera escenarios en donde se posibilita que los estudiantes construyan su propio conocimiento y se motiven por aprender individual y colectivamente.

- Nivel 3:. Fomenta en la clase la autonomía de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, el respeto por el otro, la colaboración entre sus pares y el interés por aprender individual y colectivamente.
- Nivel 2: Fomenta en la clase el respeto por el otro, la colaboración entre sus pares y el interés por aprender colectivamente, sin embargo no genera escenarios donde los estudiantes fortalezcan la autonomía.
- Nivel 1: Se limita a dictar una clase olvidando fomentar en ella la autonomía en el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante, el respeto por sus compañeros, la colaboración entre sus pares y el interés por aprender individual y colectivamente.

Referencias bibliográficas

- Acosta, A., Cruz, R., Gómez, H. & Martínez, A. (1998). *Guía Práctica para la Evaluación Cualitativa*. Serie Pedagógica. Bogotá, Colombia.
- Amaya, M. & Pulido, M. (2012). *Elaboración de ambientes de aprendizaje para fortalecer el pensamiento crítico desde las matemáticas en niños de la Fundación San Antonio*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Ángel, Z. & Camelo, F. (2010). *Conocer el contexto de los estudiantes, una alternativa indispensable para la formulación de proyectos bajo un enfoque crítico*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Cortés, G., Pinzón, A. & Pinzón, A. (2006). *Desarrollo del Pensamiento Crítico F. Niveles del Conocimiento*. Editorial Hispanoamérica. Bogotá, Colombia.
- Facione, P. & Noreen, C. (s.f.). *Matriz de valoración integral para asignar puntajes/calificaciones en pensamiento crítico*. Eduteka. Disponible en sitio web: http://www.eduteka.org/pdfdir/RubricPensamientoCrítico.pdf

- Facione, P. (2007). *Pensamiento Crítico: ¿Qué es y por qué es importante?* Insight Assessment. Disponible en sitio web: http://www.insightassessment.com
- Flores, P. (2007). *Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación.* PNA, 1(4), 139-158. Disponible en sitio web: http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/PNA_2007.pdf
- González, J. (2006). *Discernimiento Evolución del Pensamiento Crítico*. Disponible en el sitio web: http://www.eduteka.org/Discernimiento.php. Acceso el 18 de Abril de 2011.
- Mora, D. (2005). *Didáctica Crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática: Perspectivas para la Transformación de la Educación Matemática en América Latina*. La Paz: Campo Iris.
- Sánchez, B. & Torres, J. (2009).*Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los Ambientes de Aprendizaje*. ASOCOLME. Bogotá.
- Sánchez, F. (1997). *Televisión y educación: Un desafío posible.* Ediciones Universidad de Salamanca. Disponible en el sitio web:http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=122556
- Skovsmose, O (2000). *Escenarios de investigación.* Revista EMA. Vol. 6. N°1. Págs. 3–26.
- Valero, P. (2006). *¿De carne y hueso?: la vida social y política de la competencia matemática.* Universidad de Ambientes de Aprendizajelborg. Dinamarca. Disponible en el sitio web: www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-110766_archivo_pdf.pdf

Construcción de sistemas de numeración. Propuesta para un aula inclusiva

Martínez Hernández, Julián David
Morales Romero, Lina Fernanda - Acevedo Caro, Diana Marcela
jd8vid@outlook.com – linitam.94@hotmail.com – dianaacevedo0715@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Los sistemas de numeración a lo largo de la historia han sido quizás los elementos más importantes en el desarrollo del saber matemático junto con la geometría; en esta propuesta para un aula inclusiva, se plantea un recorrido no solo desde la historia de la matemática, sino desde la didáctica en donde utilizando la teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau se propone una secuencia que muestra en los estudiantes de grado sexto la evolución de los sistemas de numeración y el porqué de la escogencia del sistema posicional decimal que utilizamos. Estas actividades se diseñan utilizando recursos manipulativos tangibles en un aula inclusiva partiendo de una experiencia previa con estudiantes con limitación visual en el colegio OEA, donde se buscó acercar a los estudiantes a conceptos aditivos, multiplicativos, manejo de bases, posición y escritura polinomial.

Palabras clave: Teoría de Situaciones Didácticas, sistemas numéricos, aula inclusiva, experiencia de aula.

1. Introducción

En la educación matemática, las problemáticas más comunes se centran en el desarrollo de la didáctica y las investigaciones convergen a la atención de las necesidades educativas de la sociedad. En este caso, nos enfrentamos a la compleja situación de enseñar en aulas inclusivas, atendiendo las

necesidades de una población en estado de vulneración específicamente estudiantes con deficiencias visuales.

Es por esto que una vez analizado el desarrollo de las actividades académicas en el grado sexto en el colegio OEA, y teniendo alumnos en el aula con este tipo de necesidad educativa especial, surge esta propuesta como una respuesta desde la teoría de situaciones didácticas y mediante el uso de recursos didácticos para enseñar sistemas de numeración y sus propiedades.

2. Referente conceptual

La primera fase de trabajo para el desarrollo de la propuesta se refiere a la creación de una ruta apropiada (figura 1) para garantizar el aprendizaje, teniendo en cuenta los conceptos previos para alcanzar la meta con los estudiantes, la construcción de dicha ruta se realiza teniendo en cuenta los contenidos matemáticos a enseñar y referentes didácticos que nos muestren no solo la mejor manera de realizar las actividades, sino también los posibles errores, dificultades y obstáculos que los estudiantes puedan presentar durante el desarrollo de la propuesta.

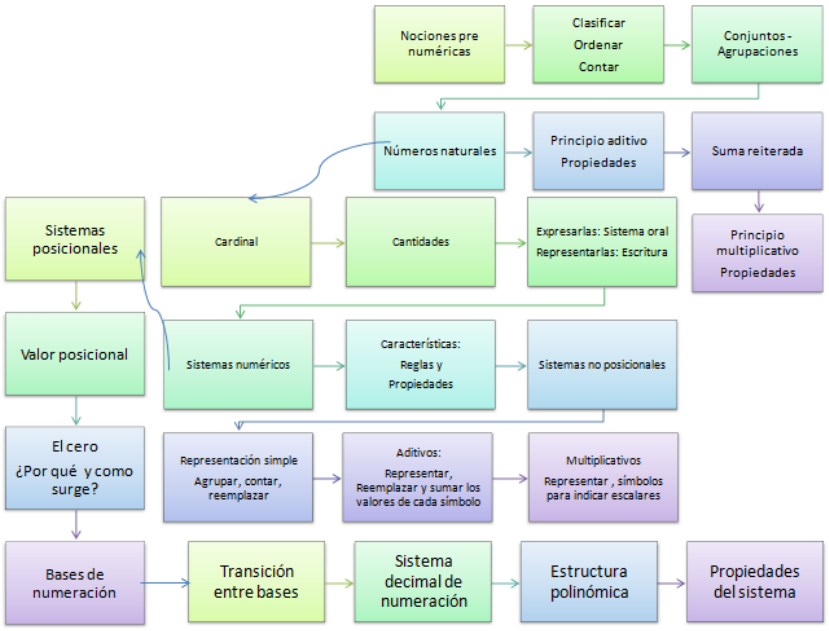


Figura 1. Ruta de aprendizaje.

La metodología utilizada es la teoría de situaciones didácticas, la cual de acuerdo a Panizza (s.f.) se desarrolla buscando que el estudiante construya conocimientos a partir de la interacción con un medio mediante situaciones didácticas, cada situación propuesta no solo está diseñada para responder ante las distintas acciones del estudiante para resolverla, también le da al aprendizaje un sentido.

El primer referente consultado son los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas de grado sexto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998). Es importante resaltar la importancia de trabajar los sistemas de numeración, pues según el MEN (1998) existen una carga cognitiva, tanto para estudiantes, como para docentes, los cuales deben ir adoptando una postura constructivista, cumpliendo una serie de funciones básicas en la sociedad que le permitan apoderarse de unos roles determinados donde el alumno "no es un receptor de información, sino un ser capaz de construir y ordenar las tareas matemáticas a partir de sus percepciones y sus conocimientos previos", por ello los estudiantes de grado sexto están en la capacidad de resolver problemas con números naturales, haciendo uso de sus propiedades, de esta manera se abordará los diferentes sistemas de numeración (egipcia, griega, romana), fortaleciendo sus conocimientos y mejorando sus niveles de razonamiento; empleando la historia como una postura para abordar los conceptos matemáticos.

Teniendo claro la importancia de los conocimientos matemáticos, el docente no solo debe tener en cuenta los procesos disciplinares, pues la formación no solo es académica sino también de manera personal creando así un lazo entre el docente-estudiante y viceversa, de tal manera que se apliquen procesos generales como la resolución de problemas, comunicación y modelación en la teoría de situaciones didácticas propuestas por Chamorro, M. (2005).

Se debe tener en cuenta que los estudiantes que tienen una deficiencia visual presentan dificultades en cuanto a la lecto-escritura ya que afectan a los patrones del movimiento ocular esto implica que estos movimientos no puedan obedecer los patrones normales debido a su baja visión, lo que lleva en primer medida a los docentes es hacer una valoración funcional de la visión de los estudiantes con dicha deficiencia para así poder diseñar las actividades y tareas escolares más convenientes para el aprendizaje de los estudiantes. (Rosich, 1996).

Se debe tener en cuenta que en momento de hacer actividades para alumnos con baja visión los factores más importantes en el momento de elaborar el material de trabajo será tener en cuenta las sensaciones táctiles que permiten a los estudiantes trabajar con materiales sólidos, pero de igual manera se debe tener en cuenta los sistemas perceptivos ya que si el estudiante posee baja visión no implica que no sea capaz de escuchar información de la cual pueda hacer el proceso de extracción de datos.

Ahora la mate matización es muy importante en este proceso de enseñanza ya que si bien las matemáticas son algo abstracto se puede decir que nace de la realidad física llevando a entender para qué sirve la matemática en nuestras vidas, de este modo se llega al diseño de situaciones del contexto de los estudiantes en las cuales las matemáticas jueguen un papel importante en el momento de la resolución de situaciones propuestas, donde se emplean recursos que faciliten el entendimiento del concepto pero sin dejar de lado el lenguaje empleado en las matemáticas siendo este otro elemento necesario para que los alumnos tengan la construcción más adecuada de los diferentes conceptos trabajados.

Manipular y adquirir destrezas aritméticas se ha convertido en un eje fundamental de la enseñanza en lo que se refiere al número, la concepción de número es amplia y depende en cierta medida del grado de aproximación de los estudiantes con la matemática, sin embargo es necesario para su enseñanza la imposición/aceptación del sistema de numeración decimal en las primeras etapas para una integración relativamente fácil al mundo que le rodea; sin embargo el proceso de creación de los sistemas numéricos ha respondido a lo largo de la historia a las necesidades matemáticas de las diferentes culturas.

Es posible ahora, mirando en retrospectiva, clasificar los sistemas numéricos desde su estructura, que al ser comparada con otros, nos muestra cómo funcionaba cada uno y cuáles son sus principales limitaciones y aciertos. Gudiño & Batanero (2014), clasifican los sistemas de numeración en posicionales y no posicionales, mencionaremos que un sistema de numeración es un conjunto de normas y símbolos adoptados por una cultura que le permiten mediante su manipulación y representación realizar procesos de conteo y operaciones.

3. Descripción de la experiencia

En los grados sextos del colegio OEA se realizó durante el primer semestre del año 2014 una unidad didáctica, que guiada por el anterior marco conceptual, le permitía a los estudiantes la construcción de sistemas de numeración diferentes; tomando como base dicha experiencia junto con las observaciones vistas por quienes desarrollamos tal unidad, buscamos adaptar las situaciones para trabajar con estudiantes de baja visión recreando una secuencia de actividades que le permitirán a la totalidad de estudiantes la construcción del concepto de sistema de numeración y las propiedades del mismo.

Se puede observar que en la experiencia no solo intentamos seguir la ruta de aprendizaje propuesta, sino que además se realiza un proceso de construcción del concepto mediado por la historia y con actividades en las que se relaciona el contexto de los estudiantes, para intentar asegurar el interés y la motivación a la hora de resolver las situaciones problemas. Sin embargo todas las actividades están sujetas a modificaciones dependiendo la población en la que se trabaje.

Propuesta enseñanza grados sexto				
Sesión	**Temática**	**Desarrollo**	**Recursos**	
0	**Habilidades de Conteo**	La sesión cero buscará el reconocimiento del conteo como elemento esencial del pensamiento numérico. En esta actividad en el contexto de una votación los estudiantes deberán elegir al monitor de aula representando cada uno los resultados. Se utilizarán balotas diferenciadas por el color y el tamaño para la votación. Y cada estudiante utilizará diferentes símbolos para hacer su conteo.	Situaciones Problema	Balotas de diferentes tamaños y colores Resultados de la votación (en tinta y en braille)
1	**Sistemas de numeración Aditivos**	La primera sesión buscará la construcción de un sistema de numeración aditivo, utilizando el contexto de recoger fondos. Los estudiantes analizan la manera óptima de representar cantidades partiendo de las agrupaciones de dulces que ven en su cotidianeidad.		Canicas, bolsas, cajas “símbolos” manipulables

		Para simular dichos agrupamientos, se utilizan canicas (simbolizando la unidad) bolsas pequeñas y medianas, y cajas de distintos tamaños. Al finalizar la actividad los estudiantes han construido un sistema aditivo con 5 símbolos de agrupación, estos símbolos se realizan en materiales manipulativos, así cada estudiante tiene un cuadrado por cada caja, un circulo por cada bolsa etc.		
2	**Sistemas de numeración Multiplicativos**	Para identificar la noción de sistema multiplicativo, se presenta un juego en el aula, la casa de tiro; en el cual los estudiantes deben expresar sus puntajes en términos multiplicativos. Al lanzar las fichas en el tablero los estudiantes expresarán "tengo 2 fichas en la casilla roja/tela, una ficha en la casilla Azul/punteada y dos fichas en la casilla Verde/escarcha. Acercándolos a una notación multiplicativa, a saber: 2R + 1A+ 2V o 2T + 1P + 2E Donde se puede entrar a evaluar cada letra y llegar a una cantidad.		Tableros de tiro y fichas. Las distintas casillas del tablero no solo se diferencian por colores, los tableros utilizan texturas para que toda la población pueda realizar la actividad.
3	**Manejo de bases de numeración**	El juego de la casa de cambio les permite a los estudiantes entender el concepto de "base de numeración" las fichas utilizadas les permiten realizar agrupaciones en la base (2 y 4) y de esta manera pasar a una notación con los símbolos comunes (dígitos) pero con un sentido distinto de la posición.		Juego: Fichas de cambio en diferentes texturas y de diferentes tamaños. Abaco
4	**Sistemas Posicionales El sistema maya**	Llegando a la formalización de sistemas posicionales, encontramos necesario explicar un sistema posicional diferente al nuestro para que lograran separar la idea de posición y digito. Así utilizando los elementos constitutivos del sistema maya primigenio, las actividades en la cuarta sesión se plantean en la representación y operaciones con numerales mayas. Al final de esta sesión los estudiantes		Frijoles, Palitos, tableros. Conchas Abaco

		podrán hacer una relación entre los numerales mayas y un ábaco muy grande, momento en el que consideramos es propicio utilizar el ábaco como representante del sistema de numeración posicional en base diez.		
5	**Contraejemplos Sistema egipcio**	Habiendo recorrido los sistemas no posicionales, y reconociendo la estructura de un sistema posicional, la conclusión más importante para los estudiantes debe ser cercana a: "la posición importa". Como variante didáctica presentamos a los estudiantes el sistema romano, donde la posición de los símbolos modifica las cantidades pero no por la existencia de una base. Esta actividad puede introducirse mediante un cuento y permite en los usuarios del braille un acercamiento a la escritura del sistema egipcio, desde la lectura y representación de cantidades.		Ejercicio de lectura. Interpretaciones con Braille y tinta
6	**Sistema de numeración decimal**	Finalmente y a propósito de las calificaciones del semestre, se realiza una actividad en donde los estudiantes deben promediar sus notas, no solo integrándolos al proceso de evaluación, sino también identificando la jerarquía de las operaciones y algunas propiedades básicas de los números naturales. En esta sesión los estudiantes realizarán cálculos mentales, escritos, y calculadoras para entender el orden en que se deben operar los números.		Calculadoras

4. Reflexiones

Basándonos tanto en la experiencia previa como en el diseño de la propuesta podemos concluir que:

- Las aulas de clase no deben ser espacios segregadores de conocimiento, pues si bien sabemos que no todos los alumnos pueden responder al mismo ritmo, tenemos claro que se pueden diseñar actividades con las

mismas situaciones y recursos para los estudiantes con limitación visual. En este punto es importante además destacar que el proceso de adaptación de instrumentos didácticos para las sesiones no tiene por qué ser una simple traducción de lo que se usaría en un aula no inclusiva. Los recursos tangibles pueden ser de gran ayuda y usados por toda la población sin necesidad de que los estudiantes con limitaciones utilicen un material diferente, tan solo es necesario adaptarlo.

- El proceso de creación de sistemas numéricos a lo largo de la historia ha surgido desde la manipulación, el uso de recursos manipulativos para las agrupaciones, además de materiales didácticos especializados en el conteo y las operaciones como el ábaco, facilitan la comprensión de estos temas a los estudiantes. Aclaramos el proceso histórico no debe ser estrictamente el único o el deseado para enseñar este tipo de conocimientos, en algunos casos el proceso histórico deriva en obstáculos epistemológicos difíciles de sortear.

- La teoría de situaciones didácticas es una metodología propicia para este tipo de propuestas pues permite que las situaciones y la interacción con el medio potencien la construcción de conocimientos propios en el alumno, garantizando un aprendizaje significativo.

Referencias bibliográficas

- Chamorro, M. D. (2005). *Didáctica de las matemáticas.* Barcelona: Pearson.
- Godino, & Batanero. (2014). *Sistemas de numeración y su didáctica para maestros*.
- MEN. (1998). *Estándares curriculares por competencias.* Bogotá: Magisterio.
- Panizza, M. (S.F). *Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas.*
- Rosich, N. y otros. (1996). Matemáticas y deficiencia sensorial. Madrid: Editorial Síntesis.

¿Qué es la subitización y cómo desarrollarla en la infancia?

Jiménez Díaz, Nelssy
nelssyj@yahoo.com
Universidad Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

En el aprendizaje de las matemáticas los niños siguen procesos de desarrollo, adquiriendo ideas y habilidades a su manera, de acuerdo con la riqueza de las experiencias que viven. Cuando los profesores comprenden estos procesos, elaboran secuencias de actividades y construyen ambientes de aprendizaje que son apropiados y efectivos en términos de desarrollo. Estas rutas de desarrollo son la base para las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA). El trabajo de profundización, que se presenta, tiene como objetivo la caracterización de las Trayectorias Reales de Aprendizaje que se potencian en los niños de las Aulas de Primeria Infancia, al seguir una THA de subitización. Los avances del trabajo que se presenta, tienen que ver con la descripción de las metas, niveles y actividades de la THA de subitización, la puesta en práctica de la secuencia de actividades de la THA y el análisis de los niveles de la Trayectoria Real que alcanzan los niños.

Palabras clave: Subitización, trayectorias de aprendizaje, infancia, sentido numérico.

1. Introducción

La Secretaría de Educación de Bogotá, publicó el documento Lineamiento Pedagógico y Curricular para la Educación Inicial en el Distrito (SED, 2010), como insumo para la estructuración de una propuesta pedagógica para la educación de las Aulas de Primera Infancia (API), que busca atender a los

niños de 3 y 4 años que ingresan a los jardines infantiles y a algunos colegios de la capital. El documento establece que el eje de las relaciones lógico matemáticas tiene que ver con "la representación del mundo a través de sistemas y procedimientos por medio de un código propio, integrado por los diversos símbolos matemáticos" (SED Bogotá, 2010. p. 57), y sugiere a los docentes de las API, que se trabajen los elementos que permitan una práctica del conteo y de la resolución de problemas, para fortalecer la consolidación y la apropiación de los sistemas de representación y de formación del signo numérico en particular y del sentido numérico en general.

El interés de la presente investigación está relacionada con la cualificación de la propuesta pedagógica para la educación de la primera infancia, relacionada con el desarrollo del sentido numérico. La subitización como proceso del sentido numérico, está vinculada al reconocimiento de la cardinalidad (¿cuántos hay?, ¿hay más o hay menos?), a la relación parte-todo, a la representación semiótica del número y en general, a la idea de "cantidad". Estas ideas, forman redes conectadas que conforman los bloques básicos de construcción de posteriores etapas de formación matemática.

Las siguientes preguntas forman parte de la situación que se aborda con el trabajo de profundización que se desarrolla en el marco de la Maestría de Educación con Énfasis en Matemática (Jiménez, 2014): ¿Qué es subitizar? ¿Se puede estimular el desarrollo de la subitización? ¿Qué relación hay entre la subitización y el desarrollo de los demás procesos del sentido numérico? ¿Por qué los niños deben avanzar en la subitización?

El impacto de la investigación es aportar a la sistematización de secuencias didácticas, para el desarrollo del sentido numérico en los niños de las API.

2. Marco de referencia

Los estudios de investigación sobre el desarrollo del sentido numérico de los niños pequeños han sido una sorpresa para la mayoría de los educadores de preescolar y primaria, porque muestran que los niños han avanzado en su aprendizaje como consecuencia de sus experiencias de vida (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Autores como Baroody (2004), Castaño (2007), y León y Calderón (2009), han presentado resultados de diferentes países que

evidencian que los niños que ingresan o que están en los primeros grados de escolaridad manifiestan avances en aspectos del sentido numérico relativos al reconocimiento de la cantidad y a la comparación entre cantidades. Desde los primeros años de la vida, los niños tienen la capacidad de aprender matemáticas y desarrollar su interés por ellas (Vasco y Acosta, 2013).

En el aprendizaje del sentido numérico, según Clements & Sarama (2009), los niños siguen procesos naturales de desarrollo, adquiriendo ideas y habilidades a su manera. Cuando los profesores comprenden estos procesos de desarrollo, elaboran y siguen secuencias de actividades basadas en tales procesos, construyen ambientes de aprendizaje que son apropiados y efectivos en términos de desarrollo (Jiménez y Díaz, 2013). Estas rutas de desarrollo son la base para las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA).

Las Trayectorias de Aprendizaje, tienen tres partes: una meta matemática, un camino de desarrollo a lo largo de la cual los niños se desarrollan para alcanzar esa meta y un conjunto de actividades de enseñanza que corresponde a cada uno de los niveles de pensamiento. Las metas para la Primera Infancia, están relacionadas en el contexto nacional con las competencias propuestas por MEN (2009), con el lineamiento para la educación inicial de la SED (2010) y con los Estándares Básicos de Competencias para los grados de primaria (MEN, 2006). Las THA dan al profesor un criterio para decidir como puede avanzar el aprendizaje.

Clements y Sarama (2009), proponen cinco THA para el desarrollo del sentido numérico, de las cuales se aborda la de subitización para la presente comunicación breve.

“Cuando usted ‘simplemente ve’ cuantos objetos hay en una colección muy pequeña, usted está usando la subitización perceptiva” (Clements, 1999, p. 9). La subitización conceptual es la capacidad de las personas de ver las partes y ponerlas juntas, para hallar el total. Por ejemplo, ver una ficha de dominó de ocho puntos y “simplemente saber”, ¿cuál es la cantidad total?, se sale de los límites de la subitización perceptiva, se requiere ver los puntos de la ficha de dominó como una conformación de dos grupos de cuatro y como “un ocho”. La subitización, perceptual y conceptual, se manifiesta también con otros patrones kinestésicos, rítmicos y auditivo-espaciales.

3. Aspectos metodológicos

El experimento de enseñanza, como metodología del trabajo de maestría, se usa dentro del paradigma de la investigación de diseño, según Cobb & Gravemeijer (2008), citado por Simon & Tzur (2004), para comprobar y generar hipótesis. En el experimento se siguen cuatro fases: 1) Estudio de la THA de subitización propuesta por Clements & Sarama (2009) e identificación de metas, niveles y actividades, 2) Diseño instruccional de la secuencia didáctica, 3) Puesta en práctica de la THA de subitización propuesta por Clements & Sarama (2009) y recolección de datos, y 4) Análisis de datos de las TRA de los niños del aula.

Se formulan cuatro hipótesis en el Experimento de Enseñanza, las cuales se enuncian en forma de proposiciones: el desarrollo del sentido numérico es una experiencia vital que trasciende la escolaridad (antes y después); el desarrollo de la secuencia de actividades de la THA, potencia el proceso de subitización a través de los niveles propuestos; el diseño de las actividades de la THA de subitización potencia el avance de otras THA del sentido numérico (conteo, comparación y estimación); y la mediación de los maestros sobre la THA de subitización cualifica el significado del número.

4. Desarrollo de la propuesta

Los avances del proyecto de la maestría, se pueden observar desde tres puntos: unos avances conceptuales; otros que se refieren al estudio de los referentes metodológicos; y un tercer grupo, que tiene que ver con los avances de herramientas y elementos operativos necesarios para llevar a cabo el trabajo de grado.

Sobre los avances logrados, en torno a los referentes conceptuales, se ha profundizado en los reportes de investigación encontrados en las bases de datos elaboradas. La profundización abarca dos líneas: una, que se indaga las categorías de análisis que incluyen vocablos, conceptos y términos asociados al trabajo de grado (Jiménez, 2014); y otra línea, que se refieren al objeto matemático y a las THA como componentes de la investigación de diseño

para la denominada Matemática Inicial propuesta para las Aula de Primera Infancia (MEN, 2009; SED, 2010).

Sobre los referentes metodológicos se desarrolla una investigación de diseño, en la que se inicia con una situación de enseñanza-aprendizaje contextualizada, de la cual no se determinan *a priori* todos sus parámetros. A partir de la formulación del problema y sus correspondientes objetivos de investigación, se caracteriza el contexto y se propone un diseño instruccional en forma de hipótesis o conjetura. La investigación se produce a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis de datos y rediseño, los cuales van acompañados de ciclos de actividades y recolección de datos, reformulación de conjeturas y rediseño instruccional.

En cuanto a las herramientas y elementos operativos, se han elaborado los cronogramas de la investigación, se ha caracterizado la población de niños para la indagación, se han elaborado y aplicado entrevistas a madres de los niños sobre "prácticas numéricas familiares", se han diseñado las actividades de niveles de aprendizaje en primera infancia sobre subitización para niños de 4 años de las API y se han configurado los programas informáticos para el análisis de las unidades de información.

5. Conclusiones

Entre los resultados que se obtienen del análisis realizado se presentan:

1) Se identifica un bajo nivel de conocimiento por parte de los docentes a cargo de las API, sobre las herramientas o directrices que les permitan saber hacia donde dirigir sus diseños curriculares, debido a que las descripciones de las metas propuestas, a nivel nacional por el MEN y local por la SED, para el desarrollo del sentido numérico en las API, evidencian una falta de profundidad y articulación sobre los propósitos que se pretenden.

2) Se identifica un nivel insuficiente de sistematización y estandarización de secuencias de actividades que tengan en cuenta los niveles de desarrollo del sentido numérico para los niños de las API, en las que se

reconozcan las investigaciones sobre la implementación de Trayectorias de Aprendizaje de lo numérico.

3) El desarrollo del sentido numérico, y en particular el proceso de subitización, está presente en los niños que ingresan en las API en un nivel básico, producto de sus experiencias de vida.

4) La implementación organizada de secuencias de actividades para el desarrollo de la subitización cualifica el significado del número.

Referencias bibliográficas

- Baroody, A. J. (2004). The developmental bases for early childhood number and operations standards. In D. H. Clements & J. Sarama (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 173- 219). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach.* New York: Routledge.
- Clements, D. H. (March-1999). Subitizing: What is it? Why teach it? Teaching Children Mathematics, 400-405.
- Castaño, J. (2007). Una aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas. *Universitas Psychologica*, *7*(3), 895-905. doi:10.11144/399
- Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A.E. Kelly, R.A. Lesh & J.Y. Baek (Eds.) *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Jiménez, N. (2014). *Una trayectoria de aprendizaje de subitización en niños y niñas de Educación Inicial*. (Informe de anteproyecto de trabajo de grado de Maestría inédito). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.
- Jiménez, N., y Díaz, F. (2013) Una estrategia para el desarrollo del sentido numérico en estudiantes en condición de extraedad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 27. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- León, O., y Calderón, D. (2009). Incidencia de las representaciones sociales en el acceso de la población con limitación visual a la educación básica primaria. *Revista Alteridad*, 6, 37-44.

- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html
- Ministerio de Educación Nacional. (2009). *Desarrollo infantil y competencias en la Primera Infancia*. Bogotá. Imprenta Nacional de Colombia.
- Secretaría de Educación Distrital de Bogotá. (2010). *Lineamiento pedagógico y curricular para la Educación Inicial en el Distrito*. Bogotá: Imprenta Nacional.
- Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 91-104.
- Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, pp. 267-306. Mahwah: NJ: LAE.Thomson, S., Rowe, K., Underwood, C., & Peck, R. (2005). *Numeracy in the early years: Project GoodStart. Camberwell*, Victoria, Australia: Australian Council for Educational Research.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University
- Vasco, C. y Acosta, D. (2013). *Habilidades, competencias y experticias: más allá del saber qué y el saber cómo*. Bogotá: Corporación Universitaria Unitec, Universidad de Manizales y la Fundación Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (Cinde).

Utilidad de los recursos didácticos para desarrollar pensamiento espacial en estudiantes de segundo de primaria desde la situación "viaje alrededor del mundo geométrico"

González Pinilla, Oscar Javier - Arévalo Vanegas, Camilo

oscarmateud@gmail.com - kmilo741a@gmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Se pretende dar a conocer una experiencia de aula llevada a cabo en un colegio de Bogotá durante las clases de geometría, con miras a fortalecer el pensamiento espacial en estudiantes de segundo de primaria. Esta propuesta está fundamentada en los aportes teóricos de Linda Dickson (1991), al hablar del estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físico-visuales para proporcionar experiencias tangibles del mundo, desarrollando así la habilidad espacial en los estudiantes, que reconocerán la representación bidimensional del mundo físico que nos rodea a través de material manipulativo-tangible y grafico-textual (Godino, 2006), proporcionando experiencias de aprendizaje efectivas. Ésta metodología de enseñanza se enmarcada en una situación problema fundamental (Brousseau, 1986), llamada "viaje alrededor del mundo geométrico".

Palabras clave: Enseñanza de la geometría, pensamiento espacial, materiales manipulativos.

1. Introducción

Ésta experiencia tiene como principal objetivo reivindicar al aula de matemáticas como un espacio de experiencias reales gracias al uso de recursos didácticos que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación inicial[1] desde la propuesta de Godino (2006), y su clasificación de los materiales didácticos en manipulativos tangibles, grafico textuales y ayudas al estudio; por lo que se pretende un análisis exhaustivo sobre las funciones y las ayudas que brindan en pro del desarrollo de nuevos conocimientos geométricos en los estudiantes. Esto a partir de la implementación de una situación fundamental desde lo planteado por Brousseau (1986) en su teoría de las situaciones didácticas, donde el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir.

El reto estaba en planear, diseñar y ejecutar una propuesta de enseñanza de la geometría, enfocada a desarrollar el pensamiento espacial, la enseñanza de los sólidos geométricos y las figuras planas en estudiantes de segundo desde los aportes de Linda Dickson (1991), para conllevar la enseñanza de la geometría espacial, empezando desde el estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físicas-visuales para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de estos objetos tridimensionales, desarrollando así el pensamiento espacial al reconocer en el entorno el mundo geométrico que lo compone.

2. Referente Conceptual

En la enseñanza de la geometría, los sólidos y sus propiedades son manejados sin mayor profundidad, de este modo se privilegia lo bidimensional sin llegar a comprender y establecer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional y viceversa. En los estándares de matemáticas se reconoce esta problemática y la importancia de desarrollar

[1] Estudiantes de grado segundo del colegio San Juan de los Pastos, Bogotá, Colombia (2014).

una "geometría activa", en la que se privilegie "*la exploración de figuras mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, como cuando el niño recorre la frontera de una figura y pasando por el que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que se producen en la figura que comportan y las relaciones entre productos de estos movimientos y de manera muy parcial, entre los mismos movimientos"* (MEN, 1998).

Las propuestas de varios autores frente al aprendizaje de la geometría espacial en niños preescolares, dicen que debe hacerse partiendo de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como atributos de la geometría tridimensional o a lo que Linda Dickson (1991) se refiere cuando habla de la representación bidimensional del espacio tridimensional. Es así como se hace alusión a autores como Lappan y Wibter (1979) quienes afirman que:

> "A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que se proporcionan a los estudiantes son bidimensionales, además nos valemos de libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales , tal uso de dibujos de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo.". (Citado en L. Dickson p.48).

Para que los estudiantes vayan identificando las características bidimensionales que tienen los objetos tridimensionales, debe empezarse por la interacción y la percepción del mundo físico que nos rodea, donde *"la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos y la representación es una evocación de los objetos en ausenta de ellos".* (Piaget, 1964, p.28)*;* se pretende así que ellos construyan esquemas mentales del objeto cuando a este se le hacen transformaciones, es decir, acciones como rotar, trasladar, girar, ordenar, moldear, cortar, pegar etc. es aquí donde se hace imprescindible el uso de recursos didácticos para el estudiante.

3. Recursos didácticos

En la enseñanza de las matemáticas y en lo que a nosotros concierne en el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, es muy importante tener en cuenta los métodos que utilizan los maestros para lograr los propósitos educativos, así como los medios a los que acuden y que otorgan a los estudiantes para facilitar el proceso de aprendizaje en ellos. A continuación presentamos la clasificación que hace Godino (2006), a los recursos didácticos:

Tabla 1. Clasificación de los recursos didácticos, Godino (2006, p. 117-124).

Instrumentos semióticos: Son los medios por los cuales se logra mediatizar entre la acción de los sujetos ante el intento de resolver una situación-problema y el contexto en el cual se desarrolla.	
Manipulativos tangibles	**Gráfico-textuales-verbales**
Objetos físicos que sirvieron para identificar características propias de los sólidos y que ponen en juego la percepción táctil. El estudiante tiene un acercamiento al objeto siendo esta acción o momento reflexivo, en el que se pueden construir conocimiento, ya que se identifican características del objeto y se ve la conservación de sus propiedades. • *Sólidos construidos por los mismos estudiantes* • *Materiales para caracterizar propiedades del sólido*	Aquellos recursos en los que se hace presente la percepción visual y/o auditiva, que básicamente en nuestra secuencia de actividades tenían por propósito generar y despertar el interés y la motivación por parte del estudiante hacia la búsqueda de nuevos conocimientos; además también ayudaban a que el estudiante se involucrara de forma activa y dinámica a la situación didáctica propuesta: • *Videos e imágenes de los frecuentes viajes alrededor del mundo geométrico* • *Guías e instrumentos:*

4. Metodología

Diseñar actividades que despierten el interés y la motivación de adquirir nuevos y útiles conocimientos no es tarea fácil. De este modo "viaje alrededor del mundo geométrico" es la excusa perfecta para cautivar la atención de los estudiantes y proporcionarles experiencias fascinantes e innovadoras en el estudio de las matemáticas, que desde la propuesta de Guy Brousseau (1986), quien propone que *"...el profesor debe imaginar y*

proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir…"

El diseño de la situación y la evaluación del impacto y pertinencia del uso de recursos didácticos se evidenciará a partir de las categorías de análisis del modelo Van Hiele (1984) y Hoffer (1981), que pretenden establecer que la geometría es aprendida por una secuencia de niveles del pensamiento, el cual se caracteriza por ser progresivo y ordenado. Atendiendo al intervalo de edad en el que se encuentran los estudiantes (6-8 años), podemos ubicarlos según el modelo Van hiele en el nivel de reconocimiento, con las cinco habilidades que plantea Hoffer (1981), y que deberían ser desarrollados por los niños de esta edad:

Tabla 2. Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría en niños preescolares.

Van Hiele	Habilidades	Lo que se logró desde la situación presentada
Visualización o Reconocimiento	***Visual:*** La capacidad de crearse representaciones mentales a través de la visualización de objetos.	Reconocer diferentes figuras de un dibujo Reconocer información contenida en una figura
	Verbal: la habilidad de comunicación donde el estudiante da a conocer la información contenida en los objetos geométricos que ha logrado interiorizar.	Asociar el nombre correcto con una figura dada Interpretar frases que describen figuras
	Dibujo: Tras crear las imágenes mentales a partir de la visualización de objetos debe traducirlas a representaciones externas y a partir de ellas crear representaciones internas de conceptos matemáticos	Hacer dibujos de figuras interpretando las partes
	Lógica: pretende desarrollar en el estudiante el poder de argumentación lógica, sus propias justificaciones y formulaciones.	Darse cuenta que hay diferencias y similitudes entre figuras Comprender la conservación de las figuras en diferentes situaciones
	Aplicada: Pretende que al enfrentarse a una situación problema, el estudiante utilice sus propias estrategias de solución utilizando las demás habilidades	Identificar formas geométricas bidimensionales en objetos físicos

5. Descripción de la experiencia

En cada uno de los países a los que se viajó (figura 1) debería aprenderse algo nuevo referente a la geometría, pues la idea primordial era mostrarles construcciones en diferentes países asociadas a algunos sólidos geométricos, para que finalmente desarrollarán la capacidad de descomponer los sólidos trabajados en su sus propiedades bidimensionales, y desde allí envolverlos y trabajar sobre sus propiedades y características a través del material proporcionado.

Para simular el viaje se hacía uso de material gráfico-textual (Godino, 2006) como lo son videos e imágenes de los países y construcciones de cada lugar (figura 1). Estos recursos grafico-textuales ayudaban a involucrar al estudiante en la situación propuesta, los constantes viajes que hacíamos a países lejanos para mirar las imágenes de construcciones arquitectónicas en forma de sólidos, generaban entusiasmo para el trabajo activo con los recursos tangibles.

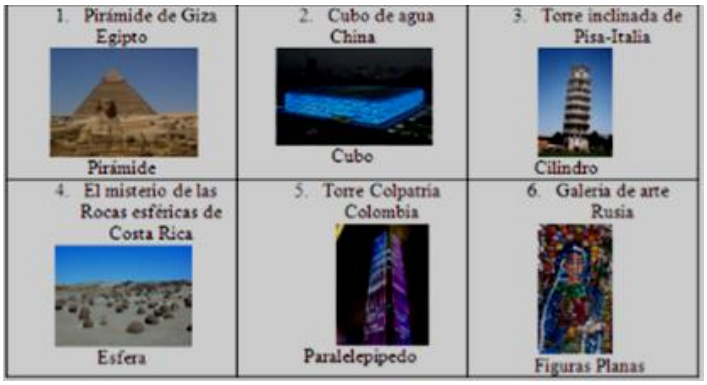


Figura 1. Países visitados en los viajes al mundo geométrico.

Se recurría a recursos tangibles y manipulativos durante todas las sesiones, los cuales correspondían a sólidos construidos, realizados por los mismos estudiantes (figura 2) y el objetivo principal era el motivar al estudiante a la exploración táctil y visual de los mismos para que proporcionaran las primeras informaciones sobre las características y algunas de sus propiedades, siguiendo la idea de Jean Piaget (1964) quien hace distinguir este proceso y dice: *"la percepción es el conocimiento de objetos resultante*

del contacto directo con ellos, para que posteriormente la representación sea una evocación de los objetos en ausenta de ellos" (figura 3).

Figura 2. Estudiantes observando el video del viaje a Egipto donde conocieron un poco de su cultura y las maravillosas pirámides de Guiza.

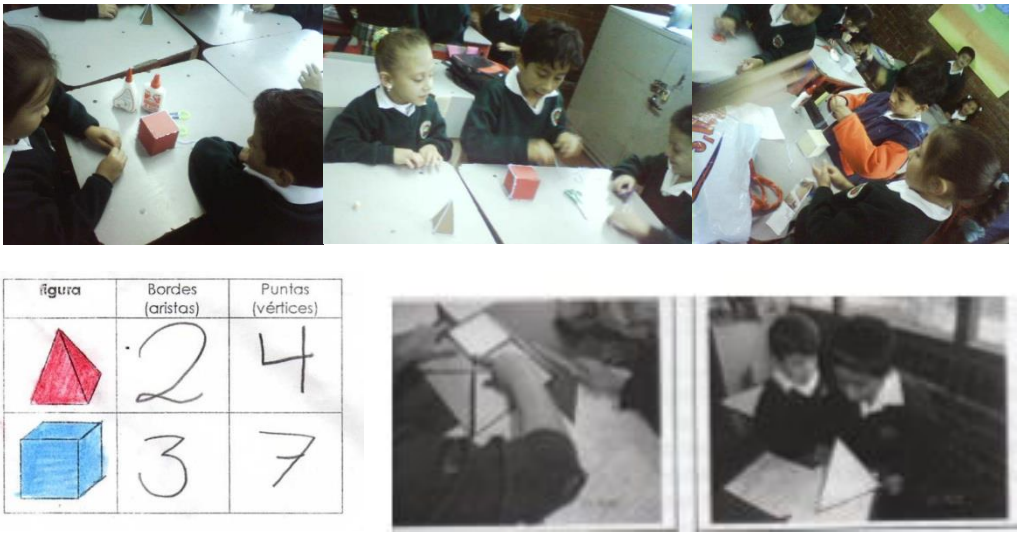


Figura 3. Estudiantes interactuando con el material tangible, construyendo sólidos y caracterizando sus propiedades físicas, vértices, aristas y caras

El objetivo después del reconocimiento de sólidos y su caracterización, se pretendía que los estudiantes estuvieran en la capacidad de descomponer los sólidos en sus propiedades bidimensionales (figura 4), logrando así evidenciar las formas planas que componían a un sólido.

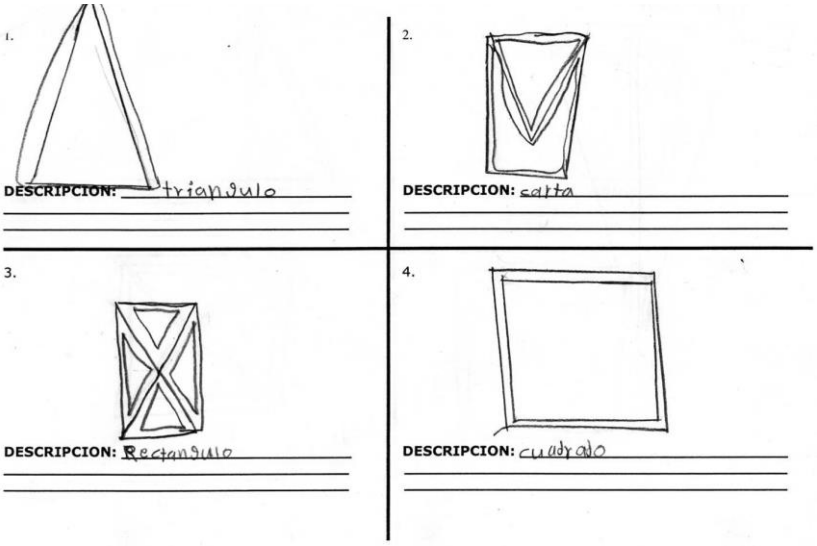


Figura 4. Representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales realizadas por los estudiantes “la pirámide desde sus diferentes perspectivas”

Esta actividad que corresponde a la última sesión, se desarrolló durante el viaje a Rusia, donde el aula de clase se convirtió en una galería de arte geométrico, simulando el arte abstracto geométrico del siglo XVIII donde se usaban configuración de figuras planas para crear valiosas y bonitas obras. En ésta sesión el estudiante debía crear su propia obra pero sin el uso de pincel, sino con los mismos sólidos anteriormente trabajados durante los viajes a los demás países, pues debían usar cada una de las caras planas de los sólidos para simular un sello y plasmarlas sobre una cartulina evidenciando las propiedades bidimensionales de los sólidos que ya habían trabajado (figura 5). Así creaban sus obras con figuras planas y a la par comprendían la composición bidimensional de objetos tridimensionales.

Figura 5. Estudiantes usando los sólidos geométricos como sellos para crear obras de arte. Reconocen la composición bidimensional de los objetos tridimensionales

6. Conclusiones

La manipulación y visualización de los sólidos como lo plantea el modelo Van Hiele ayudó a reconocer algunas de sus características físicas; pues los estudiantes hacían alusión a sus bordes y sus puntas, realizaban conteos para saber cuántas puntas poseía cada sólido, cuantas caras la constituían, etc.

En cuanto a las características físicas de un sólido como las aristas, ellos empezaban a asociar esas propiedades según lo que percibían; por ejemplo al mostrarles los vértices de la pirámide decían que ese nombre "vértice" era muy raro que preferían llamarle *"puntas",* lo que ayudo a su mejor reconocimiento y posterior conteo para saber cuántas poseía cada sólido.

En cuanto a las aristas, que también lo consideraban un nombre muy raro y no lo relacionaban con nada, reemplazaban este nombre como los "bordes" que se podían sentir con los dedos y finalmente las caras las reconocían como aquello sobre lo cual la pirámide podía quedar de pie, pues si intentas ponerlo de pie sobre una punta se caía, igualmente si intentas pararla sobre el borde, el único lugar sobre queda de pie es sobre sus caras planas.

En este caso, es evidente que los estudiantes logran un desarrollo de la habilidad verbal y de comunicación, donde crean sus propias reglas para nombrar las propiedades del sólido y lograr una comprensión conjunta sobre los objetos de estudio, como cuando aludían a la esfera que no tiene caras planas ya que por donde quieras que lo colocas sobre una superficie plana nunca se pone de pie fijamente. Finalmente gracias a estas características que

ellos mismos de manera curiosa les atribuían a los sólidos, lograban realizar los conteos de cada uno de los vértices, caras y aristas lo que no se dificultó en ningún sentido. Reconocían igualmente la representación bidimensional de los sólidos, pues identificaban figuras como triángulos, cuadrados y círculos en las pirámides, cilindros y paralelepípedos, dibujándolas de acuerdo a la cantidad.

7. Reflexiones

Los materiales manipulativos tangibles ayudan a la compresión de conceptos gracias a que hacen una conexión con el estudiante, permitiéndole a partir de situaciones nuevas para él, adquirir nuevos conocimientos, donde el material por sí mismo no es nada, lo es cuando se le da un enfoque por parte del maestro para tratar conceptos y llegar a la concepción en este caso de la geometría espacial, así la enseñanza y el aprendizaje se dota de un carácter dinámico y comprensible para el estudiante.

Uno de los aspectos que se consideran valiosos en la práctica, es hacer que los estudiantes comprendieran la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana. Llevarlos a un proceso en el cual generan un pensamiento crítico y flexible, gracias a las situaciones en las que se veían involucrados y a las decisiones que tomaron para poder solucionarlas.

Es importante hacer mención a la importancia que tienen los recursos gráfico-textuales como lo son los videos y las imágenes interactivas, haciendo uso de nuevas tecnologías, ya que en la educación matemática actual no se tienen muy en cuenta y por lo que se logró en esta experiencia de aula, se puede concluir que son recursos agradables e interesantes a la vista del estudiante, gracias a éste, el estudiante crea nuevos interés por los procesos de aprendizaje, motiva el trabajo activo y lo involucran en una situación donde debe acceder a nuevos conocimientos gracias a la propia acción.

Referencias bibliográficas

- Brousseau, G. (1997).*Teoría de las situaciones didácticas de las matemáticas*. Kluwer Académica Publisher. Francia.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Francia. Universidad de Burdeos.
- Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: M.E.C. & Labor
- Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele*, Práctica en Educación Matemática. Ediciones Alfar, Sevilla.
- Godino J. (2009). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas; superando algunas posiciones ingenuas.* Machado y Cois. Guimarães, Portugal.
- Hoffer, A. *La geometría es más que demostración,* En notas de matemática Nº 29, Abril de 1990 p 10-24
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Piaget, J. (2005). *La representación del espacio. México: Reseña del libro Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*. Correo del maestro y ediciones la vasija.

Enseñanza y aprendizaje de la simetría axial a través de situaciones adidácticas utilizando Cabri como medio

Ramón Parada, Baltazar
enlaces766@gmail.com
Director: Acosta Gempeler, Martín Eduardo

Resumen

Con esta experiencia se pretende mostrar los avances obtenidos en una práctica de aula relacionada con procesos de enseñanza y aprendizaje de la simetría axial a través de situaciones adidácticas mediadas con Cabri. Se espera mostrar como a través de esta experiencia los estudiantes han logrado diversas formas de aprendizaje por adaptación, planteados desde la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998) y como persisten otros tipos de aprendizaje. Por otro lado se quiere compartir aciertos y dificultades de la implementación apoyada por herramientas tecnológicas; además, verificar como se modifica los roles del docente, de los mismos estudiantes y como influyen en otras prácticas que se desarrollan en la experiencia.

Palabras clave: Cabri, simetría axial, situaciones adidácticas, medio.

1. Introducción

Teniendo en cuenta el trabajo y experiencia desarrollado durante más de 15 años como docente de matemáticas en niveles de educación básica y media, se ha podido verificar que muchos estudiantes presentan dificultades y poco interés por la matemática en sus diversos campos: aritmética, álgebra, trigonometría, cálculo, estadística y geometría. En particular en geometría se ha observado que hay muchas dificultades, los estudiantes a mi cargo

muestran conceptos y procesos geométricos muy básicos y limitados, no tienen suficiente claridad conceptual al definir diferentes objetos y formas geométricas, no reconocen ni diferencian las características y propiedades importantes de dichos objetos.

Además, he observado que en la mayoría de instituciones educativas donde he trabajado se programan pocas horas para la enseñanza y aprendizaje de la geometría; algunos docentes prefieren tomar un único período académico para intentar desarrollarla y otros manifiestan que no les gusta o prefieren no enseñar geometría porque no se sienten seguros en dichos temas; otros dicen que no están dispuestos a utilizar herramientas tecnológicas porque no se sienten preparados para hacerlo. Esta situación es inaceptable y requiere una intervención adecuada para lograr un mejor aprendizaje de la geometría y de la resolución de problemas.

Por consiguiente es urgente dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Cómo mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en los estudiantes de educación básica?*

Se debe reconocer que los métodos de enseñanza actualmente utilizados no están produciendo los resultados esperados; por lo tanto, parte de la solución del problema debe consistir en modificar las prácticas pedagógicas. Se deben utilizar nuevas estrategias didácticas que permitan a los estudiantes una verdadera construcción y asimilación del conocimiento geométrico. En el momento en muchos países, incluyendo Colombia, se están implementando políticas educativas que promueven el uso de herramientas informáticas para apoyar los procesos de enseñanza. Por ejemplo, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) afirma en el documento: Pensamiento Geométrico y Tecnologías computacionales, que:

> "La enseñanza de la Geometría está cambiando con el uso de nuevas tecnologías en el salón de clases, herramientas como software de geometría dinámica disponibles en las calculadoras especializadas, hace posible que los estudiantes exploren la geometría y tengan la posibilidad de explorar los objetos y sus propiedades geométricas" (MEN, 2004).

Desde la formación que tengo como Licenciado en Matemáticas y Computación e Ingeniero de Sistemas, siempre he estado trabajando procesos de matemáticas implementando algunos recursos informáticos, pensando en el beneficio de la educación de los estudiantes a mi cargo. He

observado que las herramientas tecnológicas despiertan el interés y motivan a los estudiantes; además estas herramientas ofrecen experiencias de aprendizaje favorables y permiten una mayor interactividad con los usuarios y diversidad de recursos en formatos de audio, video, contenidos web, etc.

Surge con esto un segundo aspecto a considerar *¿cómo usar las herramientas informáticas en el proceso de enseñanza para lograr un mejor aprendizaje de las matemáticas?*

Se quiere entonces transformar las prácticas de enseñanza de la geometría, utilizando tecnologías informáticas. Pero no se quiere hacerlo de manera empírica, simplemente ensayando una nueva propuesta de enseñanza. Se debe fundamentar este cambio desde una perspectiva teórica de didáctica de las matemáticas. Por lo tanto podemos formular una tercera pregunta *¿cómo orientar teóricamente las prácticas de enseñanza que se quieren desarrollar?*

El Proyecto Institucional de Uso de Geometría Dinámica, desarrollado en la Universidad Industrial de Santander, responde a estas tres preguntas: propone la Teoría de las Situaciones Didácticas como referente teórico para analizar las prácticas de enseñanza y organizar estrategias para lograr un mejor aprendizaje de la geometría, aprovechando el potencial del software Cabri Geometry. Por lo tanto decidimos replicar esa experiencia en el Colegio Las Américas, I.ED, en la ciudad de Bogotá, para evaluar su transferibilidad e identificar sus ventajas y posibles dificultades.

2. Referente Conceptual

Importancia de las situaciones a-didacticas esta experiencia

Durante el desarrollo de esta propuesta, el docente utiliza una serie de actividades dadas en el Proyecto Institucional de Geometría Dinámica, del grupo EDUMAT de la Universidad Industrial de Santander, en cada una de las cuatro actividades se sugieren unas tareas o problemas específicos al grupo de estudiantes, de tal modo que ellos puedan aceptarlos, ellos los asumen como un reto y se proponen resolverlos. “Esos problemas deben

lograr por su propio movimiento que el estudiante actúe, hable, reflexione y evolucione" (Brousseu, p. 31). A esa idea de desarrollo que nace en el estudiante es posible denominarla *intención.* Si se llegase a presentar el caso de que algunos estudiantes posiblemente no están dispuestos a realizar la actividad entonces el docente puede intervenir con el fin de buscar un cambio de decisión. Por otro lado, cuando el o los estudiantes toman la decisión de resolver la tarea o problema crean en su interior una *intención*; los estudiantes que inician a interactuar con el medio quieren desarrollar la actividad proporcionada la cual exige realizar diversas acciones. Las *acciones* (entendidas como los procesos que el estudiante hace, dice o realiza), en algunos casos le pueden aportar significativamente al desarrollo de la actividad propuesta; también puede suceder que las acciones que realice no le permiten avances significativos en el desarrollo de la tarea, lo que el estudiante considera y toma la decisión de modificar o abandonar sus acciones.

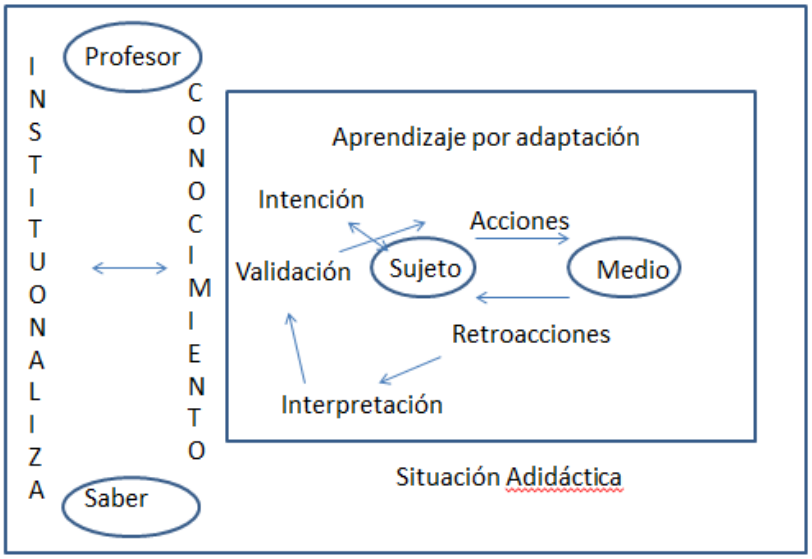
Cada una de las acciones que desarrolla el estudiante generalmente está acompañada de una o más restricciones o permisos denominados retroacciones que le exigen modificar sus acciones o continuar usándolas. *Las retroacciones* son creadas intencionalmente a través de herramientas que proporciona el medio (software) y que han sido planeadas previamente por el docente o especialista del diseño de la actividad con la idea de permitir avances o crear bloqueos u obstáculos en el desarrollo de las tareas o solución de los problemas.

A la idea de continuar con las acciones o de modificarlas se le denomina interpretación. *La interpretación* consiste en un proceso de análisis o lectura que hacen los sujetos (estudiantes) tanto de las acciones como de las retroacciones que les permiten decidir si continúan, modifican o abandonan sus acciones. La decisión de continuar con las acciones que les permiten avances se denomina *validación* la cual se considera positiva si los sujetos observan que dichas acciones son favorables y les permiten avances significativos de manera parcial o al desarrollo total de sus tareas. En caso contrario si la decisión es cambiar las acciones a este proceso se denomina validación negativa la cual le exige abandonar la acción.

Los cinco elementos mencionados y resaltados hacen parte de una situación adidáctica propuesta desde la teoría de las Situaciones Didácticas (Brouseau,

1986). Dicha situación plantea la posibilidad de lograr aprendizajes por adaptación en los estudiantes. Este es uno de los conceptos más importantes en la teoría de las Situaciones Didácticas, el cual se produce cuando un sujeto (estudiante) interactúa con un medio, se puede lograr proponiendo al estudiante una situación adidáctica. Durante el desarrollo de toda actividad adidáctica se pretende que el estudiante construya conocimiento sin o con muy limitada intervención del profesor.

Esta situación adidáctica está inmersa en una situación didáctica en la cual se involucra el profesor el cual quiere relacionar el conocimiento adquirido por los estudiantes que asumieron la situación adidáctica con el saber matemático el cual quiere institucionalizar, con el fin de darle sentido a esta relación conocimiento-saber y el medio para los estudiantes los cuales lo harán evidente aplicándolo en situaciones que requieran el desarrollo o solución de situaciones similares. A toda esta interacción se le denomina situación didáctica. Todo el proceso se puede resumir en el siguiente gráfico.



Situación Didáctica

Es importante aclarar que durante el desarrollo de la situación adidáctica se pretende desarrollar el campo de la percepción de los estudiantes y cuando se desarrolla la actividad didáctica se hace una inmersión para introducir procesos con fundamentación teórica. Consideramos que cada una de las actividades propuestas pretendió desarrollar un equilibrio de lo perceptivo

con lo teórico con el fin de hacer una asertiva institucionalización del saber matemático.

3. Descripción de la experiencia

Al implementar y evaluar las situaciones adidácticas diseñadas por el grupo EDUMAT de la Universidad Industrial de Santander, para la enseñanza de la simetría axial en el grado séptimo del colegio Las Américas, IED, de la ciudad de Bogotá se logran identificar las ventajas y dificultades de esta implementación desde el punto de vista de la metodología empleada, la infraestructura requerida y la integración al currículo de matemáticas.

Se asume una metodología de ingeniería didáctica en la que se busca controlar el medio con el que interactúan los estudiantes y las formas de intervención del profesor.

Las evidencias de la experiencia se tienen en formato de video, información que actualmente está en proceso de transcripción con el software Elan, información que permitirá hacer el respectivo análisis. Además se tienen algunas evidencias en formato escrito de algunos instrumentos que han servido como apoyo al desarrollo de las actividades.

4. Reflexiones

Algunas de las ventajas obtenidas hasta el momento consisten en que los estudiantes realmente han logrado la construcción de conocimiento geométrico a través de las situaciones adidácticas propuestas y han desarrollado habilidades comunicativas cuando participan en la puesta en común al finalizar las actividades: utilizan diversas formas de expresión y evidencian la asimilación de los conceptos y procesos geométricos relacionados con las actividades. Se observa un alto nivel de motivación y participación en los estudiantes.

Respecto a las dificultades relacionadas con el desarrollo del proyecto podrían mencionarse: problemas de disponibilidad de la sala de informática,

y de los recursos técnicos y tecnológicos necesarios para el desarrollo de la actividad, como cámaras, proyector, adecuación del espacio etc. No se han experimentado dificultades en lo didáctico, metodológico y matemático.

A manera de conclusión es posible afirmar que:

- Estas actividades diseñadas por el grupo EDUMAT tienen un impacto positivo en el aprendizaje y pueden ser implementadas en diferentes contextos,

- Las oportunidades de interacción de los estudiantes con el software, el profesor y sus compañeros hacen posible el desarrollo de habilidades comunicativas y la construcción de conocimiento geométrico.

- El diseño de las actividades permite que el docente abandone un rol de trasmisor de conocimiento y se convierta en un facilitador de la construcción de conocimiento en los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Acosta G. Martín, Monroy B. Lilian y Rueda G. Karol. (2010). Situaciones adidácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista de Integración. Escuela de Matemáticas Universidad Industrial de Santander. Vol. 28, No. 2., p. 173 – 189.
- Brousseau, Guy. (2007). Iniciaciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas. 1ª.ed.Buenos Aires: Editorial Libros del Zorzal.
- Margolinas, Claire. (1993). La importancia de lo verdadero y lo falso de la clase de matemáticas. Editorial La Pénsee Sauvage. Traducido por Martín Eduardo Acosta G. y Jorge Enrique Fiallo L. Editado en Colombia por División de Publicaciones Universidad Industrial de Santander. 2009.
- Monroy Lilian y Rueda Karol. Conceptualización de la Simetría Axial y la Traslación con la mediación del programa Cabri Geometry II. Proyecto de grado para la obtención del título de licenciatura en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Dirigido por Martin Eduardo Acosta.

Características de la formación docente para la inclusión de las TIC en la enseñanza de la geometría

Martínez, Lilián Marcela - Vera, Johanna Andrea
lpinkfly@hotmail.com – jhovera@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

El presente trabajo se constituye como producto de la investigación desarrollada a través de grupo de investigación Crisálida de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, que se encamina a la formación en y hacia la investigación de profesores de matemáticas en ejercicio. Inicialmente se presenta la situación problema identificada, que corresponde a la dificultad que se evidencia para la incorporación de las TIC en la labor docente y las diversas herramientas con las que se puede contar para desarrollar actividades geométricas dentro del aula. Con el fin de encontrar respuesta a dicha situación se plateó primero identificar estrategias implementadas en la formación docente para la inclusión de las TIC en la enseñanza de la geometría, segundo documentar experiencias cercanas sobre el uso de las TIC en la enseñanza de la geometría determinando como es dicha inclusión y los logros obtenidos con ello. Y finalmente consolidar a partir de las experiencias documentadas y las estrategias implementadas aquellas características de la formación docente para la inclusión de las TIC en la enseñanza de la geometría.

Palabras clave: Formación de profesores, tecnologías de la información y comunicación TIC.

1. Introducción

El mundo de hoy presenta cambios constantes y significativos en diversos aspectos, entre los cuales se encuentra incluido el campo tecnológico. A su vez estos cambios influyen directamente en el campo educativo y particularmente en el quehacer diario del docente y su labor educativa en el aula, desafiando su uso para proveer a los estudiantes con las herramientas y conocimientos necesarios que se requieren en la actualidad.

El uso de las nuevas herramientas tecnológicas demanda una capacitación extra de parte del docente para que logre implementarlas en el campo laboral de una manera activa y efectiva. En complemento a esta idea, se evidencia en algunos casos y a partir de la experiencia propia, que la implementación de tecnologías innovadoras dentro del aula de clase se limita al uso en la enseñanza, sin fines didácticos claros, es decir, se proponen actividades que hacen uso de la tecnología y que en muchas ocasiones apuntan a la repetición y mecanización de procedimientos o proyección y envío de tareas, que finalmente se convierten en una recepción y ejecución de algoritmos.

Sin embargo, proponer actividades haciendo uso de la tecnología, implica un conocimiento del área que se desea abordar y de la herramienta tecnológica a usar; la dificultad radica en que la tecnología presenta avances constantes que demandan una capacitación continua en la que los docentes estamos, en su gran mayoría, quedando atrás.

Añadiendo a esta postura, en el Informe Mundial sobre Educación de la UNESCO (2004), se describe el impacto de las TIC en los métodos convencionales de enseñanza, augurando la transformación del uso de las TIC y la forma en que tanto docentes como alumnos acceden al conocimiento y a la información. Esta situación pone al educador en la necesidad de implementar las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y por lo tanto de capacitarse por esta nueva variable a incluir en su actividad profesional. Por ende, surge la siguiente pregunta: ¿Qué formación tecnológica debe adquirir el docente de matemáticas para la inclusión de las TIC en la enseñanza de la geometría?

2. Marco de referencia

Para el desarrollo del presente trabajo, es fundamental conocer diferentes posturas sobre el perfil y la formación docente para la incorporación de las TIC en el aula, con el fin de desarrollar y fortalecer los procesos de enseñanza. Cada experiencia de interacción de las TIC y el conocimiento depende de factores previos que han influenciado la concepción sobre uso y aplicación, es importante caracterizar dicha inclusión y los modelos más relevantes de ello.

Conceptualización sobre TIC

Las TIC influyen directamente en diversos ámbitos en los que el hombre se desenvuelve diariamente, en especial en aspectos como el procesamiento de información, el conocimiento y los mecanismos de construcción. Particularmente, éstas serán entendidas como "la agrupación de tecnologías convergentes de microelectrónica, informática (hardware y software), telecomunicaciones, optoelectrónica y los desarrollos recientes de la ingeniería genética" (Vilaseca y Torrent, 2004, p. 19).

Según Queraltó (2003), aún no se ha tomado conciencia de las nuevas tecnologías y no se ha hecho uso de estrategias para encaminar su efecto en la sociedad; por lo tanto, quien usa las TIC más que preguntarse qué tecnologías va a usar, debe cuestionarse sobre cómo las va a implementar, pues la sociedad constantemente se está informatizando y el ascenso de la tecnología está en puesto privilegiado.

Modelos de formación del profesorado

Imbernón (1994), menciona que estos criterios muestran las diferencias entre los distintos modelos existentes, añade a su vez que estos no se pueden considerar cerrados sino que tienen estrategias y actitudes comunes. Establece cinco modelos a estudiar:

a) **El modelo de formación orientada individualmente**: éste establece una autonomía en lo que se desea aprender.

b) **El modelo de observación / evaluación:** se propone la observación por parte de un tercero (colega, profesor, asesor) en el aula de clase, así pues el docente aprenderá sobre su quehacer a partir de esta discusión entre pares.

c) **El modelo de desarrollo mejora:** éste tiene lugar cuando se busca un desarrollo curricular mediante proyectos didácticos.

d) **El modelo de entrenamiento o institucional:** está asociado a cursos y seminarios en los cuales los objetivos están diseñados previamente y el formador es quien decide la metodología y los resultados esperados.

e) **El modelo de investigación o indagativo:** propone que los docentes investiguen situaciones problema y logren darles solución dentro del aula, lo cual es más provechoso dentro de la apropiación de los conocimientos.

3. Aspectos metodológicos

La investigación que aquí se desarrolla, se constituye en un proceso de indagación tanto textual como de experiencias docentes, por lo tanto se basa en una investigación de tipo cualitativa y se centra en la propuesta de Fox (1981), quien propone las siguientes etapas a tener en cuenta en el proceso de investigación:

Indagación:

En esta etapa se realizó una recopilación de información desde diferentes fuentes (tesis, estudios internacionales, artículos entre otros) con el fin de sustentar el perfil de la formación docente y diversos factores que influyen en que se implementen las TIC dentro del aula.

Diseño de instrumentos y recolección:

Referente a la recolección de la información se buscó recopilar experiencias significativas dentro del aula, que no necesariamente implicaran ser cercanas sino que abarca el uso de las TIC y la formación que los docentes han recibido y/o imparten con estas herramientas. En esta etapa se consideró la encuesta, diseñada para delimitar la población a aquellos profesores que utilizaran tecnologías computacionales en el aula; también, se diseñó una entrevista semiestructurada a 5 profesores seleccionados a partir de la encuesta aplicada; dicha entrevista fue registrada por medio de grabaciones de audio y por medio escrito.

4. Desarrollo de la propuesta

Análisis de información y consolidación de características:

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos y el marco teórico estructurado previamente, se inició la clasificación según los modelos de Imbernón para la caracterización de la formación docente y las prácticas que se llevan de inclusión dentro del aula.

Dado el diseño y aplicación de los instrumentos de recolección de información, se inició el análisis de la información por medio de la clasificación de los docentes que hacen uso de las TIC; se entrevistaron a 5 docentes de los 10 encuestados tras determinar mediante preguntas puntuales sobre sus estudios e inclusión de la tecnología en el aula y sus prácticas de enseñanza y aprendizaje; por medio de ello se da el análisis a través de los modelos de formación planteados por Imbernón según las respuestas obtenidas. Por lo tanto, se presenta parcialmente el análisis realizado de uno de los docentes:

Docente número 2: Acerca de la formación manifiesta que en la universidad, mientras realizaba la licenciatura, había conocido Cabri "pero como tal tecnologías de la información fue la universidad realmente la que me abrió paso para eso, en la maestría. La maestría es la que me ha dado esas herramientas como tal". Su formación dentro de esta maestría ha estado encaminada a los OVAS (objetos virtuales de aprendizaje) y los AVAS

(ambientes virtuales de aprendizaje). “lo otro es la construcción de páginas web por html, pero hay más programas para construir, pero me parece que html es el que más le exige a uno…” Uno tiene que tener conocimientos previos para poder utilizar los elementos tecnológicos.

A partir de la clasificación que propone Imbernón (1994) para los modelos de formación docente, el docente 2 se clasifica en el modelo de investigación o indagativo y el entrenamiento o institucional, porque abiertamente plantea que su desarrollo hacia las TIC se ha dado dentro de su estudio de maestría y que en ésta su trabajo ha surgido a partir de la investigación y la puesta en práctica de los conocimientos que aprende en sus módulos por tanto se asocia en el segundo modelo.

5. Conclusiones

La mayoría de los docentes encuestados han recibido algún tipo de formación acerca de las TIC, sin embargo la mitad de ellos no hace uso de ellas, ello implica que a pesar de que exista la formación no necesariamente se utilicen dentro del aula.

Las características de formación docente para la inclusión de las TIC en la enseñanza de la geometría que se encuentran después de esta investigación están directamente relacionadas con los modelos propuestos por Imbernón (1994), en base a la información recolectada con los maestros encuestados, se toman las variables relacionadas con la teoría y la práctica de dichos docentes específicamente de los modelos de formación orientada individualmente, el modelo de entrenamiento o institucional y el de investigación o indagativo. Estas son:

- Autonomía en lo que se desea aprender, es decir, es el propio profesor el que diseña y direcciona mediante sus propias inquietudes lo que desea aprender.

- Determinar sus propios objetivos y actividades de formación que encuentren respuesta a problemas que ellos mismos se planteen.

- Escoger un programa de formación educativa que vaya acorde a sus intereses. Esto pues, la planeación establecida por las instituciones ofrecen una variedad de posibilidades en el aprendizaje asertivo de las TIC.

- El formador es quien decide la metodología y los resultados esperados. Esto ayudara a que los objetivos que el docente se propuso se lleven a cabo.

- Investigar situaciones problema y darles solución dentro del aula, aplicando lo aprendido dentro del pensum escogido. Lo cual resulta ser más provechoso dentro de la apropiación de los conocimientos.

Referencias bibliográficas

- Fox (1981).El proceso de investigación en educación. Editorial Eunsa.
- Imbernón F, (1994). La formación y el desarrollo profesional del docentedo hacia una nueva cultura profesional. Editorial Graó. Barcelona.
- Queraltó, R. (2003). Ética, tecnología y valores en la sociedad global. El caballo de Troya al revés. Madrid, España: Tecnos.
- UNESCO (2004). Las tecnologías de la información y la comunicación y la formación docente. Guía de planificación. Montevideo, Uruguay: Trilce.
- Vilaseca, J. y Torrent, J. (2004). Nueva economía y *e-business*. Hacia la economía global del conocimiento y el trabajo en red. (UOC) Formación de postgrado.

La argumentación en un contexto de actividad demostrativa con el uso de programas de geometría dinámica.
Un estudio en grado séptimo

Puentes, Julián Andrés

jpuentesd@gmail.com – mdma_japuentesd760@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Colombia)

Resumen

Se presentan los resultados parciales obteniendos en una experiencia de aula que hace parte de la propuesta de trabajo de grado para la maestría en educación matemática. Tiene como objetivo favorecer la argumentación en un contexto de actividad demostrativa de estudiantes de grado séptimo de básica secundaria. Para poder hacer una aproximación a este objetivo, se busca promover el uso de programas de geometría dinámica y un ambiente de indagación, dos escenarios que por los resultados parciales obtenidos hacen posible que los estudiantes realicen un acercamiento a la actividad demostrativa, a la solución de problemas mediante el uso de argumentos analíticos y el uso de las nuevas tecnologías para el aprendizaje de la geometría.

Palabras clave: Argumentación, actividad demostrativa, geometría dinámica, intervención de enseñanza.

1. Introducción

Actualmente existen diversos desafíos en la educación matemática que hacen evidente la necesidad de reflexionar sobre el quehacer del docente de matemáticas. Este contexto ha llevado a cuestionar la propia práctica docente de matemáticas, encontrando que las clases de matemáticas, y más específicamente las de geometría, no involucran la argumentación y la actividad demostrativa como prácticas usuales en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Lo cual sin duda ha sido el punto de partida para la propuesta de trabajo, ya que un escenario en el que la actividad demostrativa, actividad fundamental y característica del saber matemático, no hacen parte de las prácticas usuales de las clases de geometría, pone de manifiesto una problemática a estudiar por parte de todos aquellos que nos desenvolvemos como docentes de matemáticas y que debe generar un cambio en los currículos y maneras de desarrollar la clase de matemáticas en las instituciones educativas.

Así mismo, la idea de que las nuevas tecnologías no sean parte del desarrollo de las clases de matemáticas, hace aún más evidente los cuestionamientos, reflexiones y posibles cambios sobre la forma y esencia de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por tal razón, la propuesta busca poner de manifiesto estas preocupaciones, y tal vez, plantear una ruta de acercamiento para la solución de estas problemáticas.

Para alcanzar dicha solución se encuentra soportada conceptualmente en los estudios realizados por el Grupo de Investigación de Argumentación y Prueba de la Universidad Pedagógica Nacional, que tiene como consigna que: la interacción de los estudiantes con programas de geometría dinámica posibilita el descubrimiento de las propiedades de los objetos geométricos, lo que a su vez da pie a que los estudiantes proporcionen soluciones o conjeturas a los diferentes problemas que se plantean, conjeturas que a través de la gestión del docente sean justificadas teniendo en cuenta los diferentes argumentos referenciados en un sistema teórico local definido y diseñado para la solución de diversos problemas. En síntesis, y acudiendo a lo expuesto por Mariotti (2006), se intenta planear una intervención de enseñanza que garantice la interacción de los estudiantes con la argumentación en la clase de geometría.

2. Referente conceptual

Los conceptos y referentes que estructuran la propuesta están divididos en dos grandes campos. El primer campo, hace referencia a los conceptos y referentes relacionados con la manera en que pueden entenderse la argumentación y la actividad demostrativa en una ambiente escolar. Así pues, entiendo por argumentar en un sentido amplio al fenómeno social de interacción, el cual solo se hace evidente cuando es expresado de una manera verbal y/o escrita (Krummheuer, 1995), desde esta perspectiva se entiende que argumentar es un proceso en el que una persona intenta convencer a otra u otras personas de la validez de sus afirmaciones o proposiciones.

Teniendo en cuenta lo anterior, se hace necesario establecer de qué manera se puede promover un escenario en que los estudiantes puedan argumentar en el sentido amplio que plantea Krummheuer. Así pues, el contexto de actividad demostrativa involucra los procesos de conjeturación y justificación relacionados entre sí (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2013), de manera que toda conjetura se justifica. En este contexto de actividad demostrativa, se posibilita la argumentación como herramienta para pasar del proceso de construcción de la conjetura a la justificación.

Ahora bien, la transición entre el proceso de construcción de la conjetura y la justificación conlleva a que los estudiantes utilicen en principio argumentos sustanciales, pero que luego de la interacción con el lenguaje matemático y la gestión del docente, puedan promoverse argumentos analíticos.

En este sentido, y referenciando de nuevo a Krummheuer (1995), se entiende por argumentos sustanciales a aquellos que carecen de un rigor matemático, es decir carecen de la estructura ternaria antecedente –garantía– consecuente, pero que resultan de la interacción con el problema planteado, el sistema teórico local y el programa de geometría dinámica. Por argumentos analíticos se definen a aquellos que poseen la estructura ternaria mencionada anteriormente, los cuales presentan una mayor formalidad y un rigor matemático que presenta la aproximación a la demostración formal en matemáticas. La producción de este tipo de argumentos por parte de los estudiantes, es en esencia el objetivo de esta propuesta.

El segundo campo de referencia conceptual, está asociado a la literatura que proporciona la ruta de aproximación a la argumentación en el contexto de actividad demostrativa. Es decir, los ambientes que posibilitan y promueven que los estudiantes argumenten desde la perspectiva definida.

Así se define un ambiente de clase de indagación matemática o una comunidad de indagación matemática (*communities of mathematical inquiry*) como un escenario en donde los estudiantes, a partir de la resolución de problemas, pueden llegar a participar en la clase de matemáticas por medio de la expresión de ideas, la argumentación y la refutación (Goos, 2004). A partir de esta definición, concibo que la creación de un ambiente como el que plantea Goos (2004), a través del agestión del docente, favorece la interacción de los estudiantes con el conocimiento matemático, y en este caso en particular con la posibilidad de intentar convencer a otros de la validez de la solución de los problemas que se le plantean; esto sin duda es un ambiente propicio para poder fomentar la argumentación en la clase de geometría.

Por otro lado, y como ya se ha mencionado anteriormente, la mediación de la geometría dinámica en los procesos de construcción de conjeturas, argumentos y justificaciones es fundamental. Por ello, es necesario hacer referencia a los planteamientos de diversos estudios vinculados a la geometría dinámica como una herramienta que posibilita una ambiente que favorece la argumentación en el contexto de actividad demostrativa.

En este sentido, Laborde (2001), plantea las bondades del uso de Cabri Geometry que van desde el ahorro de tiempo y la facilidad de hacer las construcciones que se plantean a los estudiantes por el uso de las herramientas del programa, hasta el descubrimiento de propiedades geométricas que en un ambiente de papel y lápiz no se evidencian a menos que se expliciten verbalmente; esto sin lugar a dudas posibilita el diseño de tareas que apuntan a la interacción entre los estudiantes y que promueven su participación en la clase intentando resolver los problemas, para hacer un énfasis en los productos y participaciones de los estudiantes en la solución de los mismos.

De igual modo, se configura la hipótesis de que el trabajo con Cabri Geometry favorecerá la argumentación en la clase de geometría, referenciando el trabajo realizado por Camargo y Samper (2012), el cual

pone de manifiesto las bondades de Cabri Geometry para el diseño de tareas y problemas, ya que brindan herramientas de construcción, verificación y control con las cuales descubrir, verificar y justificar propiedades que se descubren en la resolución de los problemas.

3. Descripción de la experiencia

El diseño y ejecución de la propuesta que se desarrolla actualmente en el colegio Álvaro Gómez Hurtado IED, con estudiantes de grado séptimo de básica secundaría, tiene un fundamento metodológico en lo que Mariotti (2006) denomina intervención de enseñanza. Esta intervención de enseñanza como lo define Mariotti, es un campo de investigación en el que han convergido diversos estudios en las últimas décadas; en dichos estudios se plantean las soluciones a las preguntas relacionadas con la forma en que pueden superarse las dificultades asociadas a la demostración en un ambiente escolar y de las posibles estrategias a seguir para poder estudiar la demostración.

Con este horizonte, la propuesta de trabajo que he venido desarrollando intenta promover el estudio de la demostración en un sentido más amplio, como ya se ha definido, con lo cual se ha trazado una ruta hipotética de aprendizaje. Esta ruta hipotética de aprendizaje consiste fundamentalmente en el diseño de una secuencia de problemas geométricos de descubrimiento y exploración de propiedades, los cuales se encuentran asociados a un sistema teórico local. De esta forma, cada problema se encuentra encadenado uno con el otro, de tal modo que las conclusiones y hechos geométricos obtenidos en un problema, sean los argumentos que posibiliten la solución del problema que sigue en la secuencia.

Para efectos de la recopilación de la información y posterior análisis de la misma, se hacen registros audiovisuales de la interacción de los estudiantes con los problemas que se les proponen. Los estudiantes se organizan en grupos pequeños con el propósito de generar un ambiente de participación en micro, que luego posibilite la participación en la socialización con todo el grupo de estudiantes y el docente.

Cada problema propuesto a los grupos de estudiantes busca una solución genuina, por lo que el registro de estas primeras interacciones con el problema es fundamental. Luego de que cada grupo tenga una posible solución al problema, en la socialización con todos los estudiantes y el docente, se busca que sea el mismo colectivo de estudiantes el que valide o no las soluciones propuestas por cada grupo, con lo cual se haga evidente el ambiente indagativo como el que plantea Goos (2004).

Estas socializaciones son tomadas en registro audiovisual, y tanto éstas como las interacciones de los estudiantes en pequeños grupos son transcritas, de modo que se puedan analizar los diferentes tipos de argumentos y el acercamiento a la actividad demostrativa lograda por los estudiantes en cada problema. La gestión del docente en esta intervención de enseñanza está enmarcada en el buen manejo del lenguaje matemático y en la persistencia para promover que los estudiantes consigan pasar de los argumentos sustanciales a los analíticos.

Finalmente, es necesario señalar que los resultados parciales obtenidos hasta la fecha evidencian que metodología propuesta tiene grandes desafíos y demandan la gestión constante del docente, no solo en el diseño de los problemas y la mediación entre los estudiantes y la actividad demostrativa. Esta gestión también debe tener en cuenta la adecuación de los recursos tecnológicos y el aprovechamiento de los mismos; de ahí que los problemas diseñados y las preguntas a realizar que motiven a la exploración por parte de los estudiantes en los programas de geometría dinámica son una labor fundamental para poder obtener las evidencias y datos para analizar.

4. Reflexiones

Los resultados parciales obtenidos son significativos y plantean una gran motivación para la culminación del mismo. Por tal razón se presentan conclusiones que actualmente son motivo de reflexión en el trabajo de grado y que serán explorados con más detalle en el documento final de la propuesta. En primer lugar, se hace mención sobre el cambio en la disposición de los estudiantes frente a la clase de matemáticas cuando se incorporan las nuevas tecnologías como parte esencial de la clase. Esto sin duda hace que los estudiantes encuentren una motivación y una actitud más

receptiva frente a los desafíos que se plantean en la clase, lo cual hace evidente lo expuesto en la literatura estudiada frente a este aspecto. Sin embargo, se señala que sigue siendo un desafío mantener el interés de los estudiantes y que la gestión del docente, reitero, es enorme para poder alcanzar los resultados deseados.

En segundo lugar, es muy emocionante observar a los estudiantes empezar a expresarse con un sentido y de una manera formal sobre las propiedades de objetos geométricos. Sin lugar a dudas, esta es una de las principales reflexiones que se pueden hacer, ya que se ha posibilitado un acercamiento genuino y real de los estudiantes a la actividad demostrativa en el ámbito escolar.

Ahora bien, los resultados parciales obtenidos pueden catalogarse como positivos ya que los estudiantes han presentado una evolución favorable frente a la transición de los argumentos sustanciales a los argumentos analíticos. Sin embargo, los análisis parciales muestran que todavía se pueden esperar mejores resultados del estudio si se potencian los ambientes de indagación y la gestión del docente en la transición del argumento sustancial al analítico.

A manera de síntesis, es claro que los resultados parciales obtenidos ponen en el horizonte la posibilidad real de que los estudiantes de básica secundaria de un colegio distrital puedan desenvolverse en un contexto de actividad demostrativa, que los temores y la desestimación del potencial de los estudiantes para el estudio formal de las matemáticas son un mito que puede, con mucho trabajo, ser erradicado del contexto del estudio de las matemáticas. Que la innovación curricular en matemáticas es una necesidad y que solo hace falta un poco de voluntad y preparación para poner en los estudiantes nuevas y significativas maneras de aprender.

Referencias bibliográficas

- Camargo, L., & Samper, C. (2012). Aproximación temprana al razonamiento geométrico en Educación Básica. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. Journal for research in mathematics education, 35(4), 258-291.

- Krummheuer, G. (1995). The Etnography of Argumentation. En P. Cobb, & H. Bauersfeld (Edits.), The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures (p. 229-269). Hillsdale: NJ: Lawrence Erlbaum.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry task with Cabry-Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, p. 283-317.
- Mariotti, M. A. (2006). Demostrar y demostraciones en educación matemática. En A. Gutiérrez, & B. P, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education (págs. 173-204). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, O. (2013). Innovación en el aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper, & O. Molina, Geometría Plana, un espacio de aprendizaje. Bogotá D.C. Universidad Pedagógica Nacional.
- Samper, C., & Molina, O. (2013). Geometría Plana, un espacio de aprendizaje. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Construcción de esquemas Splitting: Una propuesta transistémica

Vargas Riaño, Angie - Albadan Vargas, Juan
angie010712@hotmail.com - pabloalbadan@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

A continuación se detalla una experiencia de aula realizada en el primer semestre del año 2014 en el colegio Nueva Esperanza, que da cuenta de la construcción de esquemas Splitting en grado quinto, generando una propuesta transistémica pretendida por los Lineamientos Curriculares (1998) por el Ministerio de Educación Nacional

Palabras clave: Esquemas Splitting, transistémico, secuencia de actividades, lineamientos curriculares.

1. Introducción

¿Cuál es el problema que nos atañe?

Cuando se llega a un aula de quinto de primaria, los docentes de matemáticas emprendemos una campaña constante para hacer frente a un sinnúmero de problemáticas asociadas a la comprensión de la multiplicación y lo multiplicativo; un primer acercamiento al por qué de ello nos exporta a pensar en la enseñanza de la multiplicación como suma reiterada, no obstante esto, la respuesta no es suficiente, por ello este escrito se encuentra enfocado en el estudio de elementos propios de la estructura multiplicativa y nos embarca en un viaje que caracterice, a partir de un experimento de aula, el por qué de la tensión en la enseñanza de lo multiplicativo, más particularmente el de la potenciación como esquema multiplicativo.

Para ello nos hemos apoyado en otros experimentos de aula previamente realizados, como los de Narváez y Urrutia (2005), Confrey (1994) y MESCUD (2006), entre otros. Aun cuando algunos de estos trabajos no versan directamente sobre la potenciación si hacen hincapié en el estado de lo multiplicativo y sus objetos de composición.

En este camino se ha identificado un problema de ausencia y no de presencia, contrario a lo que se consideró en un principio, nos referimos a la ausencia de propuestas que consideren modelos alternativos de multiplicación en el aula que a su vez sean complementarios al modelo de suma reiterada, y no de presencia, pues el problema no está siendo dado por la presencia del modelo "suma repetida", sino, como ya se enuncio, por la ausencia de otros modelos y, por tanto, de la interferencia que trae el modelo de suma repetida en la construcción de la potenciación como esquema multiplicativo; en palabras de Confrey "todo un desarrollo de un pensamiento multiplicativo, que muchas veces es eclipsado por una enseñanza casi exclusiva de multiplicación como suma repetida con base subyacente en el conteo" Confrey (1994).

Unido a lo anterior y considerando que el espectro de lo multiplicativo requiere de acciones que integren estas diversas concepciones y que permitan comprender la naturaleza de lo multiplicativo desde campos donde su dominio no sea exclusivamente numérico, pues contempla "acciones que los estudiantes realizan en la vida cotidiana y que son en esencia multiplicativas (doblar en mitades, repartir, ampliar, reducir)" Confrey (1994) y que, por supuesto, se realizan en campos de dominios espaciales, geométricos y métricos, entre otros, se ha acogido como alternativa de solución a este problema de ausencia y/o interferencia, el uso del modelo "esquemas Split", pues este nos permite responder a nuestro problema por un lado, y a la formulación de una propuesta transistémica pretendida por los Lineamientos Curriculares (1998) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, por el otro.

2. Marco de referencia

Una mirada de los Lineamientos Curriculares a propósito de la construcción de esquemas Splitting

Con el objeto de promover procesos de pensamientos aplicables y útiles, en los Lineamientos Curriculares se resalta el papel de las matemáticas desde un contexto genuino para los estudiantes, que suponga la comprensión de experiencias cotidianas, la solución de situaciones problémicas propias de un contexto y, que requieran de la utilización, creación, explicación y modelación, entre otros, de elementos de las matemáticas, como lo postula MEN (1998) *¨Que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender¨*. MEN (p. 18).

Dichos procesos de pensamiento están inmersos en una construcción de esquemas Splitting, ya que ésta supone "una acción de crear simultáneamente múltiples versiones de un original" (Confrey, 1994, p. 300), en esta acción intervienen conceptos como cambio de unidad, relación uno a muchos, ampliación y reducción entre otros, que pueden ser vistos a partir de elementos propios de diversos pensamientos como se muestra a continuación:

Tabla 1. Correlaciones entre diversos pensamientos a propósito de la relación uno a muchos, aspecto central en una construcción de esquemas Splitting

Pensamiento / Disciplina	Numérico	Métrico	Espacial	Aleatorio	Algebraico
Matemáticas Una construcción de esquemas Splitting	¿Qué es una relación uno a muchos?	¿Cómo el cambio de unidad permite evidenciar relación uno a muchos?	¿Cómo semejanza y dilatación permiten ver relación uno a muchos? ¿Cómo se comprende semejanza y dilatación en términos de la unidad?	¿Qué se puede inferir de una representación que alude a una relación uno a muchos? ¿Cómo se puede representar una relación uno a muchos?	¿Cómo la identificación de secuencias permite establecer patrones que lleven al reconocimiento de la relación uno a muchos?

El papel de la unidad en una construcción de esquemas Splitting

Vale decir que este nuevo modelo multiplicativo considera una elaboración de esquemas multiplicativos en los que el papel de la unidad permite configurar una estructura splitting conjunta a una estructura de conteo, siendo éstas complementarias.

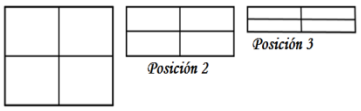
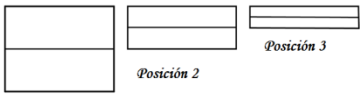
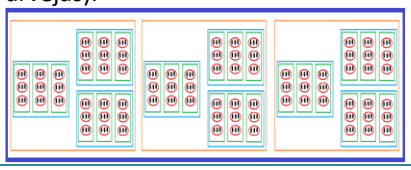
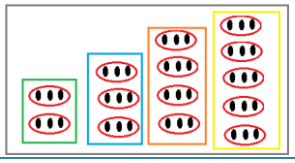
Tomando esta idea Steffe citado por Narváez & Urrutia (2005) y Confrey (1994), evidencian una propuesta del manejo de unidad pasando a lo que se consideraría el paso de una unidad aditiva, donde se evidencia una secuencia aritmética, a una unidad multiplicativa en la que se muestra una secuencia geométrica donde es convincente el cambio de unidad y la formación de un grupo de grupos. Como se evidencia a continuación:

UNIDAD	ESQUEMA MULTIPLICATIVO (STEFFE)	PROPUESTA CONFREY
Unidad iterable aditiva	Esquema pre-multiplicativo: Composición de unidades, pero no presenta conexiones como: lenguaje natural (encajar) y lenguaje matemático (operación- representación)	Suma reiterada (ausencia de semejanza).Steffe (1994) Modelo primitivo de multiplicación. No corrección. Consecuencia modelo MADA. Greer (1998) Identificación multiplicando, multiplicador. Fischbein et al.
Unidad en patrones	Iteración multiplicativa: Manejo de patrones, formación de grupos de grupos.	Simetría (continuo) y relación biunívoca (continua). Relación objetos después del Split. Conteo multiplicativo. Unidades iterativas derivada de actos de conteo
Unidad compuesta	Coordinación parte todo: número de partes, cambio de unidad	Relación operación- situaciones y acciones. Números y operaciones implican procesos cognitivos complementarios. Construcción de enteros. Formas de estructuras primitivas.
Unidad iterable	Esquema coordinación unidades reversible: iteración de unidades compuestas son iterables, formación de una estructura de unidades de unidades.	Manejo de singletons una relación *axb.* Transformaciones. Números positivos sobre unas secuencias geométricas positivas. *n que pertenece a enteros positivos* como acción sucesora. *Relación sucesor y* predecesor.
Unidad Split	Esquemas multiplicativos iterativos: generalización, unidades compuesta, relación uno a muchos, grupos de grupos.	Razón (describe intervalos entre números). *n que pertenece a enteros positivos* como unidad de crecimiento. Relación del 1 con la unidad de crecimiento. *Relación sucesor y* predecesor.

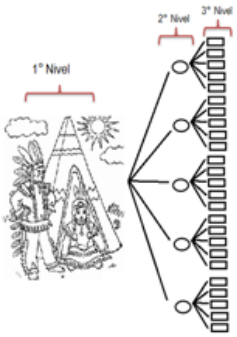
En consecuencia, al trabajar en el aula únicamente un modelo de suma reiterada se desemboca en errores en los estudiantes al enfrentarse a conceptos que entrañan meramente lo multiplicativo, tal es el caso del modelo ¨MADA la multiplicación agranda y la división achica", donde la multiplicación se concibe como una suma reiterada y como la suma agranda magnitudes entonces la multiplicación también, la resta es relacionada con reducción de medidas entonces la división va ligada a achicar. (MESCUD, 2006).

3. Aspectos metodológicos

LA PROPUESTA REALIZADA, SECUENCIA DE ACTIVIDADES[1]

Situación	Descripción
"Doblando, repartiendo y encajando¨	Se propone una representación pictórica para un 2 y un 4 split respectivamente, con la intención de que los estudiantes realicen acciones como repartir, doblar y encajar con tiras de papel y logren deducir relaciones entre representaciones.  Split 4  Split 2
"Formando grupitos "	Se propone dos representaciones figurativas: una que modela un tres Split hasta una quinta iteración, y otra que modela una multiplicación repetida. Los estudiantes deben elegir una de las representaciones apoyándose en material concreto (granos de arvejas).  
"En un mundial"	Se propone una secuencia verbal de un seis split hasta se sexta iteración con el fin de generar una representación en diagrama de árbol. *En un Mundial* [2] En un mundial, encontré seis países, Cada país tenía seis ligas, Cada liga tenía seis equipos, Cada equipo tenía seis planteles, Cada plantel tenía seis jugadores, Cada jugador tenía seis suplentes, Suplentes, jugadores, planteles, equipos y ligas. ¿Cuántos iban al mundial?

[1] Actividades adaptadas de: Narváez, D., Urrutia, E. (2005). La construcción de esquemas Splitting: un experimento de enseñanza¨. Bogotá: UDFJC.

¨Grupos étnicos en Colombia¨	Se propone una representación de diagrama de árbol de un cinco Split con miras a que los estudiantes creen una situación en la que se evidencie relaciones multiplicativas implícitas y consolide un símbolo para un split.	

De acuerdo con la propuesta transistémica pretendida por los Lineamientos Curriculares (1998) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, se ha realizado la siguiente construcción de una secuencia de actividades dirigida a grado 5°:

Pensamiento / Actividad	Numérico	Métrico	Espacial	Aleatorio	Algebraico
"Doblando, repartiendo y encajando¨:	¿Cuántos rectángulos de la posición siguiente encajan en la anterior?	¿Cómo el cambio de unidad cada vez que se dobla una tira de papel permite evidenciar relación uno a muchos?	¿Cómo se comprende semejanza y dilatación en términos de la unidad en un 2 y 4 Split respectivamente?	¿Cómo se puede representar relaciones establecidas al doblar tiras de papel?	¿Cómo la identificación de patrones en un 2 y 4 Split respectivamente, permite establecer secuencias que lleven al reconocimiento de la relación uno a muchos?
"Formando grupitos":	¿Cuántos grupos de grupos de igual tamaño se forman con 27 unidades de arvejas?	¿Cómo el cambio de unidad cada vez que se forma un grupo de grupos permite evidenciar relación uno a muchos?	¿Cómo se comprende semejanza en la configuración de grupos de grupos de granos en un Split 3?	¿Cómo se podría representar relaciones establecidas al formar grupos de grupos?	¿Cómo la identificación de patrones en un 3 Split permite establecer secuencias verbales?
"En un mundial":	¿Cuántos iban al mundial?	¿Cómo el cambio de unidad en una secuencia verbal permite evidenciar relación uno a muchos?	¿Cómo se comprende la semejanza y dilatación en representaciones gráficas que aluden a relación uno a muchos en un 6 Split?	¿Cómo se puede representar gráficamente una relación uno a muchos?	¿Cómo la identificación de patrones en un 6 Split permite establecer secuencias gráficas?
¨Grupos étnicos en Colombia¨:	¿Cuántos elementos hay en cada nivel de una representación en diagrama de árbol?	¿Cómo el cambio de unidad en un diagrama de árbol permite evidenciar relación uno muchos?	¿Cómo se comprende semejanza y dilatación en términos de la unidad en un 5 Split?	¿Por qué una representación en diagrama de árbol permite evidenciar una relación uno a muchos?	¿Cómo se puede generalizar secuencias de Splits?

4. Conclusiones

Una construcción de esquemas Splitting en grado 5°, demanda correlacionar diversos pensamientos a propósito de una relación uno a muchos y reconocimiento de cambio de unidad.

El trabajo en el aula de matemáticas implica reconocer que se deben promover procesos de pensamiento más allá de dictar temas.

Promover herramientas para una construcción de un concepto en las matemáticas escolares, implica entender que los conceptos no son fragmentados y es menester ligarlos, en este caso, una construcción de esquemas Splitting permite desarrollar herramientas para construir conceptos como *¨razón y proporción y por tanto funciones exponenciales¨* (Confrey, 1994, p. 304). Que tienen un carácter multiplicativo.

Referencias bibliográficas

- Confrey, J. (1994). Splitting, Similarity and rate of Change: A new Approach to multiplication and exponential functions. In: The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany: New York press. pp. 291-330.
- Narváez, D., Urrutia, E. (2005). La construcción de esquemas splitting: un experimento de enseñanza¨. Bogotá: UDFJC.
- MEN (1998). Serie Lineamientos Curriculares de Matemáticas: Colombia.
- Rojas P., Romero J., MESCUD (2006). *Estrategias para promover la multiplicación como cambio de unidad*. XXI Encuentro. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Aproximación a la comprensión de la Proporcionalidad Directa.
Reporte de una experiencia

López Poveda, Armando Antonio
armando.andinohotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

La siguiente propuesta corresponde a la experiencia de aula relacionada con los significados personales de los estudiantes al realizar una determinada tarea o lección matemática en un proceso de estudio dirigido sobre la proporcionalidad directa. Se enmarca en avances relacionados con la tesis de Maestría en Educación, énfasis Educación Matemática, en la cual se pretende evaluar las comprensiones que manifiestan los estudiantes de grado sexto del colegio Germán Arciniegas, Jornada Tarde, en sus significados personales con relación a unos significados institucionales desde el enfoque ontosemiotico del conocimiento y la instrucción en matemáticas.

Palabras clave: Significados personales, proporcionalidad directa, enfoque ontosemiotico, proceso de estudio.

1. Introducción

La presente propuesta se enmarca en el proyecto de Maestría en Educación-énfasis Educación matemática, en el cual se pretende evaluar los significados personales de los estudiantes a partir de unos significados institucionales, planteamientos dados desde el enfoque ontosemiotico del conocimiento y la instrucción matemática. En dicho objeto de profundización-investigación se han encontrado diferentes posturas que muestran como a pesar de la gran

cantidad de trabajos relacionados con el tema, son insuficientes al momento de evaluar dichos significados.

Uno de los planteamientos que sustenta el interés en la investigación-profundización es lo que menciona Prieto (2009) citando de los estándares del NCTM: "relativamente pocos alumnos de grados altos tienen la habilidad para usar el razonamiento proporcional de manera consistente". De esta forma se tiene que la destreza del razonamiento proporcional solo se consigue a partir de la resolución de problemas y de tareas o situaciones propias de las matemáticas. Estas *insuficiencias* que tienen los estudiantes con relación a la Proporcionalidad Directa es objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas en la medida en que se aborda la comunicación de los conocimientos matemáticos, en este caso, la de los conocimientos relacionados con la proporcionalidad directa. Con relación a esta insuficiencia, Rivas (2012), menciona que en las pruebas PISA el razonamiento proporcional de los estudiantes al resolver situaciones problemas es limitado.

2. Marco de referencia

Los elementos teóricos que fundamentan la intervención en aula pueden considerarse a partir de los siguientes aspectos:

- Al caracterizar los diferentes fenómenos, objetos, hechos, procesos y eventos Lurduy (2005), propone un constructo analítico o sistema didáctico denominado el Tetraedro Didáctico en el cual se caracterizan el polo estudiante, polo cognoscitivo, polo ecológico y polo profesor.

- En la resolución de diferentes situaciones problemas Godino y Batanero, citado por Ortiz de Haro & Font (2011), consideran la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas, a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas.

- Godino describe el significado personal e institucional de un objeto matemático como "los sistemas de prácticas que realiza una persona

para resolver cierto tipo de problemas. Esas prácticas-acciones o manifestaciones operatorias y discursivas-pueden ser atribuidas a un sujeto individual, en cuyo caso hablamos de significado del objeto personal, o pueden ser compartidas en el seno de una institución y entonces decimos que se trata del significado del objeto institucional correspondiente" (Godino, 2002), (Lurduy, 2005, 2012).

- Para el análisis de la dualidad personalización-institucionalización el Enfoque Ontosemiótico propone como herramienta la noción de configuración de objetos y de procesos, representada de la siguiente manera:

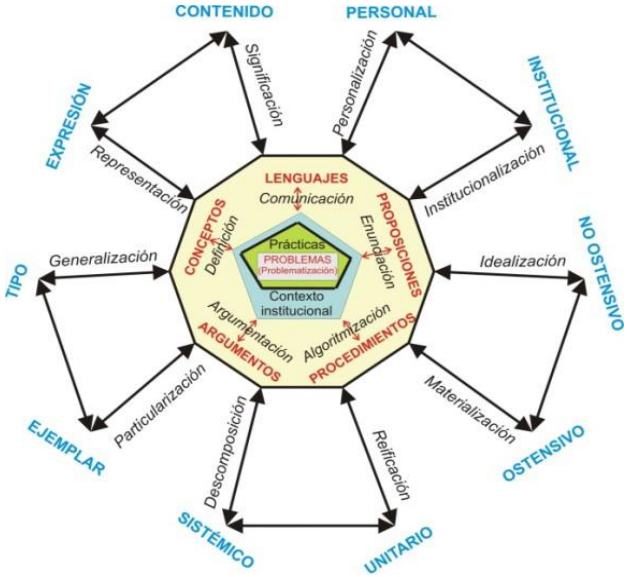


Figura 1. Configuración de Objetos y Procesos (Godino, 2013).

- Los sistemas de prácticas u objetos primarios se caracterizan desde elementos del significado tales como 1. Lenguaje (E1), 2. Situaciones (E2), 3. Acciones (E3), 4. Conceptos (E4), 5. Propiedades (E5), y 6. Argumentaciones (E6).

- Bosch (1994), describe que en un primer momento predomina una "enseñanza clásica de la proporcionalidad, en la que se reproduce en la escuela un legado matemático proveniente de la matemática griega. Desde este momento la proporción se interpreta desde una posición

formalista. La aritmética se fundamenta en seguir reglas como a:b:c:d. Se desvincula la proporcionalidad de las fracciones.

- En un segundo momento (a finales del siglo XVII) se evidencia un desarrollo de la teoría de funciones. En este momento se interpreta la proporcionalidad como función lineal. Con la llegada de nuevas técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad, además de la perdida generada sobre la identidad de la proporcionalidad, desde el punto de vista educativo se produce el fenómeno en el cual es posible realizar la resolución de problemas proporcionales, sin que ello amerite una comprensión en sí de lo que es la proporcionalidad.

- Un tercer momento se marca por los estudios de Piaget y Vygotsky (Inhelder y Piaget (1996), Vygotsky (2000)). En este momento histórico se promovió una revisión sobre lo que se estaba haciendo en las escuelas en dos direcciones: 1) Pertinencia de las exigencias cognitivas demandadas a los niños, 2) Reflexión sobre qué estaba haciendo la escuela para fomentar su desarrollo.

- En un cuarto momento se establece que para que las matemáticas sean comprendidas (en estas el objeto matemático proporcionalidad directa), deben ser enseñadas.

3. Aspectos metodológicos

Para evaluar de los Significados Personales de los estudiantes se utilizarán las siguientes herramientas, las cuales pretenden recoger datos que posibiliten identificar, caracterizar y tipificar (de esta manera se entiende la evaluación) los Significados Personales de los Estudiantes.

Herramientas, Medios		Significados Personales de los Estudiantes
Portafolio	→	Significados Personales Logrados
Portafolio-Video	→	Significados Personales Declarados
Entrevista	→	Significados Personales Globales

Para la recopilación y análisis de la información una de las Redes Categoriales que se utilizo fue la siguiente:

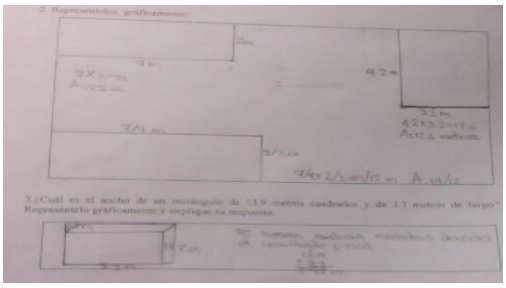
SISTEMAS DE PRÁCTICAS (S)	**SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES (S.I)**		
	REFERENCIAL (I.R) →	**PRETENDIDO (I.P)** →	**IMPLEMENTADO (I.I)**
DISCURSIVAS (S.D)	1) En Egipto hacia el siglo III a.c. una evidente utilización de la proporcionalidad en los problemas algebraicos que eran equivalentes a resolver ecuaciones de la forma x+ax=b se resolverían mediante el uso de proporciones.	1) Entre del campo conceptual Vergnaud (1991) define Tres categorías que son: Isomorfismo de medidas, Producto de medidas, Proporcionalidad múltiple diversa del producto.	1) La razón es una comparación por división de dos cantidades. 2) El Coeficiente de proporcionalidad o constante de proporcionalidad de dos magnitudes directamente proporcionales, es el número que transforma por multiplicación las cantidades de una magnitud, en cantidades correspondientes de la otra.
OPERATIVAS (S.O)	1.2) Si ellos son desiguales, tome del mayor la diferencia entre los dos. Los restos estarán entonces no balanceados, lo cual es absurdo. Por consiguiente los pesos no pueden ser iguales 1.3) Si toma del mayor la diferencia entre los dos .los restos iguales estarán por consiguiente balanceados. Por tanto, si agregamos la diferencia de nuevo, los pesos no estarán balanceados pero se inclinarán hacia el mayor. 1	1) Dos magnitudes son proporcionales o directamente proporcionales si sus cantidades se corresponden biunivocamente, ordenadamente, en la igualdad y en la suma.	1 f(1) x f(x) 1)Multiplicación: encontrar f(x) 2)Tipo de división (partición) : encontrar f(1) 3)Tipo de división II (cuotitiva). Encontrar x X1 f(X1) X2 f(X2) 4)Problema de regla de tres encontrar cualquiera de estos cuatro conociendo los otros tres.
NORMATIVAS (S.N)	1) Libro I y V de Euclides _acerca del equilibrio y el centro de gravedad de los planos; en cuanto a este se plantean las siguientes proposiciones que posteriormente se tomaran como los conceptos y teoremas que utilizan los estudiantes cuando abordan las situaciones de tipo multiplicativo: 1.1) POSTULADO: Pesos iguales a distancias iguales (del punto de apoyo de una balanza de brazos iguales) se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el equilibrio y hay una inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia. 1.2) PROPOSICIÓN 1: Pesos balanceados a igual distancia son iguales. 1.3) PROPOSICIÓN 2: Pesos desiguales a iguales distancias no estarán balanceados pero se inclinarán hacia el mayor peso. 1.4) PROPOSICIÓN 3: Pesos desiguales estarán balanceados a distancias desiguales, si el peso mayor está a menor distancia.	1) Propiedades de la Proporcionalidad. "…si se supone A,B son magnitudes directamente proporcionales, y si a $\in$ A, b $\in$ B de tal manera que a y b son correspondientes, entonces para el número racional, sucede que: axc y bxc son cantidades correspondientes; es decir axc $\in$ A y bxc $\in$ B, y $\frac{axc}{bxc}$ es la constante de proporcionalidad.	1)Propiedades de las proporciones: ad = bc a/b = c/d, entonces a+c/d+b = a/b si a/b = c/d, se cumple a+c/b =c+ d/d si a/b = c/d, entonces a+b/a-b = c+d/c-d si a/b = c/d, entonces a+b/a = c+d/c 2) Las propiedades de isomorfismo de la función lineal. - f (n x) = n f(x) para cualquier número real n - f (n1 x1 + n2x2) = n1 f (x1) + n2 f (x2). 3)Propiedades referidas al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas: - f (x) = a x, x = 1/a f (x). 4)Propiedades de la bilinealidad: - f (n1 x1, n2x2) = n1 * n2 f (x1 , x2). 5) Ley de la proporcionalidad directa: y=k.x, siendo k la constante de proporcionalidad.

4. Desarrollo de la propuesta

Para el desarrollo de la propuesta (experiencia en el aula de clase) se propusieron un conjunto de actividades relacionadas con la interpretación que realiza el grupo Crisálida de la siguiente manera:

ACTIVIDADES		
Actividades de Acción	Situación Problema 1	Identificar como los estudiantes se enfrentan a situaciones que involucran razón y proporción.
	Situación Problema 2	Reconocer las estrategias que siguen los estudiantes de grado séptimo en la resolución de problemas de la categoría de producto de medidas
Actividades de Formulación	Situación Problema 3	Reconocer las estrategias que siguen los estudiantes en la resolución de problemas de la categoría de isomorfismo de medida.
	Situación Problema 4	Reconocer las estrategias que siguen los estudiantes en la resolución de problemas de la categoría de isomorfismo de medida.
Actividades de Validación	Situación Problema 5	Posibilitar que los estudiantes validen las nociones de magnitud, cantidad de magnitud, relación entre magnitudes.
	Situación Problema 6	Posibilitar que los estudiantes apliquen las nociones tratadas en las anteriores actividades para dar solución a un problema de razonamiento proporcional
Actividades de Institucionalización	Situación Problema 7	Posibilitar que los estudiantes apliquen las *nociones* tratadas en las anteriores actividades para dar solución a un problema de razonamiento proporcional.
	Situación Problema 8	Posibilitar que los estudiantes apliquen las *nociones* tratadas en las anteriores actividades para dar solución a un problema de razonamiento proporcional.

Con relación a la solución de situaciones-problema algunos de los resultados obtenidos son los siguientes:

EVIDENCIA	**REFLEXIÓN**
Situación Problema  Figura 2. Solución del estudiante 1	En dicha situación problema se puede evidenciar como los estudiantes resuelven situaciones de área en las cuales multiplicaron el largo y el ancho en cada uno de estos. Dicha situación y utilizando elementos teóricos propios del enfoque ontosemiotico, puede evidenciarse que el *estudiante 1* y *estudiante 2* pertenecen al Nivel *P1.PO.E4.8 (total = 13 estudiantes), por* cuanto se evidencian unos Significados Globales, unas prácticas Operativas y las acciones que realiza- representadas por E4, se definen como establecer relaciones de tipo Multiplicativo entre dos variables: Largo y Ancho. En las soluciones presentadas también se muestra como

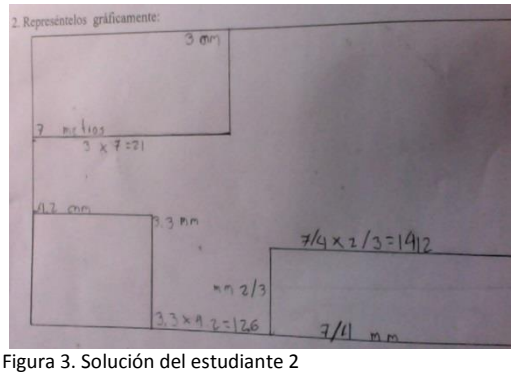


Figura 3. Solución del estudiante 2

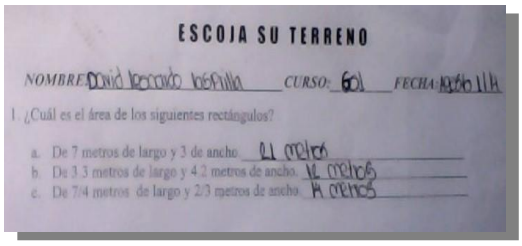


Figura 4. Solución del estudiante 3

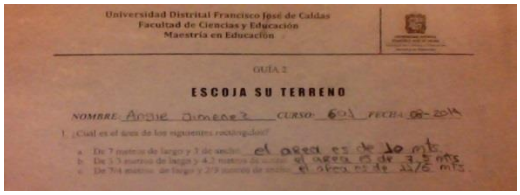


Figura 5. Solución del estudiante 4

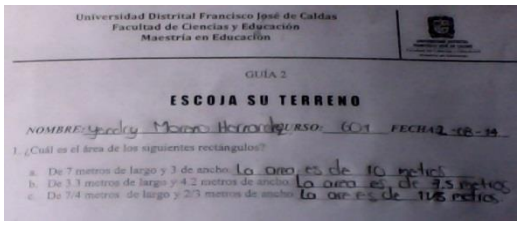


Figura 6. Solución del estudiante 5

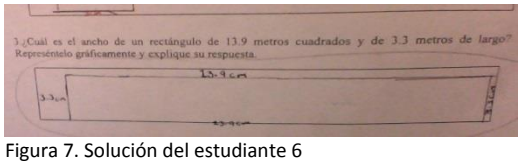


Figura 7. Solución del estudiante 6

los estudiantes 1 y 2 se le dificulta el manejo de números décimales al momento de realizar la respectiva operación. *Estos estudiantes hacen uso de representaciones pictóricas que facilitan la coordinación de todas las cantidades involucradas (P1.PD.E12).*

El *estudiante 3* realiza las respectivas multiplicaciones, no obstante con relación al área de los rectángulos en cuyos largos y anchos se utilizan números decimales y fraccionarios solo tiene en cuenta la parte entera evidenciando el no reconocimiento de dichos conjuntos numéricos (8 estudiantes).

Con relación a la solución presentada por el *estudiante 4*, este realiza sumas sin tener en cuenta como determinar el área y sin establecer relaciones multiplicaticativas entre el largo y el ancho. (en total 7 estudiantes).

En la solución presentada por el *estudiante 5,* este realiza operaciones arbitrarias (sumas) sin tener en cuenta la estructura numérica de cada uno ni el conjunto al cual pertenecen.(en total dos estudiantes en 601 y un total de 18 estudiante en 602).

Con relación al *estudiante 6*, se puede evidenciar que asume el área como el largo del rectángulo. Lo representa de forma arbitraria al establecer dichas medidas (*Nivel P1.PO.E43).*

En la solución presentada por el *estudiante 7* se puede evidenciar como dicho estudiante configura un Sistema de Prácticas Operativas en las cuales predomina el Objeto primario *Lenguaje* en la medida en que utiliza representaciones para notar el área, siendo estas Icónicas, Algebraicas, entre otras. *(P1.PD.E1.1)* (12 estudiantes de 602).

Con relación al estudiante No 8, se puede evidenciar que realiza aproximaciones multiplicando el ancho por diferentes valores (entre ellos “4” hasta hallar el valor o cantidad de área).

Realiza comparaciones de tipo cuantitativo entre medidas de diferentes figuras e igual dimensión (largo-ancho-superficie).

Con relación a este aspecto se puede evidenciar que se encuentra en un *Nivel P1.PO.E4.6*, en el cual realiza diferentes comparaciones en las cantidades de medida del Largo, Ancho y el área.

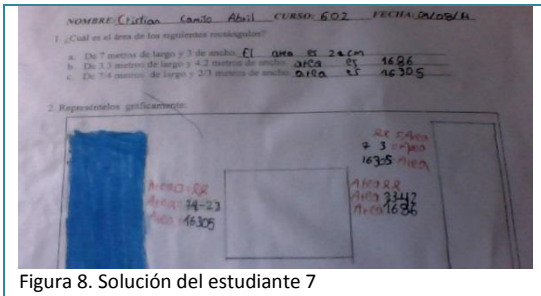


Figura 8. Solución del estudiante 7

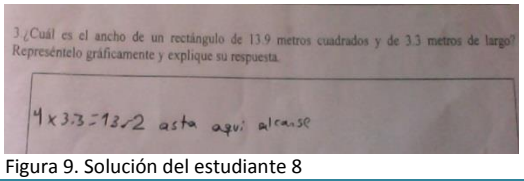


Figura 9. Solución del estudiante 8

5. Conclusiones

La actividad desarrollada con los estudiantes corresponde a las Actividades de Acción, en las cuales lo que mayormente de evidencia son tipos de prácticas Operativas y Discursivas. Este tipo de prácticas puede mencionarse por dos hechos importantes:

- Metodológicamente al ser Actividades de Acción requiere que los estudiantes realicen un conjunto de acciones sobre la actividad presentada que previamente han sido consideradas en las Redes Categoriales propuestas en el diseño previo.

- Las respuestas de los estudiantes permiten se categorizaron en niveles. Un ejemplo de lo realizado es el siguiente:

  P1.PO.E4.6: Predomina en este nivel los Sistemas de *Prácticas Operativas* por cuanto el estudiante opera utilizado números enteros y reconociendo al mismo tiempo la importancia que en los procesos numérico tiene la aproximación. Se presentan *Significados Personales Globales*, en los cuales el Elemento de Significado que se percibe corresponde a *E4* (Acciones).

Respecto a mi labor como docente, considero importante y necesario que se asuman posturas investigativas en el aula en las cuales se tengan “razones” para mejorar las prácticas de enseñanza y por ende de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

- Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo didáctico (2006). La Modelización y el problema de la Articulación de la Matemática Escolar. *Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal* , 37-74.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. En *Recherches en Didactique des Mathématiques* , 237-284.
- Lurduy, J. (2005). Algunos Elementos Conceptuales para la Comprensión de la cultura del Aula. En MESCUD, *Cuadernos de Investigación. Rutas de estudio y aprendizaje en el aula el caso de las matemáticas* (págs. 58-83). Bogotá.
- Lurduy, J. (2012). Conceptualización y evaluación para el análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los estudiantes para profesor de matemáticas. En Revista Científica, 87-108. Bogotá
- Lurduy, J. (2012). El Sistema Didáctico y el tetraedro Didáctico:elementoa para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las Matemáticas. En R. P. Neira Gloria, *Pensamiento, epistemología y Lenguaje Matemático*, p. 75-98. Bogotá: Comité editorial CADE.
- Ortiz de Haro, J. J., & Font, V. (2011). Significados personales de los futuros profesores de Educación Primaria sobre la media Aritmética. En: *EDUCACIÓN MATEMÁTICA Vol. 23 No. 2*, p. 91-109.
- Prieto, L. (2009). *Proporcionalidad simple: estrategias utilizadas por los estudiantes.* Bucaramanga.
- Rivas, M. (2012). Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria. *Tesis Doctoral*. Editorial de la Universidad de Granada. España.

La investigación sobre el objeto matemático escolar función lineal en la Educación Superior en Bogotá 1990 - 2012
Una revisión bibliográfica exhaustiva

Ferro Parra, Raúl - Lurduy Ortegón, Orlando
raulmu22@gmail.com – jorlurduy@gmail.com
Estudiante de Maestría, (Colombia) - Docente Investigador, (Colombia)

Resumen

Se presentan los avances del trabajo para opción de grado de maestría: una revisión bibliográfica exhaustiva en torno al objeto matemático escolar función lineal, desde la producción textual y su representación, usando como herramienta la investigación documental a través del Análisis Cualitativo del Contenido (ACC) en textos escritos, para cuya interpretación se usará la perspectiva Teórica - Metodológica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) y específicamente la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS) alrededor de los trabajos de producción textual como investigación formativa en el nivel de pregrado y posgrado realizados entre el año 1990 y el año 2012 en los principales centros de educación superior en la ciudad de Bogotá.

Palabras clave: Revisión bibliográfica, investigación, función lineal, enfoque ontosemiótico.

1. Introducción

La investigación que se está desarrollando lleva como título "*La investigación sobre el objeto matemático escolar función lineal en la Educación Superior en Bogotá 1990 - 2012, Una revisión bibliográfica exhaustiva"*, y se sigue de la siguiente manera:

Se pretende dar cuenta del saber acumulado en los trabajos para obtención de títulos de pregrado y/o posgrado en torno al objeto matemático escolar función lineal, en cinco universidades (Pedagógica, Distrital, Nacional, Antonio Nariño y Gran Colombia) a través de una investigación que en su reducción (deductiva) se considera de carácter cualitativa, documental, de estado del arte, de análisis cualitativo de contenido en textos escritos, a través de una revisión bibliográfica exhaustiva. Reconociéndose como problema, por una parte, la falta de un estudio que dé cuenta del saber acumulado en torno al objeto matemático escolar función lineal en la ciudad de Bogotá entre 1990 y 2012, teniendo en cuenta los cambios en la educación que se han dado durante este periodo. Por otra parte se reconoce que cada institución tiene sus profesionales que han direccionado y otros que han realizado estudios, en relación con el objeto matemático escolar función lineal, siguiendo diferentes metodologías y diferentes énfasis (respecto al entorno, el saber, la enseñanza o el aprendizaje), produciéndose vacíos y tensiones en la comunidad académica.

Este trabajo ayudará a futuros docentes investigadores a identificar qué existe y qué falta en relación a la investigación sobre los procesos de estudio sobre la función lineal.

2. Marco de referencia

En la ruta propuesta para el presente trabajo se considera un orden teórico paralelo a la reducción de los datos, en primera instancia a través de una mirada organizativa y pedagógica establecida en *El Sistema Didáctico y el Tetraedro Didáctico*, (SDyTD) propuesto por Lurduy (2005 -2012) el cual, como constructo teórico analítico permite la observación del sistema didáctico y la construcción de significados didácticos que pueden ponerse en

juego en los trabajos de pregrado y posgrado, inicialmente aterrizando estos (los trabajos) de acuerdo a sus características en cualquiera de los cuatro polos (epistémico, ecológico, cognitivo y didáctico).

Luego, desde la postura del *Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática* (EOS), propuesto por Godino y colaboradores (1991- 2012), presentado en Godino (2010), se reconocen y usan en un primer nivel, a partir de los sistemas de prácticas (operativas discursivas y normativas), los significados (institucional y personal), junto con las tipologías asociadas (en el institucional: referencial (IR), pretendido (IP), implementado (II) y evaluado (IE), y en el personal: global (PG), declarado (PD) y logrado (PL)), en la estructura general de las fuentes primarias usadas en el análisis.

En otro momento, y usando por una parte como herramienta propuesta en el EOS, el significado de un objeto matemático escolar, como el sistema del conjunto de prácticas discursiva, operativa y normativa Lurduy (2013), los elementos primarios de significado (Godino), considerados desde la propuesta de Lurduy de forma tríadica: el diseño, a partir del lenguaje, el discurso y las situaciones; la gestión, vista desde los procedimientos, actuaciones, propiedades y relaciones; y la evaluación a partir de los conceptos los argumentos y las reglas. Se reconoce la configuración epistémica establecida por EOS, desde la propuesta de Font (2007) para el estudio de las funciones.

En particular en esta investigación se reconoce como elemento reductor la función lineal puesta en escena en los procesos investigativos y formativos en las instituciones de educación superior, lo que nos lleva a identificar los trabajos que respecto a su estructura y puesta en los procesos de estudio presenta mayor completitud.

Por último y haciendo uso de los niveles de expresión semiótica (icono, índice y símbolo) propuestos por Peirce (Eco, 1973), y retomados por Lurduy (2013), se hace una mirada descriptiva, más fina de los textos que en su reducción fueron vistos como más completos.

3. Aspectos metodológicos

Este ejercicio investigativo se considera una investigación: cualitativa, documental, de estado del arte, de análisis cualitativo de contenido en textos escritos, a través de una revisión bibliográfica exhaustiva. Se sostiene en cuatro teóricos investigativos: con Hoyos (2000), se consideran las fases de la investigación (preparatoria, descriptiva, interpretativa, de construcción teórica y publicación) y las fichas de recolección y organización de la información (bibliográfica, descriptiva y sinóptica, rediseñadas por Lurduy (2005)).

Con Piñuel (2002), se reconoce que este tipo de investigación debe llevar: texto a como fuente primaria a indagar, definición de categorías a usar, estructuración de las unidades de análisis, y el método de conteo. Con Abela (2001), se hace una reorganización de las unidades de análisis a partir de unidades de: muestreo, contexto y registro.

Lurduy (2009), establece una ruta metodológica y teórica sostenida en: la teoría fundamentada de los datos TFD, el Análisis Cualitativo de Contenido ACC y el análisis semiótico de textos AST. Reconociendo con la TFD que se Identifica a través de los significados (propuestos por el EOS), se describe a partir de los elementos primarios de significados y se caracteriza con los niveles de expresión semiótica.

4. Desarrollo de la propuesta

El ejercicio investigativo a partir de la construcción del anteproyecto ha pasado por los siguientes momentos:

1) Identificación de las instituciones con programas de formación en niveles de pregrado o posgrado en la ciudad de Bogotá. Se revisó las universidades con programas de: matemáticas, educación matemática, y/o matemática aplicada, encontrándose 14 instituciones.

2) Se escogieron aquellas universidades con registro calificado vigente y con programas de formación en educación (Universidades: Distrital –UD–, Pedagógica –UPN–, Nacional –UN–, Gran Colombia –UGC–, y

Antonio Nariño –UAN–,) a excepción de la Universidad Nacional, que por su historia ha tenido gran reconocimiento en educación.

3) Se procedió a revisar en las bases de datos de estas universidades encontrando 1758 trabajos, de las cuales 421 corresponden a la UD, 505 a la UPN, 542 UN, 219, UGC, y 71 UAN.

4) Visita a las bibliotecas de las universidades para verificación de los trabajos existentes, encontrándose 1560 donde 421 corresponden a la UD, 456 a la UPN, 495 UN, 147 UGC, y 37 UAN.

5) De estos trabajos encontrados se extrajeron inicialmente todos aquellos que tratan el tema de la función, encontrándose 113, a los cuales se les hizo una primera clasificación, usando los polos propuestos en el tetraedro didáctico.

6) De estas 113 se extractaron 46 en relación a la función lineal y temas afines (ecuaciones lineales), a estas, además de tener la categorización propuesta por el tetraedro didáctico, se les revisaron sus significados institucionales a través de las prácticas operativas y discursivas dispuestas en las estructuras de los trabajos.

7) De las 46 se extractaron 18 en torno al concepto de función lineal. De estas en el proceso de reducción, teniendo en cuenta que heredan los estudios realizados con anterioridad, se les identificó los elementos primarios de significado para poder identificar los trabajos que más elementos comprometen, desde la configuración epistémica propuesta por Font (2006).

8) De estas últimas 18, se tomaron las 3 más completas, para realizar una caracterización a través de los niveles de expresión semiótica propuesta por Lurduy.

5. Conclusiones

El desarrollo del trabajo ha permitido como ejercicio investigativo: a nivel metodológico reconocer los parámetros legales propuestos en la reducción, tales como; las instituciones con programas de formación en matemáticas

vigentes, los procesos de acreditación de programas de pregrado y posgrado, y el proceso investigativo que ofrecen las instituciones escogidas para el proceso donde se evidencia la trascendencia investigativa en las propuestas textualizadas en los trabajos de grado y posgrado.

La ruta teórico – metodológica propuesta y desarrollada a partir de la investigación documental permite una reducción y caracterización de los momentos que se han llevado a cabo reconociendo que la estructura de los escritos llevan una misma secuencia pasando por el problema, los objetivos, la justificación y el sostenimiento en un marco teórico y metodológico propio que dan forma al ejercicio investigativo.

Todo trabajo evidencia a partir de la estructura establecida unos significados institucionales construidos y puestos en juego desde las prácticas normativas (constitución, leyes, decretos, currículo), las prácticas operativas (el problema y el desarrollo de este), las prácticas discursivas (el modo de proponer y desarrollar el trabajo) y unos significados personales en el desarrollo de las ideas y las conclusiones del trabajo.

Referencias bibliográficas

- Abela, J. (2001). Las técnicas de Análisis de Contenido: Una revisión actualizada. Universidad de Granada. España
- Eco, U. (1973). El Signo. Traducido por Francisco Serra Cantarell. Editorial Labor, Barcelona.
- Font, V. (2007) Una aproximación semiótica a la didáctica de la derivada. Recuperado el 30 de noviembre de 2009, de: http://www.webpersonal.net/vfont/SEIEM 2005defVFont.pdf
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2010). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado el 02 de marzo de 2010, de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf.
- Hoyos, C. (2002). Un modelo para la investigación documental. Medellín. Señal Editora.
- Lurduy y Otros (2005). Rutas de estudio y aprendizaje del aula. Primera aproximación a su estudio, para el caso de las matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Lurduy, O. (2009). El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de caldas. Bogotá. Colombia.
- Lurduy, O. (2011) Evaluación de las competencias de análisis y reflexión didáctica en estudiantes para profesor de matemáticas. El caso de la Universidad Distrital-LEBEM. Tesis doctoral no publicada, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas: DIE. Bogotá D.C, Colombia.
- Lurduy, O. (2013). Conceptualización y evaluación de las competencias para el análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los estudiantes para profesor de matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. DIE-UD Bogotá. Colombia.
- Piñuel, J. (2002). Epistemología, Metodología y Técnicas del Análisis de Contenido. Universidad Complutense de Madrid. España

Evaluación de los Significados Personales de los estudiantes en la construcción de la función lineal

Torres Fabio

fntorresz@gmail.com

IED Fernando González Ochoa - Estudiante de Maestría, (Colombia)

Resumen

En este documento se tratan los principales aspectos para el diseño de una investigación que evalúa los significados personales de los estudiantes de grado noveno en la construcción noción de función lineal. Inicia con los ejes estructurales del trabajo de grados, la revisión teórica y se expone la teoría base del trabajo Enfoque Ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática. En el último apartado, se ubica la propuesta de investigación bajo el método de investigación cualitativo y se exponen las fases que se tendrán en cuenta: partiendo de la delimitación del enfoque teórico, implementación de una secuencia de actividades, construcción de instrumentos de caracterización y análisis, triangulación de los análisis obtenidos, hasta llegar al informe final.

Palabras clave: Enfoque ontosemiótico, objeto matemático, facetas institucional y personal, elementos del significado.

1. Introducción

En la revisión bibliográfica se encuentran experiencias de investigación en torno a la función y función lineal realizadas por Azcárate (1996), Higueras (1998) y García (1997) entre otros, donde se reporta que los estudiantes tienen la dificultad de establecer e identificar, el paso de la representación verbal a la representación

escrita, no permitiendo el paso a otro tipo de representación (tabular, gráfica y simbólica) y una vaga idea de la noción de función lineal.

Se evidencia poco desarrollo de trabajos o herramientas para la realización de análisis relacionados con la noción de función lineal (uso de sus representaciones), a nivel de la básica a partir del Enfoque Ontosemiótico (EOS) propuesto por Godino (2001-2008) y desarrolladas para nuestro medio por (Lurduy, 2005-2011), que posibiliten una mejor comprensión y posibilidades de actuación didáctica de los profesores de la educación básica en Colombia.

Por lo anterior y bajo este marco, es importante, pertinente y viable llevar a cabo una caracterización y análisis de los significados personales de los estudiantes de grado noveno en el trabajo con la función lineal y sus representaciones, en términos de significados personales declarados, evaluados y de referencia y sus relaciones con significados institucionales de referencia, pretendidos, implementados y evaluados.

2. Marco de referencia

En trabajos anteriores, Godino y colaboradores (1991,…2012) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran *un enfoque ontológico-semiótico* de la cognición e instrucción matemática, en el que se le asigna un papel central al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos que se ponen en juego en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002).

La motivación de estos autores para la elaboración de las nociones introducidas (significados institucionales y personales, entendidos, como sistemas de prácticas, objetos emergentes, dualidades cognitivas, función semiótica) fue progresar en la articulación de diversos modelos teóricos existentes en didáctica de las matemáticas, tales, como la teoría de Situaciones Didácticas, teoría de los Campos Conceptuales y teoría Antropológica.

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

A continuación se exponen los elementos que se tomaron del EOS para la construcción del marco de referencia e instrumentos de análisis:

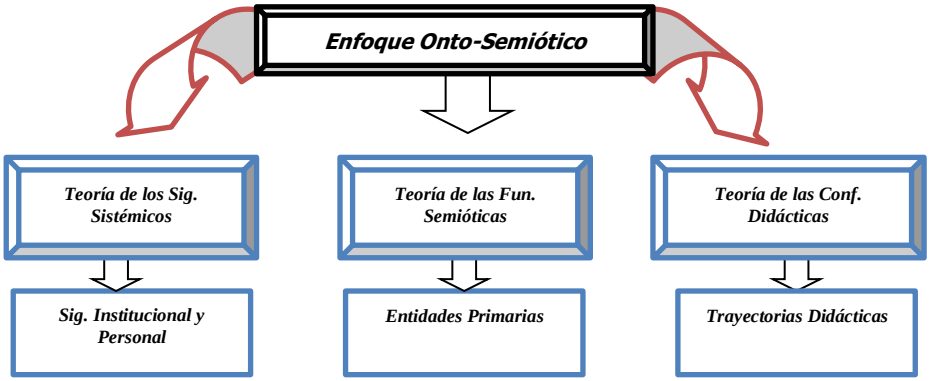


Figura 1. *Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)*

3. Aspectos metodológicos

La investigación está dirigida a estudiantes de un curso de grado noveno del colegio distrital Fernando González Ochoa Jornada Mañana, ubicado en la localidad de Usme, con un numero de 35 estudiantes, cuyas edades oscilan entre los 13 y 17 años, los cuales tienen una intensidad horaria en matemáticas de 4 horas semanales.

Esta propuesta se enmarca dentro de la investigación cualitativa, y se compromete en cuatro grandes etapas de desarrollo:

- Etapa 1: *Revisión Bibliográfica*: Construcción teórica y revisión bibliográfica, apropiación teórica y definición de anteproyecto.
- Etapa 2: *Apropiación Teórica*.
- Etapa 3: *Aplicación metodológica de la investigación.*
- Etapa 4: *Resultados y conclusiones.*

4. Desarrollo de la propuesta

Para la reducción y selección de los casos a investigar se parte del grupo total de estudiantes (C_1, C_2,…, C_{35}), y durante las actividades de la secuencia previas a la indagar (Acción y Formulación) se realizó una selección y división en tres grupos de acuerdo a los fines de la investigación, en términos de sus declaraciones: discursivo, normativo y operativo.

En la siguiente tabla se resume el primer proceso llevado a cabo en la selección de los casos, donde se hizo la recopilación y delimitación de la base inicial con la primera actividad del conjunto de actividades del Zoom.

Tabla 1. Proceso de recolección y reducción de Información 1.

Actividad de Acción (A_1)			
Nivel de Trabajo	Subdivisiones o Momentos de las Actividad		
	Acción (M_1)	Formulación (M_2)	Validación (M_3)
Bajo	C_5, C_6, C_7, C_9, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{15}, C_{17}, C_{18}, C_{21}, C_{29},	C_5, C_6, C_7, C_9, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{17}, C_{18}, C_{22}	C_5, C_6, C_7, C_{11}, C_{12}, C_{15}, C_{17}, C_{18}, C_{21}, C_{29}, C_{31}
Medio	C_1, C_4, C_8, C_{10}, C_{19}, C_{20}, C_{22}, C_{23}, C_{26}, C_{27}, C_{31}, C_{33}, C_{35}	C_1, C_4, C_8, C_{10}, C_{19}, C_{20}, C_{23}, C_{26}, C_{27}, C_{29}, C_{31}, C_{35}	C_1, C_4, C_8, C_{10}, C_{19}, C_{20}, C_{22}, C_{23}, C_{26}, C_{27}, C_{33}, C_{35}
Alto	C_2, C_{14}, C_{16}, C_{24}, C_{25}, C_{28}, C_{30}, C_{32}, C_{34}	C_2, C_{16}, C_{24}, C_{25}, C_{28}, C_{30}, C_{32}, C_{33}, C_{34}	C_2, C_{16}, C_{24}, C_{25}, C_{28}, C_{32}, C_{34}

En la tabla se evidencia que algunos de los desarrollos de los estudiantes no eran pertinentes para el fin de la investigación, al igual que no todos los estudiantes tuvieron participaciones o declaraciones en todos los momentos

de la actividad. Se toma como datos representativos a los estudiantes que tuvieron declaraciones pertinentes en los tres momentos de la Actividad de Acción con esta selección se conformaron grupos de trabajo donde esté uno, dos o tres de estos estudiantes en cada grupo y con estos abordar la Actividad de Formulación.

Para fines del proceso de selección y reducción de los datos, cada grupo de estudiantes se denotara por el Ci integrante del grupo que tuvo mejores declaraciones en la Actividad de Acción (Nivel Bajo: C_6, C_{15} y C_{18}, Nivel Medio: C_1, C_8, C_{20}, C_{26} y C_{35}, y Nivel Alto: C_{16}, C_{25} y C_{34}.).

Tabla 2. Proceso de Recolección y Reducción de Información 2.

Actividad de Formulación (A_2)			
Nivel de Trabajo	Subdivisiones o Momentos de las Actividad		
	Acción (M_1)	Formulación (M_2)	Validación (M_3)
Bajo	C_6, C_{15}, C_{18}	C_1, C_6, C_{15}, C_{18}	C_1, C_8, C_{15}, C_{20}, C_6, C_{18}
Medio	C_1, C_8, C_{20}, C_{26}, C_{35}	C_8, C_{20}, C_{25}, C_{26}, C_{35}	C_{25}, C_{16}, C_{26}, C_{35}
Alto	C_{16}, C_{25}, C_{34}	C_{16}, C_{34}	C_{34}

Después de realizar este segundo proceso de reducción y selección de datos se llega a cinco datos o grupos de estudiantes, se seleccionaron tres uno de cada nivel y de esta forma representar el desempeño del curso en general (C_6, C_{26} y C_{34}), que son los datos seleccionados para realizar la caracterización, análisis y descripción (evaluación) de la los significados de los estudiantes.

La secuencia de actividades implementada está construida y organizada bajo una aproximación del enfoque teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brosseau. Al trabajar bajo la TSD en cada una de las Situaciones se puede dividir o generar unos momentos dentro de las mismas, que se clasifican de acuerdo con las acciones de los participantes en Acción, formulación, validación e Institucionalización.

En esta división en momentos, se tendrán en cuenta solo las acciones de los estudiantes en cada momento.

Tabla 3. División de la situación de validación e instrumentos de recolección.

	Momentos	Acciones de los participantes	Textos a Indagar
Situación de Validación	Acción (Trabajo Individual)	Se sitúa ante el problema e identifica una estrategia base.	Portafolio
	Formulación (Grupos de Trabajo)	Los estudiantes comunican entre ellos sus estrategias y las reformulan.	
	Validación (Exposición de los desarrollos en grupos)	Los estudiantes justifica, prueba y valida sus estrategias.	Video

5. Conclusiones

En el proceso de observación y registro de la investigación en el aula de un subconjunto de estudiantes, a partir de los instrumentos de registro y descripción, posibilita identificar en los textos indagados un espacio de posible convencionalidad, lo cual permite la realización de descripciones nutridas y dar elementos para hacer las apreciaciones necesarias en cuanto a cada uno de los momentos en el que los significados de los estudiantes se evidenciaban, y así, lanzar algunos juicios de valor cualitativos bajo la mirada de los elementos primarios del significado y los niveles de expresión semiótica.

Referencias bibliográficas

- Azcárate, C. Y otros. (1996). *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis. Octubre.
- García, G. Y otros. (1997). Cuadernillo didáctico. *Hacia la noción de función como dependencia*. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- *Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2):33-115. Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo.*
- D'Amore, B. y Godino, J. (2007). *El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2, 191-218.

- Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14, 3, 325-355.
- Godino, J. (1999). *Implicaciones metodológicas de un enfoque semiótico-antropológico para la investigación en didáctica de las matemáticas*. En T. Ortega (Ed.). *Actas del III Simposio de la SEIEM* (p. 196-212). [Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/semiotica.htm].
- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: URL: http://www.urg.es/local7jgodino7indice_tfs.htm.
- Godino, J. y Font, V. (2007). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos.* Disponible en: http://w+ww.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm
- Godino, J. y Cols. (1991-2012). *Teoría de la Educación Matemática -Universidad de Granada: Grupo de investigación.* Teoría y metodología de investigación en Educación Matemática. http://www.ugr.es/local/jgodino
- Lurduy, O. (2012) *El tetraedro didáctico como modelación de los procesos de estudio de las matemáticas en el aula.* DIE-UD. Bogotá, Colombia.
- Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Universidad de Jaén. Jaén.

Comprensión y reflexión de la tarea argumentativa que emerge en la demostración geométrica de estudiantes para profesor

Arévalo Vanegas, Camilo - González Pinilla, Oscar
kmilo741a@gmail.com – oscarmateud@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Algunos trabajos investigativos constatan el fracaso respecto a la capacidad del estudiante para formular una demostración (Balacheff, 1988), esto se debe a que conciben la matemática como la memorización de algoritmos, limitándose a copiar los procesos que plantea el docente en sus clases, como señala Gascón (2001) y Balacheff (1988) quien formula; ¿Qué nivel de comprensión alcanzan los estudiantes en una demostración, si ésta se basa exclusivamente en la imitación?

Ante esta problemática se plantea una propuesta, que pretende que tres estudiantes para profesor de matemáticas, se involucren con un problema que exija la demostración geométrica y así reconocer la importancia de caracterizar y analizar la tarea argumentativa que emerge en ellos. Por ello se exploran las fases de resolución de problemas, entendiendo la metacognición como una estrategia de autocontrol y autoconocimiento, que lleva consigo procesos de planificación, supervisión y valoración, para una comprensión y reflexión de los mismos.

Palabras clave: Metacognición, demostración, geometría, resolución de problemas.

1. Introducción

El proyecto de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y su eje de didáctica y resolución de problemas, aborda la demostración desde lo aritmético, algebraico y geométrico, constituyendo la importancia de la demostración en la formación de docentes en matemáticas. Como dice Harel (1998) (Citado por Gutiérrez, 2013, p. 197), la demostración se concibe como una prueba formal y dominante, por la serie de enunciados organizados y validados desde un conjunto de reglas que le dan la esencia de veracidad, se caracteriza por su forma estructurada de gran rigor y formalidad, "Esta se convierte en tal, después del acto social de aceptar que lo es".

Para analizar los procesos de demostración y encarar dicha situación problema tomamos como referente metodológico Gutiérrez (2001), que muestra una serie de categorías en relación a dos tipos de demostración, pragmáticas y concretas, Manson, Burton & Stacey (1992), estudian los métodos para resolver problemas en matemáticas, y Polya (1989) habla del quehacer matemático del estudiante dentro de un ambiente de resolución de problemas.

En su trabajo Gutiérrez (2001), afirma que no por el hecho de que la demostración sea en sí misma un contenido de enseñanza, ésta puede dejar de ser tratada como un tema específico y esencial dentro de la enseñanza de las matemáticas. La propuesta de Manson, Burton & Stacey (1992), plantea un valioso método para resolver problemas en matemáticas, considerando el estudio de las características de los procesos cognitivos que involucra toda actividad matemática: particularización y generalización.

Y finalmente Polya (1989) que se ubica en el quehacer matemático del estudiante; basándose en métodos heurísticos donde a partir de la actitud investigadora del estudiante se conlleve al descubrimiento por medios propios, esto a partir de unos procesos planteados por el autor, comprender el enunciado, confeccionar un plan, ejecutar un plan y examinar la solución, que serán necesarios para el proceso de resolución de la situación problema.

Desde estos referentes, la propuesta tiene como objetivo primordial, caracterizar, evidenciar y reflexionar sobre la actividad argumentativa que

emerge en la práctica de resolución de problemas específicamente al demostrar geométricamente en tres estudiantes para profesor.

Este trabajo autoreflexivo será significativo en dos sentidos, uno personal y otro a nivel profesional. La búsqueda por comprender desde nosotros mismos cómo la cognición se comporta dentro de las estrategias y rutas de resolución en el campo de la demostración, estudiando la manera en que evoluciona y los posibles problemas que se encuentran, esto nos dará la oportunidad de consolidar herramientas y experiencias, a partir de la pregunta: ¿Qué procesos cognitivos emergen en la práctica de resolución de problemas en estudiantes para profesor, específicamente al demostrar geométricamente y cómo realizar un proceso de reflexión y comprensión de los mismos?

2. Marco de referencia

Al plantear una propuesta de resolución de problemas con un grupo de estudiantes para profesor que trabajen en demostración, se caracterizan los procesos que emergen en cada individuo al momento de demostrar. Igualmente esto ayuda a la hora de evidenciar el trabajo demostrativo de futuros estudiantes, valorando no solo el producto de la demostración, sino todos aquellos procesos que se generan tras abarcar distintas estrategias, formulaciones y usar varios argumentos. El presente proyecto se desarrolla a partir de referentes teóricos, que centran la atención en la resolución de problemas a la hora de demostrar; para hablar de demostración en matemáticas, es necesario aclarar el concepto, ya que se confunde con otros como prueba o explicación.

Una prueba se da cuando una explicación es reconocida y aceptada por un grupo o comunidad. Es decir la proposición de un sujeto llega a ser prueba cuando ha sido analizada, examinada y aceptada por una sociedad que le da tal estatus. Sin embargo, así como una prueba puede ser aceptada por una comunidad, también puede ser rechazada por otra, los cuales la concebirán como explicación o proposición.

Las pruebas se pueden clasificar en pragmáticas o intelectuales, las primeras apuntan a la acción o a la manifestación de los juicios o presunciones, las

segundas son las que separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades y relaciones.

Ahora bien, Boero (2007) indica que la demostración se fundamenta sobre un conjunto de definiciones, teoremas y reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente.

Sobre la metacognición y su importancia en la resolución de problemas, Santos (2007), identifica tres categorías, que garantizan dicho proceso; el contenido matemático construido del propio proceso de aprendizaje, la operatividad y el seguimiento de estrategias utilizadas en la resolución de problemas y la determinación de que tan acertado es tener en cuenta un conjetura o hipótesis que sustente y valore el contenido matemático trabajado.

Dicha propuesta se enmarca en Gutiérrez (2001), quien propone una nueva clasificación que complementa las teorías de los autores Balacheff (1988), su clasificación se enfoca en el análisis de los vacíos conceptuales que generan los estudiantes al interpretar la geometría. Esta clasificación enmarca a los estudiantes en etapas que se basan en los análisis e interpretaciones pertinentes. Sus dos grandes grupos, demostraciones empíricas en las que el elemento de verificación son los ejemplos y las demostraciones deductivas, que se basa en el análisis y razonamiento de propiedades lógicas de abstracción formal. (Véase la figura 1).

Demostraciones empíricas	Demostraciones deductivas
Empirismo naif o ingenuo: los estudiantes seleccionan ejemplos específicos, reconociendo propiedades a través de la manipulación o la visualización (métodos perceptivos)	**Experimento mental:** aunque la demostración puede llegar a ser deductiva y abstracta, todavía se reconoce la ayuda del ejemplo, por tal razón se enmarcan dos tipos de experimentos; los *transformativos*, cuando la demostración se basa en la modificación de un enunciado y los *axiomáticos*, cuando la demostración es lógica y se sustenta a través de teoremas, definiciones y postulados, que garantizan y verifican su proceso.
Experimento crucial: aunque los estudiantes saben que es primordial la generalización en la demostración, lo hacen con el ejemplo menos específico, estableciendo cuatro estructuras, la *ejemplificación*, cuando la demostración es mostrar un experimento crucial, el *constructivo*, cuando demuestra como obtuvo el ejemplo, el *analítico*, cuando la demostración se basa en propiedades matemáticas y el *intelectual*, cuando la demostración se separa de lo empírico y se basa en propiedades matemáticas y relaciones deductivas.	
Ejemplo genérico: buscan evidenciar las transformaciones y propiedades abstractas, a través de la lógica matemática, pero todavía por medio de un ejemplo, teniendo en cuenta la etapa de generalización.	**Demostración formal:** sus demostraciones muestran una serie de pasos lógicos formales y sin recurrir a ejemplos.

Figura 1. Categorización de los procesos de prueba y demostración Gutiérrez (2001).

Ésta será la clasificación que caracterice el trabajo, porque expone las etapas desde la misma demostración geométrica y los procesos que se desencadenan. Para la caracterización de los razonamientos y acciones de los estudiantes, se considerar a Manson, Burton & Stacey (1992), quienes aluden a la resolución de problemas en matemáticas desde el estudio de procesos cognitivos "particularización y generalización" y con la propuesta de Polya (1989) basándose en métodos heurísticos donde a partir de la actitud investigadora del estudiante se conlleve al descubrimiento por medios propios. (Véase la figura 2).

POLYA	**Comprender el enunciado**	**Confección de un plan**	**Ejecución del plan**	**Examinar solución/ visión retrospectiva**
	1.- ¿Entendemos el problema? *2.- ¿Podemos replantear el problema en nuestras propias palabras?* *3.- ¿Distinguimos cuáles son los datos?* *4.- ¿Sabemos a qué queremos llegar?* *5.- ¿Hay suficiente información?* *6.- ¿Hay información extraña?* *7.- ¿Es este problema similar a algún otro que hemos resuelto antes?*	*1.- Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura).* *2.- Buscar un Patrón* *4.- Resolver un problema similar más simple.* *6.- Hacer una figura.* *7.- Hacer un diagrama* *8.- Usar propiedades* *9.- Resolver un problema equivalente.* *12.- Trabajar hacia atrás.* *13.- Usar casos.* *14.- Usar un modelo.* *17.- Usar análisis dimensional.*	*1.- Implementar la o las estrategias que dedujimos o escogimos.* *2.- Tomar el tiempo razonable y que sea necesario para resolver el problema.* *3.- solicitar sugerencias* *3.- Si es necesario hay que volver a empezar.*	*1.- ¿Es la solución correcta? ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema?* *2.- ¿Hay una solución más sencilla?* *3.- ¿Podemos ver cómo extender nuestra solución a un caso general?*
Mason Burton Stacey	**Fase de abordaje**	**Fase de ataque**		**Fase de revisión**
	Prepara el terreno para un posterior ataque eficaz y se debe dedicar el tiempo conveniente, es decir ¡leer atentamente el problema! El trabajo en esta fase se estructura hacia tres preguntas: ¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero? y ¿Qué puedo usar?	Esta fase inicia cuando el problema ya se ha instalado en la mente, cuando la persona se ha apropiado de él y termina cuando se abandona o resuelve. En esta fase se pueden poner en juego diversos planes y ensayar diferentes enfoques.		Cuando se tiene una solución o se abandona el problema se revisa el trabajo hecho. Esto requiere comprobar lo que se hizo y reflexionar sobre los procesos a la par

Figura 2. Fases y etapas de resolución de problemas Polya (1989) y Mason, Burton & Stacey (1992)

3. Aspectos metodológicos

El presente trabajo se desarrolla como una investigación de carácter cualitativo, en tanto se encarga de indagar y describir textualmente lo sucedido en los momentos de resolución de problemas de carácter geométrico, enfatizando en los procesos de argumentación y demostración.

Es un estudio de caso, desde la adaptación, aplicación y evaluación de situaciones al demostrar geométricamente por estudiantes para profesor y seguirá las siguientes fases:

- Planteamiento y asignación del problema: A cargo del profesor
- Resolución del problema: A cargo de los estudiantes para profesor
- Método de resolución del problema: A partir de las fases de resolución de problemas descritas por Mason-Burton-Stacey (1992)
- Exploración de fases de resolución de problemas: Desde las categorías de demostración en geometría de Gutiérrez (2001)

4. Desarrollo de la propuesta

El problema asignado:

"Sobre los lados de un cuadrado se construyen cuatro triángulos rectángulos iguales, de tal forma que cada lado del cuadrado es la hipotenusa de cada triángulo"

La situación problema permite desarrollar de manera autónoma procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, validación grupal y según sea el caso su reformulación; haciendo de la situación una forma en el que se dinamicen los conceptos inmersos en ella y se relacionen las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas.

En las conversaciones de los resolutores se menciona explícitamente la importancia que tiene el planteamiento de preguntas, evidenciando que a partir de sus preguntas y exploraciones logran abordar el problema desde las representaciones gráficas con miras a esclarecer los conceptos inmersos en la situación y plantearse su problema de demostración. (Véase la figura 3).

Figura 3. Trabajo de resolutores.

En esta parte del momento de exploración, surge en los estudiantes la necesidad de un esquema que dé mayor información de la situación, por lo que proponen el cambio de representación, *de lo dicho en la situación, a una construcción*. En esta parte de interacción grupal se evidencia la necesidad por cambiar de representación, un dibujo o esquema que les permita evidenciar lo que la situación propone.

Ahora bien, haciendo el contraste de las evidencias con las categorías de análisis propuestas en el marco de la demostración geométrica, podemos afirmar que los *EPP* (Estudiantes para profesor) se encuentran en la primera fase de *ataque-empirismo ingenuo* dado que se hace necesaria una representación visual que pueda ser construida, para poder obtener información de la situación. Aquí los EPP dependen totalmente del dibujo pues es a partir de éste que logran hacer sus hipótesis y aserciones. (Véase la figura 4).

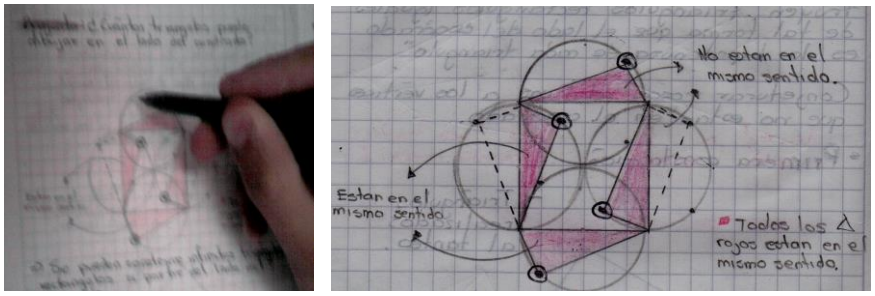


Figura 4. Evidencia cuadernos resolutores.

Es importante decir que en este caso la representación gráfica puede o no ser favorable en un trabajo resolutor, en el sentido de limitarse solamente a hablar de aspectos físicos o perceptivos de las representaciones gráficas, haciendo difícil el razonamiento y análisis de sus propiedades. Tal como lo afirma Gutiérrez (2013):

> "Es interesante analizar cómo las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos producen muchas veces dificultades durante la resolución de problemas y en la demostración en Geometría"

Sin embargo, se evidencia que los *EPP* evocan la construcción de la situación para tener una visión más determinada del problema. En este sentido la representación gráfica fue de ayuda porque permitió evidenciar ciertos atributos de la construcción así como hacerse una idea de los posibles caminos que podrían establecer. De igual manera en lo que corresponde a la demostración y sobre todo en la geometría siempre se ha utilizado el dibujo (construcción) como carácter significante de lo que es la geometría, obteniendo propiedades y características a través de su visualización. Entonces los *EPP* realizan la construcción con el objetivo de ser ayudas visuales para establecer hipótesis, conjeturas o deducciones lógicas de una demostración. Chevallard (1982) (Citado por Balacheff, 1988, p.4)

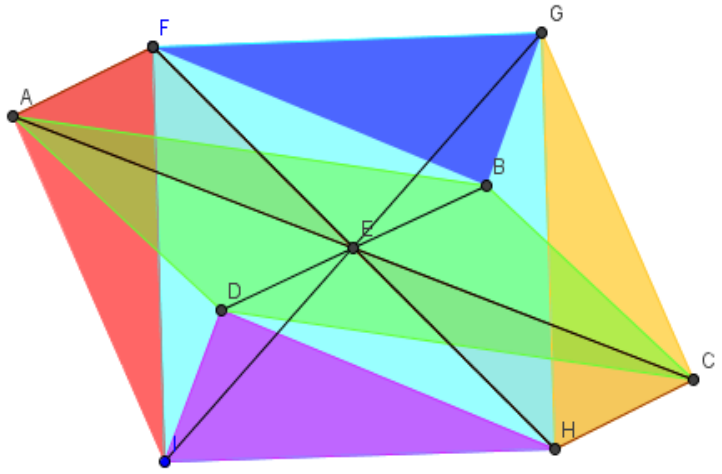
Es aquí donde podemos afirmar que en la misma etapa de exploración del problema, los *EPP* se encontraban en dos fases simultaneas, la de *ataque-empirismo ingenuo y abordaje- empirismo ingenuo,* donde no solo hacen la reconstrucción figural de la situación sino se basan en ella para construir sus primeras interrogaciones, el dibujo sirve como ayuda a enfocar el trabajo resolutor, cuando efectúan una afirmación intentan justificarla ya no desde el mismo dibujo, sino evocando más construcciones, ampliando así la gama de ejemplos que logran representar desde la percepción de los estudiantes la misma situación. De esta manera se remiten a la construcción rigurosa de varias representaciones gráficas que incorporen el problema en su generalidad, es decir que intentan llegar a un esquema que les permita decir finalmente que representa la situación con todas sus propiedades.

El trabajo resolutor de los *EPP* empieza a formalizarse cuando establecen relaciones entre las construcciones que realizan y lo que propone el problema, es aquí donde se generan discusiones frente a la manera de abordarlo y se construyen conjeturas que se empiezan a demostrar. En este

proceso de interacción y de discusión de representaciones surge la importancia de recordar las experiencias de los *EPP* frente a problemas trabajados anteriormente que fuesen muy similares a este, hacen una retrospección de su trabajo como estudiantes para determinar la manera en que deben proceder para realizar una construcción exacta que represente la situación planteada y su respectiva demostración. A continuación se presenta una de las conjeturas obtenidas por el grupo y su respectiva demostración.

Conjetura 1

"Si los cuatro triángulos están en el mismo sentido, dos de ellos opuestos y dentro del cuadrado, al unir los vértices entonces se obtendrá un paralelogramo"



Afirmación	Razón
Hallar el centro E del cuadrilátero FGHI trazando las diagonales FH y GI	Construcción
Unir los vértices que no están sobre el cuadrado de los triángulos rectángulos iguales.	Construcción NC1
Unir cada uno de los vértices de los triángulos al centro E del cuadrilátero	Construcción NC1
Digo que los triángulos BCE y AED son iguales GC=AI DI=GB $\measuredangle FGC = \measuredangle HIA$	Criterio de semejanza de triángulos lado-ángulo-lado
$\measuredangle BGC = \measuredangle DIA$	Si quitamos cosas iguales a cosas iguales los

	restantes serán iguales
Por tal razón los triángulos AID y GBC serán iguales al igual que los lados AD y BC	Criterio LAL
Unamos FE y EH	Construcción NC 1
FE=EH	Porque E es la mitad de la diagonal FH del cuadrado
AF=HC	Por ser lados de triángulos iguales
$\measuredangle AFG = \measuredangle IHC$ si quitamos los ángulos iguales $\measuredangle GFH y \measuredangle IHE$ respectivamente, entonces $\measuredangle AFE = \measuredangle CHE$	Si quitamos cosas iguales a cosas iguales los restantes serán iguales
Por lo tanto los triángulos EHC y AFE serán iguales al igual que sus lados AE=EC	Criterio LAL
Consideremos ahora los triángulos FEB y HED, donde FB=DH	Lados de triángulos iguales
FE=EH	Diagonal del cuadrado
$\measuredangle GFB = \measuredangle DHI$ (1)	Ángulos de triángulos iguales
$\measuredangle IFH = \measuredangle GHF$ (2) Quitemos a los ángulos iguales $\measuredangle GFI = \measuredangle GHI$ (1) y (2) respectivamente, entonces $\measuredangle EFB = \measuredangle EHD$ Por lo tanto los triángulos EFB y EHD son iguales al igual que sus lados EB y DE	Criterio LAL
Digo que los triángulos AEB y DEC son iguales porque DH=FB AF=HC $\measuredangle CHI = \measuredangle AFG$ (1) $\measuredangle IHD = \measuredangle GFB$ (2) Quitando (2) de (1) resulta $\measuredangle CHD = \measuredangle AFB$ Por lo tanto AB=DC y AE=EC Entonces los triángulos AEB y DEC son iguales	Criterio LAL
Sumemos las áreas de los triángulos iguales DEC+BEC=DAE+AEB Pero ABCD es un cuadrilátero al que la diagonal DB lo divide en dos partes iguales lo que pasa únicamente con los paralelogramos. E es centro del cuadrado FGHI pero también vértice de los triángulos anteriores por lo tanto E debe estar en el segmento BD	Si a cosas iguales le sumamos cosas iguales los resultados serán iguales
Q.E.D	Q.E.D

Finalmente mediante una organización de pasos lógicos, cada uno de ellos justificado de manera detallada, los EPP logran construir una demostración válida por lo menos para el grupo, pues consideran que en ella se evidencia

formalidad, justificación de cada paso y un orden lógico. Como vemos únicamente se hace necesaria la construcción representativa de la demostración ya no como soporte indispensable, sino como ayuda para construir la demostración, no hace falta de recursos ajenos a la misma demostración ni de explicaciones detalladas para justificar alguno de los pasos. Por lo tanto al finalizar esta etapa, los estudiantes se encuentran en la fase de *ataque-demostración formal;* ya que realizan deducciones e implicaciones lógicas y ordenadas, basadas en teorías formales, aunque aludiendo al ejemplo genérico, como ayuda para su comprensión.

5. Conclusiones

El grupo resolutor a manera general siguió un esquema ordenado y progresivo por las fases de análisis que se sintetizan en los siguientes ítems:

- El grupo resolutor inicia con afirmaciones desligadas y poco convincentes apoyadas únicamente de esquemas y dibujos que de la situación problema podían obtener.
- En una etapa posterior logran dividir los casos específicos en subgrupos de ejemplos del problema con características comunes, por lo que generalizan una hipótesis para cada subgrupo, sin embargo aún no encuentran una generalidad para todos los casos, que fue la colinealidad. Así logran manipular un ejemplo que si bien es particular, actúa como representantes de su clase.
- Se hace el paso de representaciones pictóricas con lápiz y papel, al uso de tecnologías como Geogebra, que aseguraban una mayor precisión y certeza de la construcciones tenidas en cuenta; ello permitió que las conjeturas que obtenían de los casos tuvieran mayor aceptación y validez en el grupo.
- Al no encontrar una generalidad que agrupase todos los casos, se decide demostrar las conjeturas que agrupaban los casos específicos, probando de manera abstracta y deductiva cada conjetura pero a partir de manipulaciones con ejemplos genéricos.

- Finalmente se construye una cadena de implicaciones lógicas basadas en propiedades, axiomas o definiciones para cada conjetura aceptadas por el grupo, donde el ejemplo genérico y el dibujo ya no es la esencia de la demostración sino una simple ayuda para proveer las transformaciones más convenientes y organizar las cadenas de implicaciones, sin embargo aun con la necesidad de tenerlo en cuenta.

A manera general esta fue la ruta de demostración seguida por el grupo, se enfatiza en el por qué no se logró una demostración formal en la fase de revisión, aunque se pretendía que la demostración fuera una cadena de deducciones lógicas sin soporte de ejemplos de ninguna clase y donde el dibujo o representación del problema no fuera esencial para construirla.

Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (1988). *Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas*. Universidad de los Andes. Traducción. Primera Edición: Agosto 2000. Bogotá, Colombia
- Boero, P. (2007). *Teoremas en la escuela: La epistemología y la cognición en la escuela*. Rotterdam, los países bajos.
- Gascón, J. (2001). *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, julio, 129-159.
- Gutiérrez, A. (2001). *Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas*. Universidad de los Andes. Traducción. Bogotá, Colombia
- Gutiérrez, A. Camargo, L y Fiallo, J. (2013). *Acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en matemáticas* Revista de integración, Septiembre, 181-205
- Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente.* (1.ª ed. - 2.ª reimpresión, 1.992-). Barcelona. MEC-Ed. Labor).
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. (15ª reimpresión). Serie Matemáticas. (Traducción, Prof. Zugazagoitia). México: Editorial Trillas.
- Santos, M. (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN. México.

Formación en valores y responsabilidad social del profesor de matemáticas

Morales Camargo, Ruben – Joya Cruz, Sindy

femcmath@gmail.com - sindy.joya@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

En este trabajo se desarrolla una breve discusión respecto a la promoción de valores democráticos en el aula de matemáticas, y el papel del docente en la consolidación de dichos valores. Adicionalmente se plantean algunas hipótesis, respecto a la responsabilidad social de la asignatura escolar de matemáticas, las cuales serán discutidas a la luz de lo planteado por Bishop (1999) y Ernest (2009).

Palabras clave: Educación matemática, contexto escolar, formación en valores, escenarios de aprendizaje.

1. Introducción

El presente trabajo surge tras la discusión del artículo denominado *"Values and the Social Responsibility of Mathematics",* del escritor estadounidense Paul Ernest, y del establecimiento de vínculos entre dicho texto con la propuesta de otros autores que abordan la formación y promoción de valores desde la asignatura escolar de matemáticas y los resultados emergentes de una investigación de pregrado para optar al título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Inicialmente, plantearemos que la educación promueve valores de manera permanente y que a su vez, estos son parte fundamental del aprendizaje, en tanto son elementos culturales, emergentes de la actividad humana sobre la naturaleza.

Posteriormente, tomando lo planteado por Bishop (1999), afirmaremos que los valores, así como las matemáticas, son construcciones sociales, que tienen relevancia, en tanto los individuos que pertenecen a una sociedad pueden dotarlas de sentido y apropiarlas en la resolución de problemas cotidianos. Por último, estableceremos un conjunto de consideraciones y cuestionamientos sobre la relevancia de la promoción de valores democráticos.

2. Marco de referencia

El análisis de la relación entre la formación en valores y la educación matemática ha sido abordado por diferentes autores, tales como Bishop (1999) y Sigarreta y Torres (2003), quienes procuran el establecimiento de esta relación desde la comprensión de los valores como elementos culturales que son promovidos en la asignatura escolar de matemáticas.

Ernest (2009), afirma que los intereses y los valores humanos desempeñan un papel importante en la escogencia de los problemas matemáticos y además en los métodos de solución, los conceptos y notaciones construidos en el proceso, así como los criterios para evaluar los resultados de las creaciones y conocimientos matemáticos.

Morales y Suancha (2012), realizan un análisis de la formación en valores y su relación con la enseñanza de las matemáticas, en aulas de la ciudad de Bogotá, Colombia. El trabajo de estos autores reúne algunos elementos para interpretar aspectos incidentes en la formación en valores desde la asignatura escolar de matemáticas.

En tal sentido se entenderá la enseñanza de las matemáticas como un proceso de producción de conocimientos en un ambiente escolar, en el cual, se transforman, promueven y reorganizar un conjunto de conocimientos, y por consiguiente los valores, como *cualidades afectivas* que surgen en las interacciones que tienen lugar en el aula.

3. Aspectos metodológicos

La presente propuesta, surge como complemento de una monografía de pregrado denominada "*De la necesidad de implementar valores como la tolerancia, el respeto y la solidaridad en el aula de matemáticas.*" (Morales & Suancha, 2012).

En dicha investigación, se señaló que la matemática es un elemento cultural que promueve y está dotada de valores y que en ella las normas y prácticas propias de hacer matemática escolar, corresponden a comprensiones sociales que reglamentan lo que se considera acertado dentro del aula y por consiguiente razonable.

En el transcurso del año 2013, y con el fin de profundizar en la temática, iniciamos la discusión de los resultados emergentes de dicha investigación, a la luz de nuevos referentes teóricos, esto con el fin de clarificar la necesidad de promover valores y por consiguiente rutas de trabajo, para vincular el contexto del estudiante en el desarrollo de las actividades en la asignatura escolar de matemáticas. Estas discusiones destacaron aspectos incidentes en la formación en valores y matemáticas, tales como la comunicación, las condiciones físicas del aula, los intereses particulares de los integrantes de la clase, el tipo de actividades presentadas y los mecanismos de inclusión y participación que se dan en ella. Ahora bien, para poder desarrollar el análisis se tomaron los registros de clase, desarrollados por Morales & Suancha (2012).

4. Desarrollo de la propuesta

En Morales & Suancha (2012) y Morales, Joya, & Suancha (2012), se problematiza la formación explicita en valores democráticos, a partir de la enseñanza de las matemáticas y se destaca la necesidad de fomentar los valores democráticos desde la formación en matemáticas.

Como docentes de matemáticas tenemos la responsabilidad de promover valores en el aula y de hacer consientes a nuestros estudiantes del papel que tiene la matemática en la consolidación de valores y en el ejercicio responsable de la toma de decisiones sobre aspectos personales, locales y

globales. Adicionalmente debemos promover el uso responsable del conocimiento, el respeto por los planteamientos de otros, pero a su vez, la discusión respecto a las producciones intelectuales, esto en aras de propiciar discusiones que favorezcan la validación de propuestas y la reformulación de respuestas.

Una actividad que a nuestro juicio es relevante en la promoción de valores, es la inclusión del estudiante en la resolución de un problema, en el cual se le permite usar sus propios criterios y su conocimiento para la elaboración de una propuesta. Esto puede favorecer que el estudiante se sitúe como resolutor de una situación que le es familiar, o que representa para él una actuación crítica y reflexiva, que incluya preguntas tales como: ¿Qué pasaría sí, ocurre lo mismo todas las veces? ¿Puede afectar a otros esta decisión? ¿Es la única solución? ¿Cómo me afecta? ¿Cómo afecta a mi familia?, etc.

5. Conclusiones

La formación en valores en el aula de matemática es relevante en tanto la asignatura está dotada de elementos culturales que han sido transformados y divulgados siguiendo diferentes intereses que privilegian algunos saberes y desconocen otros.

Las discusiones que se pueden generar al respecto, han sido señaladas por diversos autores que consideran que la matemática y su enseñanza tienen una responsabilidad social, enmarcada en el reconocimiento de la educación como una actividad completamente cargada de valores, un ejemplo de esto corresponde al trabajo de Bishop (1999).

Otros aspectos importantes se dan desde lo planteado por Ernest (2009). En su trabajo es evidente que relaciona la matemática, con el conjunto de valores que se promueven en su enseñanza, pero en particular en el señalamiento de que las matemáticas no *deben permitir que se distorsione el papel de los valores e intereses de determinados grupos sociales, incluso si han tenido un papel dominante en el control de la disciplina* (p. 211).

Lo mismo puede plantearse en la micro sociedad que es el aula de matemáticas, en tanto el rol del docente debe ser, el favorecer espacios de interlocución, discusión, orientación y validación del saber matemático en juego en diferentes situaciones problema planteadas al estudiante, y además del reconocimiento que este último hace de la importancia que subyace al aprendizaje de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

- Bishop, A. J. (1999). Values in Mathematics Education: Making Values Teaching Explicit in the Mathematics Classroom. Faculty of Education, Monash University, Melbourne, Australia.
- Ernest, P. (2009). Values and the social responsibility of mathematics. Critical issues in mathematics education.
- Morales, R; Joya, S; Suancha, O (2012). Formación en valores en el aula de matemáticas. En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 406-412). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Morales, R y Suancha, O. (2012). De la necesidad de implementar valores como la tolerancia, el respeto y la solidaridad en el aula de matemáticas: Estudio de caso en grado sexto, en las Instituciones Educativas Distritales Alexander Flemming y Rafael Bernal Jiménez. Trabajo de grado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Sigarreta, J. y Torres, J. (2003). Utilización de los problemas matemáticos en la formación en valores. Revista EMA. Vol. 8, No 2, p. 208-225.

Elementos para el análisis del significado sobre el CDC de los estudiantes para profesor de matemáticas: El caso de la proporcionalidad

Vargas Peña, Ángel Ricardo - Cruz Cáceres, Angie Carolina

anrivarpe@gmail.com - anyulicmatematicas@gmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

El siguiente trabajo se enmarca en el campo de la formación de docentes de matemáticas y su propósito principal es brindar algunos elementos para el análisis de los significados sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC), para el objeto proporcionalidad, que poseen los estudiantes para profesor pertenecientes a los programas de formación de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital (UD) y Licenciatura en Matemáticas (LM) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) de Bogotá, Colombia. Dichos elementos se estipulan a partir de una revisión sobre algunos antecedentes y referentes respecto al conocimiento profesional del profesor, y un acercamiento a los estudios y estados de arte realizados frente a la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad.

Palabras clave: Formación de profesores, conocimiento didáctico, proporcionalidad.

1. Introducción

En las últimas dos décadas, producto del análisis y reflexión sobre la importancia del rol del docente en los proceso de transformación de las concepciones, las prácticas, las actitudes que inciden en forma directa en la educación, se han generado reformas educativas en varios países de América Latina (PREAL, 2004). El problema se produce, cuando estudios internacionales, como el de Arnaiz & Ballester, (1999), Hirmas & Eroles, (2008) y el de Sowder (2007) demuestran que esto no ha sido suficiente y como se señala en el último estudio, es necesario cambiar la formación tradicional de los docentes, centrada en lo disciplinar, en especial cuando se requiere formar docentes de matemáticas que reconozcan la diversidad de los contextos, avances tecnológicos, los ritmos de aprendizaje de los estudiantes, las situaciones económicas, entre otras, para que de esta forma el docente actué a partir de dicho reconocimiento y facilite el acceso al conocimiento matemático.

Con relación al conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas, se han realizado varias investigaciones, donde se identifica una tensión de presencia y relación entre el conocimiento disciplinar en matemáticas y el conocimiento didáctico, este aspecto que ha sido estudiado por Shulman (1987) citado por Ruiz (2010) y Bromme (1998) citado por Valbuena (2007), plantean la necesidad de articular los contenidos matemáticos, con los contenidos propios de la didáctica, para comprender que el CDC es un cuerpo de conocimientos necesarios para que el docente pueda proponer, diseñar, resolver, gestionar y evaluar las diferentes actividades y situaciones que se presentan en el aula de clase en el momento de trabajar con la matemática.

Al respecto, Marcelo (1999) citado por Valbuena (2007), plantean que el CDC "se configura como una de las contribuciones más poderosas y actuales de la investigación didáctica para la formación del profesorado" (p. 34). En este sentido, como lo señalan Marks (1989), Even (1990) y Shulman (1999), es necesario desarrollar más investigación sobre los diferentes componentes, categorías, características, dimensiones e indicadores del CDC para seguir generando un cuerpo de conocimientos que fundamente y oriente la formación inicial y permanente de los docentes de matemáticas.

En este sentido, Shulman, citado por Bolivar (2005), plantea que el profesor no solo debe desarrollar un conocimiento didáctico del contenido sino que también debe desarrollar un conocimiento sobre una materia específica, aspecto que permite recurrir a los posibles significados que se le dan a los objetos matemáticos a enseñar por parte de los estudiantes para profesor de matemáticas.

En cuanto a la importancia sobre el análisis de los significados respecto al objeto matemático a estudiar, uno de los elementos didácticos presentes a lo largo del desarrollo curricular a nivel básico y medio en la escuela, es la proporcionalidad. Al respecto, Valverde & Castro (2009) establecen diversas investigaciones donde se afirma que:

> El conocimiento matemático de los maestros en formación frecuentemente es descrito como insuficiente (Ball, 1990; Even 1990; Graeber, Tirosh, y Glover, 1989; Reys, 1974; Simon, 1993; Wheeler, 1983) Investigaciones en el contexto de los números racionales (Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Harel, Behr, Post y Lesh, 1994, citados en Lamon 2007) han mostrado que el conocimiento que los maestros en formación poseen acerca de este tópico es procedimental y escasamente conectado. (p. 2)

En este orden de ideas, se hace necesario analizar los significados del CDC desde un objeto matemático, como en este caso específico la proporcionalidad, por lo tanto esta propuesta plantea la siguiente pregunta de indagación: *¿Cuáles son los significados sobre el conocimiento didáctico del contenido que poseen los estudiantes para profesor de matemáticas del objeto proporcionalidad en los programas de formación de matemáticas LEBEM y LM?*

2. Marco de referencia

El presente marco de referencia se estipula desde dos aspectos fundamentales que permiten determinar algunos elementos para el análisis del significado que poseen los estudiantes para profesor de matemáticas sobre el objeto proporcionalidad: En primera instancia, a continuación se presentan tres referentes que han realizado avances significativos hacia la caracterización del CDC, aspectos fundamentales para la construcción de una posible red categorial que permita analizar y describir posibles tipos de

significados. En segunda instancia se hace alusión a investigaciones que permiten determinar algunas categorías frente a los significados que poseen los estudiantes para profesor de matemáticas entorno a la proporcionalidad. Con relación a esta investigación específica del conocimiento didáctico del contenido (CDC) y de la formación de docentes, autores como Da Ponte (2012), Godino (2009), y Bolívar (1993) han realizado acercamientos al tipo de caracterizaciones que se pueden hacer de este tipo de conocimientos en los cursos de didáctica para la formación de docentes de matemáticas. De acuerdo a estas posturas se realiza una exposición de las dimensiones propuestas por cada una de estas investigaciones:

En primera instancia Da Ponte (2012) concentra sus investigaciones en la caracterización del conocimiento profesional del profesor a partir del análisis de los procesos de desarrollo, específicamente coloca su interés en la práctica educativa, concibiéndola como el núcleo fundamental del conocimiento didáctico del profesor. Realiza un acercamiento a las cuatro dimensiones que componen el CDC (Conocimiento de la matemática para su enseñanza; del alumnado y su proceso de aprendizaje; del currículo y del modo de gestión de ese currículo y de la práctica educativa.). El objetivo fundamental de la investigación sobre el conocimiento didáctico del profesor propuesto por Da Ponte, hace una mirada hacia la formación del profesorado a partir de la colaboración, la práctica y la reflexión sobre la práctica.

En segundo lugar, otra caracterización del conocimiento del profesor, es la realizada por Godino (2009) a partir del enfoque ontosemiótico (EOS) en el cual se proponen categorías de análisis para el conocimiento didáctico-matemático del profesor a partir de la articulación de seis dimensiones (epistémica, cognitiva, mediacional, ecológica, afectiva e interaccional). Este autor plantea como metodología el análisis didáctico que permite un estudio de sistemas complejos y heterogéneos a partir de un modelo teórico fundamentado que permita caracterizar cada uno de los componentes.

Finalmente, Bolívar (1993) realiza un estudio a las investigaciones de la época acerca de lo que se concibe como conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido a partir de un acercamiento a las relaciones entre componente disciplinar, pedagógico y didáctico con el fin de establecer una base para la formación de docentes en didácticas específicas. De manera inicial Bolívar (1993), expone los planteamientos de Shulman

(1986: 115) quien tenía como objetivo investigar el desarrollo del conocimiento profesional durante la formación del profesorado y cómo transforman el contenido en representaciones didácticas y lo utilizan en la enseñanza. A partir de esta definición, se empieza a determinar que dentro del conocimiento didáctico se incluyen unos componentes específicos para su caracterización, Bolívar (1993) expone cinco componentes: conocimiento de la comprensión de los alumnos, conocimiento de los materiales curriculares y medios de enseñanza en relación con los contenidos y los alumnos; estrategias didácticas y procesos instructivos; conocimiento de los propósitos o fines de la enseñanza de la materia y concepciones; valores y creencias de lo que significa enseñar una determinada materia en un determinado nivel y contexto.

En segunda instancia, se destacan las investigaciones realizadas por Valverde & Castro (2008), Valverde, Castro & Molina (2013) frente al empleo del análisis didáctico en un experimento de enseñanza con futuros maestros de educación primaria, donde se establecen los conocimientos puestos en juego durante la enseñanza de la proporcionalidad en estudiantes para profesor de primaria de la Universidad de Costa Rica. Estos trabajos se destacan como antecedentes frente al trabajo investigativo en la formación inicial de profesores de matemáticas acerca de la proporcionalidad. Al respecto, los autores destacan la necesidad de analizar los procesos didácticos que se generan al interior de los programas de formación con relación a la proporcionalidad, dado que, este es un objeto matemático que se aborda en muchos espacios de la escuela primaria y se establece como un punto de referencia para el desarrollo de otro tipo de objetos matemáticos como las relaciones funcionales directas, co-variaciones, entre otros. Existen investigaciones como las expuestas por Ball, Even, Graeber, Tirosh, y Glover, Reys, Simon, Wheeler, citados por Valverde & Castro (2009) en torno a las dificultades que tienen los estudiantes para profesor en cuanto al tratamiento y profundización sobre los objetos matemáticos y didácticos propios en matemáticas, en este caso frente a la proporcionalidad. Ante este objeto de reflexión didáctica, Valverde & Castro (2009) establecen la necesidad de tener una consciencia clara frente a la relevancia que tiene el análisis de las actuaciones de los estudiantes para profesor en cualquier tópico de las matemáticas. Por ende, se considera que este tipo de análisis relacionado con la formación de profesores de matemáticas entorno a la

proporcionalidad constituye un material fundamental para orientar los procesos de formación en las facultades de educación.

3. Aspectos metodológicos preliminares

Teniendo en cuenta los objetivos establecidos para el desarrollo de la investigación, la propuesta es de carácter cualitativo cuyo propósito fundamental constituye la descripción de los hechos que se estudian. En estos términos, la propuesta es descriptiva, caracterizada por Morales (2010:12) de la siguiente manera:

Con estos estudios se busca exponer una situación, pero no se establecen los porqués. Nos dicen cómo están las cosas. Consisten en descripciones sistemáticas; en principio no se plantean hipótesis previas. Los instrumentos utilizados para recoger los datos son cuestionarios, *surveys*, documentación de archivos, entrevistas, guías de observación, etc. Estos estudios descriptivos se pueden orientar de muchas maneras. Una frecuente es la descripción de una situación, de un centro, de un grupo, etc. La población que se va estudiar está bien delimitada (e incluso la muestra puede coincidir con la población. A partir de esta definición el trabajo se realizará con una muestra de estudiantes y docentes de los programas de formación de docentes de matemáticas de la UDFJC y la UPN que participan en espacios de académicos en los que se inicia su formación didáctica.

La muestra de la población a considerar está asociada a un Grupo de estudiantes para profesor inscritos en la asignatura Didáctica de la Aritmética ubicada en I Semestre del pensum en el programa de formación LEBEM de la UDFJC, dentro del eje de formación didáctica y un Grupo de estudiantes para profesor inscritos en la asignatura Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética ubicada en VI Semestre del pensum en el programa de formación LM de la UPN, dentro del eje de fundamentación.

Por otra parte se tomará en cuenta a un formador docente de cada universidad encargado de dictar las asignaturas anteriormente mencionadas. Con la situación de estudio y muestra de la población definidas, las fases que se llevarán a cabo durante la investigación serán las siguientes (se podrán ampliar en la presentación de la comunicación):

- Fase 1: Determinación de un marco conceptual de referencia sobre el conocimiento didáctico del contenido y sus dimensiones.
- Fase 2: Elaboración de Instrumentos de indagación
- Fase 3: Recolección de datos – Producciones escritas y orales de los docentes y estudiantes para profesor de matemáticas.
- Fase 4: Sistematización – Análisis de la información
- Fase 5: Elaboración del informe final

4. Conclusiones parciales

La determinación de un marco conceptual de referencia que permita la constitución de una base teórica fundamentada permite tomar las categorías generales para la caracterización del CDC y la proporcionalidad.

Se puede ir estableciendo una aproximación a las relaciones que se pueden determinar entre los significados que poseen los estudiantes para profesor de matemáticas de las dos universidades sobre la proporcionalidad y sus formas de enseñanza-aprendizaje a partir de la revisión bibliográfica que se ha venido consolidando.

Se espera poder realizar un aporte a los programas de formación en cuanto a las formas en las que los estudiantes que están empezando su proceso de práctica docente y su estudio sobre la didáctica de la aritmética (espacio donde se abordan elementos sobre proporcionalidad) conciben el objeto proporcionalidad y sus formas de enseñanza- aprendizaje.

Referencias bibliográficas

- Arnaiz, P y Ballester, F. (1999). La formación del profesorado en educación secundaria y la atención a la diversidad. Profesorado, *Revista de currículum y formación del profesorado*. 3 (2).
- Bolívar, A (1993). Conocimiento didáctico del contenido y la formación del profesorado. El programa de L. Shulman.

- Bolivar, A. (2005). El Conocimiento Didáctico del Contenido y las Didácticas Específicas. Revista Curriculum y formación del Profesorado Vol. 9 No. 2. Universidad de Granada, España.
- Da Ponte, P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En Planas, N (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. p. 93-98. Barcelona: Graó.
- Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. (20), 13-31.
- Hirmas, & Eroles, (2008). Convivencia democrática, inclusión y cultura de paz: Lecciones desde la práctica educativa innovadora en América Latina. UNESCO. Recuperado el 12 de Noviembre de 2013 de: http://unesdoc.unesco.org/images /0016/001621/162184s.pdf
- Marks, R. (1989). What exactly is pedagogical content knowledge? Examples from mathematics. Ponencia presentada en la aera Annual Conference, San Francisco.
- Morales, P. (2010). Planteamientos generales sobre investigación en educación y psicología. Métodos cuantitativos en educación. Universidad Pontificia Comillas, Madrid Facultad de Ciencias Humanas y Sociales. Recuperado el 20 de noviembre de 2013 en http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Planteamientos generales.pdf
- PREAL. (2004). Construcción de la Profesión Docente en América Latina. Santiago de Chile: PREAL.
- Ruíz, A. (2010). Conocimientos y currículo en la educación matemática. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 5 (6), p. 107-141.
- Shulman, L. (1999). Foreword. En J. Gess Newsome y N. Lederman (Eds.), Examining Pedagogical Content Knowledge (pp. 9-11). Londres: Kluwer Academic Publishers.
- Swoder. (2007). The mathematical education and develoment of teachers. In F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Valbuena, E. (2007). El conocimiento didáctico del contenido biológico: estudio de las concepciones disciplinares y didácticas de futuros docentes de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Ciencias Experimentales. Universidad Complutense de Madrid. España.
- Valverde, G. y Castro, E. (2008). Errores y estrategias incorrectas manifestadas por maestros en formación en problemas de proporcionalidad directa. *En Actas de las XIV Jornadas Thales Investigación en el Aula de Matemáticas*. Granada: SAEM Thales y Depto. Didáctica de la Matemática Universidad de Granada.
- Valverde, G., Castro, E. y Molina, M. (2013). Empleo del análisis didáctico en un experimento de enseñanza con futuros maestros de educación primaria. En J.L. Lupiáñez, M. Molina y L. Rico (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* p. 211-230. Granada: Universidad de Granada.

La lectura en clase de matemáticas en el tercer ciclo

Santos, Edimer
edisan86@yahoo.com
SED Bogotá, (Colombia)

Resumen

Se presenta aquí una experiencia de aula que se viene desarrollando en el ciclo III, grado sexto del colegio El Tesoro de la Cumbre IED de la ciudad de Bogotá, con el objetivo de usar la lectura de textos de divulgación científica para acercar a los estudiantes en la comprensión de las matemáticas, en relación con los conceptos básicos de la teoría de números; además de motivar a los estudiantes en la lectura se pretende que ellos desarrollen habilidades y competencias matemáticas, apoyados desde el área de lenguaje en la lectura y comprensión de textos literarios.

Palabras clave: Comprensión, competencias, teoría de números, lectura y escritura.

1. Introducción

La matemática como los demás campos de pensamiento (MEN, 2007), requiere de un lenguaje, para el caso particular un lenguaje científico o específico (D'Amore, 2006), por lo que se requiere de ciertas habilidades y competencias (MEN, 2008) para poder dominar o por lo menos lograr comprender ciertos aspectos de este lenguaje; la palabra resulta ser el primer acercamiento, luego la literatura. Como expresión escrita, la palabra, se convierte en herramienta para lograr la comprensión esperada del lenguaje especifico de las matemáticas y en consecuencia, las competencias lectoras resultan muy importantes para entender parte de ese lenguaje, una parte se hace a través de la escuela y en el diario vivir, donde la literatura y el

lenguaje se convierten en medio de comunicación para interpretar el mundo de la ciencia, en nuestro caso: las matemáticas, y mostrar una versión de nuestro entorno inmediato, manifestando una mirada casi personal de ese entorno.

El colegio El Tesoro de La Cumbre IED, de la localidad de Ciudad Bolívar en la ciudad de Bogotá usa la comunicación como eje principal del currículo y la competencia lectora es una de las más importantes, además de ser herramienta motivacional para algunos de los estudiantes, es de gran importancia para cada uno de los campos de pensamiento (MEN, 2007), puesto que en cada campo se hace necesario plantear diversas lecturas para desarrollar actividades de comprensión, interpretación y argumentación, por lo menos dos veces en el período, específicamente en el campo matemático se plantearon para el presente año, en los grados sextos y séptimos, libros completos como apoyo a la asignatura y como complemento a las actividades propias del quehacer matemático, además de ser parte del currículo de matemáticas para dichos grados son base para evidenciar la comprensión de algunos elementos generales de la teoría de números como lo es la divisibilidad (incluyendo el MCD y el MCM), asimismo de los conceptos de número primo y número compuesto.

2. Referente conceptual

La aritmética existe desde tiempos inmemorables al igual que la geometría, en la antigüedad se usaban como herramienta para resolver problemas de su cotidianidad, fueron los Pitagóricos los que empezaron a estudiar las relaciones entre números independientemente de sus aplicaciones, los números figurados son un claro ejemplo de este hecho, la expresión pitagórica para ello es “Todo es número o relación entre números” (Pitágoras, Siglo V a.C.) se considera que desde allí se da inicio a lo que se conoce como Teoría de Números o aritmética teórica ya que se tenía, en la época, una definición para número como multiplicidad de unidades (Elementos, Libro VII) y “la aritmética teórica surge a partir del concepto de número” (Aleksandrov, Kolmogorov & Laurentiev (1981, p. 34). El libro de Elementos de Euclides (Libro VII) se ha considerado como fundamentos para la teoría de números, allí están presentes las definiciones de número,

par, impar, unidad, número primo, entre otras y el algoritmo para determinar el máximo común divisor de dos o más números, o en caso contrario, si dos números son primos entre sí, conocido con el nombre del Algoritmo de Euclides. Los números primos han sido inspiración para muchos trabajos en el campo de la aritmética, como evidencia se encuentran los trabajos de Diofanto y Fermat, donde se trabajó específicamente con números enteros y la resolución de ecuaciones con raíces enteras.

La aritmética se aborda desde el currículo de matemáticas (MEN, 2006) como pensamiento numérico y sistemas numéricos, donde es necesario una relación entre lo que el estudiante hace en su entorno inmediato y la matemática en sí misma, por lo tanto los números no deben ser abstractos sino que deben permitir identificar ciertas relaciones, una consideración al respecto la plantean Aleksandrov et al. (1981):

> "Los números abstractos en si no tienen propiedades tangibles y en general se puede decir muy poco sobre ellos […] el objeto de la aritmética son las relaciones entre números, pero estas relaciones son las imágenes abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre colecciones de objetos; así, podemos decir que la aritmética es la ciencia de las relaciones cuantitativas reales consideradas abstractamente, esto es, simplemente como relaciones. La aritmética, como vemos, no surge del pensamiento puro como pretenden los idealistas, sino que es reflejo de propiedades definidas de las cosas reales; surge de una larga experiencia práctica de muchas generaciones". (p. 37).

De este modo se plantea como estándar el hecho de "Generalizar propiedades y relaciones de los números naturales (ser par, impar, múltiplo de, divisible por, conmutativa, etc.)" (MEN, 2003, p. 16), reflejando la intensión de priorizar, en los primeros años de escolaridad las relaciones que se pueden establecer entre los números, al mismo tiempo que se van familiarizando con los conjuntos numéricos. En la pruebas PISA (OCDE, 2006), se plantea como cantidad un factor importante para la comprensión y desarrollo de las matemáticas, resaltando el uso de los números para representar cantidades y características cuantificables de los objetos del mundo real, convergiendo con el MEN (2006) en la intensión de direccionar el pensamiento numérico a través de la resolución de problemas y el aprendizaje significativo.

Santos (2007), plantea que resulta esencial en la educación matemática que los estudiantes reflexionen abiertamente sobre los conceptos matemáticos, los problemas matemáticos y las diversas estrategias para su resolución

durante el aprendizaje de las matemáticas. Esto requiere, entre otros aspectos, considerar la resolución de problemas como una forma de pensar, donde quien los resuelve (los problemas) continuamente desarrolla diversas habilidades y estrategias de uso de las matemáticas (Santos, 2007), donde se incluye implícitamente la comprensión lectora del problema para identificar sus posibles vías de acceso y de resolución.

Dentro de la resolución de problemas y el aprendizaje significativo crítico (Moreira, 2001) se plantean aspectos relevantes al actuar del profesor y del estudiante, con el objetivo de lograr un aprendizaje con sentido, es decir, donde el aprender un contenido con significado se convierte en "aprender su lenguaje, no sólo palabras –también otros signos, instrumentos y procedimientos– aunque principalmente palabras, de forma sustantiva y no arbitraria" (Moreira, 2001). La lectura y la escritura juegan un papel fundamental en la construcción de los conceptos, y no solo en matemáticas sino en cualquier ciencia y por lo tanto la pregunta sobre lo que se lee y sobre lo que se escribe es muy importante para lograr desarrollar dichas habilidades y "cuando se aprende a formular preguntas –relevantes, apropiadas y sustantivas– se aprende a aprender y nadie nos impedirá aprender lo que queramos" (Moreira, 2001). Una motivación es la lectura y la pregunta se convierte en herramienta de aprendizaje para la comprensión del texto y de los contenidos propios del campo de pensamiento matemático, pues es a través de la argumentación a una pregunta o sobre un tema que se puede hacer un acercamiento a lo que el estudiante sabe o cree saber.

Por otro lado "el aprendizaje significativo es progresivo, es decir, los significados van siendo captados e internalizados y en este proceso el lenguaje y la interacción personal son muy importantes" (Moreira, 2001). La resolución de problemas es una manera de realizar este acercamiento y la lectura matemática una herramienta para identificar aspectos generales.

Algunos libros tratan la fobia hacia las matemáticas, cada uno de ellos desde perspectivas diferentes. "Malditas matemáticas", a través de un recorrido por el país de los números donde le personaje es Alicia y es guiada por Lewis Carroll (autor de Alicia en el país de las Maravillas) a través del territorio matemático y busca que Alicia reconozca la importancia de las matemática; por otro lado se encuentra: "El Diablo de los Números", donde un niño que no le agradan las matemáticas empieza a soñar cosas relacionadas con dicho

campo, este personaje es guiado por un diablo, que le muestra mediante pequeñas historias la construcción de los números, propiedades y regularidades de los números, de tal manera que el diablo va complejizando los conceptos matemáticos haciendo que el niño se interese de tal forma en las matemáticas que empiece a encontrarse con conceptos cada vez más elaborados.

3. Descripción de la experiencia

La experiencia de aula se aborda en el Colegio El Tesoro de La Cumbre IED, en la ciudad de Bogotá, en los cursos de sexto y séptimo de la jornada de la tarde, donde se busca que a través de la lectura de los libros Malditas Matemáticas y El Diablo de los Números los estudiantes adquieran destrezas en la lectura (interpretación, argumentación), en la comprensión de conceptos de la teoría de números (número primo, divisibilidad, MCM, mcm), todo ello se basado en la resolución de problemas y el aprendizaje significativo crítico (Moreira, 2001), a través de dos sesiones:

a) Donde el estudiante realiza una lectura individual y otra grupal de los capítulos de los libros elaborando la siguiente ficha de lectura en clase de lengua castellana:

Ficha No.	
Nombre:	Curso:
Título:	No. Capítulo:
Temas abordados:	
Síntesis (resumen)	
Vocabulario (palabras desconocidas)	
Mensaje o enseñanza	

b) Un taller que busca validar las nociones matemáticas de cada capítulo.

Dentro de la primera sesión se plantean preguntas iniciales o introductorias como: ¿En qué situaciones de tu vida crees que has usado o usas las matemáticas? ¿Existe relación en la manera en que solucionas un problema matemático y un problema que se te presenta en el colegio, en la casa o en el barrio? Explica tu respuesta. En relación al capítulo “Las matemáticas no sirven para nada” (Frabetti, 2000). Después de una primera lectura se

plantean las siguientes preguntas: ¿Qué acción es la que le permite a Lisa darse cuenta de que si sabe matemáticas? ¿Qué prefiere hacer Alicia en vez de realizar las tareas de matemáticas? Después de la lectura de este párrafo se debe contestar la pregunta: ¿En nuestra vida TODO está relacionado?

> "…sólo que me expliques lo del once. No puedo explicarte sólo lo del once porque en matemáticas todas las cosas están relacionadas entre sí, se desprenden unas de otras de forma lógica. Para explicarte por qué el número once se escribe como se escribe, tendría que contarte la historia de los números desde el principio"

En relación al taller del segundo capítulo del mismo libro se plantea una lectura adicional donde se muestra el concepto de base y se pide que el estudiante relacione lo leído en el libro con la lectura de la 'creación' de los numerales en nuestra sociedad

A la par de este aprendizaje, se logre avanzar en la comprensión y producción de textos literarios, pues es a través de la escritura que se exteriorizan los conceptos y nociones que cada uno tiene en su mente y en su pensamiento, en el colegio la lectura no es un hábito y se convierte en sí misma en un reto y como consecuencia la resolución de problemas se dificulta debido a la falta de comprensión lectora en los estudiantes.

4. Reflexiones

Los estudiantes identifican aspectos de la teoría de números, por ejemplo el significado de número primo, el mcm y el MCD identificando su uso como herramienta en la solución de problemas matemáticos y problemas asociados. Además, algunos de ellos producen textos basados en un tema. El acercamiento a las matemáticas a través de la lectura permitió, en un porcentaje no mayor al 15% un cambio de actitud hacía la asignatura a medida que se avanzaba en la lectura puesto que los estudiantes se preguntan sobre los conceptos que abordan los textos, ¿cómo se ilustran? y ¿cómo se abordan en el libro?.

Algunos de los estudiantes aún no han reconocido la importancia de la lectura en matemáticas o en cualquier otro campo de pensamiento, debido a que un 70% de los estudiantes tienen grandes problemas de comprensión,

interpretación y argumentación, además de la producción escrita, y ello se debe a la falta de continuidad en la escuela (se tienen estudiantes que vienen del proceso de regreso a la escuela) y de la falta de actividades propias de lectura en la escuela. El tiempo y la necesidad de avanzar en el currículo limitan un poco el progreso en la lectura y su comprensión del texto, pues se debe avanzar en los contenidos sin dejar de lado la lectura del libro.

A través de la lectura se puede acercar a los estudiantes a que cambien o mejoren su perspectiva sobre las matemáticas, ya sea a través de lecturas específicas sobre un tema matemático, sobre historia de las matemáticas o simplemente sobre anécdotas de las matemáticas, puesto que la lectura es una herramienta de aprendizaje en sí misma, ya que muestra al estudiante otra manera de ver el mundo y le ayuda a comprender aspectos de éste que él cree no saber o conocer, sin embargo es necesario tener un proceso y una continuidad del mismo, pues la base de la lecto-escritura viene desde los primeros años de escolaridad y de la familia, por eso se debe motivar y acercar al estudiante desde el inicio de su formación escolar a la lectura y a la comprensión, interpretación y argumentación de la misma, ya que generar hábitos de lectura en estudiantes de secundaria es dispendioso, requiere de tiempo y del acompañamiento de diversas áreas del conocimiento y el tiempo que conlleva esta tarea no se ve reflejado en el currículo y por lo tanto lograr que los estudiantes tomen este camino es un gran reto para los profesores.

Referencias bibliográficas

- Aleksandrov, A., Kolmogorov, A. y Laurentiev, M. (1981). La Matemática: su contenido, métodos y significados. Madrid: Alianza Editorial.
- D'Amore, (2006). Matemática, didáctica de la matemática y lenguaje. En Didáctica de las Matemáticas (pp. 251 – 292). Bogotá: Magisterio.
- Enzensberger, H. M. (1997). El diablo de los números. Madrid: Ediciones Siruela.
- Frabetti, C. (2000). Malditas matemáticas, Alicia en el país de los números. Madrid: Alfaguara.
- MEN (1998) Lineamientos Curriculares de matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, Ed. Magisterio.

- MEN (2003). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional
- MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional
- MEN (2007). Colegios Públicos de excelencia para Bogotá. Recuperado de http://www.sedbogota.edu.co/AplicativosSED/Centro_Documentacion/anexos/publicaciones_2004_2008/99198-Pensamientomate_bja.pdf
- Moreira, M. A. (2005) Aprendizaje Significativo Crítico. España: Indivisa, p. 83-102. Recuperado de http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/pdf/771/77100606.pdf
- OCDE (2006). PISA, Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.
- Santos L. (2007). La Resolución de Problemas Matemáticos: Fundamentos Cognitivos. México: Trillas.

Importancia de la devolución que hace el profesor en la aplicación de actividades sobre número relativo en los estudiantes de grado sexto

Alvarado, Jennyffer - Triviño, Johana
ezeberth@gmail.com – mjohanat@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Teniendo en cuenta que en la enseñanza de las matemáticas, se evidencian dificultades con la falta de interés, es necesario innovar con actividades significativas que motiven. Por esto, es necesario resaltar la importancia de la devolución en los procesos de enseñanza-aprendizaje, presentar situaciones problema que faciliten la conceptualización del número relativo y usar la devolución de una situación como herramienta en el aprendizaje específicamente. Inicialmente se ven involucrados en el rol lúdico lo cual permite que tengan un mayor interés por cada actividad y esto permite que el docente controle las variables didácticas por medio de preguntas, y los estudiantes transformen ese actuar lúdico para apropiarse del número relativo puesto en la situación fundamental. Al realizar un buen trabajo en la enseñanza del número relativo se genera una buena devolución que produce un aprendizaje significativo y hace que reconozca, trabaje y opere de manera adecuada los números relativos.

Palabras clave: Devolución, números relativos, secuencia de actividades, modelos concretos.

1. Introducción

En el que hacer del aula de clases los docentes nos encontramos con diferentes retos, uno de ellos es generar el interés de los estudiantes en la adquisición y desarrollo de los diferentes conceptos matemáticos, uno de estos es en la ruptura del número natural al número entero, pues en los primeros años de escolaridad se presenta el error de ignorar los dos sentidos de la recta numérica y se inculca que antes del cero no existe nada, no se contempla una operación de tal forma que resulte negativa, se dice que el inicio de la secuencias numéricas es el vacío y ni siquiera se toma el cero como punto neutro sino como ausencia de cantidad.

Por medio de las situaciones concretas y la devolución bien manejada por el profesor los estudiantes pueden lograr la comprensión de los conceptos matemáticos de una manera más fácil y rápida, lo cual ayudaría a mejorar la dinámica del aula de clase en cuanto a la comprensión y manejo de temáticas y conceptos matemáticos difíciles de asimilar ya sea por errores conceptuales ya adquiridos o por el mal manejo de los mismos.

2. Referente Conceptual

Para el planteamiento de la propuesta se parte de los errores conceptuales que se presentan en el aula al trabajar con el número relativo como paso al número entero; como son: "el cero indica la ausencia de cantidad de magnitud por lo que no puede haber números menores que cero; la suma se asocia a acciones de añadir o reunir por lo que el resultado tiene que ser mayor o, a lo sumo igual que los sumandos; la resta se asocia con acciones de separar o quitar, por lo que el resultado tiene que ser menor o, a lo sumo igual que el minuendo; si en una resta el minuendo es menor que el sustraendo, la operación es imposible pues no se puede quitar más de lo que se tiene"(Rodríguez, 2005).

Para solucionar este problema se toma como herramienta la Ingeniería Didáctica en la elaboración de unidades para los estudiantes donde interactúan con el docente en un proceso metacognitivo; Brousseau (1986)

en su teoría de las situaciones didácticas muestra la devolución como concepto fundamental para la modelización del trabajo en el aula.

Y ayudados por la propuesta que Cid (2001), que expone en su escrito "Los modelos concretos en la enseñanza del número relativo", se plantean situaciones donde el estudiante modele por medio del lenguaje matemático diferentes situaciones contextualizadas como son los neutralización, desplazamientos y pérdidas y ganancias.

El uso de modelos concretos hace que los estudiantes se involucren en el desarrollo de su conocimiento y genera la apropiación de los conceptos haciendo evidente la importancia de la devolución, y sean participantes activos de su propio proceso. Brousseau (1986), afirma que el estudiante es quien debe querer aprender, tomando decisiones y evaluar su conocimiento mientras el maestro guía e interviene al final del proceso.

Al realizar el análisis se observa que como lo explica el grupo Pretexto (1997) en su libro La Transición Aritmética al Álgebra "…asocian el signo (-) con operación o con el sinónimo de negatividad lo cual puede ser comprensible, pues en aritmética, en el trabajo con "números concretos"(Grupo PRETEXTO, 1997), (…) donde los estudiantes deben identificar adecuadamente el valor relativo de las cantidades, reconocer sus inversos y operarlos adecuadamente"

3. Descripción de la experiencia

Uno de los aspectos que representan un obstáculo en la enseñanza de las matemáticas radica en la falta de interés que muestran los estudiantes; aparece entonces la necesidad de implementar estrategias aplicando modelos concretos (los modelos concretos como propone Eva Cid, tienen restricciones que deben ser tomados en cuenta en una Didáctica del número entero, especialmente lo relacionado con las situaciones de neutralización y desplazamiento. Ver Cid, E. (sf).

Basándonos en la epistemología de los números enteros relativos podemos decir que en las temáticas trabajadas en grado sexto aparecen deficiencias para asimilar los números enteros en su concepción inicial, es decir los

números relativos, donde es constante evidenciar el error de ignorar los números anteriores al cero y tomar este espacio como no existente o vacío, el ignorar que los números van acompañados de un signo que indica posición y no solamente operación, donde los signos más y menos no son solamente indicadores operativos; estos errores incidieren en el proceso para los temas posteriores básicos importantes como el álgebra.

Por esto se planteó una secuencia de actividades basadas en los modelos concretos de desplazamientos, pérdidas y ganancias tomando como actividades principales la astucia marítima haciendo uso del plano cartesiano y la bolsa de valores donde los estudiantes debían aplicar el lenguaje matemático para modelar la actividad y llegar al concepto esperado.

Al hacer la aplicación de la secuencia de actividades y usar el material concreto, se fortalece la responsabilidad del estudiante ante el aprendizaje del número relativo ya que este evidencia de forma lúdica y agradable las diferencias que existen en los contextos que necesitan hacer uso del signo de los números enteros.

4. Reflexiones

De acuerdo a nuestra experiencia, al iniciar las actividades los estudiantes se muestran desinteresados, posteriormente al mostrar un rol lúdico en el cual es participe de forma directa, despiertan su interés y se involucran en su aprendizaje; esto demuestra que con la devolución manejada por el profesor los estudiantes pueden lograr la conceptualización del número relativo de una manera más fácil y rápida, lo cual ayudaría a mejorar la dinámica del aula de clase en cuanto a la comprensión y manejo de temáticas y conceptos matemáticos difíciles de asimilar ya sea por errores conceptuales ya adquiridos o por el mal manejo de los mismos.

Referencias bibliográficas

- CID, E. (2001) Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Seminario Matemático, No 31. Disponible en red en: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf
- CID, E. (2003). La investigación didáctica de los números negativos: estado de la cuestión. Seminario Matemático, No. 25
- GRUPO PRETEXTO, (1997). La transición aritmética álgebra. Bogotá: Universidad Distrital.
- BROUSSEAU G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, trad. de Dilma Fregona, Buenos Aires, Libros del Zorzal.

Ambiente educativo de las prácticas matemáticas en la Escuela Pedagógica Experimental.
Una mirada desde los maestros

Pulido, Jairo

jairopulido@profesores.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Escuela Pedagógica Experimental, (Colombia)

Resumen

La Escuela Pedagógica Experimental es reconocida por ser una de las instituciones de innovación educativa con mayor trayectoria del país y un referente en el desarrollo de propuestas de educación. Resulta de gran importancia su estudio y reflexión, dado que esta experiencia ha sido y puede seguir aportando en este campo, no solo en Colombia sino también en el exterior. Este documento reporta un informe parcial de un proyecto de investigación, expone una caracterización de la forma como se trabajan las matemáticas escolares en esta institución, una descripción de dichas prácticas y en el escenario del concepto de ambiente educativo, teniendo como marco de referencia perspectivas teóricas relacionadas a un paradigma naturalista cualitativo. El trabajo sistematiza la perspectiva de los maestros, por medio de una investigación etnográfica que recoge la muestra discursiva de maestros que trabajan y que ya no trabajan en la institución, para luego caracterizar el ambiente educativo de las prácticas matemáticas. Se tienen como referencias producciones teóricas de la escuela, la teoría del Enfoque Ontosemiótico y métodos de análisis cualitativo de contenido.

Palabras clave: Ambiente educativo, prácticas matemáticas, innovación, investigación cualitativa.

1. El contexto: la Escuela Pedagógica Experimental

La Escuela Pedagógica Experimental (EPE) se ha consolidado como una de las instituciones educativas alternativas más importantes en nuestro país, sus 37 años de trayectoria, sus múltiples investigaciones, sus participaciones en eventos nacionales e internacionales y lo más importante sus egresados, han demostrado la materialización de los sueños e inquietudes de un grupo de maestros que pensaron que una escuela diferente si es posible. Son muchos los aspectos de la EPE que se pueden reflexionar y analizar; para este caso se consideran las prácticas matemáticas que allí se han desarrollado.

Las prácticas tienen elementos que las caracterizan según el contexto, para este caso las formas de trabajo en la EPE presumen aspectos diferentes en cuanto a la organización en la clase, los roles, la metodología, entre otros, que no están atados a un sistema tradicional. Por esta razón resulta interesante tener evidencias de lo que en la EPE caracterizan estas prácticas, una experiencia diferente que pretende ofrecer una perspectiva poco usual de la clase de matemáticas.

Es por esto que se plantea el problema de investigación teniendo en cuenta que se tiene una perspectiva del ambiente educativo de las prácticas matemáticas según los maestros que han laborado y actualmente laboran en la EPE, resulta importante analizar lo que ellos plantean para identificar aspectos que se mantengan o que hayan cambiado según su punto de vista del ambiente educativo en el EPE a partir de un método etnográfico.

Surge entonces la siguiente pregunta que orienta el trabajo ¿Cuáles son los elementos que caracterizan el ambiente educativo de las prácticas matemáticas de la EPE según los maestros?

2. Marco de referencia

Sobre el ambiente educativo. Una conceptualización de la EPE

La EPE, el escenario para la presente investigación, ha establecido su propia perspectiva teórica desde la sistematización de su propia experiencia como una alternativa diferente de educación, y en esta aparecen conceptos que

toman sentido y apropiación en el contexto en el que se originaron, que aunque por las características que los describen, se asemejan a construcciones teóricas de otras perspectivas; es el caso del término "Entorno" descrito en el Enfoque Ontosemiótico y retomado por muchos investigadores que en ese caso lo relacionamos con "Ambiente" que en el contexto del campo de la presente investigación tiene una connotación particular al establecer la noción de "Ambiente educativo".

El Enfoque Ontosemiótico

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) se fundamenta en el trabajo de: Pierce, Witgenstein, Vygotsky, Habermars y Morín; también articula diferentes principios didácticos, socioconstructivista e interaccionista, como cimientos en un marco teórico que permita el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizajes de saberes en matemáticas.

Según Godino y otros (2008), el conjunto de nociones teóricas que actualmente componen el EOS se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas. En el esquema también se puede identificar cual fue el fundamento teórico para cada noción.

3. La perspectiva metodológica

El trabajo de investigación es de tipo cualitativo en la dirección que apunta Sandoval (2002), moviéndose en el campo del análisis en educación, además citando a Paul Ricoeur (1974), reafirma que este método analítico en el marco de la investigación social permite emprender un trabajo de tipo hermenéutico.

Particularmente para la indagación, por las características del contexto, del ambiente educativo de las prácticas matemáticas, el método escogido para análisis de los datos es el etnográfico.

El instrumento de recolección de datos

Teniendo en cuenta que el objetivo de la investigación es sistematizar la perspectiva de los maestros de matemáticas de la Escuela Pedagógica Experimental sobre el ambiente educativo de las prácticas matemáticas en la institución. Se precisa el uso de la entrevista semiestructurada como instrumento de indagación desde el marco del método etnográfico en las investigaciones de tipo cualitativo.

4. Resultados encontrados

Luego de hacer una prueba piloto a algunos maestros de la Escuela Pedagógica Experimental y de aplicar la guía de entrevista semiestructurada se encontró que:

Institucional

Las categorías de análisis más abundantes en los discursos son lo pretendido y lo implementado, particularmente relacionados con las situaciones problema. Muchos maestros argumentan que el fin principal no es trabajar por conceptos, ni memorizar procedimientos o propiedades y aunque aparecen o aparecieron en sus prácticas, no es lo más relevante. En cuanto a lo referencial, al parecer lo único que se tiene en cuenta de los elementos de significado son las situaciones problema, fue unánime la configuración de códigos en la interpretación de la información recolectada, de aquellos que mencionaron este aspecto en su entrevista. Y por último lo que tiene que ver con lo evaluado, no son muchas las expresiones que entraron en esta categoría, al parecer por las características de la evaluación cualitativa en la Escuela Pedagógica Experimental y la cualidad de heterogeneidad que aparece en la institución, hace difícil que los maestros se refieran a este aspecto de forma general.

Interacciones

Según los discursos, en la mayoría de las clases de matemáticas predomina la acción comunicativa relacionada con la situación problema, aunque atraviesa todos los elementos de significado y en menor frecuencia aparece relacionada con los demás. La interpretación del proceso de codificación de la información recolectada le otorga a esta categoría un nivel muy alto de significación lo que caracteriza fuertemente aspectos del ambiente educativo de las practicas matemáticas, basado en la comunicación, esta relación representada no solamente entre el maestro-estudiante, sino también entre estudiante-estudiante.

En ninguna de las entrevistas realizadas apareció la acción instrumental, lo que valida que los principios de formación en autonomía son consecuentes por lo menos con las respuestas de los maestros encuestados. En cuanto a la acción simbólica aparece una característica relacionada principalmente con los procedimientos, el trabajo de representación de modelos caracteriza significativamente las practicas matemáticas, por lo tanto se mencionaron casos en los que el representar tablas de doble entrada indicaba una forma general de proceder a la búsqueda de modelos. Otro aspecto importante en esta acción simbólica es en relación a la situación problema, de forma automática los estudiantes se enfrentan a la actividad y buscan darle solución apoyándose en mesas de trabajo, otra consecuencia de la idea de formación de colectivos, un pilar fundamental en la filosofía de educación EPE.

4. Conclusiones

Así se trate de un informe parcial de un trabajo de investigación, los resultados encontrados en relación a las características de una institución educativa de innovación y el ambiente educativo de las prácticas matemáticas que allí se desarrollan, ofrecen una perspectiva diferente en educación matemática, que gracias a la experiencia se ha logrado consolidar con una trayectoria importante y unos resultados visibles que es necesario analizar con mayor rigor, para poder construir una teoría que los consolide.

El método de análisis de la información que se logró emplear a lo largo del trabajo investigativo y los fundamentos en teorías como el Enfoque

Ontosemiótico y en Análisis Cualitativo de Contenido, desde una perspectiva de investigación cualitativa, permitió encontrar resultados y relaciones entre perspectivas teóricas relacionadas con las prácticas matemáticas y el ambiente educativo.

También se pudo observar que de acuerdo a los fundamentos epistemológicos que caracterizan a la EPE sintetizan características del ambiente educativo que no solo se da en las clases de matemáticas, aparecen transversalmente tres facetas que pasan por elementos que se lograron identificar como característicos al ambiente educativo. Lo concerniente a las prácticas matemáticas es solo uno de los escenarios, pero que funcionen como sistema requieren de mantener una relación.

Referencias bibliográficas

- Álvarez, C. (2008). La etnografía como modelo de investigación en educación. Revista Gazeta de Antropología, 24 (1), ISSN 0214-7564.
- Delgado, J y Gutiérrez, J. (2005). Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales. Editorial Síntesis, Madrid.
- Díaz de Rada, A y Velasco, H. (1999). La lógica de la investigación etnográfica. Editorial Trotta, Madrid.
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Universidad de Granada. España.
- Lurduy, O. (2012). El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas. Revista Científica CIDC-UD. Bogotá.
- Lurduy, O. (2012). Conceptualización y evaluación de las competencias de análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los estudiantes para profesor de matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Tesis inédita Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.
- Jara, O. (2008). Sistematización de experiencias: un concepto enraizado en la realidad latinoamericana. Rev. Internacional Magisterio. Educación y Pedagogía, Costa Rica.
- Sandoval, C. (2002). Investigación cualitativa, modulo 4 del programa de especialización en teoría métodos y técnicas de investigación social. ICFES. Bogotá.
- Segura, D. & Otros (2000). Vivencias de conocimiento y cambio cultural. 2ª Edición. Escuela Pedagógica Experimental. Bogotá.
- Segura, D. & Otros (2007). Convivir y aprender. 1ª Edición. Escuela Pedagógica Experimental. Bogotá.

Desarrollo de las prácticas docentes en LEBEM en el periodo 2005-1 a 2007-2

Rodríguez Gámez, Jenny Paola - González Cantor, Luis Gabriel
paolitastar200@hotmail.com – brothersgc@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

En el documento se mostrará una descripción de las fases desarrolladas en el proyecto de investigación: "Desarrollo de las prácticas en LEBEM en el periodo 2005-2012" del grupo de investigación CRISALIDA, de la Universidad Distrital; se presentará el desarrollo de la investigación, en torno al análisis de contenido que se trabaja en las unidades didácticas de la Práctica Intermedia I, en el periodo 2005-2007, centrando la mirada en evidenciar avances y desarrollos en el diseño y planeación de actividades y su relevancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática educativa en el aula de clase.

Palabras clave: Formación de profesores, educación matemática, sistematización.

1. Introducción

En el siguiente documento se precisa lo realizado en la investigación del grupo CRISALIDA, en el marco del proyecto "Desarrollo de las prácticas docentes en LEBEM en el periodo 2005-2012", dando muestra de los resultados de la organización y sistematización de las Unidades Didácticas realizadas por los Estudiantes para Profesor de Matemáticas (EPM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en el periodo 2005- 2007, teniendo en cuenta solo el énfasis de diseño y planeación durante las

prácticas intermedias 1 que se realizan en la LEBEM durante los periodos anteriormente mencionados.

2. Marco de referencia

La universidad Distrital Francisco José de Caldas está ubicada en la capital de Colombia, allí se desarrollan las prácticas para la formación docente como ente fundamental en el aprendizaje, acción y reflexión del trabajo en el aula de acuerdo a lo que indica Lurduy (2010) en relación con la LEBEM: "se adopta el modelo de profesor como un profesional critico, reflexivo, investigador, constructivo, plural, diverso y complejo en el aula". Así mismo mencionan Sánchez, Lurduy y Guerrero (2005), sobre las prácticas docentes que son: "un conjunto de estrategias didácticas y mediaciones instrumentales que el profesor pone en juego en el aula para construir significados sobre los objetos matemáticos a partir de la interacción entre él y sus estudiantes o entre éstos." Por ello como docentes en formación es fundamental reflexionar sobre la gestión en el aula.

Sobre la misma temática Lurduy (2010), indica acerca de la formación en la práctica "como un proceso institucionalizado en el cual sus actores se implican de forma 5 constructiva, compleja y crítica en la adquisición de conocimientos y contribución al crecimiento de ciudadanos", así mismo en estas prácticas los Estudiantes para Profesor de Matemáticas (EPM) en sus trabajos finales de cada una de las prácticas, trabajan con el modelo DECA (1992) y TSD de Brousseau (1989), quienes aportan a los EPM metodologías para la gestión y planeación en el aula. Adicionalmente se tiene presente la metodología de Piñuel (2002) en el proyecto de investigación con su análisis de contenido, que contribuye a realizar una mejor sistematización y organización de las Unidades Didácticas presentadas por los EPM.

3. Desarrollo de la propuesta

En cada semestre los estudiantes de la LEBEM (Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas), construyen Unidades Didácticas (UD), Según Sánchez, Guerrero, y Lurduy (2011) una Unidade Didáctica es:

> "Documento que recoge el conjunto de todas las actividades diseñadas, implementadas y sistematizadas que muestra cómo se resolvieron los problemas del profesor relacionados con la planeación y diseño, gestión en el aula y evaluación de los aprendizajes. Se estructura siguiendo la idea de un proyecto de aula y planteado teóricamente en las fases propuestas por Llinares (2010): fase preactiva, fase interactiva y fase posactiva".

En las Unidades Didácticas se emplean diversas estrategias tanto teóricas, como recursos manipulativos didácticos para la enseñanza de los conceptos, para lo anterior, se realiza una investigación documental en donde se tiene en cuenta las unidades didácticas que se realizaron en los periodos del año 2005 al 2007, las cuales tienen un énfasis en diseño y planeación y se aplican particularmente a la enseñanza primaria. Por lo tanto el objetivo de esta investigación es clasificar, organizar, y sistematizar los datos mediante los criterios postulados por el grupo CRISÁLIDA, (ver figuras 1 y 2).

ALTERNATIVAS DIDÁCTICAS PARA LA GEOMETRÍA EN EL GRADO SEGUNDO				**Total Promedio cada fila**
Introducción				
Coherencia	Pertinencia	Consistencia	Validez	
0.8	5.0	2.0	4.0	**2.95**
Objetivos				
Coherencia	Pertinencia	Consistencia	Validez	
4.8	5.0	2.8	4.0	**4.15**
Marco teórico				
Coherencia	Pertinencia	Consistencia	Validez	
1.2	4.0	4.0	3.2	**3.1**
Actividades y Protocolos				
Coherencia	Pertinencia	Consistencia	Validez	

Figura 1. Metodología y criterios adoptados del grupo de investigación CRISALIDA, 2012.

DISEÑO : TFD -ACC-AST, Nivel icónico		
1. 1 LÓGICA organizativa del contenido del texto RELACIÓN entre los elementos organizadores CONSIDERACIÓN de las acciones didácticas y de AD, Suficiencia	1.2 Antecedentes Justificación Situación problema Propósitos Referentes teóricos Metodológicos	1.3 Elementos de significado: lenguajes-definiciones-situaciones problémicas Prácticas discursiva: considerar-comprender, analizar-abducir Querer-ser
1.4 RIGOR Teórico-metodológico COHERENCIA Conexidad de referentes teórico-metodológicos CONSITENCIA Relación y continuidad referentes con el medio y con el diseño metodológico	1.5 Recolección de información: -Pertinencia de acciones metodológicas -Validez de instrumentos de recolección de información -Confianza de instrumentos de análisis de información	1.6 Elementos de significado: situaciones-procedimientos-propiedades; prácticas operativas: comprender-interpretar-significar, deducir-sintetizar Poder-ser/actuar
1.7 FLUIDEZ Viabilidad de la acción y de instrumentos FLEXIBILIDAD: Teórico-metodológica en el análisis de la información MOVILIDAD : Ajuste y equilibrio pragmático en la coherencia de las conclusiones	1.8 Análisis de la información: Relevancia de análisis de datos -Exhaustividad de inferencias e instrumentos -Transferibilidad de inferencias y conclusiones	1.9. Elementos de significado: propiedades-conceptos-argumentos; Prácticas normativas: pensar, saber, semiotizar -consenso-sintetizar-abducir didácticamente Deber-ser/actuar/saber

Figura 2. Criterios propuestos por el docente Orlando Lurduy. 2012.

Siendo consecuentes con lo anterior, se plantearon cinco fases para el desarrollo de la investigación, a continuación se describe lo realizado en cada una de ellas, estas fases son:

- **Fase I preparatoria**: En esta fase se realizaron capacitaciones por parte de los directores de la investigación, para que los equipos de trabajo se contextualizaran con el proyecto y los temas que se desarrollan durante el proceso de exploración.

- **Fase II descriptiva**: Se entregaron los documentos de apoyo (teórico) a los pasantes de investigación, estos textos fueron la base para la investigación, y se establecieron las estrategias para la recolección de las Unidades Didácticas.

- **Fase III interpretativa**: En esta fase se analizaron los documentos teóricos para dar inicio al diseño de una metodología contundente para la recopilación de datos de las Unidades Didácticas (como objetivos, justificación, marco teórico, actividades, protocolos y

conclusiones), y se crearon categorías y criterios para el análisis de las unidades recolectadas.

- **Fase IV construcción teórico global**: En esta fase se ordena y se clasifican las unidades por periodos de desarrollo y según el énfasis de cada práctica.
- **Fase V extensión y publicación**: En esta fase se quiere dar cuenta a la comunidad educativa los resultados finales de la investigación realizada, y se presentan en artículos y publicaciones académicas.

Las anteriores fases se desarrollaron con el fin de sistematizar la información recolectada de cada una de las unidades trabajadas en la práctica intermedia I (planeación y diseño de actividades) en el periodo comprendido en los años 2005-2007, para poder determinar los avances que se han presentado en las prácticas de la LEBEM con respecto a la formación docente tanto en el diseño y análisis, mediante los protocolos de las sesiones desarrolladas.

4. Aspectos metodológicos

Este proceso de sistematización se llevó a cabo por medio de filtros, los cuales permiten clasificar la información a partir de los criterios que los investigadores plantean, como lo son:

- Coherencia, se verificaba la relación de cada uno los elementos constitutivos.
- Validez, sobre lo pensado, lo planteado, lo desarrollado y lo analizado.
- Consistencia, entre los referentes teóricos y lo evidenciado en el aula.
- Y pertinencia, del concepto que se iba a desarrollar en el aula de acuerdo a los estándares de Matemáticas del MEN (Ministerio de Educación Nacional) y según el grado en el que se iba a desarrollar la práctica.

También se hace el uso de la técnica de Análisis de Contenido, esta teoría es pertinente en este caso, pues según Piñuel (2002), el *"análisis de contenido"* puede suponer que el significado del texto está oculto y solo puede revelar

su contenido a través de los análisis ya sean cuantitativos o cualitativos. Este autor a su vez plantea una metodología de análisis de contenido, el cual contempla los siguientes pasos:

- **Selección de la comunicación que será estudiada**.

  Donde el investigador define la temática y forma de comunicación que será estudiada, para nuestro caso serán las Unidades Didácticas que se presentaron en los años 2005-2012, para su respectivo análisis a partir de los elementos constitutivos que las componen como actividades y protocolos.

- **Selección de las categorías que se utilizarán.**

  Dichas categorías será la forma en la que se clasificará y seleccionará la información para ser analizada, para nuestro caso las categorías fueron propuestas por los docentes de la investigación, Orlando Lurduy, Fernando Guerrero y Neila Sánchez, quienes en el desarrollo de la investigación proponían 48 categorías para clasificar cada párrafo, texto y/o oración de las unidades didácticas, específicamente en las últimas 3 Unidades Didácticas.

- **Selección de las unidades de análisis.**

  En esta fase se determina el objeto de análisis, por ejemplo se indicaron los elementos constitutivos de las Unidades Didácticas de los años ya mencionados, además de ello centrar la atención en la profundización específica de cada práctica de sus respectivos énfasis.

- **Selección del sistema de recuento o medida.**

  Dentro de este aparte se continúa con la organización y sistematización de la información que tengan los investigadores, en nuestro caso sería organización de las Unidades Didácticas y determinar cada uno de los filtros que se proponen en el desarrollo de la investigación.

En el proceso de sistematización de la unidades se realizaron varios filtros, primero se recolecto un total de 40 unidades, a cada unidad se le realizó una ficha descriptiva, a partir de lo anterior, se realizó el primer filtro, el cual permitió a partir de los elementos constitutivos de cada unidades elegir la 14 unidades más completas para su posterior análisis.

El siguiente filtro de 14 unidades se redujo a 8, teniendo en cuenta el criterio basado en el syllabus de dicha práctica, por lo cual las unidades que tuvieran mayor cantidad de elementos constitutivos anteriormente descritos, eran las seleccionadas para continuar en la siguiente fase.

En el tercer filtro, se tuvieron en cuenta los criterios ya descritos que propusieron los investigadores, (coherencia, pertinencia, validez, consistencia), a partir de estos se analizaron y evaluaron las Unidades Didácticas que se tenían hasta el momento, como se muestra en la figura 1.

En el siguiente filtro ya con 4 unidades, se analizan y reducen a 3, teniendo en cuenta lo que indica el grupo DECA (1992) para la planeación y diseño de las actividades que trabajan los EPM con los estudiantes en el aula, el grupo DECA plantea unas fases de actividades que con su respectiva secuencia ayudan al desarrollo del concepto que se va a trabajar estas fases son:

- **Actividades de iniciación e introducción:**

  Esta fase de la planeación de actividades permite a los estudiantes explicitar y exteriorizar ideas previas a la temática que se va a desarrollar durante la unidad didáctica, además identifique estas ideas, conocimientos y estructuras conceptuales previos no son los más adecuados para trabajar con la temática en desarrollo y que por ello deben ser ampliados o transformados.

- **Actividades de desarrollo y reestructuración:**

  Es este segundo proceso de planeación, el grupo indica que se debe tener un contacto, una práctica y asimilación de los nuevos conceptos que se están presentando, así mismo analizar y reflexionar estos conceptos al momento de trabajarlos con diferentes situaciones y compararlos con los conocimientos anteriores de tal manera que

permita identificar las ventajas e incorpóralos con a la experiencia personal.

- **Actividades de aplicación:**

  Aquí se debe ampliar el conocimiento adquirido, trabajándolo en diferentes contextos y situaciones, además debe permitir el análisis sobre las características esenciales de los contenidos que se desarrollan durante esta fase y por ultimo permite proponer situaciones opcionales a partir del nivel de dificultad y la situación personal de cada alumno con el que se trabaja en el aula e clase.

- **Actividades de evaluación:**

  En esta fase se debe ampliar el conocimiento adquirido, trabajándolo en diferentes contextos y situaciones, además que debe permitir el análisis sobre las características esenciales de los contenidos que se desarrollan durante esta fase, y por ultimo permite proponer situaciones opcionales a partir del nivel de dificultad y la situación personal de cada alumno con el que se trabaja en el aula e clase.

En el quinto filtro se trabajó con las 3 unidades analizándolas según los criterios que planteó el grupo de investigación, (dichos criterios se muestran en la figura 2), a su vez cada unidad está clasificada según el puntaje obtenido de acuerdo al filtro inmediatamente anterior (tabla 1), también es de aclarar que a estas últimas 3 unidades seleccionadas se les analizó párrafo por párrafo, clasificándolo según si era de diseño, gestión o evaluación, y aplicando los criterios anteriormente descritos.

Tabla 1. Sistema de organización.

Unidades Didácticas según el puntaje de acuerdo a los criterios establecidos	Tipo de clasificación
Unidad Didáctica 1	Unidad de pilotaje
Unidad Didáctica 2	Unidad de validación
Unidad Didáctica 3	Unidad de muestreo

De acuerdo a la clasificación de las unidades didácticas sus características principales fueron:

- **Unidad de pilotaje:** Unidad didáctica que tenía una adecuada evaluación superior a 3,5 en los anteriores filtros, además que sus elementos constitutivos estaban completos y presentaban más características del diseño de la actividad y sus respectivos protocolos, pero su marco teórico con respecto a la teoría de situaciones didácticas no se abordaba en el aula de clase ni se hacía evidente en el desarrollo de la unidad didáctica, además que hacían falta elementos constitutivos como bibliografía, reflexiones y tabla de contenido.

- **Unidad de validación:** Esta unidad presentaba más elementos constitutivos con respecto a la unidad anterior, además que las conclusiones, reflexiones y protocolos iban bien relacionadas con los diseños que planteaban para el diseño de las actividades y su teoría propuesta en el marco teórico, pero no era en su totalidad completa y adecuada para el ejemplo de una unidad didáctica descrita por los syllabus de las prácticas.

- **Unidad de muestreo**: Esta unidad era la que en su mayoría de desarrollo del documento, presentaba más ítems propuestos por las docentes de las prácticas, además, su evaluación cuantitativa fue mayor a las anteriores, por ello fue la adecuada para presentar como ejemplo de unidad didáctica de las prácticas desarrolladas en los años ya presentados.

El análisis de cada párrafo se hizo a partir de enfoques y cada enfoque se representaba según un color y un símbolo, los colores son: amarillo para la gestión, símbolo “U”, verde para el diseño, símbolo “u” y rojo para la evaluación, símbolo “v” como se presenta en la figura 3.

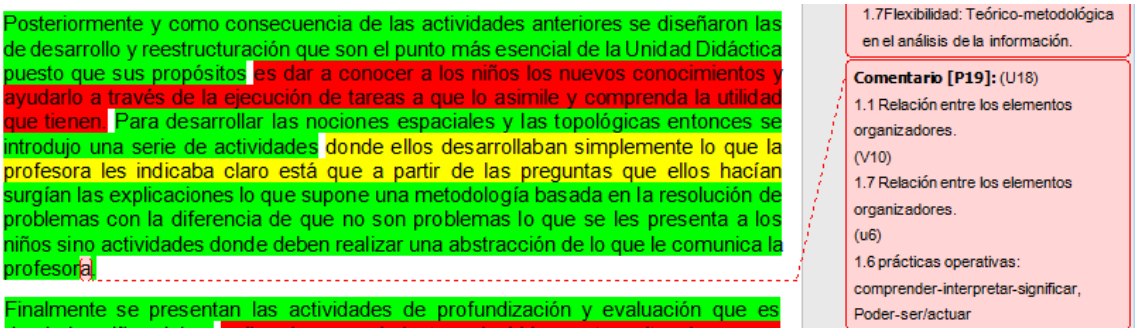


Figura 3. Sistematización y organización, propuesto por el grupo CRISALIDA, 2013.

Esto permitió reflexionar sobre la formación docente que se ha venido implementando, desarrollando y optimizando en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y su compromiso con la mejora de la calidad educativa, comenzando desde las aulas públicas de Bogotá. Además de ello se logra evidenciar como la teoría que se utiliza y plantea para cada una de las prácticas es adecuada y permite desarrollar todo un concepto en el aula de clase, pero como ya se dijo esto se mejora a medida que pasa el tiempo y se aumenta el rigor, desarrollo y optimización de dichas prácticas desarrolladas por los EPM.

En el análisis de las unidades didáctica se evidencia el trabajo de dos teorías la de grupo DECA (1992) para la planeación y diseño de las actividades y la Teoría de Situaciones didácticas de Brousseau (1986), de igual manera para el diseño y planeación de las actividades, siendo la guía general y más utilizada la del grupo DECA (1992), lo que quiere decir que los EPM han vinculado otras teorías que han permitido el óptimo desarrollo de cada una de sus prácticas mejorando paulatinamente con diversos métodos la educación que se imparte en Colombia.

5. Conclusiones

Durante el proceso de sistematización y organización de las Unidades Didácticas, se fueron conociendo otras maneras y metodologías que los docentes tenían en el periodo 2005 al 2007 en la práctica intermedia 1, para dar a conocer los métodos que los estudiantes debían aplicar en el aula como

es el caso del modelo DECA y TSD (Teoría de Situaciones Didácticas), dado que la práctica intermedia 1 se enfoca mucho más en dar a conocer el modelo DECA. Fue interesante notar que los estudiantes en aquella época se enfatizaban en ambos modelos, pero solo aplicaban en las clases y en las estructuras de sus Unidades Didácticas el modelo DECA.

Aunque el periodo investigado fue el más antiguo, a partir de ello, pudimos notar las grandes diferencias que hubo desde aquella época hasta la formación y el espacio curricular de práctica intermedia 1 que hoy en día se dicta en la LEBEM, lo que permitió inferir a través del filtro 3 y 4 en donde se notaron las características de la evolución de la práctica en la LEBEM.

En cuanto al aspecto teórico, la metodología utilizada y aportada por el grupo CRISALIDA: *análisis de contenido* y la *teoría fundamentada*, fue primordial para entender que la sistematización y organización en este caso de las Unidades Didácticas también se tienen en cuenta teorías importantes a nivel académico que aportan de gran manera a la sistematización de los documentos.

La contribución de esta investigación es crucial para dar a conocer la formación de docentes que se imparte en la LEBEM, además de como ha sido su desarrollo desde el año 2005 hasta el año 2012, lo cual deja evidenciar que el desarrollo ha sido pertinente. Además de la adecuación de las teorías o formas de desarrollar las prácticas pedagógicas, que año tras año proponen los docente del eje de investigación como la implementación de la Teoría de Situaciones Didáctica de Brousseau para la práctica intermedia IV, el lograr diseñar un currículo en la práctica intermedia V, además de la gestión, planeación, diseño y recursos didácticos que se pueden emplear en el aula vistos y desarrollados en las prácticas anteriores

Así mismo, los avances en cuanto a los recursos que utiliza un EPM y la preparación que tiene durante las prácticas intermedias que no sólo se centran en dictar un contenido y realizar una clase de tipo magistral, sino que se forma al estudiante en la parte teórica con los modelos pedagógicos a implementar, en la parte matemática, y en la parte didáctica.

Referencias bibliográficas

- Abela, J. A. (1998). *Las técnicas de Analisis de contenido*. Granada: Universidad de Granada.
- DECA. (Septiembre de 1992). Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. *Revista Aula*(7), 33.
- Guerrero, F., Sánchez, N., & Lurduy, O. (2005). La práctica docente a partir de los modelos DECa y TSD. *Enseñanza e las ciencias revista de investigación y experiencias didácticas*, 23(3), 235-238.
- Guy, B. (1986). *Métodos y fundamentos en didáctica de las matemáticas.* Recuperado el 15 de Mayo de 2012, de Labedumat Portal de educación matemática: http://www.labedumat.com/component/abook/book/12-Didactica-de las-matemáticas/77-fundamentos-y-metodos-de-la-didactica-delas matemáticas.
- Lurduy, O., Sánchez, N., & Guerrero, F. (2011). La práctica docente en el proyecto curricular de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas: una innovación educativa. *XIII CIAEM-IACMR*. Recife, Brasil.
- Piñuel Raigada, J. L. (2002). *Epistemología, metodología y técnicas de análisis e contenido.* (F. d. Departamento de Sociología IV, Ed.) Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid.

Proceso de visualización en geometría, perspectiva de género

Beltrán Perdomo, Liceth Katherin – Suárez Moya, William Andrey

lizbek320@hotmail.com – suarytos11@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

En el aprendizaje de la geometría es necesario reconocer el desarrollo cognitivo y los procesos fundamentales que se realizan mediante la articulación de los procesos de visualización y justificación, convirtiéndose en un motor con el cual se logra una transición de un nivel perceptual a uno formal. En los resultados del siguiente estudio de caso se establece una comparación entre géneros, haciendo un contraste teórico y experimental para su posterior análisis y balance final, precisando en las habilidades visuales de hombres y mujeres respectivamente.

Palabras clave: Visualización, género, habilidad.

1. Introducción

A partir de la actividad propuesta por el docente Jaime Fonseca[1] en el seminario de Didáctica de la Geometría con estudiantes de quinto semestre, relacionada con el proceso de visualización en geometría, se encontraron algunos argumentos relevantes al momento de resolver el ejercicio en algunos grupos de estudiantes. La actividad consistió en identificar la propiedad[2] presente en las figuras planas, bajo la metodología de resolución

[1] Espacio de formación del Eje de Didáctica de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.
[2] Atributo o cualidad esencial de alguien o algo. (RAE, 2010).

de problemas que estableció dos roles: el observador y el resolutor, donde la función asociada a cada uno consiste en que el primer sujeto observe de forma analítica el proceso del sujeto que intenta dar solución a la actividad, el segundo sujeto aborda el problema justificando de forma verbal el porqué de su proceder, evidenciando por medio de una comparación de géneros las habilidades espaciales que podrían estar afianzadas en cada una de sus respuestas, siendo este tema de interés de este trabajo. Por lo cual se da pasó a la pregunta: ¿Cuáles son las diferencias entre los procesos de visualización que realizan un hombre y una mujer de quinto semestre de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas al momento de resolver un problema de geometría?

Para dar respuesta a esta problema, el trabajo cuenta con elementos teóricos y estudios de casos particulares frente a los procesos de visualización bajo una metodología de estudio de caso específica, donde se implementa un diseño de instrumento que permitió recolectar los resultados logrados en dicha investigación y así llevar a cabo el análisis de datos de acuerdo a la variable género por los EPPM[3].

2. Marco de referencia

Inicialmente se parte de la importancia que tienen los procesos de visualización en la enseñanza de la geometría escolar, que a su vez son conocidos como habilidades que desarrollan los estudiantes en el proceso de aprendizaje y que se deben tener en cuenta para su enseñanza. Hoffer (1981, citado en Villarroel & Sgreccia, 2011), afirma que "las habilidades básicas que una buena enseñanza de la geometría debería ayudar a desarrollar son clasificadas en cinco áreas: visuales, de comunicación, de dibujo y construcción, lógicas o de razonamiento y de aplicación o transferencia" (p. 76).

Siendo la visualización objeto principal del estudio, en primera instancia se reconoce la importancia que juega en la geometría las percepciones visuales simples y complejas, definidas por Bishop (1989) como imágenes mentales que son manipuladas en la interpretación y donde es fundamental la

[3] Estudiantes para profesor de Matemáticas

articulación con las diferentes estrategias para llegar a la solución de un problema por medio de la visualización.

Este proceso puede ser adquirido por los individuos en torno a las técnicas y prácticas de los mismos, así como lo indica Castiblanco, A & Otros (2004) en el artículo *El Aprendizaje de la Geometría*, donde se muestran las limitaciones fisiológicas que restringen al resolutor frente a la visualización que puede realizar, clasificándolos en tres niveles (tabla 1) expresando que el resolutor en cada uno de los niveles asimila las figuras de manera distinta:

Tabla 1. Niveles de visualización.

El primer nivel, El Nivel Global de Percepción Visual, el resolutor realiza una actividad cognitiva en la que asocian las figuras, a objetos físicos donde prevalece la forma total de la imagen, identificando las formas prototípicas de la figura
El segundo nivel, El Nivel de Percepción de Elementos Constitutivos, el resolutor percibe de manera espontánea las partes constitutivas de la figura y los componentes de la misma en diferentes partes, lo que permite la construcción de relaciones y de conceptos
El tercer nivel, El Nivel Operativo de Percepción Visual, se organizan las configuraciones de las figuras y las manipulan, permitiendo al resolutor crear transformaciones y estrategias no articuladas por el discurso para lograr la solución del problema.

De la misma manera, Del Grande (1990) hace referencia a la visualización como un proceso, distinguiendo habilidades que los sujetos utilizan para crear y procesar las imágenes que permiten resolver un problema, de allí que se destaca habilidades que pueden estar implícitas en el proceso de visualización, entre ellas, identificación y discriminación visual, conservación de la percepción, reconocimiento de las posiciones y las relaciones en el espacio, que integran las acciones que pueden realizarse para el mejoramiento de la visualización, según el sujeto que este visualizando una problemática, en este caso bajo la variable de género por lo cual, Gorgorió (1996) revela en su estudio que las habilidades de visualización y la comprensión de las situaciones problema, no son iguales en hombres que en mujeres, según el autor, los hombres poseen la capacidad de visualización más desarrollada que las mujeres.

Ahora, de acuerdo con los niveles mencionados de visualización propuestos por los planteamientos de Duval (1998, citado en Castiblanco A & otros, 2004), en el presente apartado se hace alusión a la categorización de los niveles de Van Hiele (1959), proponiendo un modelo que pretende facilitar

al estudiante el avance de un nivel a otro para obtener el aprendizaje sobre geometría.

Debido a que este modelo imparte una transición en una secuencia de los niveles que clasifican las capacidades de los estudiantes, dependiendo las características que estos desempeñan al resolver un problema, es necesario hacer explícito que los niveles propuestos por Van Hiele son:

- **Nivel 0:** Visualización o reconocimiento: alude al reconocimiento de figuras como un todo.
- **Nivel 1:** Análisis: describe las propiedades de una figura a partir de las manipulaciones empíricas estableciendo comparaciones en las mismas.
- **Nivel 2**: Ordenación o clasificación: se logran establecer relaciones entre las diferentes figuras y sus propiedades identificando partes constituyentes.
- **Nivel 3:** Deducción formal: significado y argumentación lógica de las propiedades.
- **Nivel 4:** Rigor: Razonamiento deductivo, comprensión de significados bajo argumentos teóricos.

De los anteriores niveles se tendrán en cuenta 0, 1, 2, aclarando que aunque los niveles de análisis y clasificación no hacen referencia específica a la visualización, se ha determinado que por ser categorías de comprensión jerárquicas, unos están contenidos en otros, lo que permite inferir sobre la habilidad en estos tres niveles y establecer relaciones en contraste con la propiedad relacionada en la actividad planteada. Por consiguiente, es posible establecer una relación entre los niveles de Van Hiele y los planteamientos de Duval (1998) que expone Castiblanco, A & otros (2004), permitiendo mediante la actividad planteada, identificar aspectos relacionados a la construcción de la propiedad.

Teniendo en cuenta los aspectos relevantes entre la comparación de niveles, es importante tener en cuenta que las categorías que permitirán más adelante la clasificación de habilidades y procesos de visualización entre hombres y mujeres, están basadas en acciones que pueden llegar a hacer los estudiantes en el proceso de resolución.

3. Aspectos metodológicos

Para este trabajo de investigación, son tenidos en cuenta autores como Andariega y Rodríguez (s.f) y Yin (1989), quienes permiten establecer la metodología apropiada que será utilizada para dar solución a la indagación. Si bien Andariega y Rodríguez (s.f) afirman que el estudio de caso permite: "analizar el fenómeno objeto de estudio en su contexto real utilizando múltiples fuentes de evidencia, cuantitativas y/o cualitativas simultáneamente"

Análogamente, Yin (1989), lo define como "una investigación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo en su contexto real, donde los límites entre el fenómeno y el contexto no se muestran de forma precisa, y en el que múltiples fuentes de evidencia son usadas".

Respectivamente, esta actividad emplea la metodología de resolución de problemas, teniendo en cuenta lo dicho por Bressan, Zolkower & Gallego (2004), "La resolución de situaciones problemáticas realistas a menudo exige establecer conexión y la aplicación de un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas" (p. 9).

Es por ello que la presente indagación, se realiza bajo la resolución de un individuo y la observación de un sujeto investigador por medio de instrumentos que permitan y favorezcan la recolección de los datos necesarios para evidenciar y constatar las concepciones brindadas por los autores anteriormente mencionados y las conjeturas resultantes del proceso de esta indagación. Uno de los instrumentos corresponde a la prueba, en la que ejecutando la resolución de problemas y mediante la visualización, los individuos revelarán las capacidades y las habilidades que fueron empleadas en la resolución de la misma.

El segundo instrumento, permite recolectar la información y clasificarla, de forma que se resalten los procesos utilizados, los niveles de visualización y las estrategias utilizadas por los individuos, con el fin de determinar las diferencias entre los procesos de visualización de los géneros.

El tercer y último instrumento, se refiere al registro audiovisual de las explicaciones verbales, realizadas por los estudiantes en el transcurso de su papel como resolutores.

La implementación de estos tres elementos fundamentales para la verificación de los datos obtenidos, posee la finalidad de recolectar todos los datos necesarios para establecer las diferencias entre géneros en cuanto los procesos de visualización y la relación con los niveles 0, 1 y 2 de Van Hiele (1985).

Para el análisis de los resultados a través de los instrumentos de observación y la respectiva actividad, se tuvo en cuenta unas categorías de análisis, basadas en los procesos de visualización para la resolución de problemas, que además están categorizadas según los primeros niveles de Van Hiele y visualización para el aprendizaje de la geometría, centrándose en las acciones que hace el resolutor para llegar a la solución de la actividad y para ello se plantea por cada categoría descriptores que nos permitirán ser más específicos al momento de comparar y clasificar los procesos de visualización entre hombres y mujeres.

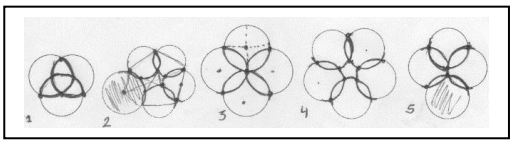
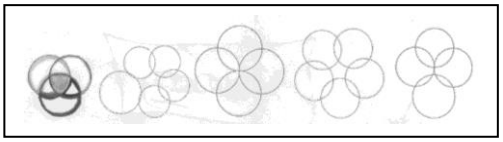
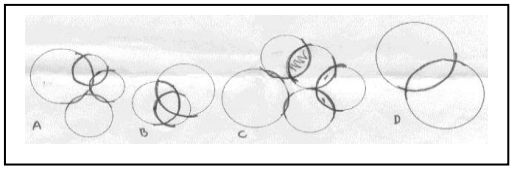
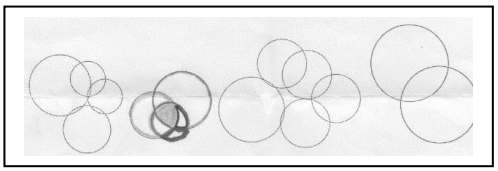
4. Desarrollo de la propuesta

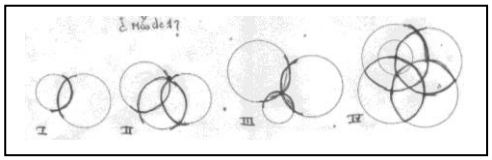
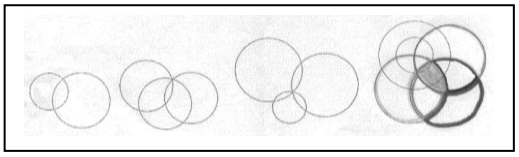
Por medio de la implementación de los instrumentos de recolección de información, se hará una descripción de lo que se halló en las matrices y relatos de los resolutores, teniendo en cuenta las grabaciones de audio y la prueba, donde se puede establecer un análisis respecto a los dos sujetos implicados en la actividad investigativa.

De ello se determinó que en ambos resolutores, la representación mental que forman está asociada a una imagen pictórica concreta, ya que la actividad se basa en el pensamiento espacial, en específico esta imagen en el resolutor H (Hombre) es dinámica, porque emplea un desplazamiento; caso contrario con el resolutor M (Mujer) este proceso no se hace porque la imagen asociada es cinética. Luego se realiza por parte de ambos una manipulación con dichas imágenes, donde el resolutor H hace una interpretación de información figurativa consistente en extraer información de las representaciones visuales que se forme, en cambio el resolutor M hace un procesamiento visual basado en la transformación de imágenes visuales para formar otras según se muestra en la prueba.

A continuación se muestra la descripción del relato en la aplicación de la prueba:

Tabla 2. Comparación de la descripción del relato de los resolutores en la aplicación de la actividad.

DESCRIPCIÓN RELATO RESOLUTOR M	DESCRIPCIÓN RELATO RESOLUTOR F
En el primer ítem "todas estas figuras tienen algo en común". Las figuras en común son la circunferencia. Recurre al conteo para resaltar una regularidad, estrechando una serie, lo cual no funcionó, así que adoptó por la intersección entre las circunferencias, teniendo en cuenta el conteo para este factor. Manifiesta una simetría en las figuras que contienen el mismo tamaño, y para las dos restantes, ya que las ha visto desde diferentes perspectivas, o ha hecho un desplazamiento como representación mental. 	Comienza viendo que las figuras consignadas con circunferencias, al leer el primer ítem "todas estas figuras tienen algo en común", así que comienza con el conteo del número de circunferencias implicadas en cada figura, y mira que todas no son iguales, al menos por el tamaño, también algo que se refiere es por las intersecciones que las figuras tienen, por último observa que hay cuatro tamaños de círculos. 
Posteriormente, deja esas inferencias, para realizar el segundo ítem "ninguna de estas otras lo tienen", así que identifica el número de figuras, como nombró en el anterior ítem, que se hallaba una simetría, esto lo llevó a descartar las tres primeras figuras y a analizar la última, teniendo en cuenta el factor del conteo para inferir que el número de intersecciones era menor y que no entraba en ese común que las figuras de arriba tenían, es decir que por lo menos debía haber tres intersecciones entre sí. 	Ahora pasa al punto "ninguna de estas tienen ese algo en común", sólo que falla en la lectura y no entiende o relaciona el ítem con el anterior, en tanto que no compara las figuras que ya definió con los argumentos definidos para el segundo ítem. Ello conlleva a no poder discriminar más fácil las figuras y poder propiciar otras inferencias. 

Para el tercer ítem, “identificar cuál de las figuras tiene la única propiedad”, dice que la respuesta posiblemente es la figura tres, argumentando mediante el número de intersecciones, la simetría y que el tamaño no importa. Aun así, esos criterios también rescatan la posibilidad de la segunda figura, por ello justifica diciendo que las regiones formadas eran mayores que las partes sobrantes, y que este elemento no se veía constitutivo en el primer ítem, por lo que la respuesta indudablemente es la tres. Por último, para corroborar hace una construcción con seis círculos de tamaño igual con forma regular, con regiones menores a partes que quedan unidas, para así dar solución a la actividad. 	En el tercer ítem, surge la dificultad en ver que ese “común” no lo pudo detectar. Aplicando lo que pudo observar en lo anterior ítem como referencia, identifica un centro en común entre las circunferencias, que hace que sea simétricas las figuras, sólo que no las denota de esa manera; luego lleva la idea de las lunas que forman la longitud de la circunferencia de la parte que sobra de la intersección con las demás circunferencias, pero a su vez hay un criterio importante y es que las figuras forman una especie de “carita” que hace que la cuarta figura del tercer ítem sea la que tiene la propiedad. 

De lo anterior, se toma como base para clasificar las habilidades implicadas, haciendo notar que ambos determinan similitudes en varios aspectos, como la habilidad de identificación visual, en la que reconocen una figura aislándola de su contexto; el reconocimiento de relaciones espaciales, que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio; y la discriminación visual, en la que se hizo la comparación entre figuras para establecer sus semejanzas y diferencias visuales.

Por tanto, se destaca que el tratamiento que se hizo a las habilidades incidió en propiciar dos respuestas distintas, la estrategia que determino cada resolutor también fue un punto clave, ya que en el caso del hombre, este se enfocó en dar una forma abstracta al abordaje del problema, en cambio la mujer tendió a relacionar los componentes que constituían cada figura (tamaño, regiones de intersección, etc.), por ende como la prueba comprendía una división en cada ítem donde podía destacarse un aspecto a desarrollar según se fuera infiriendo, el no atar las habilidades a este procedimiento, retrasaba la respuesta, y sumado a ello la interpretación del enunciado es fundamental para ver lo que se busca, desencadeno en dos razonamientos distintos, ya que el resolutor 1 indicó la solución de la prueba

alcanzando un nivel de operatividad de percepción visual mientras que el resolutor 2 hizo un mal uso de la información estableciendo el nivel de percepción de elementos constitutivos.

De la misma forma, es posible establecer que los estereotipos de género, pueden adquirir habilidades que faciliten su proceso lógico en la resolución, sin embargo, las concepciones que se tienen frente a las destrezas de cada género, también pueden ser un obstáculo que impide la actividad de interpretación y la actitud de convencimiento en cuanto a la posible solución que pueda dársele a un problema determinado; por tanto, la aseveración en el estudio realizado por Del Grande (1990), se ratifica con los resultados obtenidos a lo largo de este proceso investigativo, ya que tanto los instrumentos de validación de la información como las referencias contempladas de autores como Ursini, Sánchez, Orendain & Butto (2004), evidenciaron que aunque las habilidades en los procesos de resolución son los mismos, la aplicación y el empleo que hace cada género, es diferente debido a que las deducciones, la interpretación, las tácticas, y consideraciones de las figuras, motivan a tomar caminos de abordaje distintos para resolver un problema.

5. Conclusiones

Teniendo en cuenta el proceso de indagación correspondiente, se logró identificar variantes que podrían llegar a construir argumentos al desarrollar la veracidad de sus acciones destacando:

- A partir de los datos recolectados y el posterior análisis de la información con la teoría, frente a los procesos de visualización según el género, es importante resaltar que aunque se identificaron en ambos resolutores características similares, la forma de exponer ideas, centrarse en representación mental es más clara en el hombre que el mujer, lo que permite proponer algunas inferencias acerca de las diferencias en el proceso de resolución de problemas según el género.

- Existen diferencias en las capacidades de los sujetos (hombres y mujeres) de práctica que ellos han realizado de sus habilidades de visualización, pues en la actividad propuesta se pudo observar que las capacidades y procedimientos en cada género están estrechamente relacionadas, pero cada sujeto aborda el problema empleando diferentes estrategias de resolución.

- Los enunciados presentes en las pruebas favorecen la percepción visual, las habilidades y el desarrollo de la estrategia según se aborde denominado problema además permiten clasificar algunas de las capacidades implícitas en la resolución de problemas en este caso haciendo una distinción entre géneros.

Referencias bibliográficas

- Andariega & Rodríguez (s.f). El estudio de casos como metodología de Investigación científica.
- Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education, En *Focus on learning Problems in Matematics*, 11. 1.7-16.
- Bressan, A., Zolkower, B. & Gallego, F. (2004). L*a educación matematica realista. Principios en que se sustenta*. Recuperado de: http://www.gpdmatematica.org.ar/ mpublicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf
- Castiblanco, A & Otros. (2004). El aprendizaje de la geometría. En *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales.* Serie documentos. Proyecto: Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia Bogotá. MEN. 9-18.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher*, 37 (6), 14-20.
- Duval R. (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Educación Matemática II. México. (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 173-201.
- Gorgorió, N. (1996). La Identificación de grupos de incidencia variables determinantes de los grupos, diferencias de rendimiento y de procesos entre grupos de incidencia.
- Ursini, S., Sánchez, G., Orendain, M. y Butto, C. (2004). El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. Enseñanza de las Ciencias, 22 (3), 409-424.
- Van Hiele-Geldof, D. (1959). Last article written by Dina Van Hiele-Geldof entitled: Didactics of geometry as learning process for adults. In D. Fuys, D. Geddes and R. Tischler (eds.). English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. School of Education, Brooklyn, NY: School of Education, Brooklyn College, 215–233.
- Villarroel, S., Sgreccia, N. (2011). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de Secundaria. Números. *78*(1), 73-94.
- Yin, R. K. (1989): Case Study Research. Design and Methods, Applied Social Research Methods Series, Sage Publications, London.

Ciudadanía Ambiental desde las prácticas de medición

Gómez Lindo, Edwin Alberto
Edwinalbertogomezlindomail.com
IED San Martín de Porres, (Colombia)

Resumen

Desde la propuesta de ambientes de aprendizaje, ciudadanía y participación ambiental, creada al interior de la Institución Educativa Distrital San Martín Porres, ubicada en sector rural de la ciudad de Bogotá en la parte alta de la localidad de Chapinero. Se desarrolla una propuesta que vincula las necesidades de una comunidad golpeada por varios eventos naturales que ha obligado el desplazamiento de familias de sus viviendas y lugares de trabajo. El proyecto está orientado a la recuperación de los terrenos y ecosistemas circundantes a la comunidad residente al cerro "El Cable"; debido a su ubicación en la comunidad. Desde este interés las áreas de matemáticas y ciencias naturales diseñaron un ambiente de aprendizaje dirigido a la recuperación de la flora de los cerros orientales, por medio de una metodología de acción participación, en la cual los estudiantes pasan de la teoría a la práctica participativa.

Palabras clave: Ciudadanía ambiental, matemáticas y prácticas de medición.

1. Introducción

En la clase de matemáticas y ciencias naturales de la Institución Educativa Distrital San Martín de Porres, encontramos en los estudiantes desinterés y baja participación en las actividades propuestas en la clase. En colaboración con el equipo directivo de la institución (coordinador, orientadora y director de grupo) se realizó un estudio relacionado con los estudiantes que no asisten

a clases. Se identificó así que la mayoría se ocupa en la comercialización de comestibles y venta de *eucalipto* de manera ambulante en las calles y semáforos de los barrios aledaños. Por lo cual cuestionamos el marco de las experiencias diseñadas en las clases y las actividades por las cuales se dinamizaban los objetos de trabajo en las asignaturas, centrados en los contenidos y algoritmos básicos. Desconociendo no solo el sentido social de las matemáticas, sino también la realidad de la comunidad participante en las dinámicas institucionales. Generando en los jóvenes involucrados una participación activa transformadora de su entorno (Garcia, et al. 2011).

La ubicación geográfica de la institución, en el cinturón ambiental de la ciudad de Bogotá, generó la necesidad de construir un proyecto educativo ambiental. Que por su carácter transversal pueda integrar las diferentes áreas curriculares porque que en este sector nacen algunas fuentes hídricas que han sido deterioradas y contaminadas por parte de la comunidad habitante del sector. Acciones que generan deslizamientos de los suelos y contaminación de los riachuelos que alimentan los ríos de la ciudad, (Secretaría Distrital del Medio Ambiente de Bogotá). Es por estas razones que el proyecto institucional y en especial el de las matemáticas escolares se vinculen en la conservación de los cerros orientales como un espacio en el cual no solo se promueva el dominio de objetos matemáticos, sino que amplié la posibilidad de promover en los involucrados, ideas poderosas

La política púbica distrital propone que para un desarrollo integral de los estudiantes, es necesario generar ambientes de aprendizaje que rompan las fronteras curriculares para identificar problemas que sean importantes tanto para la comunidad, como para la formación de valores para el estudiante. (MEN, 2011).

Las políticas educativas distritales convocan a los proyectos educativos institucionales para vincularse en la formación de “ciudadanos críticos capaces de comprometerse con la transformación y conservación del medio ambiente y la gobernanza del agua. (Plan decenal de educación, MEN, 2012).

Desde el enfoque socio político en la educación matemática, (Valero & Skovsmose, 2012), este estudio se propone validar los elementos que harán posible construir un escenario de aprendizaje relacionado con las prácticas de medición en la reforestación de los cerros orientales. Debido a las

prácticas sociales en la comercialización de *eucalipto* y la distribución y construcción de terrenos para la construcción de viviendas en este sector. Las cuales permiten a los niños y jóvenes tener acercamiento con las prácticas de medición de manera informal.

En el análisis de las potencialidades y dificultades en la participación democrática de los estudiantes, un ambiente de aprendizaje con referencia a prácticas de medición permitió ampliar y romper con los componentes tradicionales de la formación en matemáticas para la institución, movilizando experiencias ajenas en la cotidianidad del aula de matemáticas y en la experiencia de consolidación del proyecto institucional. A partir de la aplicación de la estrategia curricular se obtuvieron los siguientes resultados:

- Participaron 32 estudiantes, con un 70% de promedio de asistencia.
- Se plantaron 3 tipos de semillas nativas de bosque de niebla.
- El nivel desempeño alto estuvo presente en el 80% de los estudiantes, para ambas asignaturas.
- En evaluaciones escritas y orales, los estudiantes demostraron (en lo declarativo), un nivel de conceptualización mayor con respecto las problemáticas del cerro "El Cable" teniendo en cuenta los descriptores de desempeño.
- La frecuencia de respuesta en relación a conceptos como flora, fauna y desarrollo sostenible, estuvo presente en el 70% de los estudiantes.
- El concepto matemático de medida, conteo y proporción, se encuentra en un nivel de desempeño alto en las formas escritas.
- El concepto matemático de medida, conteo y proporción se encuentra en un nivel medio de desempeño en las formas orales.

2. Marco de referencia

Con el fin de establecer el marco de referencia, se analizaron tres experiencias documentadas previas, dos de ellas desarrolladas en Brasil en la

PPGECIM y la tercera, en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. A continuación se hace una descripción de cada una de ellas:

Alfabetização Ambiental como´Indicador de Qualidade da Educação Ambiental – um Estudo Exploratório Feito em Estância Velha, RS, Brasil.

Jaeger Soares F., & Batista Pereira A., (2004). Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIM. Brasil.

> Con el propósito de evaluar las actitudes ambientales de los profesores como elemento determinantes en la participación y desarrollo de un proyecto ambiental, los autores se proponen como primera instancia construir un marco de evaluación que incluya las actitudes ambientales en relación a la práctica educativa, el conocimiento, actitudes y habilidades ambientales. Debido que la comprensión de esta relación, es esencial para la solución de problemas ecológicos de una comunidad. Jaeger Soares F., & Batista Pereira A., (2004), consideran que ella determina las posibilidades de proyectos educativos en alfabetización ambiental.
>
> El instrumento construido incluye las categorías para evaluar actitudes ambientales; se estructura con base en la escala Liker. El instrumento está construido en tres partes. En la primera, se pregunta por los conocimientos de ecología y ciencias ambientales del profesor y la distribución del tiempo de trabajo en las clases entre la teoría y el trabajo en acciones ecológicas. En la segunda parte se evalúa si el profesor da igual peso con el nivel de conocimientos y las prácticas. La tercera parte valora los hábitos y la coherencia entre el discurso y las practicas, que incluyen actividades y habilidades políticas necesarias para el desarrollo de estrategias que permitan identificar los problemas ecológicos más relevantes de la comunidad y sus posibles soluciones.

Es por esto necesario resaltar las actitudes en los docentes involucrados en los Proyectos Educativos Institucionales (Jaeger & Batista, 2004), en especial las inmersas en comunidades rurales. Para este trabajo se hará uso

de las herramientas diseñadas para identificar las actitudes ambientales del grupo de docentes de la comunidad educativa de la institución.

Formação Técnica e Preservação Ambiental no Vale do Paranhana (RS): Uma Proposta Curricular Integradora.

Kaiser C., Kaiber da Silva C., Pires dos Santos R. (2004) Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIM. Brasil.

Con el propósito de construir una propuesta integradora en la formación técnica y tecnológica en la Preservación del Medio Ambiente y Desarrollo Sostenible en la Escuela Estatal Técnica (Monteiro Lobato, Brasil). Los autores coincidieran necesarios destacar el rol del profesor como agente de las mismas, para construir indicadores en la reestructuración curricular necesaria en la preservación del medio ambiente y desarrollo sostenible. En el proceso se integraron industrias y empresas que generan desarrollo en la región y en las cuales trabajan estudiantes y egresados de la institución, al igual que la comunidad educativa. Con esta participación se buscó aportes para fortalecer los conocimientos teóricos y prácticos para la solución de problemas ambientales con proyectos y acciones sostenibles para la preservación de la naturaleza.

La metodología utilizada es de carácter cualitativo, por lo tanto se construyeron cuestionarios dirigidos a los diferentes miembros de la escuela y la comunidad local:

a) A todos los profesores Educación Técnica (37).

b) A todos los estudiantes del último semestre de ingeniería eléctrica, electrónica y mecánica de la Escuela State Technical Monteiro Lobato Bamboo (170).

c) A todos los empresarios de industrias y empresas de servicios eléctricos y electrónicos de Paranhana que tienen graduados de Monteiro la Escuela Técnica Lobato (66) junto con los respectivos técnicos de mantenimiento (70).

De nuevo se destaca el rol del profesor como agente dinamizador experto en reconocer las necesidades de su comunidad y orientador de las mismas, por medio del espacio de trabajo con los jóvenes de su comunidad impulsando a los jóvenes a ser ciudadanos participativos y críticos de su realidad, que aportan al desarrollo de su sociedad.

Un aporte importante de esta investigación es la necesidad de involucrar los empresarios, industrias y empresas que prestan servicios en estas comunidades puesto que estos esfuerzos son esenciales en la conservación del medio ambiente y en programas de defensa del medio ambiente. Este trabajo aporta a la investigación la necesidad de considerar, la construcción de un currículo que integre la conservación del medio ambiente como un problema actual y que involucra a toda la comunidad educativas incluidas las empresas.

Escenario de aprendizaje de las matemáticas: la cultura del uso y consumo del teléfono celular.

Martínez Pinilla, D. Páez Chíquiza, O., Bogotá, D.C.
Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. (2013). Publicada

En este trabajo se generó un ambiente de aprendizaje centrado en grado octavo para el análisis de las interacciones de los estudiantes y el profesor en posiciones colectivas referentes al uso y el consumo de telefonía celular. Aportando una reflexión de las prácticas educativas tradicionales con las matemáticas (enfoque de la enseñanza para la comprensión), donde prima el concepto matemático en su aprendizaje y evaluación, aspecto que contrasta con la propuesta de la investigación. Debido que sus fundamentos se apoyan en la propuesta de Skovsmose & Valero (2012). Quienes desde la educación matemática crítica, muestran que es necesario que el aprendizaje de las matemáticas promuevan acciones colectivas de igualdad y responsabilidad social, para la toma de decisiones apropiadas para todos.

El trabajo individual y la competencia son constantemente promovidas por las actividades propuestas en las clases de matemáticas, experiencias que motivan la segregación de los involucrados. En este trabajo se promueve el trabajo en equipo

con base a una constante en el grupo (el uso del celular) que es uno de los factores que aíslan a los involucrados de la experiencia. (Martinez & Paez, 2013).

Estableciendo relaciones entre las matemáticas y la cultura del uso y consumo de telefonía celular se logró involucrar a los estudiantes en el proceso de exploración e indagación (Martinez & Paez, 2013). Permitiendo construir un escenario de aprendizaje que atiende a la cultura de los estudiantes, en el caso particular el uso del celular, teniendo como referente las intenciones de los jóvenes del grupo y resaltando la posibilidad de identificar actividades más cercanas a los jóvenes facilitando el tipo de herramientas utilizadas en las dinámicas del escenario de aprendizaje.

Así mismo, posibilitando reconocer los intereses de los estudiantes para trabajar con ellos acciones colectivas cuando en estas se trabaja el consumo de telefonía celular; aunque también, se relacionaron las posiciones individuales que limitan el trabajo en equipo dando lugar a decisiones colectivas que promovieron el desarrollo del escenario.

El estudio evidenció nuevas formas de comunicación en la clase de matemáticas, partiendo desde el autoritario y llegando al dialogo, donde la autoridad en la clase no es relativa al docente. Modificando así las prácticas tradicionales en las clases de matemáticas entre ellas la comunicación estudiante - estudiantes y estudiante - profesor.

3. Desarrollo de la propuesta

Este proyecto busca la vinculación de los participantes desde sus necesidades y realidad social para la proyección a su comunidad desde el apoyo de la escuela, en la posibilidad de brindar herramientas en la solución de sus problemáticas. Por lo tanto se trabajó con un grupo de estudio conformado por estudiantes de grado sexto durante 4 meses (2 bimestres académicos) en el año 2013. El proyecto se desarrolló en tres momentos o fases de trabajo como se describe en la tabla 1:

Tabla 1. Fases de trabajo.

Fase	Actividad	Métodos
PLANEACIÓN	Momento curricular Diseño didáctico Estrategia de evaluación	Desempeños propuestos Desempeños alcanzados Rubrica de evaluación
IMPLEMENTACIÓN	Semillero Medición suelos de cultivo Análisis de suelos Siembra y abono Seguimiento fitosanitario Porcentaje de cultivo	Registro fotográfico Trabajo individual Trabajo Grupal Observación de clase
RESULTADOS	Análisis de datos Conclusiones Retroalimentación	Estadístico de datos

En el marco del proceso de organización curricular propuesta por la Secretaria de Educación Distrital como una de las estrategias para la mejora en la calidad de la educación (MEN, 2011), se establecieron en la institución educativa cinco equipos de trabajo conformados por los docentes que trabajan en cada uno de los ciclos educativos (1 y 2; 3 y 4; 5, 6 y 7; 8 y 9; 10 y 11). En los ciclos 1, 2, 3, 4 y 5 se establecieron las improntas y otros elementos que nos permitían establecer y reconocer la importancia de los estudiantes, docentes y comunidad para cada uno de los niveles educativos y sociales.

Con base en el estudio preliminar de la comunidad y los fines de la institución educativa, el equipo de docentes diseña un ambiente de aprendizaje centrado en el proceso de reforestación de los terrenos aledaños a la institución. Propuesta que se vinculara los diferentes propósitos de las áreas fundamentales de la comunidad educativa en formación en especial el de las matemáticas. Las clases de matemática se transformaron en un espacio de discusión y planeación de los diferentes momentos del proceso de reforestación de los cerros orientales, promoviendo la participación e interés de los jóvenes de la comunidad debido que en su primera sesión se planteó la identificación de un problema que afecta a cada uno de los involucrados.

Posteriormente se consolidaron los equipos de trabajo por afinidad de problemática, generando así una confluencia de problemáticas relacionadas con los problemas de la comunidad. En un segundo momento se abordaron

las necesidades propuestas de los diferentes grupos y se logró la identificación de un fin común. (Chevallard, I., Bosch, M., & Gascon, 2000).

Estas problemáticas comunes expresadas por la comunidad establecieron que el problema de desplazamiento y alto riesgo de vivir en el sector es el más relevante, en especial por los frecuentes deslizamientos de tierra que culminan en la reubicación de las familias del sector. (Lerman, S. 2010). Permitiendo entre los múltiplos debates establecer este dilema como prioritario y de posible solución con acciones que la institución educativa debe enfrentar. Así se establecen las diferentes etapas de trabajo que culminan en iniciar procesos de reforestación de los cerros circundantes como una de las formas de disminuir el impacto ambiental de la comunidad.

Uno de los procedimientos realizados se da cuando los estudiantes con ayuda de sus conocimientos, realizan el análisis de semillas por medio de la rehidratación, el control de crecimiento y fiabilidad de las semillas tratadas para el proceso de renutrificación de los suelos. (Novak, & Gowin. 1988).

Para poder llevar a cabo la renutrificación se procedió en un tercer momento a limpiar y analizar el nivel de P.H. (potencial de hidrogeno) de los suelos aledaños al sector del colegio. Acción que motivo nuevamente al grupo a que analizara sus acciones e implicaciones. Otra acción emprendida por el grupo de estudiante fue la recolección de diversos residuos sólidos, entre ellos las botellas pet y semillas de *eucalipto* con el fin de elaborar materiales para las dinámicas de la institución, entre ellos, la elaboración de un ajedrez, ábacos y planos cartesianos tipo cortinas; material que no solo permitió la creación de insumos para experiencias de aula sino también para el perfeccionamiento de conceptos propios del nivel educativo. (García, G. 2011).

Culminada la etapa de limpieza y análisis de suelos, se presenta un tercer momento en el cual los diferentes grupos debían llevar a cabo la distribución de los terrenos accesibles por los equipos. Para lo cual se realiza el levantamiento topográfico de los sectores y la distribución de las parcelas de trabajo; experiencia que permite abordar las concepciones de medida y el conocimiento de las herramientas brindadas por la ingeniería para tal acción. Frente a la falta de recursos, vuelve a surgir la creación de material necesario con ayuda de elementos de reciclaje, en este caso el uso de tuberías P.V.C. (cloruro de polivinilo) para la elaboración de los teodolitos y otros

instrumentos necesarios para la parcerización de los terrenos a reforestar. Experiencia que reclamo al grupo, obtener una capacitación y establecer solicitudes a las entidades encargadas del mantenimiento y cuidado de tales terrenos. Por lo cual el grupo organiza el evento denominado "pacto con la naturaleza" el cual tiene como objetivo involucrar a las diferentes entidades gubernamentales y no gubernamentales en dicho proceso.

En el cuarto momento, los jóvenes con base en las capacitaciones recibidas y el apoyo alcanzado por la CAR (Corporación Autónoma Regional de Cundinamarca) y el Jardín Botánico de Bogotá José Celestino Mutis, llevan a cabo parte de la reforestación de los cerros orientales en las secciones o parcelas designadas por los miembros del proyecto, en espera de mejorar las condiciones medioambientales de su habitad.

Para el análisis de datos se utilizó el programa OpenStat (Software Libre), se analizaron las frecuencias relativas, absolutas y porcentuales a partir de las rúbricas de evaluación. Se obtuvieron los promedios en relación a los estudios de rúbricas y se analizaron. El indicador de desempeños se utilizó como demostración del programa curricular, pero no fue tenido en cuenta para el análisis de resultados, ya que al ser una investigación de características cualitativas y exploratorias, no da cuenta real de resultado un indicador institucional.

4. Conclusiones

La experiencia desarrolla nos permitió promover en la comunidad educativa competencia ambientales definidas en el mismo marco de las propuestas educativas. En una comunidad golpeada no solo por los eventos naturaleza sino también por la discriminación y la violencia.

Permitir una participación activa en el desarrollo de soluciones en las necesidades propias de la comunidad y de sus habitantes y reconocer que los pre-saberes de los estudiantes nos pueden ayudar como elementos promotores de una educación más humana y participativa en su realidad y toma de decisiones.

La propuesta de ambientes de aprendizaje para instituciones educativas permite repensar el quehacer diario de la institución en su comunidad, permitiendo que se establezcan experiencias que permitan no solo dar solución a las necesidades de los estudiantes sino involucrar a los diferentes agentes en la comunidad educativa. Teniendo así la posibilidad de generar ciudadanía ambiental desde las prácticas.

Es necesario promover la cultura de la investigación en las comunidades educativas con experiencias enriquecedoras. Es por ello que motivar la participación de los estudiantes en las experiencias de aula y en particular en un ambiente de aprendizaje centrado en las prácticas de medición es muy importante.

Referencias bibliográficas

- Ambrosio, U. D. (2009). Some Reflections on Education, Mathematics, and Mathematics Education. En *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics.*
- Chevallard, I., Bosch, M., & Gascon. (2000). El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. *Estudiar matemáticas*, 23-61.
- García, G. (2011). *Estudio del papel de los escenarios y ambientes de aprendizaje de las matemáticas en los procesos de inclusión en las clases.*
- Gascón, J. (1998). *evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina cientifica.*
- Jaeger, F., & Batista, A. (2004). Alfabetizaçã Ambiental como Indicador de Qualidad da Educação Ambiental. *acta scientia*. p. 75-65. Canoas, RS, Brasil: Ulbra.
- Kaiser, C., Kaider da Silva, C., & PIre do Santos, R. (2004). formação técica e Preservação Ambiental no Vale do Paranhana. *acta scientiae.* p. 67-75. Canoas, RS Brasil: Ulbra.
- Martínez, & Páez. (2013). *Escenario de aprendizaje de las matemáticas: la cultura del uso y consumo del teléfono celular.* Bogotá.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá.
- MEN. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá.
- MEN. (Agosto de 2006). *Plan Decenal de Educación 2006-2016.* Recuperado el 13 de agosto de 2013, de http://www.plandecenal.edu.co/html/1726/w3-article-166057.html
- MEN. (2010). *Estandares basicos de competencias.* Bogotá.
- MEN. (2011). *Programa para la transformación de la calidad educativa* . Bogotá.

- MEN. (Mayo de 2012). *Red Academica* . Recuperado el 13 de agosto de 2012, de http://www.redacademica.edu.co/archivos/redacademica/colegios/politicas_educativas/ciclos/cartillas_ambientes_aprendizaje/vol2.pdf
- Novak, & Gowin. (1988). *aprendiendo a parender.* Barcelona: Martínez Roca.
- Rheinheimer, C. G. (2004). tecendoa educacao ambiental através do estudo do meio ambiente na escola. *revista de ciencias naturais e exactas*, p. 77-78.
- Rodríguez, W. (2005). En *Números recionais: um estudo das concepcoes de alunos após o estudi Formal* (pág. 6). Sao Paulo: Pontificia Universidade Católica.
- SED. (2012). *Ambientes de aprendizaje para colegio rurales*. Bogotá.
- Soto. Serrano, M. (1993). Didactica de las matematicas. *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 173 - 194.
- Valero, P., & Skovsmose, O. (2012). *Educación matemática crítica.* Bogotá: Ediciones Uniandes.
- Wiske, M. S. (2003). *enseñanza para la comprensión* . Buenos aires: Paídos.
- Formação Técnica e Preservação Ambiental no Vale do Paranhana (RS): Uma Proposta Curricular Integradora. Kaiser C., Kaiber da Silva C., Pires dos Santos R. (2004) Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIM. Brasil.
- Alfabetização Ambiental como ´Indicador de Qualidade da Educação Ambiental – um Estudo Exploratório Feito em Estância Velha, RS, Brasil. Jaeger Soares F., & Batista Pereira A., (2004). Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIM. Brasil.

Las valoraciones sociales en la trayectoria de aprendizaje de las matemáticas. El caso de Lucho

Gómez Niño, Julián Ricardo - Marín Saboya, Luis Guillermo
jurigoni@hotmail.com – maringuillermo@yahoo.com
Colegio Champagnat, (Colombia) – Colegio Rochester, (Colombia)

Resumen

En nuestra experiencia como docentes encontramos estudiantes que deciden no participar en el aprendizaje de las matemáticas o interrumpir su trayectoria de participación. Algunos estudios que conciben el aprendizaje como forma de participación social muestran que estas decisiones están influenciadas por razones como: las valoraciones sociales negativas expresadas por sus compañeros y/o profesores a partir de sus intervenciones, las identidades negativas producidas por dichas valoraciones y la poca motivación para involucrase en el aprendizaje de la matemáticas. Esta ponencia presenta un avance del trabajo de grado para obtener el título de maestría donde se analizan las razones sociales-culturales por las cuales un estudiante toma la decisión de interrumpir su participación durante una actividad grupal propuesta en clase de matemáticas.

Palabras clave*:* Aprendizaje, participación, normas y valoraciones.

1. Introducción

El propósito del estudio es dar a conocer las razones sociales y culturales por las cuales un estudiante toma la decisión de interrumpir su participación en actividades matemáticas en la clase. Los estudios que conciben el aprendizaje como una forma de participación social muestran que los niños y

las niñas toman estas decisiones influenciados por razones como: las valoraciones sociales negativas expresadas por sus compañeros y/o profesores a partir de sus intervenciones (Planas, 2004; Morgan, 2000); por las identidades negativas producidas por dichas valoraciones (Abreu, 2007); y por el poco interés de los niños y las niñas para involucrarse en el aprendizaje de las matemáticas (Sullivan, Tobias & McDonough, 2006).

Estas situaciones producen tensiones sociales que muestran las relaciones de poder existentes en el aula, lo que evidencia los aspectos sociales involucrados en el aprendizaje de las matemáticas. Adoptar el significado de valoraciones sociales nos permite poner de manifiesto el impacto de los valores y las valoraciones que contribuyen a conceder grados de legitimidad a la participación de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. De acuerdo a lo que sugieren las investigaciones (Planas, 2004; Abreu & Cline, 2003), las valoraciones sociales podrían ejercer una influencia determinante en el desarrollo de la identidad como aprendices de matemáticas de cada uno de los participantes.

2. Marco de referencia

El aprendizaje como una participación social. Recientemente, las investigaciones realizadas sobre el aprendizaje han hecho énfasis en aspectos relacionados con la participación social del estudiante en la clase de matemáticas (Morgan, 2000; Planas, 2002, Skovsmose & Valero 2012). Los estudios analizan la participación social en el micro-contexto del aula de clases. Planas (2002) identifica las interacciones entre lo cultural, lo social y lo afectivo en el aula de clase, en la evidencia de las respuestas emocionales de los estudiantes y su relación con las normas y valoraciones que coexisten en la clase de matemáticas. Menciona que un estudiante se encuentra constantemente sometido a las valoraciones dadas, no solamente por sus habilidades matemáticas, sino por las interpretaciones que realiza de las normas socio-matemáticas.

Dimensión social del aula de clase. En el desarrollo de la clase de matemáticas, las interacciones entre los participantes (estudiantes entre sí, o profesor con estudiantes) brindan la oportunidad para que cada uno ejerza influencia sobre otros a través de miradas, gestos, acciones, reacciones y/o

comentarios que tienen la intención de dar una valoración a su intervención. Del mismo modo, cada participante puede ser influenciado por las valoraciones de otros participantes. La naturaleza interpretativa de la valoración es tan predominante, que redunda en la decisión de formar parte de un grupo, de retirarse o de ausentarse (Bishop, 2005).

Normas socio-matemáticas y la legitimidad en el aula de clase. El aula de clases es un lugar multicultural, donde se encuentran diversas formas de pensar, razonar, interactuar, compartir e interpretar, y esta diversidad genera dificultades en la comunicación. Morgan (1998 citado en Planas, 2002) señala que las normas tienen un papel mediador dentro del aula de clase; puesto que *"el aprendiz, no sólo necesita comprender partes concretas de las matemáticas escolares, sino que también necesita saber las formas de comportamiento que le habrán de conducir a un cierto grado de reconocimiento"* (p. 8), por lo tanto, si la interpretación de la norma está cercana a la del grupo, la valoración que el sujeto recibe es positiva y esto favorece su participación.

3. Aspectos metodológicos

El estudio se realiza desde un enfoque interpretativo usando la técnica de estudio de caso (Reyes, 1999), donde se analizan los episodios de interacción de la trayectoria de participación de Lucho en una actividad matemática grupal. Además, se incluye la biografía del aprendizaje de Lucho, a través de la entrevista con los profesores y compañeros con el ánimo de revelar y establecer interpretaciones sobre su trayectoria escolar.

Las categorías de análisis que se utilizan en este estudio fueron tomadas de la investigación realizada por Abreu y Cline (2003). Estas categorías son: *Identificando al otro*, que se refiere a la manera como Lucho valora las intervenciones de sus pares a partir de las interpretaciones de las normas del aula de clase; *Ser identificado*, que se refiere a la manera en que Lucho percibe que sus pares valoran su intervención en la actividad grupal; y *Auto-identificación*, que se refiere a la manera en que Lucho asume posiciones y se identifica a sí mismo como apropiado para participar en prácticas matemáticas escolares.

4. Desarrollo de la propuesta

La sesión de clases está conformada por dos Actividades Típicas de Aula llamadas ATA's (Sánchez et. al, 2008); la primera, relacionada con los episodios de interacción durante la explicación de la actividad de estimación por parte del profesor investigador y la segunda relacionada con los episodios de interacción de un grupo de estudiantes durante la misma actividad. En la primera ATA de la sesión de clase, durante la explicación del profesor, el estudiante Lucho muestra constantemente interés en participar de la actividad: está atento a la explicación del profesor, muestra a sus compañeros los procesos que realiza en el formato, dialoga con sus compañeros para decidir posibles estimaciones, e interviene dando una explicación de su estimación al profesor cuando este se lo pide. En la segunda ATA de la sesión de clase, durante el desarrollo de la actividad de estimación de manera grupal, se hace evidente la trayectoria de participación de Lucho a partir del número de sus intervenciones. Dicha trayectoria se puede ver reflejada en la siguiente gráfica:

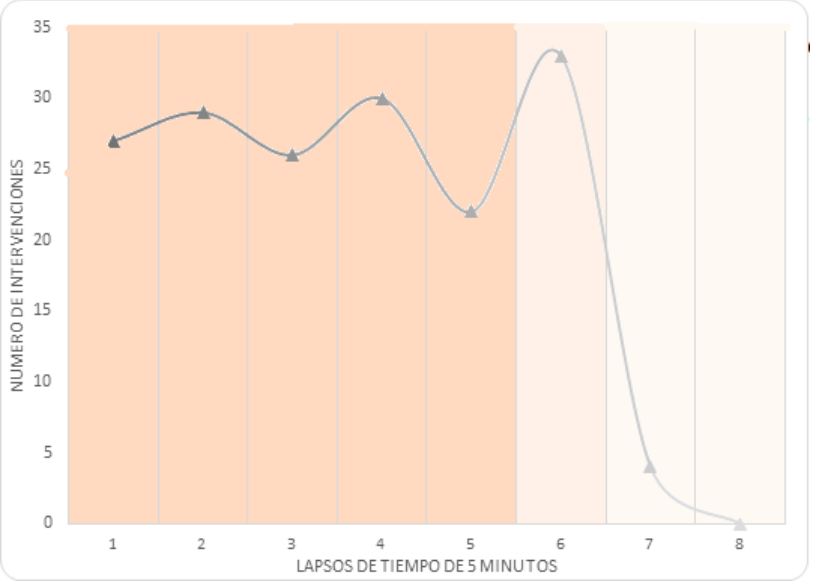


Figura 1. Trayectoria de participación de I_1 durante la actividad.

Al contrastar la variación del número de intervenciones de Lucho con la transcripción de sus interacciones, se evidencian tres formas diferentes en las que Lucho lleva a cabo las interacciones con sus compañeros en el desarrollo de la actividad. Estas se han denominado contextos de interacción y se

describen a continuación: en el Contexto C_1, Lucho y sus compañeros de grupo se caracterizan por la aceptación y negociación de la interpretación de la mayoría de las normas establecidas para la actividad; en el contexto C_2, los estudiantes dejan de realizar la actividad de estimación y las interacciones de Lucho con sus compañeros del grupo están enfocadas en defender cada uno de ellos su interpretación de dos normas socio-matemáticas de la actividad. Y en el contexto C_3, se evidencia cómo Lucho pierde el interés de participar en la actividad, debido a su inconformidad frente a las relaciones de poder que presentan algunos estudiantes y de la decisión que finalmente se toma. Cabe señalar que esta ponencia es un avance de la tesis que estamos realizando los autores para optar por el título de magister en docencia de la matemática.

5. Conclusiones

Los resultados obtenidos permiten resaltar la importancia del análisis de los aspectos socio-culturales del aula de matemáticas en la búsqueda de una comprensión más amplia sobre los procesos que influyen en el aprendizaje de las matemáticas. Las evidencias encontradas en las interacciones, muestran que los procesos sociales de valoración que ocurren en el aula condicionan las oportunidades para que los estudiantes participen o se retiren de su trayectoria de participación. Las valoraciones no empiezan ni acaban en una sesión de clase y no son las mismas todo el tiempo (Planas & Raig, 2003). En la sesión de clase pueden otorgarse valoraciones negativas y positivas a un mismo estudiante. Las identidades de los participantes cambian a lo largo de su trayectoria escolar. El cambio no solo está determinado por la interpretación que realizan de las normas, sino por valoraciones y legitimidades que otros otorgan a partir de una trayectoria de las matemáticas escolares.

Referencias bibliográficas

- ABREU, G. & CLINE, T. (2003). Schooled Mathematics and Cultural knowledge. *Pedagogy, culture and society*, 11(1), 11-30.

- ABREU, G. (2007). Social valorization of mathematical practices: the implications for learners in multicultural schools. In Nasir, N. &Cobb, P. (Eds.) *Improving Access to Mathematics: Diversity and Equity in the Classroom,* 118-131.
- BISHOP, A. (2005). Aproximación sociocultural a la educación matemática. *Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. Grupo de educación matemática*.
- MORGAN, C. (2000). Discourses of assessment-discourses of mathematics, en Matos, J.P. y Santos, M. (Eds.). *Proceedings of the 2nd International Mathematics Education and Society Conference,* 58-76.
- PLANAS, N. (2002). Obstáculos en el aprendizaje matemático generadores de interrupciones en la participación. *Educación Matemática,* 14(1), 5-25.
- PLANAS, N. & RAIG, I. (2003). El contrato social en el aula: episodios en torno a la noción de status. *Pubicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.* GEPEM, 41, 57-75.
- PLANAS, N. (2004). Metodología para analizar la interacción entre lo cultural, lo social y lo afectivo en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias,* 22(1), 19-36.
- REYES, T. (1999). Métodos cualitativos de investigación: los grupos focales y el estudio de caso. *Centro de investigaciones comerciales e iniciativas académicas.* Forum Empresarial 4(2) 75-87.
- SULLIVAN, P., TOBIAS, S., MCDONOUGH, A., (2006) Perhaps the decision of some students not to engage in learning mathematics in school is deliberate, *Educational Studies in Mathematics*, Springer-Verlag, Dordrecht Netherland, p. 62, 81-99.
- VALERO, P. & SKOVSMOSE, A. (2012). Educación Matemática Crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Bogotá: Ediciones Uniandes.
- SÁNCHEZ, E., GARCÍA, R., ROSALES, J., SIXTE, R. & CASTELLANO, N. (2008). Elementos para analizar la interacción entre estudiantes y profesores: ¿qué ocurre cuando se consideran diferentes dimensiones y diferentes unidades de análisis? *Universidad Salamanca, Revista Educación,* 346, 105-136.

Construcción de un producto notable a través de representaciones gráficas

Riaño Vargas, Angie - Rodríguez, Yenifer - Sánchez, Julián
angie010712@hotmail.com - jenyroma@yahoo.es - julis9210@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

A continuación se detalla una experiencia de aula realizada en el primer semestre del año 2013 en el I.E.D José Félix Restrepo, que da cuenta de la construcción de un producto notable: el cuadrado de la suma de dos cantidades a partir del desarrollo de una situación fundamental propuesta en grado octavo.

Palabras clave: Producto notable, representaciones, generalización.

1. Introducción

El conocimiento matemático aparece como un producto "acabado" de manera que, pareciera que quien lo aprende no entra en relación directa con su construcción. En particular, para la construcción de un producto notable, se requiere de un proceso geométrico y aritmético que en muchas ocasiones es eclipsado por la introducción de fórmulas que deben ser memorizadas:

> El alumno al recibir conceptos como los productos notables de forma memorística, no desarrolla todo su potencial que les permita relacionar sus conocimientos para llegar a descubrir nuevos aprendizajes; mientras que, con diagramas esquemáticos y ejemplos volumétricos, ayudan a la comprensión de estos elementos matemáticos de suyo abstractos. (Aréstegui, 2006, p. 34).

En consecuencia se cavila acerca de la importancia de favorecer ambientes en los que el estudiante desarrolle procesos de manera inductiva que lo lleve a interpretar y justificar las identidades o productos notables. Una propuesta

didáctica que surge a razón de esta iniciativa, es una situación fundamental, Brousseau (citado por Panizza 2004); que busca propiciar en los estudiantes la conceptualización del producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades a partir de representaciones gráficas.

2. Marco de referencia

El marco de referencia se enfoca hacia la clasificación de errores provenientes de la aritmética generalizada, dificultades en convenio de notación y errores que se convierten en obstáculos de enseñanza, (D'Amore, 2008). Paralelamente se aborda el cambio de registro del visual al simbólico, Duvan (citado por Palarea 1999); en los que se divisa el proceso geométrico para construir el producto notable de una manera inductiva, (Aréstegui, 2006).

La transición aritmética al algebra trata de darle a entender al alumno el paso del número a la variable como operador, (Pretexto, 2002). Este cambio es uno de los tránsitos más difíciles en el desarrollo gradual de los conocimientos matemáticos, ya que se ponen en tela de juicio muchos de los conceptos que se aprendieron durante largo tiempo en la primaria y parte del bachillerato.

Martínez (2010), resalta que para interpretar propiedades en álgebra se requiere una interpretación de las operaciones diferente a la entendida desde la aritmética, que se liga a una acción física y relaciona el igual con un carácter unidireccional y no con un carácter bidireccional,: ¨*al presentar en forma general propiedades como, para todo a ,m ,n* $\in \mathbb{R}$ *se tiene que* $a^m x a^n = a^{m+n}$*, una de las dificultades que encuentra el estudiante para interpretarla es ver la doble dirección del igual, es decir, no solamente como el resultado de una operación*¨ (p. 22).

Al desconocer propiedades de las estructuras aditivas y multiplicativas, se evocan errores en el manejo de símbolos algebraicos: al considerar $3(b+2) = 3b+2$, se evidencia que no se ha aplicado de una manera correcta la propiedad distributiva, pues la expresión indica que se tienen 3 veces $(b+2)$, es decir, 3 veces b y 3 veces 2.

Este tipo de errores, dificultades y obstáculos ocurren como producto de una enseñanza memorística en la que se aplican algoritmos sin dotarlos de significado, es por ello que en esta propuesta se desarrolla una situación fundamental para una construcción de un producto notable, más allá de enseñar una fórmula.

3. Aspectos metodológicos

Para el desarrollo de esta propuesta se tiene en cuenta una metodología de situaciones didácticas propuestas por Brousseau (1968). En primer lugar, se propone una situación problemática que tiene como fin construir una pista de hielo con medidas particulares, realizando cuestionamientos para llevar de manera inductiva a una generalización de dimensiones de la pista.

En segundo lugar, se lleva a cabo una fase de acción en la que el estudiante trabaja de manera individual proponiendo estrategias de solución.

En tercer lugar, se emprende una fase de formulación en la que un alumno *emisor* debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno *receptor* que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base a la estrategia elaborada por su compañero con el fin de validarla o no.

En cuarto lugar, se desarrolla una fase de validación en la que dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de "sancionarlas", es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.

En último lugar, se organiza una institucionalización, en la que se revoca lo aprendido por el alumno y lo enseñado por el docente, la puesta en escena de lo que se realizó para la construcción de un producto notable a partir de una generalización.

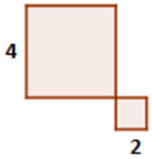
En lo que concierne al análisis de información, se implementa una metodología de investigación a través de categorías de análisis (niveles de

enseñanza) que se sustentan a partir de teoría expuesta en el marco de referencia.

4. Desarrollo de la temática

SITUACIÓN FUNDAMENTAL: ¨Completando la pista de hielo¨

Se quiere construir una pista de hielo de forma cuadrada, cuya área es de $36m^2$. Hasta el momento la constructora ha conseguido dos lotes ubicados de la siguiente manera y con las siguientes medidas:



¿Qué medidas deben tener los lotes que hacen falta para construir la pista? Realiza el proceso geométrico para hallarla.
Si consideras un área de $64m^2$ ¿qué dimensiones deben tener los 4 lotes? Represéntalos
Investiga casos similares y represéntalos geométricamente
Generaliza los casos para cualquier área que pueda tomar la pista. Represéntalos geométricamente.

Niveles y porcentaje

N1: Determina la generalidad de completar el cuadrado de una manera inductiva a partir de un proceso geométrico, a raíz de esto construye una expresión que determine cualquier valor en la representación, luego es capaz de construir el producto notable $(a+b)^2$

N2: Determina la generalidad de completar el cuadrado de una manera inductiva, a partir de un proceso aritmético, pero no lo relaciona con un proceso geométrico para determinar por simple inspección el producto notable $(a+b)^2$

N3: Determina casos particulares de completar el cuadrado, realizando un proceso aritmético que no le permite llegar a la generalidad para determinar por simple inspección el producto notable $(a+b)^2$

Análisis de resultados
Primer caso: área $\mathbf{36\ m^2}$

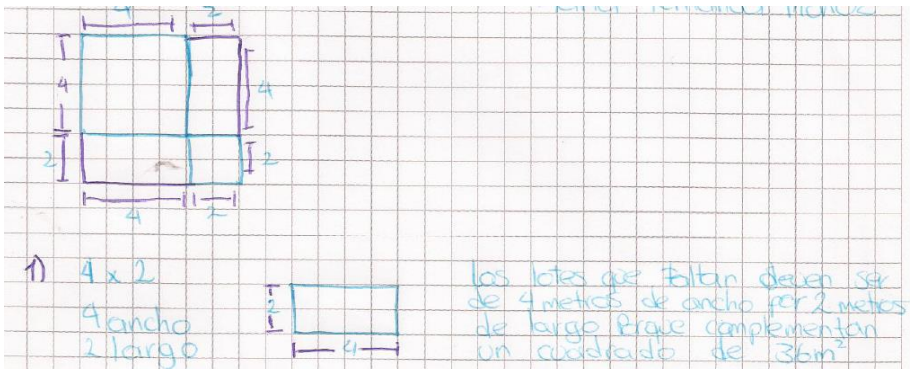


Figura 1. El estudiante define la medida de cada uno de los lados del cuadrado que completó. Esto le permite deducir la medida que debe tener cada rectángulo para completar la pista de hielo. En este caso en paricular se observa, un adecuado análisis dimensional en el cual el estudiante tiene en cuenta tanto la cantidad de magnitud como la magnitud ($4 metros$, $2\ metros$), lo que le permite reconocer que al hallar el área $36\ m^2$, la unidad de medida cambia y pasa a ser una *¨unidad compuesta¨*, (Steffe, 1994, p.4).

Casos similares cambiando el área total del lote

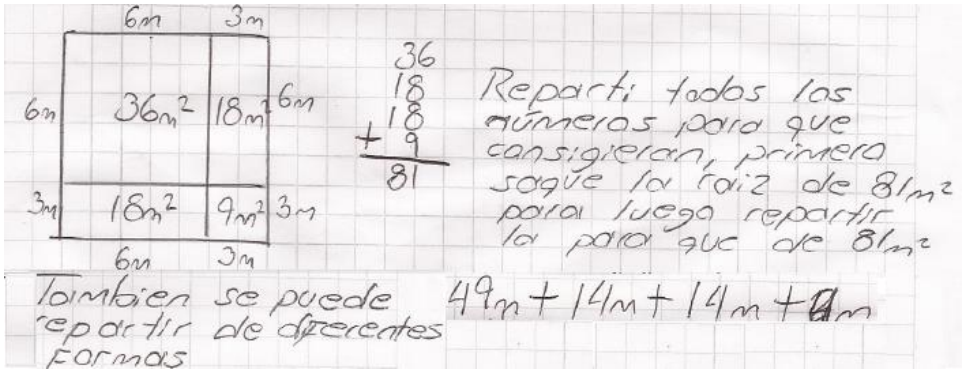


Figura 2. El estudiante enuncia otro manera para hallar las medidas de los lados del cuadrado dado su área, reconociendo que la raíz del área da información acerca de los lados, esto evidencia por un lado el cambio de unidad de $m^2\ a\ m$, y la manera de relacionar aritméticamente lo construido geométricamente para un caso en particular, que llevaría de una manera inductiva a la distinción del producto notable trabajado. Adicional a lo anterior, el estudiante reconoce que es posible completar el cuadrado con diferentes medidas, como se muestra en la figura, para obtener un lote de $81\ m^2$, aunque al mostrar otra repartición $49\ m^2 + 14\ m^2 + 14\ m^2 + 4\ m^2$ hay un error con el análisis dimensional que expresa en medida de longitud y no de área.

Caso de generalización

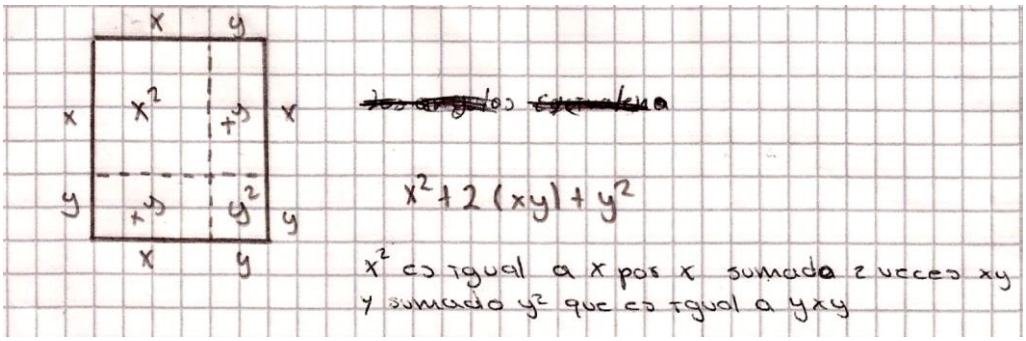


Figura 3. El estudiante describe un proceso geométrico para completar el cuadrado: ¨ *Se construye un cuadrado de lado a unidades, otro de lado b unidades, y dos rectángulos de largo a y ancho b Uniendo las cuatro figuras anteriores, se forma un cuadrado de a + b¨,* (Baldor citado por García, 2012, p. 35).

5. Conclusiones

La situación diseñada permitió ahondar un trabajo de generalización del producto notable: el cuadrado de la suma entre dos cantidades, encontrando estrategias que llevaron a los estudiantes a deducirla y explicarla basándose en hechos geométricos y cálculos aritméticos de manera inductiva; así mismo se evidenciaron obstáculos y errores provenientes de la aritmética generalizada en cuanto el análisis dimensional.

Referencias bibliográficas

- Aréstegui L. (2006). Estrategia didáctica para facilitar la construcción de los productos notables algebraicos en el tercer grado de educación secundaria. Tesina, opción de ensayo para obtener el título de licenciado en educación. México D.F.: UPN
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Revista de la ASOVEMAT. Vol. 17, N° 1, p. 87-106.
- Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico, reflexiones de una investigación. NÚMEROS Revista didáctica de las matemáticas, 40, p. 3-38.
- Panizza, (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. Recuperado 06 de abril de 2013 de: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf.

Enseñanza de las propiedades y clasificación de los triángulos: Una propuesta inclusiva

Salcedo Leguizamón, Cindy Lorena - Pérez Rincón, Carlos Andrés
lorena_salcedo25@hotmail.com – carlitos1075@hotmail.com

Resumen

Se presenta una experiencia de aula gestionada con estudiantes en condición de discapacidad visual. Dicha experiencia tiene como marco una pasantía de extensión, y se configura en el acompañamiento en el aula de matemáticas y el apoyo extraescolar. A través de esta experiencia se exponen y plantean características esenciales en la enseñanza de la geometría, se basa específicamente en la construcción y la clasificación de los triángulos, lo que conduce a reconocer distintos tipos de triángulos, dada la relación de sus ángulos y lados.

Palabras clave: Adaptaciones metodológicas, necesidades educativas especiales, materiales concretos, enseñanza de la forma del triángulo.

1. Introducción

Desde la perspectiva educativa, la diversidad se orienta a la aceptación y valoración de cada uno de los sujetos, y principalmente a reconocer la capacidad que tiene la población con limitación visual para aprovechar sus diferencias y su diversidad social (entorno familiar, escolar, económico, etc.). Se parte de la idea que teniendo en cuenta las diferencias individuales, es posible ofrecer igualdad de oportunidades, pues cada estudiante es único,

lleva un ritmo de aprendizaje particular, pero solo al intervenir con calidad podrían esperarse resultados, la efectividad de las estrategias implementadas y dar cuenta de si este cambio es o no permanente (duradero).

Para obtener una educación matemática inclusiva es necesario diseñar prácticas organizadas previamente desde enfoques didácticos y comunicativos, siendo conscientes que no solo los estudiantes con necesidades educativas especiales son los que necesitan de adaptaciones o flexibilizaciones, pues todos los individuos a lo largo de su proceso educativo requieren una atención de calidad y preferencial.

En este sentido, la presente propuesta busca, a través del trabajo realizado con los estudiantes en el apoyo extraescolar y el acompañamiento en el aula, superar los errores, obstáculos y dificultades que presentan los estudiantes al momento de trabajar en geometría, específicamente con los triángulos y sus propiedades. Proponiendo un mínimo de elementos necesarios en la enseñanza de la forma del triángulo.

El acompañamiento en el aula consiste en asistir a la clase con el estudiante, y proporcionar adaptaciones que le permitan comprender lo que el profesor titular está explicando a todo el grupo. Con el acompañamiento se garantiza que el estudiante tenga igual acceso a los objetos matemáticos que sus compañeros.

El apoyo extraescolar, por su parte, garantiza nivelar a los estudiantes con limitación visual, en relación con aquellos objetos matemáticos que no han sido comprendidos de manera óptima y que impiden el desarrollo de nuevos conceptos.

2. Marco de referencia

La construcción e identificación de los atributos del triángulo es una herramienta matemática necesaria en las construcciones de elementos referentes a diferentes figuras geométricas. Según Díaz Godino (2002), en el ámbito matemático, una figura geométrica es también conocida como un lugar geométrico que corresponde a un espacio cerrado por líneas o superficies. Por esto identificamos una relación establecida en la

clasificación de los polígonos, entre los más destacados encontramos características únicas que determinan un polígono, en nuestro caso el triángulo. Sí todos los lados de un polígono son iguales se dice que es regular y podemos entrar a realizar relaciones que fundamenten cada elemento de su composición, como ángulos, lados, vértices, etc.

Es importante resaltar que este tipo de polígonos (triángulos), además se pueden clasificar por sus ángulos y la relación entre sus lados. Centrándonos en los ángulos se evidencia que para cualquier tipo de triángulo la suma interna de los ángulos siempre es de 180°. Ahora para contribuir a que los alumnos amplíen su concepción de triángulo, se presenta la caracterización de sus atributos con relación a su nombre identificando una clasificación usando la relación de sus lados:

- **Equiláteros**: con tres lados iguales y son equiangulares, es decir, los tres ángulos internos son congruentes entre sí.
- **Isósceles**: Si tiene dos lados de la misma longitud y los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma medida.
- **Escalenos**: Si todos sus lados tienen longitudes diferentes (en un triángulo escaleno no hay dos ángulos que tengan la misma medida).

Dado que ésta es una característica que se puede observar a partir de su representación, se considera un comienzo importante en la identificación de los triángulos. Ahora pasamos a identificar la medida de sus ángulos como factor de clasificación:

- **Rectángulos**: Son los que tienen un ángulo recto (90°).
- **Acutángulos**: Son los que tienen sus 3 ángulos agudos, los ángulos agudos miden menos de 90°.
- **Obtusángulos**: Son los que tienen un ángulo obtuso.

3. Aspectos metodológicos

Respecto a los atributos del triángulo, es necesario reconocer estos elementos mencionados anteriormente para poder aplicar de manera clara los

recursos y elementos que potenciarán el razonamiento y comprensión específicamente en la construcción y la clasificación de los triángulos, guiándonos hacia distintos tipos de triángulos, dada la relación de sus ángulos y lados haciendo posible caracterizar cada elemento en la enseñanza para la población con limitación visual.

Como la propuesta se constituye a partir del acompañamiento en el aula y el apoyo extraescolar, la experiencia bajo estas dos modalidades estructura la manera de proceder frente al objeto triángulo; así se desarrolla teniendo en cuenta cuatro momentos fundamentales:

- **Tratamiento del objeto matemático**: Consiste en determinar el concepto matemático, a partir del docente titular y/o alumno.
- **Adaptaciones metodologías**: Representa las indicaciones propias que se fundamenta al manejar y proponer el trabajo del objeto matemático, respecto al manejo de la clase y la implementación de un material concreto que permita en el estudiante con limitación visual una conceptualización de lo trabajado.
- **Presentación de resultados**: Se basarán en la aplicación de las herramientas de enseñanza mencionadas a lo largo del documento, aplicadas y desarrolladas en una propuesta de inclusión de la enseñanza de las propiedades y clasificación de los triángulos que aún está en construcción.
- **Construcción de la propuesta**: Está se basa en las fases y niveles que propone el modelo de Van Hiele (1989), donde se consideran las experiencias en la enseñanza-aprendizaje como la posibilidad de alcanzar niveles de razonamientos completos, sin olvidar que la misión de la educación matemática escolar es proporcionar experiencias adicionales muy bien estructuradas, para que sean lo más útiles posibles.

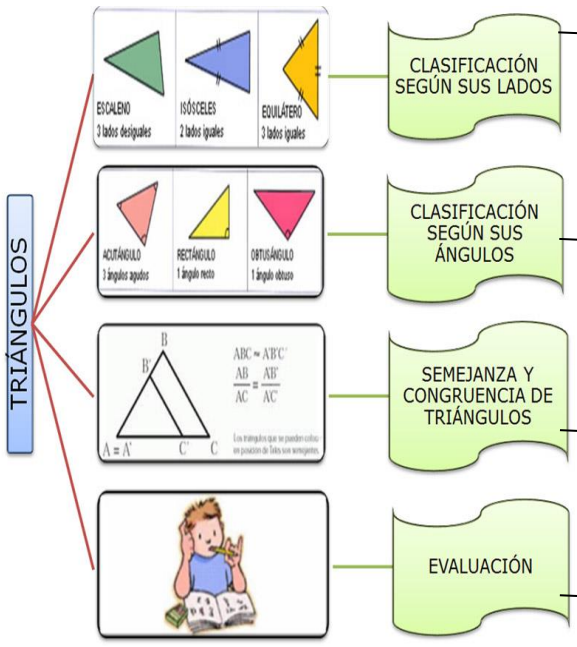
A lo largo de las fases, se debe procurar inicialmente que los alumnos adquieran comprensivamente los conocimientos básicos necesarios (nuevas nociones, relaciones, vocabularios) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad, en aprender a utilizarlos y relacionarlos.

4. Desarrollo de la propuesta

La siguiente figura presenta la ruta de aprendizaje que especifica cada objeto matemático a trabajar a partir de propuesta "Enseñanza de las propiedades y clasificación de los triángulos: una propuesta inclusiva", desde esta ruta se caracteriza las sesiones de clase en general y los procesos particulares que se originan a través de los objetos matemáticos y/o los recursos a implementar en la enseñanza.

En cuanto al desarrollo y pautas generales de la clase presentamos algunos requisitos indispensables que facilitan las relaciones en clase docente-alumno: la organización y adecuación del espacio de clase permite que el alumno se involucre de una manera clara en su entorno educativo, leer o decir en voz alta las explicaciones que se realicen en el tablero permiten que el alumno participe y realice análisis propios de los contenidos, y proporcionar material concreto que posibilite elaborar los conceptos numéricos, geométricos, etc.

Tabla 1. Ruta de aprendizaje

	Al caracterizar los lados del triángulo como, se debe propiciar la experimentación tangible con segmentos (manipulables y en relieve) de diferentes longitudes. Facilitando la construcción y su posterior representación a través del geo plano y tablas negativas. Al manejar ángulos deben poder encontrarse en el entorno del alumno, la construcción de estos se deben realizar a través de croquis y el kit geométrico. Se debe profundizar en una caracterización de los lados y ángulos de los triángulos, para poder interpretar y analizar representaciones en el sistema braille y gráfico. La evaluación debe ser un proceso donde el alumno cuente con cada uno de los elementos que requiera de adaptaciones o especificidades según la condición visual.

La construcción de la propuesta de aula inclusiva, referida a la enseñanza de las propiedades y clasificación de los triángulos requiere aspectos encontrados en diseños específicos por lo tanto se recoge en particular para alumnos de grado séptimo en el campo de la geometría (Geometría del Triángulo), la cual está estructurada por una justificación teórica en cuanto a lo legal, matemático, didáctico y metodológico y sus respectivas actividades a desarrollar dentro del aula.

5. Conclusiones

Se consideran no como conclusiones, puesto que no se ha realizado ninguna aplicación de la propuesta, sino como valoraciones a lo realizado a partir de la gestión en el apoyo en el aula y extra escolar, que dan pie a la construcción del diseño de la secuencia de actividades de orden inclusivo.

El estudiante vidente e invidente se puede integrar de una forma satisfactoria en el aula, exactamente en una clase de geometría, si en ella se utilizan las indicaciones adecuadas y además se adapta el material a utilizar, de forma tal que funcione para todos los estudiantes.

El trabajo docente no debe entenderse condicionado por herramientas específicas que regulen el trabajo de un contenido matemático. La creatividad e imaginación deben ser los elementos a tener en cuenta a la hora de diseñar y gestionar actividades en un aula inclusiva.

Referencias bibliográficas

- Alsina, C. y otros. (1995). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.
- Díaz Godino, J. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Coberán, R. y otros. (1989). *Didáctica de la geometría: modelo Van Hiele.* Valencia: Edición castellana.

¿Y dónde está el seno?

Caro Moreno, Andrés Felipe - Andrade Calderón, Juan Camilo
candres44@hotmail.com - najud_10@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

A partir de la simulación de situaciones y fenómenos físicos utilizando el software GeoGebra 5.0 en su versión 3D, el Audicity2.8 y el WolframAlpha, se observan las relaciones de algunos de los fenómenos ondulatorios con la presencia de funciones trigonométricas. La experiencia en el aula pretende presentar la utilidad de la función seno en el estudio de fenómenos cotidianos de los seres humanos y su importancia para entender el mundo que nos rodea.

Palabras clave: Trigonometría, simulaciones matemáticas, educación matemática, tecnología.

1. Introducción

El siguiente trabajo se realizó durante las cátedras de Taller de ciencias y, Talleres y Matematizaciones del proyecto LEBEM de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en donde se presentaron diversas situaciones en torno a los problemas ondulatorios (problemas de óptica, movimientos ondulatorios y caracterizaciones del sonido) y en los cuales se abordaron diversas soluciones a la simulación y establecimiento de características de los problemas planteados.

En este sentido, el desarrollo de la experiencia en el aula muestra como a partir de los problemas ondulatorios los estudiantes aplican e integran sus conocimientos en torno a las relaciones trigonométricas, las funciones trigonométricas, la investigación de los fenómenos y la recolección de datos,

logran resolver a través de una simulación los problemas planteados, estableciendo en la simulación un modelo que permita observar las relaciones senoidales o sinusoidales existentes en cada uno de los problemas.

2. Marco de referencia

Las situaciones planteadas se basan en los desarrollos elaborados en acústica y medición de ángulos de Fourier y Euler; para ello, se exponen de manera breve los modelos que se utilizaron en la solución de los problemas como requisitos básicos para el entendimiento y simulación de estos, además de los conceptos didácticos utilizados para el desarrollo de los talleres.

Así mismo, el desarrollo del análisis de las ondas sonoras se plantea por medio del método de descripción de armónicos de Fourier o transformada de Fourier, el cual plantea que todo armónico se puede expresar como la suma de armónicos simples, los cuales cumplen con la siguiente forma:

$$F_0 = A * \mathrm{sen}(K\pi T)$$

A: la intensidad del sonido. K: la frecuencia del sonido. T: tiempo

En torno al desarrollo de los ejercicios de las rotaciones de la tierra, el marco referencial se encuentra enfocado sobre las rotaciones descritas por Euler, expresadas por Kinoshita (1975) y Kline (1992) como los fenómenos de precesión y nutación.

> "el fenómeno de precesión consiste en el movimiento deleje de rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo, que es originado por la presencia de una fuerza externa, donde el ejemplo más sencillo para visualizar la precesión es observando un trompo en rotación."Kline (1992).

Por consiguiente, para determinar una conexión entre los movimientos de nutación y precesión se utiliza el cálculo del movimiento Vernal expuesto en Kaula (1968), con el que según Kinoshita (1975), se evidencia una relación sinusoidal en el movimiento compuesto por las dos rotaciones de la tierra.

Ahora, es oportuno determinar cómo los estudiantes a través de la simulación de los fenómenos logran determinar modelos matemáticos;

relativo a esto, Landricina (2009) expone que el desarrollo de la simulación de fenómenos físicos con programas de computadora, permite a los estudiantes recrear en sus cerebros una transición del fenómeno físico al modelo computacional. Dicha transición se efectúa en tres etapas; la primera es el desarrollo de un modelo mental que permite entender el comportamiento del fenómeno, la segunda es la creación o aplicación de un modelo matemático que permita entender y modelar el fenómeno y la tercera etapa es la verificación y exposición a través de la simulación del fenómeno como verificación a la veracidad del modelo matemático utilizado. En consecuencia, el estudiante además de modelar una situación o fenómeno físico, se autoevalúa por medio de la simulación del mismo.

3. Aspectos metodológicos

El trabajo se realizó a través del aula virtual moodle de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y que se encuentra disponible en la URL: http://ciencias.udistrital.edu.co/avirtual/course/view.php?id=418, con la presentación de preguntas que orientaron el desarrollo de la indagación de los estudiantes, y con un proyecto que buscó establecer un modelo matemático que representara cada uno de los problemas, definiendo las variables y su relación con el fenómeno natural presentado en cada uno de los casos. Para ello, se planteó que cada uno de los problemas debía tener los siguientes elementos:

- **Descripción del problema:** Establece cuál es el problema que se escogió así como los referentes teóricos requeridos para la solución de este.
- **Simulación del problema**: Es la representación dinámica del problema, de tal forma que corresponda al modelo, situación planteada y donde se indiquen las variables.
- **Modelación matemática**: Modelo que representa de manera más aproximada el fenómeno.
-

4. Desarrollo de la propuesta

El trabajo buscó que a partir de sonidos, movimientos de la tierra y el efecto de un trompo, se obtuvieran datos para que mediante la simulación en GeoGebra o WolframAlpha se modelaran de la manera más exacta las siguientes situaciones:

- Simular de manera matemática una nota musical o parte de una canción (Elegir un instrumento).
- Simular los movimientos de la tierra, y determinar la relación entre la precesión y la nutación de la tierra (movimiento que realiza un trompo).
- Simular el movimiento que hace la luna y la tierra, determinando la relación entre el movimiento de la luna y su distancia con respecto al plano elíptico de la tierra.
- Diseñar a partir de WolframAlpha o GeoGebra un reloj análogo de tal forma que se evidencie la relación entre sus manecillas de manera matemática.

A partir de las anteriores situaciones se obtuvieron relaciones senoidales o sinusoidales que permitieron evidenciar que la relación seno facilita entender diversos fenómenos de la naturaleza y que por medio de la modelación de estos se pueden simular el fenómeno o a través de las simulaciones de los fenómenos se permite evidenciar distintas relaciones sinodales.

5. Conclusiones

Los estudiantes encontraron las relaciones senoidales o sinusoidales descritas por Fourier, en torno a las representaciones de sonidos a partir de la sumatoria de seno; como es la sumatoria correspondiente al modelo analítico de la nota musical Do en un carrillón, la cual puede ser vista y escuchada a través de Wolfram en http://www.wolframalpha.com/.

$$\begin{aligned}\text{Do: } 44.3\sin(2\pi * 4260 * t) &+ 43.5\sin(2\pi * 8150 * t)\\ &+ 71.1\sin(2\pi * 9098 * t) + 64(2\pi * 16416 * t)\\ &+ 73\sin(2\pi * 17785 * t)\end{aligned}$$

Por otra parte, al investigar sobre los movimientos generados en los diferentes espacios (musicales, espaciales) para el desarrollo de la simulación del fenómeno, se llegó a que estos se encuentran dentro de los "movimientos de rotación de Euler" y "la transformada de Fourier"; los cuales relacionan variables de longitudes respecto a variables de amplitudes para construir movimientos senoidales o sinusoidales.

En síntesis, la utilización de herramientas virtuales como Wolfram o GeoGebra en la simulación de estos fenómenos, permite observar, caracterizar y representar cada nota musical o movimiento rotacional de manera eficiente y sencilla, a partir del proceso de simulación descrito por Landricina (2009); posibilitando evidenciar los cambios que sufren los fenómenos al modificar algunas de sus partes, dado que no son fáciles de ver o representar a simple vista, solamente a partir de una modelación matemática. Un ejemplo de cambio de variable es el cambio en la frecuencia de una nota musical genera que esta modifique su sonido, la cual cambia las características propias del instrumento con el que se genera la nota musical.

Referencias bibliográficas

- BOYER, C.B. (1986). Historia de las Matemáticas, Madrid, Alianza Universidad
- CARRILLO C.J. (2003). Fundamentos del análisis de Fourier, Universidad de Virgo
- EULER, L. (2001). Introducción al análisis de los infinitos. Edición crítica con facsímile a cargo de A. Durán, Sevilla.
- GONZÁLEZ URBANEJA, P.M. (2003). Los orígenes de la Geometría Analítica. Tenerife, Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.
- KINOSHITA, H. (1975). Theory of the Rotation of the Rigid Earth, Celestial Mechanics, Vol. 15. p. 277.
- KLINE, M. (1992). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, Madrid, Alianza Universidad.
- LANDRISCINA, F. (2009). Simulation and Learning: The Role of Mental Models. Journal of E-Learning and KnowledgeSociety, 5(2), p. 23-32.

Transformaciones geométricas a partir de la matematización de los movimientos practicados por la comunidad Uitoto en sus danzas tradicionales

Tinoco Robledo, Luz Elena - Suárez Mendoza, Diana Pahola
lunena11@gmail.com - dipasume@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

En el presente artículo se describe un estudio realizado sobre la presencia de las transformaciones geométricas: simetría, rotación y traslación en algunas danzas nativas de un grupo indígena Uitoto a partir de dos aspectos: Por una parte la recolección de referencias teóricas que permitan comprender el concepto de etnomatemática y los elementos matemáticos mencionados. Por otra parte, se realiza la transcripción de los movimientos y desplazamientos practicados en las danzas más representativas de los integrantes de la comunidad indígena. Es importante aclarar que a futuro se espera que los datos y análisis realizados se puedan usar en la creación de actividades escolares que permitan la enseñanza de las nociones matemáticas nombradas anteriormente.

Palabras clave: Etnomatemática, transformaciones geométricas, Uitoto.

1. Introducción

Regularmente los aspectos matemáticos son identificados y utilizados por la sociedad para sobrevivir en un mundo globalizado. En realidad esta afinidad entre una disciplina (las matemáticas) y una necesidad actual es tanto

necesaria como exclusiva; pues mientras nos acomodamos a los objetivos educativos enfocados al desarrollo, hemos estado concentrándonos únicamente en los procesos y razonamientos matemáticos, alejándonos de todo aquello que se puede reconocer como matemática informal y que ante los ojos de la mayoría de educadores y frente a los objetivos modernos resulta poco significativo.

Para la academia, la noción de matemática informal se describe como todo aquello que se desarrolla en una práctica externa al entorno escolar, altamente influenciada por las características culturales y sociales de quienes la construyen. Es así como a pesar de que las matemáticas informales sean inherentes al desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, el estudio de las mismas no se ven reflejados en el diseño y construcción de actividades matemáticas en el aula escolar.

Por tal razón nos hemos enfocado en matematizar algunas danzas de los Uitotos, una etnia o pueblo indígena que habita la Amazonía Colombiana, con una población de 1.000 habitantes aproximadamente, y que tiene en la horticultura su fundamento económico y alimentario. Los Uitotos son productores de *Yuca Brava*, *Ají* y *Coca*, y cotidianamente disfrutan de las festividades con bailes, cantos y alimentos que fortalecen su cultura e identidad.

2. Marco de referencia

En la cultura Uitoto los bailes son una fuente principal para el enriquecimiento cultural, especialmente en esta época donde la cultura indígena ha ido desapareciendo, los bailes son una tradición ancestral que les permite expresar diversas situaciones, cosmovisiones, creencias y formas de pensar. Según Calle (1968) la importancia de esta actividad se basa en creencias míticas pues cada uno de los bailes realizados por los Uitotos tiene un significado fundamentado en alguna historia o creencia.

Es importante resaltar que el principal referente de esta investigación es la etnomatemática como línea de investigación, uno de los principales autores es el profesor D'Ambrosio, quien caracteriza la etnomatemática como:

> La matemática practicada por grupos culturales, tales como comunidades urbanas o rurales, grupos de trabajadores, clases profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros tantos grupos que se identifican por objetivos y tradiciones comunes. D'Ambrosio (2001, p. 9).

Teniendo en cuenta que el contexto cultural de las matemáticas construidas en la escuela varía según la situación en la que se desarrolla el aprendizaje, es posible decir que existe una diversidad de actividades de acuerdo al entorno y la realidad. Autores como Blanco (2003), mencionan que la matemática está presente en todas las actividades realizadas por el hombre; para el desarrollo de este proyecto se tiene en cuenta este planeamiento a partir de la geometría, la cual es aún más empírica en el ser humano, pues por medio de ésta el ser humano desde que nace empieza a realizar una conexión con el mundo asumiendo esfuerzos que le permitan descubrirlo. Es por ello que no pueden alejarse las actividades cotidianas de lo denominado como "conocimiento formal".

En cuanto a lo matemático que se puede encontrar:

Figura 1. **Traslación**

Barnet (1991) la define como: "Es un movimiento en el plano de tal forma que a cada punto de la figura le corresponde un vector de traslación, (una distancia, una dirección y un sentido de la traslación)" (p. 114).

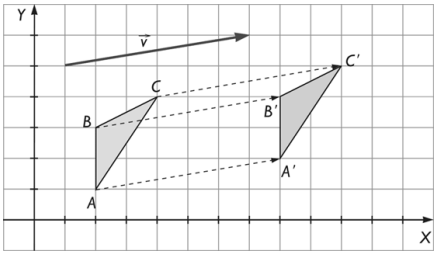


Figura 2. **Rotación**

"Es un movimiento angular de cada uno de los puntos a partir de un punto que es el centro de giro. Para este movimiento es necesario dar un ángulo y el punto centro de giro" Barnet (1991, p. 118).

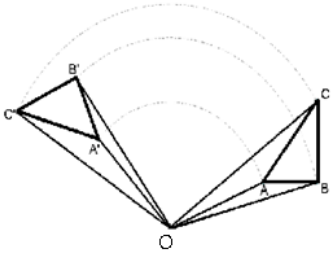
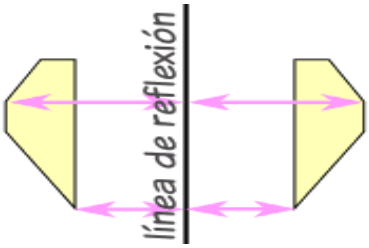


Figura 3. **Reflexión o simetría**

Barnet (1991) "la reflexión es el proceso de trasladar (copiar) todos los puntos de una figura a otra posición equidistante de una recta conocida como eje de simetría. Como resultado del proceso, se obtiene una imagen especular de la original" (p. 121).



3. Aspectos metodológicos

El proyecto fue desarrollado bajo la metodología cualitativa que fortalecer la labor de hallar aspectos matemáticos en algunas de las danzas nativas de los Uitoto, este tipo de metodología hace énfasis en que la recolección de datos puede expresarse en formas de registro básicas que suelen ser escritos descriptivos - narrativos cuyo resultado es un banco de datos válidos tras muchos episodios de observación, al ser la observación la herramienta más importante para la recolección de datos que contribuya con el desarrollo de la pregunta orientadora. Se decide describir lo que se entenderá por observación, para ello se cita a Sabino (1992), quien menciona que la observación consiste en el uso sistemático de los sentidos orientados a la captación de la realidad en la búsqueda de los datos que se necesitan para resolver un problema de investigación que se desea estudiar. Teniendo en cuenta los planteamientos del autor, se hace uso de la observación participante, en la que el investigador es un miembro del grupo y toma parte en las actividades, los acontecimientos, los comportamientos y la cultura de éste, pues es importante para el estudio conocer la realidad del grupo indígena y no simplemente hacerlos un objeto de estudio.

Dentro de la metodología se puede catalogar el proyecto como un estudio etnográfico, ya que según Goetz & Lecompte (1988), un estudio etnográfico permite aprender de la gente más que estudiar a la gente, por ello con el desarrollo del proyecto no solo se pretendía observar la realización de los

bailes, sino también evidenciar la importancia que estos tienen dentro de la cultura del grupo indígena, por ello se cree que el estudio permite resaltar aspectos culturales del grupo indígena permitiendo dar a conocer aspectos que quizá los integrantes de la comunidad no conocían sobre la práctica de sus danzas tradicionales. Las fases tenidas en cuenta para la realización del proyecto fueron:

- Definición de la situación. (Dos meses).
- Identificación de patrones culturales. (Tres mes).
- Trabajo de campo. (Tres meses).
- Matematización de los conceptos. (Cinco meses).

4. Desarrollo de la propuesta

Teniendo en cuenta que el objetivo de la propuesta está basado en la interpretación matemática de una costumbre practicada en la vida real, se presentan a continuación el análisis realizado de algunos de los movimientos que se eligieron de las danzas practicadas por los Uitoto. (Para efectos de la presentación se expone únicamente el análisis de la danza más importante para los Uitoto).

Danza Jatdiko

La danza Jatdiko corresponde a un baile relacionado con uno de los mitos fundadores de la comunidad Uitoto. En esta danza se hace uso de un tronco hueco que sirve como caracterización de una serpiente anaconda, además de los maderos que utilizan los hombres para golpear el piso de forma uniforme, creando el sonido ambiente del baile, (ver figura 4).

Al interpretar los movimientos de los hombres en un primer momento, se puede mostrar la noción de traslación teniendo en cuenta una perspectiva frontal del pie del bailarín, mientras que las mujeres pueden caracterizarse en torno a una traslación de cuerpo completo con un vector horizontal, (ver figura 5).

Para el siguiente momento, mientras algunos hombres se encuentran golpeando el tronco que caracteriza la anaconda, las mujeres bailan tomadas de la mano por otros integrantes, cambiando el movimiento realizado por sus pies consiguiendo realizar una rotación del pie derecho en torno al pie izquierdo (que resulta ser el eje de rotación), (ver figura 6). Es así como el pie se rota aproximadamente unos 90º, y continúa con otra rotación de -135º, es decir que esta última se da en el sentido de las manecillas del reloj. En este momento se puede visualizar una composición de movimientos que resulta de dos transformaciones, (ver figura 7).

Después de realizar el análisis de las danzas se puede inferir que en los movimientos realizados por los bailarines hay relaciones con expresiones geométricas específicamente con transformaciones isométricas, estos resultados pueden motivar a la creación de una secuencia de actividades que permita un conocimiento más significativo sobre dichos conceptos para las personas que integran la comunidad.

Figura 4. Danza Jatdiko

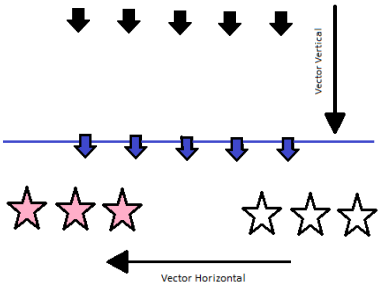


Figura 5. Movimientos realizados en un primer momento.

Figura 6. Cambio en la organización de los bailarines.

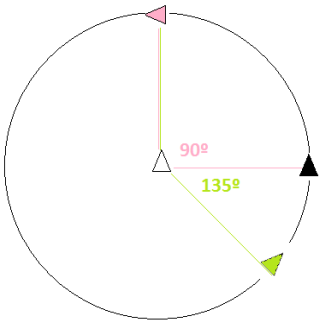


Figura 7. Composición de movimientos realizados por las mujeres Uitoto.

5. Conclusiones

Matematizar los movimientos realizados en una danza Uitoto nos permite identificar e interpretar la realidad de la comunidad en torno al Pensamiento Espacial, puesto que el proceso llevado a cabo reconoce las relaciones entre algunos conceptos geométricos y una actividad cotidiana como la danza.

Trabajar a partir de la matemática informal nos permite resaltar otros campos de acción del área, campos que son susceptibles a ser traducidos en actividades escolares, que permitan a los estudiantes del área urbana conocer las danzas de los pueblos indígenas a partir de los conceptos matemáticos que aparecen en ella. Esto nos permite justificar la importancia de la matemática informal que termina siendo tan válida como los elementos de aprendizaje construidos desde las matemáticas formales.

Al trabajar transformaciones geométricas caracterizadas como isométricas es posible que los estudiantes comprendan con mayor facilidad la idea de la congruencia entre objetos, ya que se habla de nociones reales, en las que se puede identificar que el bailarín, o alguna parte de su cuerpo tomada como referencia tendrá la misma longitud, área, y tamaño aun después de la transformación, es importante resaltar que al ser la geometría la matemática del espacio, todas aquellas nociones como las nombradas anteriormente tendrán una relevancia siempre y cuando estén relacionadas con la vida cotidiana del estudiante.

Referencias bibliográficas

- Barnett, R. *Geometría plana con coordenadas*. México: Mcgraw-Hill Interamericana.
- Blanco, H. (2003). *Boletines del grupo de estudio internacional de etnomatemática*. Disponible en http://etnomatematica.univalle.edu.co/
- Calle, H. (1968). *La creación según los Muinane*. Revista Eco. 18;1. p.1-10.
- D'Ambrosio, U. (2001). Etnomatemática: Elo entre las tradições e a modernidad. Colección: Tendencias en educación matemática. Belo Horizonte: Autêtica. En Blanco, H. (2006). La etnomatemática en Colombia. Un programa en construcción. Revista BOLEMA Boletín de Educación matemática, 19 (26), p. 32-45
- Goetz, J. & Lecompre, M. (1998). *Etnografía y diseño cualitativo de investigación educativa*. Madrid: Morata
- Sabino, C. (1992). *El proceso investigativo*. Bogotá: Panamericana.

Roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas.
Estudio de caso en grado octavo

Guataquira López, Rossmajer
rossmajer@yahoo.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Gimnasio Los Andes, (Colombia)

Resumen

Para conceptualizar y tipificar elementos del entorno del aula en la escuela que afectan el conjunto de roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas cuando se gestiona una secuencia de actividades, se implementó en un grado octavo de un colegio privado de Bogotá, una secuencia de actividades cuya situación problema es el zoom y cuyo objetivo es propiciar el trabajo con algunas características y propiedades de la proporción como razón y el desarrollo de la noción de función lineal, a partir de sus representaciones. De tal experiencia, se presentarán los referentes teóricos y la metodología que han orientado el estudio.

Palabras clave: Interacciones, roles, organizaciones, función lineal.

1. Introducción

Considerando los planteamientos realizados por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) respecto al análisis de los procesos de estudio y de la trayectoria interaccional y ecológica; de los estudios de las Rutas de Estudio y Aprendizaje (REA) de Lurduy (2005) y Godino & Llinares (2000), acerca de los ambientes de aprendizaje y las normas de clase; de los elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de Lurduy (2007-2009); los

planteamientos de Mockus & otros (1995) y De Oliveira (2009), en consideración a la importancia de la historicidad y conocimientos extraescolares de los estudiantes en los procesos de estudio; y teniendo en cuenta los escasos estudios que existen en Colombia –desde el EOS– acerca de la trayectoria interaccional y ecológica, se planteó un estudio de caso, para caracterizar los elementos del entorno escolar que afectan el conjunto de roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas cuando se gestiona una secuencia de actividades en grado octavo acerca de las representaciones de la función lineal.

2. Referente conceptual

Para la realización de este estudio se ha llevado a cabo una revisión teórica respecto a la influencia del entorno en las relaciones profesor-estudiante, las normas que regulan dichas relaciones, y las metodologías de investigación implementadas en estudios de este tipo, eligiendo como principales referentes teóricos a los siguientes autores y enfoques:

Los planteamientos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática en cuanto a la dimensión normativa de los procesos de estudio para con ello "…por un lado, poder describir con mayor precisión el funcionamiento de los procesos cognitivos e instruccionales normados y, por otro, incidir en aspectos de la dimensión normativa (modificándolos si fuera necesario) para facilitar la mejora de dichos procesos de estudio de las matemáticas". (Godino, Batanero y Font, 2008, p. 60).

La teoría del enfoque de investigación del Interaccionismo Simbólico, un enfoque acuñado por Herbert Blumer en 1938, cuyo supuesto básico es que "las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo" (Godino y Llinares, 2000, p. 166), lo cual implica que la actividad matemática está fundamentada en los procesos culturales y sociales que tienen lugar en el aula de clase.

Las producciones de Lurduy (2005, 2007-2009) respecto a la descripción de las interacciones y relaciones que tienen lugar en el aula de clases entre los protagonistas de dicho escenario (profesor, estudiante y saber) y la relación de dichas interacciones con el ambiente de aprendizaje.

3. Descripción de la Experiencia

Se ha llevado a cabo una investigación cualitativa de tipo descriptivo-exploratoria, mediante el estudio de caso y la implementación de una secuencia de actividades sobre las representaciones de la función lineal en grado octavo. Realizando un estudio configurado de la siguiente manera:

1. ***Fases de investigación***. El estudio se ha llevado a cabo desde agosto del 2013 y se ha proyectado hasta abril del 2015, en seis fases, así: 1). Exploración teórica e identificación problema. 2). Identificación de los participantes. 3). Revisión teórica y diseño de instrumentos. 4). Recolección de datos (fase actual). 5) Organización y sistematización de la información. 6). Análisis de datos y emisión de conclusiones.

2. ***Población y contexto de aplicación***. La población del estudio son los estudiantes de grado octavo de un colegio privado ubicado al norte de la ciudad de Bogotá, cuyos estudiantes pertenecen a los estratos socioeconómicos 5 y 6.

3. ***Instrumentos de recolección de datos***. Los instrumentos que se han empleado en la recolección de datos se describirán de acuerdo a su uso en la investigación:

   De producción de datos. Para la producción de los datos se adaptó la secuencia de actividades diseñada por Suspe & Vega (2006), en la que las autoras diseñaron una propuesta metodológica para la enseñanza de la noción de función lineal desde el concepto del zoom, empleando los planteamientos del grupo de Crisálida respecto a la estructuración de situaciones didácticas de DECA y Brousseau.

   De recolección de datos. Para la recolección de datos se han empleado los siguientes instrumentos:

   - ***La observación:*** Se usaron dos tipos de observación: Directa: realizada por la docente investigadora, en el aula de clase de matemáticas y del entorno educativo. Mediatizada: Del aula de clase y del entorno del aula escolar, mediante el uso de cámaras de video.

- ***Documentos escritos***: La recolección de datos se está realizando a través de protocolos del docente, relatos periodísticos y portafolios de los estudiantes y entrevistas semi-estructuradas.

Instrumentos para la organización y sistematización de datos. Se están diseñando rejillas de información que permitan categorizar la información y posteriormente posibiliten su caracterización.

4. ***Análisis de datos*:** Para el análisis de los datos se emplearán las técnicas de análisis de contenido de texto, identificando tendencias y regularidades en los datos que permitan crear categorías (éstas se están creando a partir de la determinación de relaciones diádicas y tríadicas del sistema didáctico y el tetraedro didáctico propuesto por Lurduy (2007-2009) y complejizando dichas relaciones a partir de referentes teóricos relacionados con ambientes de aprendizaje, roles, organizaciones, interacciones y normas sociomatemáticas del aula de matemáticas) que posibiliten la realización de comparaciones y posibles contrastes; considerando la reducción de datos a lo largo de todo el proceso de la organización y sistematización de la información. De igual manera, se realizará una triangulación de la información recolectada para dar consistencia y fiabilidad a los resultados obtenidos.

4. Reflexiones

Como se ha señalado, el estudio presentado se encuentra en desarrollo y actualmente se está ejecutando la fase de recolección de datos, en la cual se ha llevado a cabo el trabajo de campo, durante el segundo trimestre del año, en el mismo colegio en el que laboro (lo cual implica que en el trabajo de campo al mismo tiempo soy la docente y la investigadora), dentro del espacio de formación denominado geometría y bajo la temática de proporción y semejanza de imágenes.

La secuencia de actividades aplicada está estructurada de acuerdo a los momentos didácticos que propone Brousseau (1986): Acción, formulación, validación e institucionalización; siendo el momento de validación, el momento en el cual se recopilaron los datos a analizar, puesto que las características que posee esta fase de la secuencia propician las condiciones

necesarias más apropiadas para recolectar datos relacionados con los roles, organizaciones e interacciones entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante. La implementación de esta secuencia de actividades en la institución fue una forma de trabajo relativamente nueva para los estudiantes, lo cual provocó nuevas organizaciones de trabajo en el aula y al interior de los grupos y por supuesto, formas distintas de asumir roles en la clase y de interactuar con los demás.

Referencias bibliográficas

- De Oliveira, I. (2009). Caminos de la comunicación: utopías, confrontaciones, reconocimientos. *Nómadas, 30,* p. 194-207.
- Godino, J., Batanero, C. Y Font, V. (2008). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. España.
- Godino, J.D. & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. En *Revista Educación Matemática*, Vol. 12, N° 1: p. 70- 92. Universidad de Granada - Universidad de Sevilla. Publicado en internet. Consultado el 18-03-2010. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/Godino_Llinares_Interaccionismo. PDF
- Guataquira, R. (2013). Roles, organizaciones e interacciones en el aula. Un estudio de caso desde la perspectiva del EOS en torno a la noción de función lineal. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lurduy, O. (2005). Algunos elementos conceptuales para la comprensión de la cultura del aula. Ambientes e interacciones de aprendizaje. *Cuadernos de investigación* No. 5. Rutas de estudio y aprendizaje en el aula. Grupo de investigación MESCUD. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lurduy, O. (2007-2009). El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas. En O. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático.* (p. 75-97). Bogotá: Doctorado interinstitucional en educación.
- Mockus, A., Hernández, C., Granés, J., Charum, J., y Castro, M. (1995). Articulación entre conocimiento escolar y conocimiento extraescolar. En Ilse Sánchez (Coord. Ed.), *Las fronteras de la escuela /: articulaciones entre conocimiento escolar y conocimiento extraescolar* (1 ed., p. 27- 48). Editorial Magisterio.
- Suspe, M. y Vega, D. (2006). *Propuesta de secuencia de actividades para la construcción de las representaciones de la función lineal grado noveno*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Generando argumentación en clase de geometría

Avila, Fredy - Plazas, Tania

mdma_favilas664@pedagogica.edu.co - tplazas@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Colombia)

Resumen

La experiencia de aula gira en torno al desarrollo de procesos de argumentación. Se planteó una secuencia de tareas con el fin de organizar un microsistema teórico para que los estudiantes trataran de dar solución a otras tareas y utilizaran el sistema axiomático para argumentar teóricamente sus respuestas. Las tareas están basadas en el libro Geometría de Samper (2008).

Palabras clave: Sistema axiomático, argumentación, acciones del profesor, tareas.

1. Introducción

La experiencia de aula presentada se desarrolló en el marco de un trabajo de grado de Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que aún está en proceso de elaboración, el cual se tiene como objetivo determinar cómo las acciones del profesor propician procesos de argumentación en los estudiantes en la clase de geometría. En este documento se presenta la secuencia de tareas planteada a un curso de grado octavo, la cual tenía como finalidad organizar un microsistema axiomático para que ellos argumentaran teóricamente durante la solución de otras tareas.

2. Referentes conceptuales

***Argumentación*:** En este documento, al igual que Goizueta (2011), se entiende la argumentación como una habilidad básica esencial que pretende desarrollarse en el marco de la educación obligatoria, y que consiste en "el acto de formar razones, hacer inducciones, sacar conclusiones, y aplicarlas al caso en discusión" (Goizueta, 2011, p. 8 - 9). Usamos el término de argumentación tanto para designar el proceso de producir unos discursos lógicamente conectados (no necesariamente deductivos) sobre un tema como para el producto de este proceso. Es importante tener en cuenta la diferencia con la definición de demostrar, en la cual el objetivo es convencer y explicar (Downs, citado en Boero (2002)).

***Acciones profesor*:** En este documento abordamos aquellas acciones que realiza el profesor, tales como impulsar las interacciones entre los estudiantes, con preguntas, explicar los datos de las situaciones o tareas planteadas, guiar las discusiones entre estudiantes con distintos puntos de vista, entre otras. Acciones que están dadas por su papel dentro de la comunidad de aprendizaje en la cual es representante de la comunidad matemática. También es quien debe proponer las tareas, guiar a los estudiantes, hacer que estos participen y como lo menciona Yackel "el profesor con frecuencia tiene la función de pedir que se expliciten, o explicitar él mismo, datos, garantías y respaldo que podrían apenas estar implícitos en las explicaciones y justificaciones que dan los estudiantes" (2001, p. 8).

3. Descripción de la experiencia

Se realizaron seis tareas, con los siguientes momentos dentro de cada una: trabajo individual, trabajo en grupos de tres personas y finalmente socialización con todo el grupo. Con esta metodología se buscaba propiciar la interacción de los estudiantes y evidenciar las formas en que ellos defendían sus argumentos. En cada momento del desarrollo de las tareas, el profesor realizó unas acciones específicas como hacer explicitas y sustentables las ideas de los estudiantes, para esto en el momento individual el profesor no intervino, propiciando posturas personales de los niños frente

a la situación. Cuando trabajaron en grupos pequeños, el profesor asesoró para que los estudiantes comunicaran sus ideas y se generan acuerdos grupales con algún sustento. Finalmente cuando se trabajó en la socialización con todo el grupo, el profesor guío la discusión y consolidó los acuerdos finales que constituían el microsistema teórico.

Las primeras cinco tareas tenían como propósito el estudio de nociones y definiciones sobre los cuadriláteros, que organizar el microsistema teórico, el cual serviría para argumentar la solución de la tarea seis.

En las primeras cinco tareas se estudió una definición de cuadrilátero, algunos tipos de cuadrilátero (rectángulo, rombo, cuadrado, trapecio y paralelogramo), una definición de diagonal, una de polígono convexo y dos propiedades de los cuadriláteros (la suma de las medidas de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es igual 360º y la suma de la medida de tres lados de un cuadrilátero es mayor que la medida del lado no sumado). Para poder introducir al sistema axiomático el profesor diseñó dos tipos de tareas. Uno de estos era que a partir de la definición se identificaban sus atributos, luego se analizaban figuras y se determinaba si ellas cumplían o no la definición dada. El otro tipo consistía en que, dado un grupo de figuras, los estudiantes identificaban las características comunes y construían una definición. Respecto a las propiedades, el estudiante debían visualizar figuras, explorar figuras por medio de material tangible, en el cual debían medir, cortar, y registrar en tablas los datos obtenidos de unas figuras, y descubrir una propiedad.

En las tareas en las cuales se trabajaron definiciones, los estudiantes defendían sus respuestas de acuerdo a lo que observaban, interpretaban, sabían o habían escuchado del profesor en otras ocasiones. El profesor servía de mediador en las opiniones de los estudiantes; validaba, por medio de ejemplos y contraejemplos; y finalmente institucionalizaba las definiciones, para que fueran parte del sistema axiomático.

En las tareas en las cuales se descubrió una propiedad, los estudiantes también observaban, interpretaban y hacían supuestos en relación a lo que estaban analizando, el profesor debió guiar más al estudiante para resolver este tipo de tarea y su papel a la hora de institucionalizar las propiedades fue más evidente.

La última tarea diseñada por el profesor, tenía la intención de que los estudiantes utilizaran las definiciones y propiedades institucionalizadas con las actividades anteriores para justificar sus respuestas. En esta tarea se propusieron cuatro preguntas: La primera y la tercera en relación a las medidas de los ángulos de un cuadrilátero, la segunda a los tipos de cuadrilátero y la cuarta a la existencia de un cuadrilátero a partir de unas medidas dadas. En esta tarea el profesor actuó como mediador entre los estudiantes, validando las respuestas por medio de ejemplos, contraejemplos y en algunas ocasiones dando la respuesta correcta, el profesor al notar que sus estudiantes no recordaban lo trabajado en las tareas anteriores, hacia remembranza de las mismas y de las definiciones y propiedades institucionalizadas con esas tareas.

Algunos estudiantes trataban de argumentar utilizando lo que recordaban de las definiciones y propiedades, otros con lo que recordaban había dicho el profesor y otros realizaban nuevamente exploraciones con las representaciones de la tarea o con ejemplos que ellos mismos construían.

4. Reflexión

Se evidenció que para la ejecución de este tipo de tareas se demanda más tiempo que el usado en una clase bajo una metodología tradicional, dado que para alcanzar acuerdos en el grupo se deben escuchar las propuestas de cada estudiante, luego generar una discusión frente a las mismas y finalmente institucionalizar lo que hará parte del sistema axiomático.

Con relación a las acciones del profesor éste debe ser consciente de la importancia de los aportes que los estudiantes hacen, y debe estar siempre atento a indagar y hacer claras las afirmaciones de ellos, fijándose en fomentar las intervenciones de sus estudiantes, no dar respuestas que corten las argumentaciones, así las respuestas sean erróneas, ya que de ellas se pueden sacar aportes para la clase. Una acción importante del profesor es diseñar tareas que ayuden a fomentar diferentes procesos, mediar e institucionalizar.

Respecto a los estudiantes, es de resaltar que a medida que pasa el tiempo se van acostumbrando al tipo de tarea y a hacer argumentos basados en el

sistema axiomático propuesto. Sin embargo, es un proceso largo. Es de resaltar que al principio es difícil hacer que argumenten utilizando la teoría, ya que tienden a hacer argumentos como "el profesor lo dijo", "mi compañero dice que es así". Este trabajo aún está en procesos de análisis, en el que se pretende dar cuenta de la relación entre el tipo de argumento que hace el estudiante y las acciones del profesor.

Referencias bibliográficas

- Boero, P., Douek, N. & Ferrari, P. (2008). Developing mastery of natural language. In L. English (Ed.), International Handbook of Research in Mathematics Education, p. 262 - 295. New York: Routledge.
- Goizueta, M. (2011). Interpretaciones sobre la argumentacion en el aula de secundaria por parte de un grupo de profesores. Purdue University Calumet.
- Samper, C. (2008). Geometría, Bogotá D.C. Editorial Norma.
- Yackel, E. (2001). Explicación, justificación y argumentación en las aulas de matemáticas. Pordue University Calumet.

Propuesta sobre el uso de un software de matemáticas para potenciar el aprendizaje de nociones de cálculo diferencial.

Informe de avances

Bustos Gutiérrez, Laura – Vásquez De Alba, Jenny Katherine
xlaurita@hotmail.com – jeka_vd@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Se presenta una propuesta enfocada al diseño de situaciones adidácticas, usando un software de geometría dinámica como medio para generar relaciones que den sentido a estrategias de solución de problemas propios del cálculo diferencial. Nos encontramos en la primera fase de ingeniería didáctica: análisis preliminares, revisando estrategias de resolución de problemas del cálculo diferencial, para identificar el carácter geométrico de las mismas, las familias de problemas en las cuales adquiere sentido y las demandas cognitivas que imponen a los estudiantes, así como los conocimientos previos necesarios para su comprensión.

Palabras clave: Situaciones adidácticas, geometría, CarMetal, nociones de cálculo.

1. Introducción

En la enseñanza del cálculo diferencial se han evidenciado decisiones metodológicas por parte del profesor que generan dificultades de aprendizaje; una de esas decisiones radica en querer enseñar definiciones formales, olvidando las ideas geométricas que fueron la base para llegar a la

formalización. Teniendo en cuenta esta situación, se propone un trabajo de profundización que va enfocado al diseño de situaciones adidácticas desde la Teoría de Situaciones de Brousseau (1986). Se espera que estas situaciones incorporen aspectos de la geometría para la enseñanza de nociones como límite y derivada, las cuales podrán ser utilizadas en la resolución de problemas sin acudir a expresiones o definiciones formales.

Para orientar la propuesta se toma como metodología la ingeniería didáctica abordando las fases de análisis preliminares y concepción y análisis *a priori* de las situaciones adidácticas. Para ello, las situaciones diseñadas serán desarrolladas en un software de geometría dinámica, el cual no se toma como un tipo de motivación sino como una herramienta que permite al estudiante resolver problemas de matemáticas. La pregunta que orienta ésta propuesta es: ¿Cómo utilizar un software de matemáticas para potenciar el aprendizaje de nociones de cálculo a partir de problemas geométricos, sin acudir a la formalización?

2. Marco de referencia

El cálculo diferencial e integral contiene elementos que son necesarios para resolver problemas donde se incorporen ideas como el *"cambio y la variación, la variación instantánea, los procesos infinitos y las situaciones límite"* (Cantoral, 1993. p. 4), lo cual puede ser aplicable en las ciencias y las ingenierías. Por lo tanto es un área importante en el currículo de matemáticas tanto en secundaria como en la universidad.

Entre las reflexiones alrededor de los temas de investigación en la educación matemática, Santos (2007) destaca:

> Aprender matemáticas va más allá de que el estudiante domine un conjunto de reglas, algoritmos, fórmulas o procedimientos para resolver listas de problemas rutinarios (…) durante el proceso de aprender matemáticas, los estudiantes necesitan desarrollar una disposición y forma de pensar consistente con la práctica o el quehacer de la disciplina. (p. 36).

Los conceptos como función, límite y derivada tienen un origen geométrico y muchos de los procedimientos del cálculo necesitan una interpretación geométrica. Como se evidencia en el estudio de Cantoral (1993) *"los*

problemas que dieron origen al cálculo se pueden encontrar desde la antigüedad clásica en aquellos de cuadratura, curbaturas (...) y las ya famosas paradojas sobre el infinito" (p. 2). Sin embargo, la fundamentación formal de dichos conceptos y procedimientos se realizó principalmente desde la aritmética y el álgebra. Acosta, Camargo, Castiblanco y Urquina (2004) afirman:

> Durante muchos siglos la geometría se constituyó en la base de toda ciencia, pero ante la necesidad de superar los obstáculos de la percepción y de la intuición para dar un fundamento exclusivamente racional a la ciencia, perdió su papel protagónico para cederlo al análisis y el álgebra. (p. 8).

Así mismo Lara (1997) plantea que:

> A pesar de las dificultades inherentes al concepto de límite, la enseñanza del mismo, tradicionalmente se ha realizado dentro de un sistema semiótico de representación algebraico que muy poco o nada ha contribuido a mejorar el entendimiento de la noción de límite. Este método de enseñanza basado en el manejo algebraico de límite, está profundamente enraizado en la mente de quienes tienen la tarea de enseñarlo. (p. 135).

La tendencia a enseñar los conceptos de cálculo desde su definición formal, genera dificultades ya que se pierde la relación de los conceptos con su epistemología. Un claro ejemplo de estas dificultades se ve en la noción de límite: "las dificultades en torno al límite son de muy diferente índole y van desde las dificultades propias de la definición (cuantificadores, notación, múltiples representaciones, entre otras) hasta dificultades relacionadas con el lenguaje del límite (como tendencia o aproximación)" (Claros, 2010, p. 4).

Diversas investigaciones han mostrado evidencias de que el software matemático puede contribuir a mejorar los procesos de comprensión de conceptos matemáticos complejos y el aprendizaje de los mismos. Santos (2007), ha encontrado en sus investigaciones que *"El uso del software dinámico puede resultar una herramienta poderosa para los estudiantes en términos de generar representaciones dinámicas del problema, que les permitan identificar relaciones matemáticas."* (p. 35).

De igual manera, el Ministerio de Educación de Francia (2011), considera que:

> La utilización de software (…) cambia profundamente la naturaleza de la enseñanza pues favorece la investigación. En particular, al resolver problemas, el uso de software de cálculo formal puede limitar el tiempo consagrado a cálculos técnicos para concentrarse en los razonamientos. (B. O., p. 1).

Una de las dificultades en la enseñanza del cálculo radica en querer enseñar definiciones formales, olvidando las ideas geométricas que fueron la base para llegar a la formalización. A raíz de esto se propone un trabajo de profundización que va enfocado al diseño de situaciones adidácticas usando un software de matemáticas como medio para generar relaciones significativas entre el contexto geométrico y el contexto algebraico, relaciones que permitan dar sentido a las estrategias de solución de problemas propias del cálculo diferencial.

3. Aspectos metodológicos

La metodología que se ajusta al diseño de situaciones adidácticas es la ingeniería didáctica dado que es una metodología para el diseño y análisis de secuencias de clase. Cabe aclarar que en esta propuesta, sólo se llevarán a cabo las dos primeras fases de esta metodología: análisis preliminares y concepción y análisis *a priori*, puesto que no se realizará implementación, solo se llevará a cabo el diseño de situaciones adidácticas; ubicando esta ingeniería didáctica en un nivel de *micro-ingeniería* (Artigue, 1995, p. 37).

Fase I: Análisis preliminares

Nos encontramos en esta fase analizando las estrategias de resolución de problemas del cálculo diferencial, para identificar el carácter geométrico de las mismas, las familias de problemas en las cuales adquiere sentido y las demandas cognitivas que imponen a los estudiantes, así como los conocimientos previos necesarios para su comprensión. Estos análisis son necesarios para poder identificar cuáles son los prerrequisitos necesarios que deben tener los estudiantes y cuáles son las dificultades que presentan en el aprendizaje de nociones de cálculo diferencial.

Fase II: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones adidácticas

En esta fase se estudiará el potencial del software CarMetal para actuar como medio productor de aprendizaje y de sentido; es decir, identificar las posibles acciones de los estudiantes y las correspondientes retroacciones del software, las posibles tareas que desencadenen esas acciones y la secuencia de tareas que permitan la construcción de estrategias de solución correspondientes al saber en juego.

4. Desarrollo de la propuesta

Desde la metodología de ingeniería didáctica nos encontramos en la primera fase: *análisis preliminares*, revisando estrategias de resolución de problemas del cálculo diferencial, aspectos cognitivos y epistemológicos que permitan determinar cuál es el origen de los conceptos que se van a abordar, conceptos como función, límite, máximos y mínimos; así como el sentido, las dificultades cognitivas para procesar esos conceptos, las características del saber y las dificultades que pueden tener los estudiantes. Estos análisis son indispensables para poder identificar cuáles son los prerrequisitos necesarios que deben tener los estudiantes y cuáles son las dificultades que presentan en el aprendizaje de nociones de cálculo diferencial.

Para trabajar sobre el aprendizaje de conceptos de cálculo desde la resolución de problemas, se escogen los problemas de optimización ya que son un tipo de problemas que resuelve el cálculo y además un tipo de problemas que tiene aplicaciones prácticas, fáciles de contextualizar en la vida de los estudiantes.

Una primera exploración del problema de la caja permitió identificar estrategias espontáneas de solución como identificar el valor máximo en una tabla o directamente en una gráfica, estrategias que será necesario invalidar (pues no garantizan exactitud) para poder plantear la necesidad del método de la derivada. Prevemos que el uso del software permitirá hacer esta invalidación, mostrando con el zoom que los valores mostrados en la tabla y en la gráfica no son todos los posibles.

Se estudió el método de maximización utilizando la derivada, que consiste en plantear la ecuación de la función, calcular la función derivada, encontrar los ceros de la función derivada y comprobar si en esos puntos la función es máxima. Al pensar en cuestionamientos como: ¿Por qué se debe buscar una ecuación?, ¿Por qué se debe derivar la ecuación?, ¿Por qué se debe igualar a cero?, sentimos que esa manera de proceder es mecánica, dado que se abordó el problema por medio de pasos que sabíamos se debían realizar porque fue lo que aprendimos cuando estudiamos cálculo, pero no fue posible dar una razón que justificara por qué se hace uso de la derivada.

En esta medida, se llevó a cabo una revisión histórica, epistemológica y cognitiva de los métodos de maximización/minimización del cálculo diferencial, para identificar su origen, su sentido y las posibles dificultades de comprensión para los alumnos; dicha revisión se realizó en un primer momento tomando dos libros de texto de cálculo. En ellos se evidencia un método poco descriptivo pero muy metodológico: no se explica cuál es el sentido de ese método, un por qué y para qué de cada paso; por el contrario, se encuentran definiciones formales de la derivada.

Analizando los trabajos de Fermat en torno a problemas de maximización, encontramos que su técnica está basada en el concepto que para calcular la altura de una curva hay que colocar una tangente que sea paralela al eje de las abscisas. Es así como llegamos a identificar que vamos a trabajar en dos problemas diferentes: 1). Lograr que los estudiantes identifiquen que para calcular la altura de una curva es necesario encontrar los puntos donde la tangente es horizontal o paralela al eje de las abscisas. 2) Lograr que el estudiante tome conciencia de que no es posible calcular directamente la pendiente de la tangente a una curva en un punto, y comprenda el uso de funciones como lugares geométricos para hacer ese cálculo (sin utilizar el concepto de límite).

El trabajo realizado en las asesorías colaborativas permite pensar en cuáles son las situaciones que se analizarán cognitiva y epistemológicamente, lo que da paso a la construcción de unas categorías de análisis donde se logre: identificar los pre-requisitos para resolver problemas de cálculo diferencial (calcular la pendiente de una recta, resolver ecuaciones, a partir de un punto y un valor de pendiente, calcular un nuevo punto para trazar una recta, etc.) y pasar a la identificación de las dificultades cognitivas (tomar conciencia de

la tangencia y del paralelismo al eje de las abscisas para poder medir de manera indirecta, etc.).

5. Conclusiones

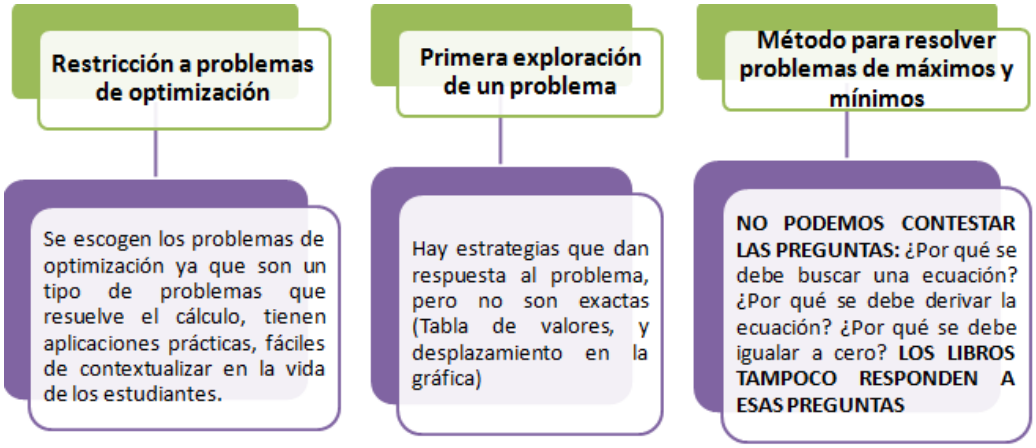


Figura 1. Avances referentes al objeto matemático.

Los avances referentes al objeto matemático que se muestran en la figura 1, permitieron reflexionar acerca de la forma como estamos enseñando ciertos contenidos matemáticos, ya que en varias ocasiones sólo se enseñan métodos y técnicas sin un sentido para el estudiante, y para justificar su enseñanza se empleaba la frase “este tema es necesario para comprender el siguiente tema que se va a ver”.

De esta manera, la forma de concebir la enseñanza ha cambiado en muchos aspectos como producto de esta investigación, uno de ellos al reconocer que no se poseía claridad para dar cuenta del sentido de aplicar un método para encontrar máximos y mínimos. Es en este aspecto donde más se ha tenido que hacer énfasis y aceptar que se debían entender bien los problemas matemáticos para poder enseñarlos a los estudiantes, pensando en cómo deben interactuar con el software, qué ideas pueden tener los estudiantes, qué dificultades van a enfrentar y cómo el docente debe intervenir en esas dificultades.

Referencias bibliográficas

- Acosta, M., Camargo L., Castiblanco, A. & Urquina, H. (2004). Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Edición Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media. ISBN: 958 – 97413, p. 4 - 7. Bogotá, D.C.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue (ed.) Ingeniería Didáctica En Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (p. 33-60) Cap. 4. Bogotá: Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.
- B.O. (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de Mathématiques Classe terminale de la série scientifique. Bulletin officiel spécial N° 8 du 13 octobre 2011.
- Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7/2 pp. 33-115.
- Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. Publicaciones Centroamericanas Cinvestav. ISBN 9977-64-769-0. México. Recuperado de: http://cimate.uagro.mx/cantoral/Archivos%20PDF/Hacia%20una%20didactica%20del%20calculo%20basada%20en%20la%20cognicion.pdf
- Claros, F. (2010). Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza (Tesis de Doctorado). Universidad de Granada. España.
- Cuevas, C. & Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. El Cálculo y su Enseñanza. DME-Cinvestav-IPN & IREM de Strasbourg México – Francia. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/Dc2l3taQW10.pdf
- Howson, G. (ed). (1973). Developments in Mathematical Education. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge U. Press: Cambridge.
- Lara, C. (1997). La enseñanza de los conceptos de límite y continuidad de funciones. Memorias del Seminario Nacional: Calculadoras y Computadoras en Educación Matemática, p. 127-132, Sonora. Recuperado de http://polya.dme.umich.mx/Carlos/mem9sem/lara/lara.htm
- Santos, L. (2007). La Educación Matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, celebrada en Querétaro, México. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Número 8. p. 35-54. Recuperado el 29 de Octubre de 2013 en http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6949/6635

Resolución de problemas en el aula de clase de matemáticas

Acuña Quiroga, Jairo Alberto – Pulido Moyano, Karen Lulieth
jaacunaq@correo.udistrital.edu.co – klulieth@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Este trabajo propone una investigación basada en un estudio de caso que permita analizar cómo algunos docentes egresados de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas LEBEM, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, desarrollan sus clases desde el enfoque de la resolución de problemas identificando los diferentes factores legales, curriculares, didácticos y heurísticos que se evidencian en el proceso de enseñanza y aprendizaje en una institución.

Palabras clave: Resolución de problemas, Enfoque Ontosemiótico (EOS)

1. Introducción

¿Cómo desarrollar una clase de matemáticas basada en la resolución de problemas en el aula escolar de la ciudad de Bogotá? Ésta en la pregunta fundamental para esta propuesta de investigación, porque resulta interesante comprobar si dentro de la planeación y desarrollo de estas clases hay una relación con las diferentes teorías de resolución de problemas; esto, teniendo en cuenta la dificultad que se ha evidenciado desde la práctica docentes, al proponer una clase que realmente involucre la resolución de problemas; Kilpatrick, Gómez & Rico (1998) expresan que "existe una cierta tendencia en las clases de matemáticas de plantear a los estudiantes problemas artificiales", motivo por el cual se desarrolla este trabajo para poder comparar las diferentes teorías y la prácticas que desarrollan los docentes.

Es importante señalar que existe una diferencia entre la resolución de problemas como metodología de clase y la resolución de problemas como procesos para resolver o abordar un problema (heurísticas), entonces ante las heurísticas surgen preguntas que los docentes deberían tener en cuenta durante el proceso de gestión de una clase en la que se resuelvan problemas y el docente interviene brindando un apoyo sobre cómo los estudiantes deben abordar el problema: *¿cómo hacer para que los estudiantes diferencien entre un algoritmo y una heurística? y ¿cómo hacer para que los estudiantes prefieran hacer uso de las heurísticas y no de algoritmos?* Estas preguntas surgen de la idea de Kilpatrick et al, (1998), "Los algoritmos son procesos bien definidos, que determinan o son determinantes, y garantizan una solución. Por el contrario, en la heurística, la solución no está garantizada (es posible o probable). Esto, naturalmente, genera muchos problemas en los estudiantes, quienes prefieren los algoritmos".

Además de las preguntas ya mencionadas que debe tener en cuenta el docente en este caso, se ha evidenciado desde la experiencia y socialización con los diferentes docentes de trabajo, que la gestión de clase se torna en dos momentos claros: primero la explicación a través de ejercicios y problemas; segundo, la aplicación en problemas simples en los cuales aplican los conceptos trabajados, lo cual va en contraposición a lo mencionado por Kamii (1994, citado en Ruiz y García 2003) quien dice que la resolución de problemas debería desarrollarse de una manera simultánea al aprendizaje de los conceptos. A su vez, se resalta la importancia de los factores afectivos, sociales y culturales a los cuales han estado expuestos los estudiantes y que se omiten al momento de planear y desarrollar las clases. Sánchez (2001), realizó un análisis retrospectivo del proceso de aprendizaje de algunos estudiantes, y demostró que la dificultad para resolver problemas también es causada por la metodología con las cuales ha tenido que trabajar en el pasado.

2. Marco de referencia

Calvo (2008) se refiere a las dificultades que existen para desarrollar una clase basada en la resolución de problemas, al mencionar que la práctica docente está muy ligada a los diferentes contenidos y objetivos que propone

el Estado, lo cual lleva a que las estrategias didácticas carezcan de significado en la clase matemáticas. Este factor resulta importante al analizar el desarrollo de una clase de resolución de problemas, ya que se debe entrar a identificar cuál es la importancia que el docente asigna al currículo y a esta metodología como eje central de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, Calvo (2008) también evidencia que la enseñanza de las matemáticas debe dejar de ser un método mecánico para resolver problemas y evitar acudir a un único procedimiento para solucionarlos, por el contrario, se debe incentivar a los estudiantes a pensar y buscar caminos para la resolución de dichos problemas. Buschiazzo y otros (1997, citado en Calvo, 2008), aporta algunas acciones importantes que el docente debe tener en cuenta al momento de planear y desarrollar una clase basada en la resolución de problemas, y que permitirá tener algunos elementos como base para analizar la información recolectada; estas acciones son: Selección de problemas, orientar la resolución, estimular la resolución de problemas, ser modelo ante la resolución de problemas. Clements (1999) también hace mención a cinco principios referidos al diseño y selección de actividades y el papel del docente en una clase de matemáticas: 1). una actividad debe ser interesante y adecuada al currículo, 2). una actividad debe usar el tiempo eficientemente, 3). los estudiantes deben desarrollar sus propias estrategias en las respuestas a las actividades, 4). los profesores deben esperar estar ocupados en sus clases y 5) .la evaluación debe ser auténtica.

En cuanto a teorías y formas de presentar una clase de resolución de problemas, se pueden evidenciar varios autores, uno de los referentes es Polya (1989), quien sugiere una serie de pasos o método para abordar un problema: a). comprender el problema, b). diseñar un plan, c). ejecución del plan y d). examinar la solución. Schoenfeld (1992) citado por Escudero (1999) enfatiza en la idea que se debe aprender matemáticas resolviendo y planteando problemas, siempre que estos problemas sean “enriquecedores”, y que para estos se debe tener en cuenta algunos aspectos o elementos heurísticos que aportan en la resolución de problemas; estos aspectos se proponen en tres fases: análisis el problema, explorar el problema y la comprobación de la solución obtenida. Fernández (2006) propone algunas heurísticas o etapas que se deben desarrollar en la resolución de problemas:

elaboración, enunciación, generación de ideas, transcripción simbólica de ideas, realización y contrastación.

3. Aspectos metodológicos

La problemática merece ser investigada teniendo en cuenta el interés y la importancia que debe tener la resolución de problemas en la clase de matemáticas. Para desarrollar esta investigación se ha decidido trabajar mediante el Enfoque Ontosemiótico (EOS), donde se enfatizará en la relación entorno-maestro dentro de las relaciones tríadicas y se usará la configuración didáctica como parte de las nociones teóricas del EOS, las cuales permiten analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, concepto retomado según Godino (2012): *"sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema, constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática. Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático"*.

4. Conclusiones

Los resultados esperados están basados en evidenciar que el manejo de la resolución de problemas dentro del aula de clase es un trabajo complejo y que dentro del ámbito escolar de la ciudad de Bogotá es difícil que se puedan desarrollar por diferentes factores: el tiempo dedicado al área de matemáticas en los colegios, la necesidad de cumplir con un plan de estudios, las dificultades que tienen los docentes para contextualizar y generar problemas que permitan involucrar al estudiante con su realidad inmediata, en algunas temáticas específicas; dificultades en la interpretación y análisis de información, no hay importancia en todos los grados académicos en cuanto a

la necesidades de la enseñanza de las matemáticas a partir de la resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

- Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Educación 32, (1),* p. 123–138. Recuperado en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44032109
- Clements, M. A. (1999). Planteamiento y resolución de problemas ¿es relevante Polya para las matemáticas escolares del siglo XXI? *SUMA, 30,* p. 27 – 36. Recuperado en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/30/027-036.pdf
- Godino J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. Recuperado en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf
- Kilpatrick, J. (1998). Seminario de investigación. En Kilpatrick, J. Gómez, P. y Rico, L (Eds.) Educación matemática, p. 51-57. Recuperado en: http://funes.uniandes.edu.co/679/1/KilpatrickEducacion.pdf
- Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press.

Regresar al índice general

Conferencias

Índice de esta sección

Más +, una posibilidad interactiva de autoformación de profesores de matemáticas 275

Más +, una posibilidad interactiva de autoformación de profesores de matemáticas

Albadan, Juan - Castro, Claudia - Torres, Elizabeth
Álvarez, Ingrith - Camelo, Francisco - Forero, Alexander
Rodríguez Bejarano, Jorge *(Concepción y creación del módulo)*
Albadan, Juan *(Compilador de la experiencia)*

1. A manera de Introducción…

…Pensemos en los niños y niñas de Colombia, privilegiemos su vida, su salud, su integridad, su educación… Son frases comunes de y en la comunidad de educadores que, desde diversos escenarios e instancias, nos hemos venido preocupando por el desarrollo y el mejoramiento en la calidad educativa y de vida de los mismos. En búsqueda de este derrotero y de abordar requerimientos de y para los diversos interactuantes del proceso educativo, surge "**Más+**", un módulo de autoformación para profesores, que a manera de juego interactivo, aborda algunos elementos de la estructura aditiva y el número natural del mundo de las matemáticas escolares.

Más+ es fruto de un esfuerzo mancomunado entre un equipo de maestros de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas LEBEM, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y el Ministerio de Educación Nacional, en el marco de trabajo del programa: *Todos a Aprender* realizado entre el 2012 y el 2013, particularmente en el frente de formación que se promueve en este programa.

Más+ ha sido pensado y concebido como elemento de apoyo a los procesos de autoformación propios de un maestro que se mueve en el devenir de su proceso reflexivo, y se espera redunde en la transformación de sus prácticas profesionales.[1] Por ello fue forjado en el espectro del paradigma reflexivo, consolidando una estrategia de formación situada, aprendizaje colaborativo y comunidades de aprendizaje; con lo que se busca generar herramientas y situaciones que permitan una continua reflexión y análisis sobre la organización de conceptos, componentes y procesos de pensamiento, emergentes en la práctica profesional de un educador matemático.

En el marco de esta estrategia de formación, el equipo de la Universidad Distrital enfocó su trabajo en el campo conceptual de la estructura aditiva y la construcción del número natural; siendo éste el presupuesto teorético que se abordó en el módulo construido, fue así como en este espacio se desplegaron elementos del qué, cómo y cuándo, en lo que respecta a este campo y su puesta en escena, deben ser considerados al momento de enseñar tales conceptos, así como el devenir que se da en procesos formativos a maestros que enseñan los mismos.

2. Sobre sus referentes teóricos, metodológicos y la estructura construida

Más + fue construido con el propósito principal de:

"Generar herramientas y situaciones que permitan una continua reflexión y análisis sobre la organización de conceptos, componentes y procesos de pensamiento, emergentes en el desarrollo de la estructura aditiva y el número natural; tales elementos en conjunto, redundan en un progreso significativo de las prácticas pedagógicas que giran en torno a las matemáticas escolares presentes en la educación básica primaria en Colombia."

[1] Apartes tomados y adaptados del documento "lineamientos de presentación, evaluación y seguimiento al módulo Más +" construido por el equipo de la Universidad Distrital para el Ministerio de Educación Nacional en el año 2012.

Fue así como su construcción nos llevó a repensar y resignificar diversas variables que se mueven dentro del mundo de la estructura aditiva y el número natural; en primer lugar una mirada del campo teorético en el que nos movemos:

El campo conceptual de la estructura aditiva refiere:

> "Consideremos en primer lugar un campo conceptual como un conjunto de situaciones. Por ejemplo, para el campo conceptual de las estructuras aditivas, el conjunto de situaciones que requieren una adición, una sustracción o una combinación de dichas operaciones…
>
> El concepto de situación no tiene aquí el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea, la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias." Vergnaud (1991).

En segundo lugar, se clarificó que cuando se habla de estructura aditiva, de manera implícita, se asume el trabajo con el número natural; la naturaleza de éste último se desarrolla como concepto en paralelo a la realización de operaciones, como bien lo menciona Castro (1999).

Configurados estas bases el equipo construyó la premisa del desarrollo conceptual, en la que se apostó por la configuración de un módulo que no se presentará por unidades temáticas, dado que debía ser lo que denominamos "universal", es decir, que cubriera y fuera accesible a todo los maestros y maestras que se desempeñan en la educación primaria, independiente de que fueran formados en matemáticas y/o educación matemática o no; fue así como adquirió un carácter reflexivo, y se convirtió en una invitación a observar cómo los procesos de enseñanza en educación matemática exigen conexión entre éstos.

Asimismo estableció una metodología de trabajo que se puede observar resumida en la figura 1.

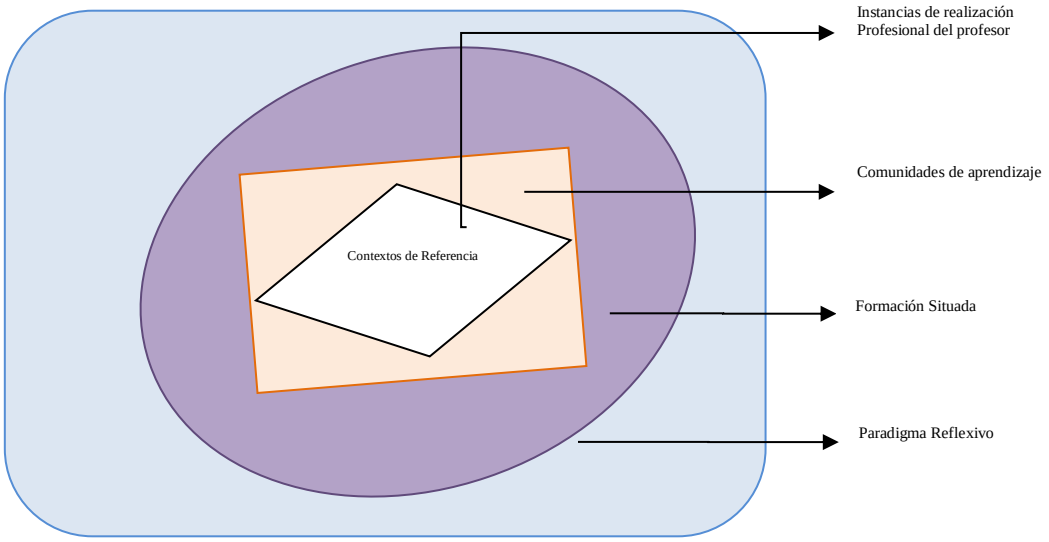


Figura 1. Metodología de construcción y esquema de trabajo del Más +.

En cuanto a esto y ubicados dentro del paradigma reflexivo fue claro que, en palabras de Fontes (s.f.), el paradigma reflexivo se basa en el principio de incertidumbre, esto implica que no exista una receta específica que funcione como libreto para llevar a cabo en la totalidad de las reflexiones que el maestro consolida, aún más, si se piensa en la variable tiempo que afecta y modifica las interacciones en sí mismas. Así, pensar en formar profesores invita a establecer interacciones que analicen su práctica en términos de implicaciones para sus alumnos, la institución y la sociedad, como núcleo general en el que se desenvuelve. Según algunos investigadores (Schön, 1992; Ponte, 1994; Altet, 2001), aquí se debe dar un proceso de diálogo, dónde las situaciones problemáticas exigen una intervención concreta e intuitiva.

El cuestionamiento fue, entonces: ¿Qué tipo de reflexión se puede generar en el profesor de matemáticas?, y es cierto que el profesor, debe reflexionar en cada uno de los diferentes momentos de actuación, es decir, antes, durante y después de su accionar en el aula.

Así las cosas, se definieron tres tipos de reflexiones a abordar en el módulo, i). La reflexión anticipada que según Van Manen (1998, citado por Flores, 2005) se genera sobre las situaciones pedagógicas (antes de afrontarlas) y

sobre la planeación de clase. ii). La reflexión activa, que es la reflexión que se genera al interior del aula cuando se pone en juego la planeación del profesor. iii). La reflexión sobre la acción, que se realiza en el momento posterior a la propia acción y se procesa de forma más sistemática y formal, con apoyo de un lenguaje más académico, como lo asegura Ponte (1994). Esta última etapa se desarrolla a partir de discusiones y cambios de experiencias entre profesores preocupados por problemas comunes.

Junto a ello se retomaron elementos de las instancias de realización profesional construidas por la LEBEM y de la resolución de problemas, como argumento que esgrime y se dota el módulo, pues las comunidades de aprendizaje y el trabajo colaborativo, desde la formación situada conlleva a que se piense en la resolución de problemas del profesor como "las distintas maneras de construir, enfocar y resolver preguntas que, según la complejidad de los sistemas de concepciones (que filtran las informaciones, orientando así la toma de decisiones y generando sentido a las acciones), le aparecen o no en las distintas dimensiones e instancias de realización" (LEBEM, 1999. P. 16).

Por último se esgrimió en las fuentes conceptuales sobre las que se soportó el módulo, encontrando lo siguiente:

- El entendimiento de la estructura aditiva en su sentido dinámico supone la generalización de operaciones aritméticas en y con aspectos propios de lo numérico, pero no solamente éstos, pues es imperante tratar estas operaciones en campos de acción donde el conteo no sea su único elemento.

- Por otro lado, la dicotomía de lo discreto y lo continuo que se tiene implícita cuando se habla de número natural, debe desvanecer de manera continua y procesual por lo que su adecuación al aula debe darse desde lo que se conoce de primaria. Lograr que se recubra uno al otro –los sentidos en los que puede ser entendido el número natural– es una prioridad de la enseñanza básica; en tanto se convierte en motor generador de una construcción paulatina que traslapa el pensamiento numérico, a los otros pensamientos y que aborda su verdadero papel progresivo, relativo y complejo; convergiendo de nuevo en los deseables de la educación actualmente, avanzando un poco más frente al momento actual en el que se vive.

- En suma, el módulo pretende abarcar los elementos mencionados, como herramientas que, en conjunto, permitan la reflexión buscada por parte de los docentes que enseñan en los nivele de la educación básica. En resumen los elementos inmersos en el campo conceptual de la estructura aditiva, en un primer reconocimiento de su naturaleza y sentido para cada contexto de referencia. (Ver figura 2).

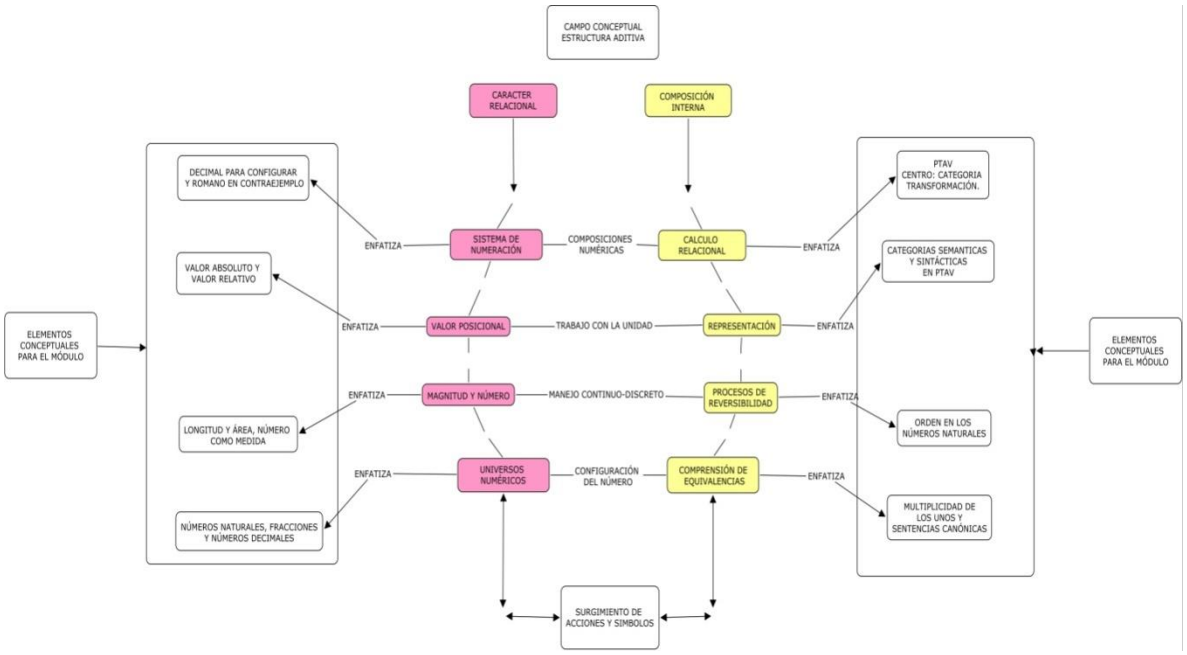


Figura 2. Campo conceptual de la estructura aditiva.

Concluyendo con esta caracterización, es necesario pensar que para el surgimiento de la estructura aditiva, existen momentos que lo han permitido; entre ellas el reconocer que son necesidades y acciones las que han obligado a tener una simbología y explicitar de manera precisa el número como representación de determinadas colecciones, objetos, situaciones y relaciones, pareciera ser que el número liga de manera consistente las relaciones que se dan frente a una situación determinada que surge de manera exógena al mismo; son acciones en el sentido físico y psicológico del término las que dan lugar al surgimiento del número: ¿Dónde hay más elementos?, ¿cuál objeto es el más grande?, ¿cómo identifico a éstos? Son preguntas que direccionan a dotar de sentido y significado el porqué del número. Esto podrá verse como se muestra en la figura 3.

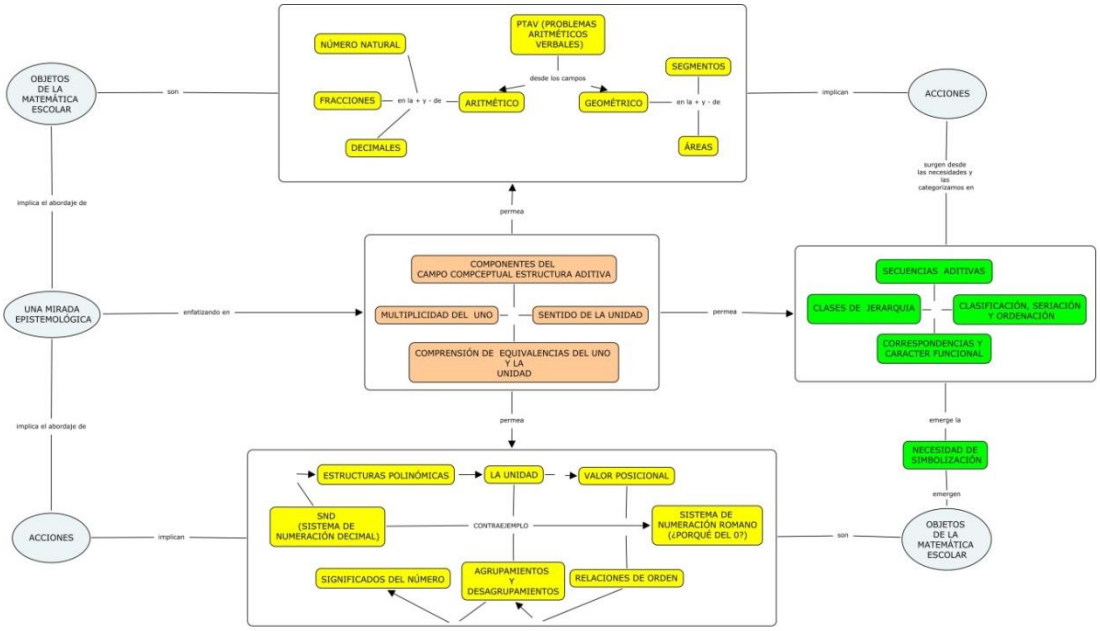
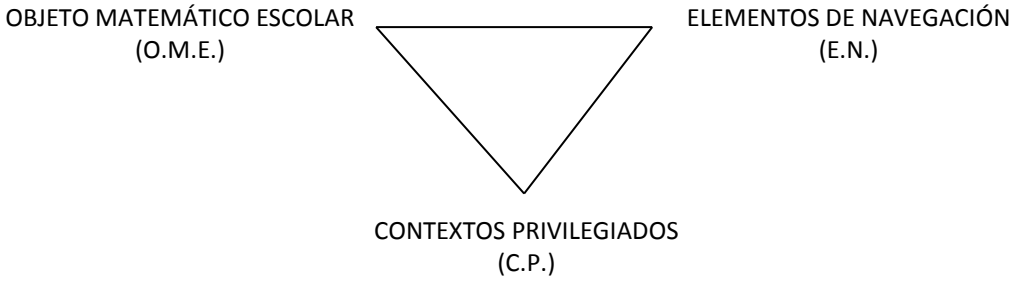


Figura 3. Soporte teórico del número natural y estructura aditiva.

3. ¿Cómo se muestra la posibilidad interactiva?

Para la puesta en escena de lo mencionado anteriormente, se propuso como eje fundamental las interacciones actuativas del docente, rescatándolas en la siguiente triada:



A partir del pensar como ubicar los objetos matemáticos escolares escogidos dentro de un planteamiento coincidente con aspectos propios de Colombia, surgieron los contextos privilegiados, para este caso hemos determinado seis, las regiones de Colombia: Andina, Insular, Pacífico, Orinoquia, Amazonas y Caribe, a la espera de usar, además, la analogía con los seis cursos "formales" que cobijan la educación primaria.

Así Más+ es un viaje que inicia con la creación de su propio personaje (avatar), con éste será nombrado como docente en propiedad para alguna región de Colombia, allí tendrá la opción de ingresar a la región que desee y realizar lo que se propone en ésta; no existe un orden de entrada para una región específica, se podrá mover de manera libre y crear su propia ruta. Luego de terminada una región regresará a escoger que otro escenario quiere conocer, así de manera iterativa hasta realizar el viaje completo como se observa en la figura 4.

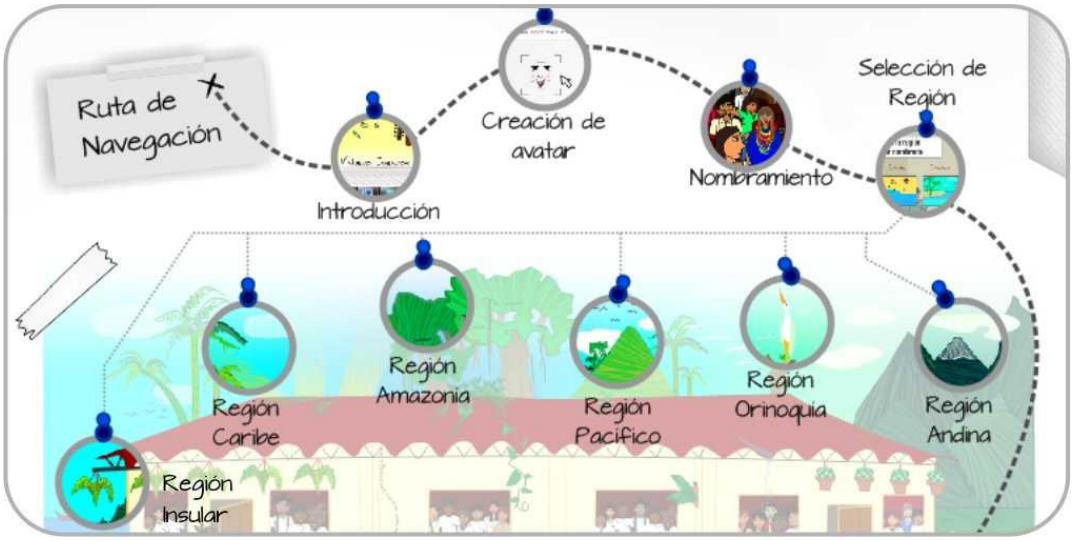


Figura 4. Interacciones actuativas del docente.

Con el fin de unificar los objetos mencionados en las interacciones actuativas del docente, los O.M.E. y los C.P., se creó la siguiente tabla, que agrupa y puntualiza lo que se espera abordar con fuerte énfasis en cada una de las situaciones, desde los tres elementos de las interacciones.

Regiones y grado	O.M.E.	C.P.	E.D.N.
Andina 5º	Sistemas de agrupación y numeración. Valor posicional. Operaciones.	Sector productivo Frutas	Navegación Recursos comunicación
Orinoquía 1º	Acciones antes del número. Significados del número.	Coleo	
Insular 2º	Sistemas de numeración. Valor posicional (el papel del 0). Acciones para que emerja el símbolo.	Cultural	
Caribe 4º	Problemas Aditivos de tipo verbal -PATV- (decimales). Operaciones.	Sector productivo El Mercado	
Amazonía Transición	Acciones antes del número.	Turismo en la región	
Pacífico 3º	PATV. Significados del número. Operaciones.	Interés cultural: La pesca	

Como se muestra en la tabla anterior, cada región rescata de manera global aspectos representativos de las mismas, desde allí se enfatiza en un curso de la educación primaria, priorizando a su vez algunos O.M.E. que coinciden con lo propuesto por las políticas educativas para el área, así para cada curso y cada región se hace especial énfasis en unos O.M.E. que están en consonancia con los documentos legales actuales, en paralelo se erige el C.P. como espectro en el que se enmarcan y mueven los objetos e interacciones que esperamos presentar. Por último, dentro de cada región-curso se diseñaron diversos tipos de actividades que responden a los elementos de navegación, que en suma, generan la reflexión pretendida con Más+. (Ver figura 5).

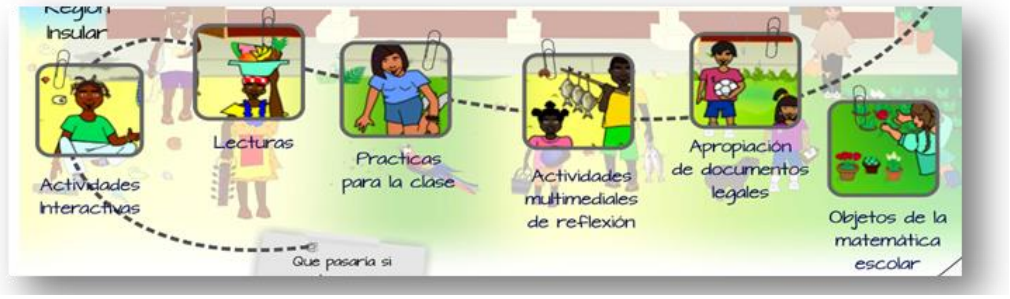


Figura 5. Elementos de navegación.

Referencias bibliográficas

- Albadan, J. (2006). Aspectos relativos al sentido dinámico de la suma, concepciones abordadas a nivel epistemológico. Material Interno. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.
- Albadan J., Castro, C. et al. (2012). Lineamientos de presentación, evaluación y seguimiento al módulo Más+. Documento gris. Universidad Distrital para el MEN.
- Bonilla, M., Sánchez, N., Vidal, M., Guerrero, F., Lurduy, O., Romero, J., Rojas, P., Mora, O., Baron, C., (1999). La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor. Grupo Editorial Gaia. Bogotá, Colombia.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1988). Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar. Síntesis. Madrid.
- Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.
- Duarte, S. y João, M. (2003). Contributos da Internet para a mudança do paradigma pedagógico: uma experiência de trabalho colaborativo. En: ELO, Revista do Centro de Formação Francisco de Holanda, Guimarães, Portugal. p. 35-46.
- Fontes, C. (s.f.). Paradigmas e Modelos na Formação de Professores. Disponible en: http://educar.no.sapo.pt/PARADIGM.htm Recuperado el 25 de abril de 2012.
- Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas [LEBEM]. (1999). Documento previo de acreditación. Material interno. Universidad Distrital. Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2011). Programa para la transformación de la calidad educativa. Guía para actores involucrados en el programa. Bogotá.
- Vergnaud, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Editorial Trillas. México D.F., México.

Regresar al índice general

Cursos cortos

Índice de esta sección

Construcción del sistema decimal de numeración por parte de los niños: Representaciones semióticas 287

Aspectos políticos y críticos en las prácticas de modelación matemática escolar 292

La circunferencia: Herramienta para descubrir, verificar y justificar propiedades en Educación Básica Primaria 308

Ideas estadísticas fundamentales y el ciclo investigativo en educación básica 322

Construcción del sistema decimal de numeración por parte de los niños: Representaciones semióticas

Castaño, Jorge
Pontificia Universidad Javeriana, (Colombia)
Grupo: Desarrollo, Afectividad y Cognición

1. Propósitos del curso

Este curso estudia el proceso de construcción de sistema decimal de numeración (SDN) por parte del niño. Esta problemática es una gran oportunidad para estudiar los vínculos existentes entre el manejo de sistemas de representación semiótica y la construcción de significado. La existencia de este vínculo se da por descontada en todo proceso de conocer, sin embargo, las explicaciones que se ofrecen son diversas dependiendo de la perspectiva teórica que se asuma. Abordar este problema tiene una vinculación directa con la enseñanza en cualquier campo del conocimiento, en particular en la matemática; ya que según sea las comprensiones que se tengan sobre este vínculo se desprende consecuencias para las prácticas de enseñanza. Este curso intenta estudiar este vínculo en un ámbito específico, la construcción del SDN, con la intención, por una parte, de reconstruir en un espacio concreto, las elaboraciones de perspectivas teóricas que estudian las relaciones entre sistemas de representación externa y la significación y, por otra, de derivar comprensiones sobre esta relación que quizá sean útiles para el estudio de procesos de construcción de compresiones de otros sistemas conceptuales de la matemática.

La base de esta parte del curso es el trabajo de investigación: *Conversión de Representaciones Semióticas de un Registro Numérico a otro y Construcción*

de Significados[1]. En esta investigación se retoman tres aportes teóricos: primero, la perspectiva semiótico-cognitiva de Duval sobre la operación de conversión entre registros semióticos; segundo, se hace un análisis del signo numérico a partir de los modelos de Peirce y Saussure, junto con los aportes del Enfoque Ontosemiótico de Godino sobre significados personales e institucionales y, tercero, se utiliza la teoría de campos conceptuales de Vergnaud, en particular, en lo que tiene que ver con el carácter operatorio que se reconoce a la actividad conceptual. Desde estos aportes teóricos se busca entender mejor el proceso de conversión de representaciones del registro verbal numérico al registro indo-arábigo.

2. El contexto

El contexto de la investigación fue una experiencia didáctica que tuvo una duración de año y medio, con niños entre 6 a 8 años de edad de una escuela elemental colombiana. La experiencia fue diseñada y desarrollada con el propósito explícito de apoyarlos en la construcción de las capacidades operatorias implicadas en la apropiación de la sintaxis del registro verbal numérico y en la realización de la operación de conversión entre los dos registros numéricos mencionados. Se estudió en detalle el proceso que ellos siguen en el intento de darle significado al signo numérico.

Este estudio aporta información que, por una parte, permite considerar la operación cognitiva de conversión como un juego complejo y dialéctico entre noesis y semiosis que parece irreducible a procesos de transcodificación, como pretenden explicarlo otros modelos sintáctico-semánticos de procesamiento del código numérico y, por otra parte, que ayuda a relativizar, el desconocimiento del papel de las representaciones internas (también semióticas, como consecuencia de interpretaciones que a veces se hacen desde perspectivas que se asumen como pragmatistas, o de interpretaciones más culturalista. Algunos estudiosos considerarán que tratar de explicar la construcción de significado del signo numérico por parte de

[1] Este trabajo corresponde a la tesis desarrollada y presentada por Jorge Castaño, para optar por el título doctoral. Trabajo desarrollado bajo la dirección del profesor Carlos Eduardo Vasco y co-dirección de José Luís Lalueza.

los niños como un fenómeno cognitivo es circunscribir el problema a los límites individuales del sujeto, precisamente porque prejuzgan que el estudio de la cognición supone el estudio de individuos aislados. En el caso de esta investigación se asume que aunque la construcción de conocimiento es un hecho social, en el que participan sujetos inmersos en prácticas sociales —que como tales son culturales— y que por lo tanto la mente no puede limitarse a un fenómeno intra-craneal, intra-cerebral, los fenómenos cognitivos pertenecen a los individuos.

Dicho de otra forma, son los individuos quienes asignan significado a los hechos del mundo movilizando su aparato cognitivo, y lo realizan gracias a sistemas de signos, usados en sistemas de prácticas, en contextos que son culturales y en situaciones concretas de comunicación. De ahí que si bien se entiende que el SDN cumple un papel fundamental en la conceptualización del número y es parte de lo que en este curso se pretende mostrar, también es cierto que existe otra dimensión del problema que es necesario contemplar, que no es otra cosa que tener presente que para ser apropiado este instrumento cultural por parte de un sujeto, en nuestro caso el niño.

Se requiere de un pensamiento capaz de establecer y ejecutar las relaciones en el que se fundamenta este sistema semiótico, razón por la cual, si se quiere entender lo que ocurre en el intercambio y lo que ocurre en las mentes de sus participantes, es necesario tener presente las elaboraciones con las que llegan los individuos a él. En otras palabras, el significado que un sujeto da a los registros numéricos que se tramitan en el acto de interacción comunicativa tiene que ver tanto con los sistemas semióticos que se usan en el intercambio como con las operaciones cognitivas[2] que el sujeto realiza.

Una enunciación como la recién hecha puede introducir ambigüedad, ya que tiene la debilidad de presentar las funciones de los sistemas semióticos y las operaciones cognitivas necesarias para su aprehensión como entidades distintas que se ponen en relación; quizá, más bien, las posibilidades de solución están en poder elaborar un modelo que, si bien haga distinciones, no

[2] El uso de la expresión "operaciones cognitivas" no es de todo claro en psicología. Si se toma desde la tradición cognitiva más del lado de procesamiento de información esta expresión hace referencia a los subprocesos que se dan en el procesamiento mismo de información. Duval desde su enfoque de cognitivo-semiótico la usa más en términos de la actividad conceptual a que da lugar la actividad semiótica y desde el estructuralismo genético refiere al funcionamiento operatorio del pensamiento. Esta expresión será objeto de análisis en este trabajo.

produzca separaciones entre actividad conceptual y semiótica. En parte en este curso se trata de ofrecer alguna explicación sobre cómo entender esta relación en el caso del SDN: ¿habrá que entenderse como un simple efecto de los sistemas semióticos sobre el pensamiento de los sujetos que hacen uso de ellos? o ¿habrá de entenderse que entre actividad semiótica y conceptual existe una relación dialéctica, que cada sujeto realiza en cada acto de interacción comunicativa?, o más aún, ¿conviene entender que las actividad semiótica y la actividad conceptual son como dos caras de un mismo proceso que podríamos acordar en llamar pensamiento?

3. Plan del curso

1. Análisis de algunas evidencias.
   1.1 Dificultades de coordinación de unidades de diferentes órdenes decimales.
   1.2 Producciones no canónicas de los niños.
2. Modelo del signo numérico e implicaciones didácticas
   2.1 Aportes de Peirce y Saussure.
   2.2 Las operaciones de tratamiento y conversión según Duval
   2.3 Significados personales e institucionales
   2.4 Modelo del signo numérico
3. Implicaciones didácticas

Referencias bibliográficas

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (trad. M. Vega). Cali: Universidad del Valle.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), p. 325-355. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm#signi_sistemicos
- Ifrah, G. (1998). Historia universal de las cifras. La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo. Madrid: Espasa.
- Inhelder, B., & De Campora, D. (1996). Hacia el constructivismo psicológico: ¿estructuras?, ¿procedimientos?. Los dos indisociables. En B. Inhelder & G. Cellérier (Eds.), *Los senderos de los descubrimientos del niño*, p. 22-56. Barcelona: Paidós.

- Lerner, D., Sadovsky, P., & Wolman, S. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En C. Parra & I. Sainz (Comps.), *Didáctica de las matemáticas.* 5ª reimpresión, p. 95-184. Buenos Aires: Paidós.
- Martí, E. (2003). Representar el mundo externamente. La adquisición infantil de los sistemas externos de representación. Madrid: Machado.
- McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: Evidence from acquired dyscalculia. *Cognition, 44*(1), p. 107-157.
- Orozco, M., Guerrero, D., & Otálora, Y. (2007). Los errores sintácticos al escribir numerales en rango superior. *Infancia y aprendizaje, 30*(2), p. 147-162. Recuperado de: http://objetos.univalle.edu.co/files/
- Peirce, C. (1987). *Obra lógico-semiótica* (A. Sercovich, Ed.; trad. R. Alcalde & M. Prellooker). Madrid: Taurus. [El número de párrafo precedido de "C.P." corresponde a la edición de los trabajos de Peirce, *Collected Papers*, editados por la Universidad de Harvard en 1931].
- Piaget, J. (1983). *Psicología y epistemología* (trad. A. M. Battro, 4ª ed.) Buenos Aires: Eméce. (Obra original publicada en 1970).
- Ponce, H., & Wolman, S. (2010). Numeración oral-numeración escrita. Tres perspectivas de análisis que abordan esta relación. *Educación, Lenguaje y Sociedad, 7*(7), p. 207-226. Recuperado: de http://www.biblioteca.unlpam.edu.ar/pubpdf /ieles/v07a11ponce.pdf
- Saussure, F. (1945). *Curso de lingüística general* (24ª ed.). Buenos Aires: Losada. Recuperado de: http://www.filos.unam.mx/LICENCIATURA/Pagina_FyF_2004 /introduccion/Saussure-Curso_Linguistica_General.pdf
- Terigi, Fl., & Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 59-83. Recuperado de: http://www.rieoei.org/rie43a03.pdf.
- Tolchinsky, L., & Karmiloff-Smith, A. (1993). Las restricciones del conocimiento notacional. *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, p. 62-63, p. 19-54. Recuperado de: http://dialnet.unirioja.es/servlet /articulo?codigo=48427
- Tolchinsky, L. (2007). The multiple functions of external representations: Introduction. En E. Teubal, J. Dockrell, & L. Tolchinsky (Eds.). *Notational knowledge. Developmental and Historical Perspectives* (pp. 1 -10). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.
- Vasco, C. E. (2007). Historical evolution of number systems and numeration systems. En E. Teubal, J. Dockrell, & L. Tolchinsky (Eds.). *Notational knowledge. Developmental and Historical Perspectives* (pp. 13-43). Rotterdam-Taipei: Sense Publishers.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. (trad. J. D. Godino). *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170. Recuperado de: http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf

Aspectos políticos y críticos en las prácticas de modelación matemática escolar

Mancera Ortiz, Gabriel - Camelo Bustos, Francisco Javier
gmancerao@udistrital.edu.co - fjcamelob@udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Amaya, Claudia Salazar - García Oliveros, Gloria
csalazar@pedagogica.edu.co - gloriag@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional, (Colombia)

Resumen

El curso está dividido en tres sesiones. Comenzamos por presentar una reflexión de tendencias que pueden encontrarse en investigaciones realizadas en relación con la idea de la modelación matemática, con la intención de centrar el curso en una que consideremos como relevante en la comprensión crítica y reflexiva de la realidad, pues compartimos que el uso de modelos matemáticos debe posibilitar estructurar reflexiones en relación con las implicaciones sociales de la utilización de tales modelos. En la segunda sesión mostramos desafíos y posibilidades que encontramos en el montaje de dos ambientes de aprendizaje en el que incorporamos a la modelación matemática desde la perspectiva adoptada, permitiendo, de esta manera, una discusión sobre las diferentes interpretaciones de los ambientes como reflejos de subjetividades de los estudiantes. En la tercera sesión, con las herramientas y reflexiones propuestas, proponemos discutir consideraciones relevantes para el desarrollo de ambientes de modelación matemática en contextos escolares.

Palabras clave: Modelación matemática, subjetividades y ambientes de aprendizaje.

1. Presentación

El presente curso es producto de las investigaciones, desde una perspectiva socio-política de la educación matemática, alrededor de ambientes de aprendizaje (Skovsmose, 1999), en aulas de educación básica y media colombianas. En tales investigaciones, la preocupación inicial ha sido la de reflexionar en torno a aspectos sociales, culturales, políticos e ideológicos presentes en el aula de matemáticas, y no solo en aspectos de carácter meramente didácticos y de contenido matemático.

En este sentido, se ha avanzado en la comprensión de diversos constructos teóricos que permiten ampliar el entendimiento de fenómenos del aula de matemáticas como la inclusión y la exclusión, la subjetividad y la intersubjetividad, y los obstáculos políticos de aprendizaje; que permiten interpretar el aprendizaje de las matemáticas más allá de las posibilidades que puede ofrecer un marco meramente cognitivo e individualista.

Lo anterior ha permitido incorporar perspectivas sociales y políticas, en relación con la idea de introducir a los estudiantes en formas de conocimiento "*que les dé la convicción y la oportunidad para luchar por una calidad de vida en la que todos los seres humanos se beneficien*" (Skovsmose, 1999, citando a Giroux, 1989). Desde esta última perspectiva se ha enfatizado en el papel de la modelación matemática y sus posibilidades para contribuir en la constitución de un sujeto que se relaciona socialmente y de manera crítica, apoyado en el conocimiento matemático. Este hecho permite abordar "*los vínculos entre las posibilidades del escenario, las actividades y los juegos del lenguaje como criterios de partida que pueden servir para reflexionar sobre la constitución de subjetividades sociales*" (García y Valero, 2013). Interpretando a Valero (2012) puede señalarse que las reflexiones que los estudiantes proponen en escenarios en donde la modelación matemática es necesaria, involucran aspectos diferentes a las matemáticas, pues los estudiantes deben sopesar las implicaciones sociales de tales reflexiones y sus consecuencias. Con base en estas consideraciones proponemos el curso: Intereses políticos y críticos en las prácticas de modelación matemática escolar.

2. Tendencias y perspectivas sobre la modelación matemática: algunas consideraciones

Desde la perspectiva de la educación matemática crítica, Skovsmose (1999) propone reflexionar la naturaleza crítica de los modelos matemáticos que sustentan decisiones y argumentos relacionados con situaciones tanto de la vida social como de las ciencias. Como ejemplos propone analizar los modelos matemáticos que posibilitarían describir la desigualdad social y económica que puede existir en las sociedades contemporáneas y los modelos matemáticos que permitirían transformar aspectos de la vida social. De otro lado, Blomhøj (2009) llama la atención sobre el uso extensivo de los modelos matemáticos en la sociedad puesto que visibiliza y contribuye a establecer el lenguaje de las matemáticas como un lenguaje de poder. Se comprende entonces por qué se reclama a la educación matemática empoderar a los estudiantes con las matemáticas, pues diversos estudios señalan que los "modelos matemáticos no son descripciones neutrales acerca de una realidad independiente".

Es necesario aclarar que estos enfoques son claramente distintos de las concepciones que plantean aplicaciones de las matemáticas, pues en éstos, el uso de modelos matemáticos en una variedad de contextos (de la vida real y de las ciencias) comienza con la conceptualización de alguna situación problema seguida de la simplificación y estructuración de la situación en la necesidad de especificar el problema en el lenguaje y los conceptos matemáticos.

Junto con los métodos matemáticos, es posible encontrar resultados matemáticos importantes para resolver el problema. Este enfoque ha dado lugar a las líneas de estudio sobre el uso de las matemáticas en la solución de problemas reales. Blomhøj (2009) señala que en estas perspectivas lo que interesa es comprender cuales son las capacidades y funciones cognitivas que son activadas en la elaboración de los modelos matemáticos, para establecer las competencias matemáticas de modelación que desarrolla el estudiante. Desde la perspectiva sociopolítica, la reflexión crítica juega un papel predominante en las competencias matemáticas de modelación.

Barbosa (2006) comparte también la necesidad de la reflexión sobre la naturaleza crítica de los modelos en la sociedad. Para este autor esta

competencia es diferente de las competencias matemáticas de modelación en las cuales solo se busca que los estudiantes usen competencias que estén cerca de las competencias matemáticas profesionales. En diferentes estudios de modelación desde la perceptiva crítica de situaciones sociales, se han encontrado diferentes estilos de interpretación en los estudiantes. Los estudiantes reconstruyen las situaciones de manera diferente dependiendo de los efectos de las comprensiones de las situaciones sociales, sus propias experiencias y creencias (Barbosa 2006 y García, Valero y Camelo, 2013).

Barbosa plantea la necesidad de diferenciar las perspectivas lineales de las competencias matemáticas de modelación en el aula. Puesto que las subjetividades de los estudiantes están presentes, como también de variables relacionadas con el contexto escolar que imponen límites y restricciones, las organizaciones curriculares, el tiempo, los objetivos de los docentes. Desde la perspectiva socio crítica, por ejemplo, la modelación va encaminada a vincular a los estudiantes en la reflexión colectiva sobre situaciones sociales relevantes para ellos, buscando la constitución de subjetividades sociales (Camelo, Mancera, Romero, García y Valero, 2011 y Valero, García, Camelo, Mancera y Romero, 2012).

El significado de relevantes está relacionado con sus experiencias, creencias y afectos, por ejemplo, la noción de espacios colectivos de interacción son los espacios donde los estudiantes interactúan verbalmente, incluidos los signos, los gestos, la mímica. En estos espacios, por ejemplo, los estudiantes discuten, entre otros, sobre los criterios del modelo y sobre sus consecuencias (Barbosa, 2006). La posibilidad de estos espacios está en relación con el peso que les atribuye el profesor. En la mayoría de los casos las interacciones que se privilegian son las relacionadas con las interacciones verbales de tipo matemático y no es prioridad estimular el espacio de reflexión colectiva.

3. Desafíos y posibilidades en ambientes de modelación matemática en contextos escolares colombianos

En una de las instituciones públicas de la localidad de Kennedy, la situación crítica que se conectó con los intereses de los estudiantes fue la nutrición. El profesor reconoce esta situación como crítica y conectada con las intenciones y disposiciones para la acción de los estudiantes, en tanto ellos manifestaban el inconformismo por los refrigerios que se ofrecían en la institución. El colectivo de investigación reconoció en este asunto una potencial situación crítica para nuestra sociedad, esta situación se manifiesta hace muchos años tal y como puede observarse en diarios y otros reportes de periódicos, persistiendo como dificultad en los últimos años, esta situación se registra en una nota del ciudadano, del 25 de agosto de 2014 en la que se presentan los resultados del informe sobre la inseguridad alimentaria en el mundo:

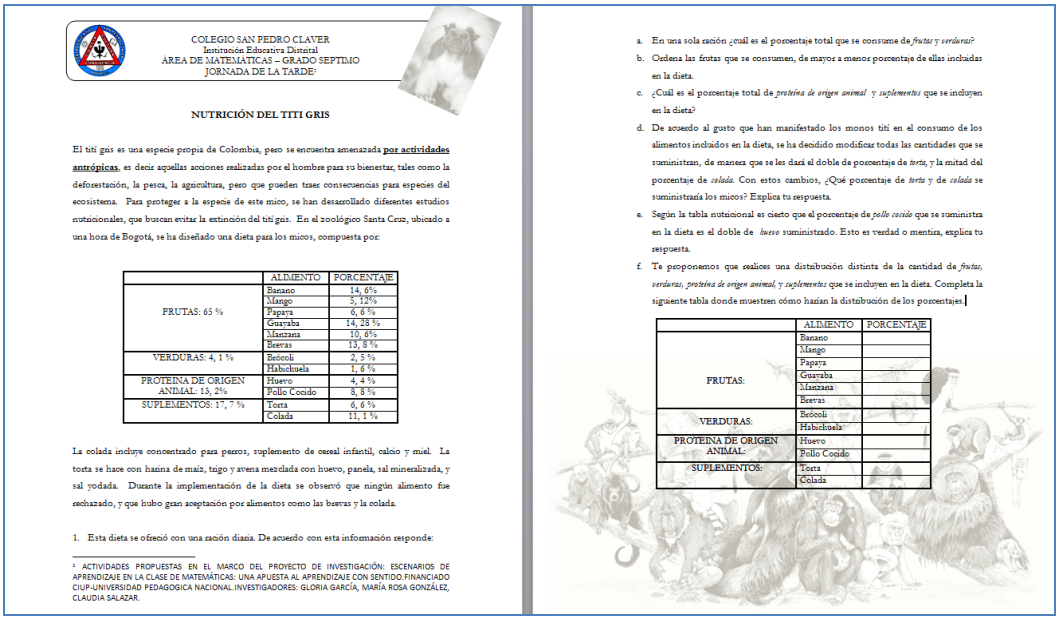
Según el informe sobre El estado de la inseguridad alimentaria en el mundo (Sofi) 2013, publicado por la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO), Colombia es el país de la Alianza del Pacífico con más personas en estado de desnutrición, y también es el único que no ha logrado cumplir con los Objetivos de Desarrollo del Milenio, pese a tener un crecimiento económico relativamente sostenido desde 2011. Las cifras presentadas por la organización, en el periodo entre 2011 y 2013, muestran que en Colombia hay 5,1 millones de personas en estado de desnutrición, seguido por Perú que tiene 3,5 millones y están fuera de concurso México y Chile, países en donde según la FAO, el porcentaje de personas subalimentadas es menor al 5 por ciento y se considera que la situación está controlada.

4. Escenario vida saludable

Escena 1. El sentido de alimentarse

La primera escena se construyó con base en la tarea del “mono tití” en ella se presentaron a los estudiantes los datos que describían el tipo de dieta con el que son alimentados los monos tití de un zoológico de la zona centro del

país, muy cercano a la capital; con esta tarea teníamos el propósito de discutir con los estudiantes sus juicios e interpretaciones acerca de lo que significaba una dieta balanceada y qué tipo de alimentos y proporciones se debía tener en cuenta en ella. Las tareas fueron las siguientes



COLEGIO SAN PEDRO CLAVER
Institución Educativa Distrital
ÁREA DE MATEMÁTICAS – GRADO SEPTIMO
JORNADA DE LA TARDE[1]

NUTRICIÓN DEL TITI GRIS

El titi gris es una especie propia de Colombia, pero se encuentra amenazada **por actividades antrópicas**, es decir aquellas acciones realizadas por el hombre para su bienestar, tales como la deforestación, la pesca, la agricultura, pero que pueden traer consecuencias para especies del ecosistema. Para proteger a la especie de este mico, se han desarrollado diferentes estudios nutricionales, que buscan evitar la extinción del titi gris. En el zoológico Santa Cruz, ubicado a una hora de Bogotá, se ha diseñado una dieta para los micos, compuesta por:

	ALIMENTO	PORCENTAJE
FRUTAS: 65 %	Banano	14, 6%
	Mango	5, 12%
	Papaya	6, 6 %
	Guayaba	14, 28 %
	Manzana	10, 6%
	Bevras	13, 8 %
VERDURAS: 4, 1 %	Brócoli	2, 5 %
	Habichuela	1, 6 %
PROTEINA DE ORIGEN ANIMAL: 13, 2%	Huevo	4, 4 %
	Pollo Cocido	8, 8 %
SUPLEMENTOS: 17, 7 %	Torta	6, 6 %
	Colada	11, 1 %

La colada incluye concentrado para perros, suplemento de cereal infantil, calcio y miel. La torta se hace con harina de maíz, trigo y avena mezclada con huevo, panela, sal mineralizada, y sal yodada. Durante la implementación de la dieta se observó que ningún alimento fue rechazado, y que hubo gran aceptación por alimentos como las bevras y la colada.

1. Esta dieta se ofreció con una ración diaria. De acuerdo con esta información responde:

[1] ACTIVIDADES PROPUESTAS EN EL MARCO DEL PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: ESCENARIOS DE APRENDIZAJE EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS: UNA APUESTA AL APRENDIZAJE CON SENTIDO.FINANCIADO CIUP-UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL.INVESTIGADORES: GLORIA GARCÍA, MARÍA ROSA GONZÁLEZ, CLAUDIA SALAZAR.

a. En una sola ración ¿cuál es el porcentaje total que se consume de *frutas* y *verduras*?
b. Ordena las frutas que se consumen, de mayor a menor porcentaje de ellas incluidas en la dieta.
c. ¿Cuál es el porcentaje total de *proteína de origen animal* y *suplementos* que se incluyen en la dieta?
d. De acuerdo al gusto que han manifestado los monos titi en el consumo de los alimentos incluidos en la dieta, se ha decidido modificar todas las cantidades que se suministran, de manera que se les dará el doble de porcentaje de *torta*, y la mitad del porcentaje de *colada*. Con estos cambios, ¿Qué porcentaje de *torta* y de *colada* se suministraría los micos? Explica tu respuesta.
e. Según la tabla nutricional es cierto que el porcentaje de *pollo cocido* que se suministra en la dieta es el doble de *huevo* suministrado. Esto es verdad o mentira, explica tu respuesta.
f. Te proponemos que realices una distribución distinta de la cantidad de *frutas, verduras, proteína de origen animal,* y *suplementos* que se incluyen en la dieta. Completa la siguiente tabla donde muestren cómo harían la distribución de los porcentajes.

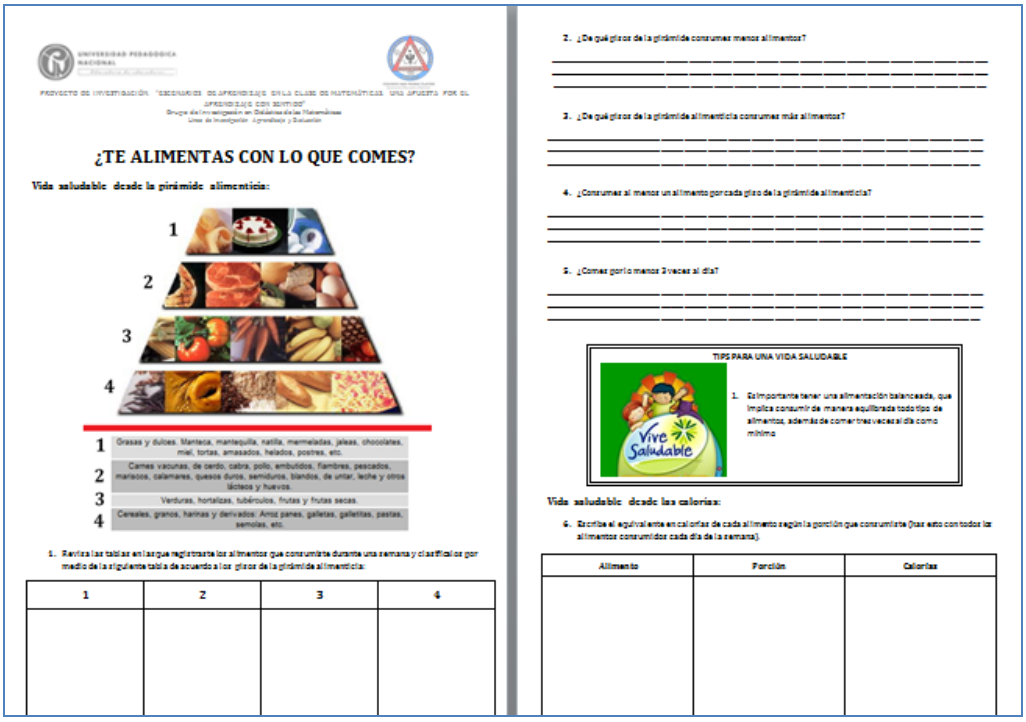
	ALIMENTO	PORCENTAJE
FRUTAS:	Banano	
	Mango	
	Papaya	
	Guayaba	
	Manzana	
	Bevras	
VERDURAS:	Brócoli	
	Habichuela	
PROTEINA DE ORIGEN ANIMAL:	Huevo	
	Pollo Cocido	
SUPLEMENTOS:	Torta	
	Colada	

En el desarrollo y socialización de los resultados del trabajo de los estudiantes, la profesora y los estudiantes construyeron la situación que resultó problemática para todos; los niños después de analizar las cifras manifestaban: *"Los monos comen más frutas, de las que yo como…."; "En mi casa comemos más papa y arroz….."; "Fruta comemos cuando nos dan jugo…";"Torta, donas, colada, comemos cuando nos dan en el colegio…";"…Hay que comer balanceado para alimentarse bien…"; "Yo creo que el 50% es arroz, otro poquito de plátano y por ahí el 10% carne…"; "Tan chévere que más del 50% fuera carne…"; "…Uy no, mejor que sea un porcentaje bajito de verduras,…no me gustan…"; "pero cuántas porciones son esto…"*

El proceso de matematizar vivido por los estudiantes, llevó a formular conclusiones acerca de la dieta balanceada de los monos y los porcentajes que ella implicaba, permitió sistematizar con tablas y discutir sobre la pertinencia de ciertas proporciones en la dieta y elaborar juicios acerca de las formas de comprender lo que significa alimentarse. Allí los porcentajes, los decimales, las proporciones, las medidas fueron elementos matemáticos que

inmersos en razonamientos y algoritmos se reinterpretaron y adquirieron además de significados, sentidos en los juicios e interpretaciones que los estudiantes hicieron de la situación.

Como se aprecia en el párrafo anterior, en las discusiones los estudiantes concluyeron acerca de las distintas proporciones que caracterizaban la dieta de los monos tití y las contrastaron con las dietas que caracterizaban los hábitos alimenticios de sus familias. Advirtieron la baja proporción de proteína representada en las carnes que consumían y la elevada proporción de cereales por su alto consumo de cereales, granos, harinas y derivados. Estos juicios elaborados por los estudiantes y las discusiones llevadas a cabo en la clase, dieron lugar a una nueva tarea en la que se sistematizaron los menú de una semana de la dieta de las familias de los estudiantes y evaluaron su pertinencia para lograr una dieta saludable, lo mismo se hizo con los refrigerios que se ofrecen en el colegio, la tarea se presenta a continuación



PROYECTO DE INVESTIGACIÓN "ESCENARIOS DE APRENDIZAJE EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS: UNA APUESTA POR EL APRENDIZAJE CON SENTIDO"
Grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Línea de Investigación Aprendizaje y Evaluación

¿TE ALIMENTAS CON LO QUE COMES?

Vida saludable desde la pirámide alimenticia:

1 Grasas y dulces. Manteca, mantequilla, natilla, mermeladas, jaleas, chocolates, miel, tortas, amasados, helados, postres, etc.
2 Carnes vacunas, de cerdo, cabra, pollo, embutidos, fiambres, pescados, mariscos, calamares, quesos duros, semiduros, blandos, de untar, leche y otros lácteos y huevos.
3 Verduras, hortalizas, tubérculos, frutas y frutas secas.
4 Cereales, granos, harinas y derivados: Arroz panes, galletas, galletitas, pastas, semolas, etc.

1. Revisa las tablas en las que registraste los alimentos que consumiste durante una semana y clasifícalos por medio de la siguiente tabla de acuerdo a los grupos de la pirámide alimenticia:

1	2	3	4

2. ¿De qué grupo de la pirámide consumes menos alimentos?

3. ¿De qué grupo de la pirámide alimenticia consumes más alimentos?

4. ¿Consumes al menos un alimento por cada grupo de la pirámide alimenticia?

5. ¿Comes por lo menos 3 veces al día?

TIPS PARA UNA VIDA SALUDABLE

1. Es importante tener una alimentación balanceada, que implica consumir de manera equilibrada todo tipo de alimentos, además de comer tres veces al día como mínimo

Vida saludable desde las calorías:

6. Escribe el equivalente en calorías de cada alimento según la porción que consumiste (hazlo esto con todos los alimentos consumidos cada día de la semana).

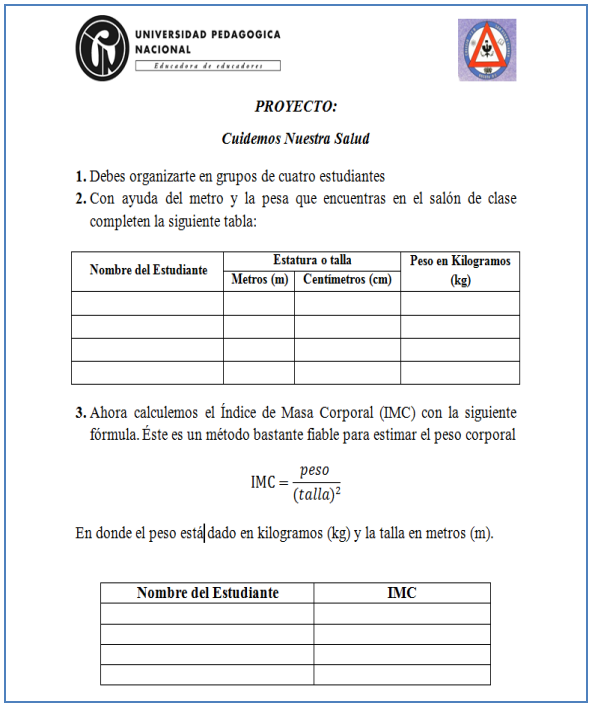
Alimento	Porción	Calorías

En el desarrollo de esta tarea, los estudiantes analizaron los hábitos alimenticios de sus familias y evaluaron la pertinencia de ellos. El tratamiento de la magnitud peso tuvo sentido para los estudiantes en tanto les permitía evaluar las proporciones de los distintos tipos de alimentos que

caracterizaban su dieta, esto permitió a su vez, discutir acerca de distintos tipos de sistemas de medidas, incluyendo las que provenían de sus prácticas culturales y no son universales sino locales, por ejemplo, cucharadas, porciones, puchos, etc.

Escena dos. Un diagnóstico sobre la salud

La primera tarea propuesta en esta escena es el diagnóstico físico de cada uno de los estudiantes y del grupo en general. Los estudiantes deben determinar su talla, su peso y su índice de masa corporal, para ello, se requieren procesos de medición con el uso de instrumentos como metros, balanzas y calculadoras. En esta tarea los estudiantes discuten acerca de las formas de escritura de las medidas, el significado de las mismas y establecen juicios de valor acerca de su condición inicial en relación con su estado físico, determinando si tienen problemas de sobrepeso, mal nutrición o si se encuentran ubicados en los rangos fijados como deseables en las ciencias de la salud, para ello, usan tablas extraídas de artículos de salud en las que se presentan los intervalos y valores de referencia para hacer tal evaluación del estado físico de una persona.



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

PROYECTO:

Cuidemos Nuestra Salud

1. Debes organizarte en grupos de cuatro estudiantes
2. Con ayuda del metro y la pesa que encuentras en el salón de clase completen la siguiente tabla:

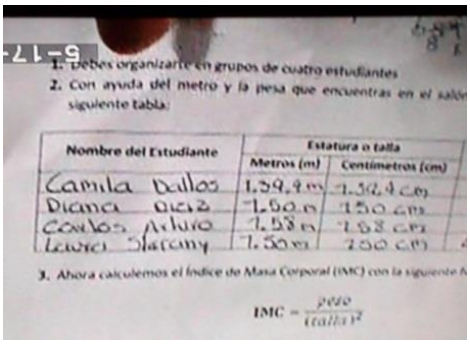
Nombre del Estudiante	Estatura o talla		Peso en Kilogramos (kg)
	Metros (m)	Centimetros (cm)	

3. Ahora calculemos el Índice de Masa Corporal (IMC) con la siguiente fórmula. Éste es un método bastante fiable para estimar el peso corporal

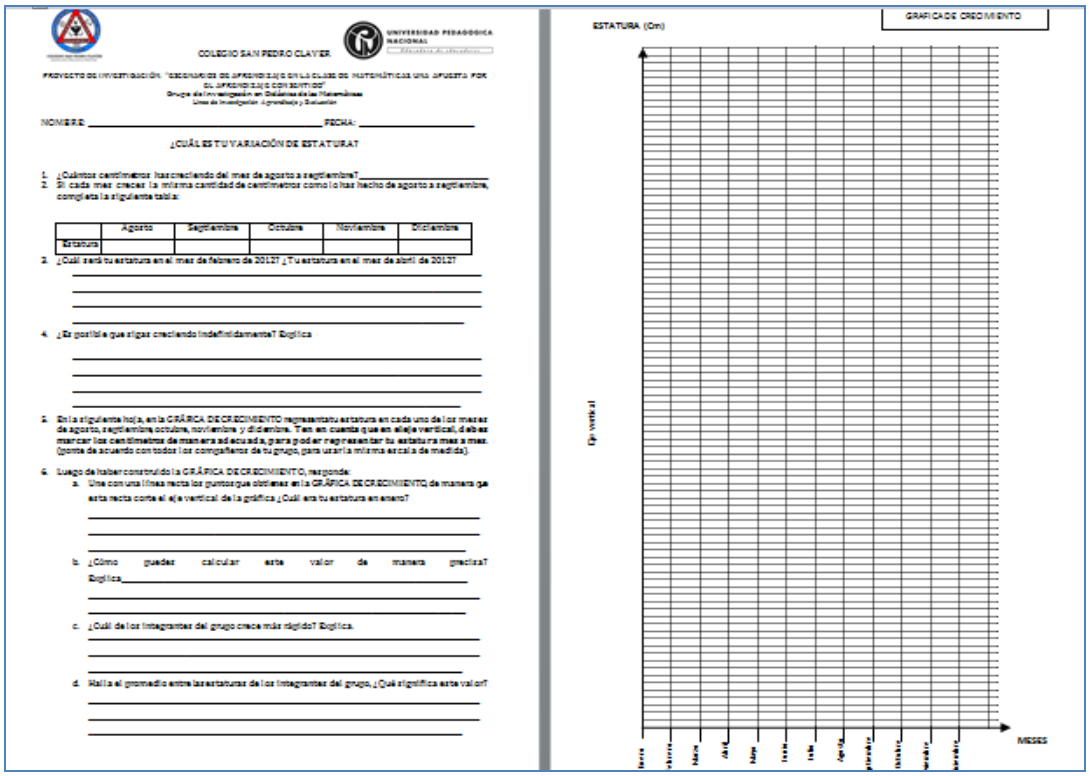
$$\text{IMC} = \frac{peso}{(talla)^2}$$

En donde el peso está dado en kilogramos (kg) y la talla en metros (m).

Nombre del Estudiante	IMC



En las recomendaciones y alternativas de solución construidas por los estudiantes para mejorar sus condiciones de salud, surgió la necesidad de evaluar también el tipo de actividad física que llevaban a cabo los estudiantes, así que en la siguiente tarea, exploramos qué tipo de actividad física llevaban a cabo los estudiantes, para ello, contamos con la colaboración del profesor de educación física quien desarrolló una actividad con los estudiantes para determinar la frecuencia cardiaca en el desarrollo de determinada actividad física y en un intervalo de tiempo determinado, con estos datos los estudiantes usaron la calculadora virtual que permite establecer el porcentaje de esfuerzo físico de dicha actividad y evaluar su pertinencia para su estado de salud.


COLEGIO SAN PEDRO CLAVER

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN: "ESCENARIOS DE APRENDIZAJE EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS UNA APUESTA POR EL APRENDIZAJE CONSCIENTE"
Grupo de Investigación en Didácticas de las Matemáticas
Línea de Investigación Aprendizaje y Evaluación

NOMBRE: _____ FECHA: _____

¿CUÁL ES TU VARIACIÓN DE ESTATURA?

1. ¿Cuántos centímetros has crecido del mes de agosto a septiembre? _____
2. Si cada mes creces la misma cantidad de centímetros como lo has hecho de agosto a septiembre, completa la siguiente tabla:

	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Estatura					

3. ¿Cuál será tu estatura en el mes de febrero de 2012? ¿Tu estatura en el mes de abril de 2012?
4. ¿Es posible que sigas creciendo indefinidamente? Explica
5. En la siguiente hoja, en la GRÁFICA DE CRECIMIENTO representa tu estatura en cada uno de los meses de agosto, septiembre, octubre, noviembre y diciembre. Ten en cuenta que en el eje vertical, debes marcar los centímetros de manera adecuada, para poder representar tu estatura mes a mes. (ponte de acuerdo con todos los compañeros de tu grupo, para usar la misma escala de medida).
6. Luego de haber construido la GRÁFICA DE CRECIMIENTO, responde:
   a. Une con una línea recta los puntos que obtuvo en la GRÁFICA DE CRECIMIENTO, de manera que esta recta corte el eje vertical de la gráfica ¿Cuál era tu estatura en enero?
   b. ¿Cómo puedes calcular este valor de manera precisa? Explica
   c. ¿Cuál de los integrantes del grupo crece más rápido? Explica.
   d. Halla el promedio entre las estaturas de los integrantes del grupo, ¿Qué significa este valor?

Escena tres. Tomar decisiones

La tercera escena surge por iniciativa de los estudiantes, quienes al evaluar las condiciones del proyecto de vida saludable construido hasta el momento, advierten que no es suficiente tener una sana alimentación y buena actividad física para cuidar el cuerpo, por lo que discuten acerca de los problemas de

tabaquismo y consumo de alcohol y sustancias alucinógenas a tempranas edades, ello conduce a una nueva tarea que implicó estudiar algunos documentos acerca de las estadísticas de problemas de salud por el hábito del consumo de cualquiera de estas sustancias.

Escena cuatro. Acciones para transformar la situación

La cuarta y última escena es el momento en el que se construyen las conclusiones y se consideran algunas estrategias para socializar lo aprendido, ponerlo en práctica y contribuir con este autocuidado en los miembros de toda la comunidad, los estudiantes por grupos construyeron estrategias de socialización como:

- Aeróbicos, para todos los estudiantes del colegio.
- Campañas publicitarias.
- Elaborar videos y subirlos a youtube.
- Elaborar murales con los estudiantes del colegio.
- Caricaturas donde se muestre personas que tengan vida saludable y otra que no.
- Hacer entrevistas para saber si los compañeros tienen una vida saludable, llevar pesos y balanzas para que determinen el IMC.
- Proponer que se vendan alimentos saludables y menos "comida chatarra" en la cafetería del colegio.

Y en relación con las conclusiones, los estudiantes expresan su comprensión de lo que significa construir un proyecto de vida saludable

- *"…Tener una buena alimentación, comer balanceado, no comer a deshoras , comer frutas, carnes, huevos, cereales, pescados y comer tranquilamente"*
- *"Para mi tener una vida saludable es alimentarse adecuadamente con frutas, verduras, tener mi cuerpo sin cosas tóxicas o que dañen a un ser humano… saber cómo va mi cuerpo por dentro y por fuera"*
- *"…Es saber si me estoy nutriendo bien, si duermo bien, si desayuno, almuerzo y como bien…ir al menos una vez al médico para saber si estoy bien"*

- *"Evitar las grasas, hacer ejercicio, ir al médico, ver qué comida consumimos, procurar dormir bien, procurar tomar un vaso de agua al día"*
- *"Significa estar en un peso normal,… comer pocas harinas para mantener nuestro cuerpo bien"*
- *"Tener una vida saludable es que podamos evitar muchas enfermedades, poder hacer ejercicio…tener una vida saludable es disfrutar todo en la vida…"*
- *"…No comer comida chatarra, casi todos los días y otras cosas como fumar, tomar, chupar bóxer y no acostarse cuando haya comido…"*
- *"…No fumando porque el cigarrillo es muy malo para la salud, no comiendo tanto porque uno se puede engordar…"*
- *"…No tener una vida saludable es cuando uno fuma todos los días o toma, mete vicio…"*
- *"Comer sano, hacer ejercicio, no consumir alcohol, drogas, no fumar, cuidarse en las relacione sexuales, ir al médico"*
- *"Pues para mi tener una vida saludable es consumir los alimentos necesarios con la cantidad de calorías, proteínas y vitaminas necesarias para la edad…"*
- *"Es no fumar, no meter marihuana, pepas, aprender a disfrutar la vida sin meter nada de esas cosas para salir adelante limpiamente y saludablemente"*
- *"Es saber comer, saber dormir, saber cuánto y cuándo va a comer, hacer ejercicio, no fumar,…"*
- *"…Es no tomar mucho alcohol, ni consumir drogas alucinógenas"*
- *"Para mi tener una vida saludable es tener un control de lo que consume y saber qué come, no consumir cosas que dañen el cuerpo, como las drogas"*

En el apartado que sigue se presentan reflexiones relevantes para el desarrollo de ambientes de modelación en clases de matemáticas.

5. Consideraciones para el desarrollo de ambientes de modelación matemática en contextos escolares

García, et al (2013), plantea que la educación matemática y el aprendizaje de las matemáticas son prácticas sociales complejas y que dichas prácticas están constituidas en una multiplicidad de contextos en acción, por lo que resulta clave plantear que la comprensión de estas prácticas demandará la búsqueda de múltiples niveles de acción (Valero, 2012).

En este sentido, siguiendo los planteamientos de Alrø, Skovmose y Valero (2006), se conjetura que los diferentes componentes de las prácticas de educación matemática que ocurren fuera del aula y que influyen en el aprendizaje de las matemáticas, están tanto en la complejidad de las dimensiones de la vida social, cultural e individual del estudiante, como en las políticas de escolarización de la educación matemática, en sus efectos sobre las instituciones y en la subjetividad de los estudiantes.

Lo anterior podría manifestarse, por ejemplo, en la interpretación del porvenir, de las oportunidades de educación para el futuro localizada en la estructura escolar (Skovsmose, 2012) y en las oportunidades de "vida", en relación al contexto sociopolítico. Además, Alrø et al. (2006), en un estudio en aulas de matemáticas danesas, frente a la diversidad cultural de una población inmigrante que está siendo constituida como un problema, proponen la noción de escenarios de aprendizaje a modo de campo de investigación constituido por diferentes prácticas de la educación matemática, las cuales tienen un impacto en la forma como el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas toma lugar en el aula.

Así, desde las investigaciones realizadas se ha asumido la noción de escenarios de aprendizaje como herramienta que guía en la exploración empírica de los ambientes de aprendizaje de las matemáticas, donde la exclusión de las clases de matemáticas y la exclusión social coexisten.

En cada uno de los montajes de escenarios de aprendizaje planteados, seleccionamos las siguientes dimensiones que consideramos relevantes,

desde la investigación reciente, para posibilitar una mejor comprensión de la complejidad social y política que constituyen las aulas de matemáticas:

- Las intenciones y los porvenires de los estudiantes como una realidad sociopolítica.
- La construcción de la subjetividad social y el reconocimiento a las diversidades culturales de los estudiantes.
- La materialidad para el aprendizaje y
- La interacción dialógica entre alumnos, y entre alumnos y profesor en el aula, por última.

En este orden de ideas, en el montaje de los escenarios propuestos en las investigaciones, permiten plantear que "lo social antecede a lo matemático", por lo que los ambientes de aprendizaje proyectados se presentan en un formato en el que aspectos de la vida socialmente relevante de los estudiantes es incluida de manera determinante. Los criterios para establecer dicha relevancia, circundan complejas relaciones que abarcan aspectos planteados por Skovsmose (1999) como el *foreground*, el *background* y los porvenires de los estudiantes, además de un análisis de sus intensiones, disposiciones y acciones.

En este sentido, se ha incorporado a la modelación matemática desde una perspectiva crítica (Araújo, 2004), aceptando que es posible considerar como relevante la comprensión crítica y reflexiva de la realidad, pues el uso de modelos matemáticos permite estructurar reflexiones en relación con las implicaciones sociales del uso de tales modelos.

En la siguiente imagen podemos encontrar, por ejemplo, una noticia, extraída del periódico ADN el 11 de noviembre de 2012, en la que se proponen algunos aspectos sobre una política distrital que pretendía general una cultura sobre el aprovechamiento del agua subsidiada para estratos 1 y 2 en Bogotá. Puede observarse que el análisis de la noticia es ante todo social y que un primer acercamiento al problema, podría requerir de variables no matemáticas, por lo que su aceptación depende más del contexto en que se encuentren los estudiantes que de un posible dominio de contenidos matemáticos.

Para qué alcanza el mínimo vital en casa

200 litros diarios de agua para el consumo de 4 personas.

redacción
Bogotá

● La Empresa de Acueducto de Bogotá anunció que en un mes empezará la instalación de los dispositivos de control de consumo para deudores de este servicio público domiciliario en todos los estratos con el fin de garantizar el acceso a la cantidad mínima necesaria, de acuerdo con lineamientos de las Naciones Unidas.

La válvula, elaborada en material no reciclable, controlará el suministro diario de 200 litros de agua diarios a cada predio, para garantizar los 6 metros cúbicos de agua al mes.

Con ello, se acaban los cortes de agua en los domicilios. Gracias a estos controles se podrán congelar las deudas de los usuarios morosos, la mayoría en los estratos 1 y 2.

De acuerdo con cifras del Acueducto de Bogotá, del total de usuarios, es decir 1,8 millones de personas, hay 204 mil que tienen deudas pendientes con la empresa por un monto total que asciende a 133 mil millones de pesos.

Los beneficiarios del mínimo vital son 600 mil familias, unos tres millones de bogotanos, que han ahorrado pagos por 10 mil millones de pesos.

Los datos

1. Tips en el baño
Reduzca el tiempo en la ducha a la mitad y descargue el sanitario sólo cuando sea necesario.

2. Más ahorros
Vigile los empaques de todas las llaves, duchas y tuberías para verificar que no haya escapes o fugas.

3. En la casa
Utilice balde para lavar pisos, no utilice la manguera. Instale aparatos sanitarios de doble servicio.

200 litros diarios de agua alcanzan para...

En una familia con cuatro miembros

Preparación de alimentos: Para la preparación de alimentos de cuatro personas se gasta en promedio dos litros de agua por habitante. 8 litros

Ducha: Una persona gasta alrededor de 10 litros de agua por minuto en la ducha, en promedio, durante 3 minutos. 120 litros

Lavado básico de ropa: 21 litros

Lavado de dientes, manos y cara: se gastan aproximadamente 2 litros de agua por persona: 8 litros

Inodoro: En cada descarga de la cisterna se utilizan cerca de 6 litros de agua. Si se realizan cuatro descargas al día se estarían usando 24 litros

Uso de lavaplatos: si se lavan los utensilios sin dejar abierto el grifo y usando baldes para enjabonar y enjuagar se podría estar utilizando cerca de 15 litros

Consumo: En este caso se habla del consumo de un litro de agua potable que una persona quiera beber en un día. 4 litros

En un estudio sobre los hábitos de consumo del líquido vital de los bogotanos, se encontró que el mayor gasto se produce en la ducha diaria, seguido de descarga de cisterna, la preparación de alimentos y el lavado de loza. Sólo en estas cuatro actividades, las familias de estratos 1 y 2 de la ciudad se están gastando el 83 por ciento de esta cuota diaria de mínimo vital (ver infografía).

Aseo personal, lavado de ropa y el infaltable litro diario de consumo de agua, se suman a los usos cotidianos del líquido por parte de los beneficiarios de esta medida.

La cifra

133.000

millones de pesos deben a la Empresa de Acueducto de Bogotá 204 mil usuarios morosos a los que les será instalada la válvula.

Las discusiones que hemos observado en las investigaciones realizadas, nos permiten conjeturar que los estudiantes inician por preguntarse si en sus contextos familiares y sociales podrían consumir más o menos del mínimo vital propuesto por el Distrito en aquella época y que quizás, con un consumo racional del líquido pudieran disminuir los gastos familiares y aportar a la economía familiar. Bajo los anteriores presupuestos, hemos encontrado que es posible incorporar ambientes socialmente relevantes en las aulas y que dicha incorporación posibilita la inclusión de estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas gracias a la posibilidad que encuentran de

incorporar lo que aprenden con sus vidas y contextos, dando paso a razones para aprender.

6. Reflexiones finales

De acuerdo con lo esbozado en el desarrollo del presente documento y basado en estudios sobre la naturaleza crítica de los modelos matemáticos en la sociedad, donde las actividades de modelación son consideradas como oportunidades para explorar los papeles que la matemática desarrolla en la sociedad contemporánea, consideramos importante centrar la atención de la modelación matemática en la perspectiva socio-crítica (Kaiser & Sriraman, 2006).

En este sentido —a manera de reflexión final— compartimos con Blomhøj (2009) los fundamentos desde los que adquiere sentido la modelación matemática desde esta perspectiva:

- Promueve el desarrollo de una competencia crítica de los modelos matemáticos, así como en las formas en las que se utilizan en la toma de decisiones.
- Posee un potencial para empoderar a los estudiantes como ciudadanos autónomos e independientes de la sociedad.
- Permite capacitar a los estudiantes a usar modelos matemáticos para una reflexión crítica sobre los problemas sociales y de criticar los procesos de modelización matemática específicas y aplicaciones auténticas de modelos matemáticos en situaciones de la vida real.

En general, dentro de la perspectiva socio-crítica en la enseñanza de la modelización matemática, la reflexión y la crítica juegan un papel dominante.

Referencias bibliográficas

- Barbosa, J. (2006). Mathemtical Modelling in classroom: a social critical and discursive perspective. In C. Haines, P. Galbraith, Blum, B. (Eds) Mathematical modelling: education and economics. Chicheter: Horwood Publishing.
- Blomhoj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching of learning mathematical modelling. M. Blomhoj y S. Carreira (Eds.) Mathematical aplication and modelling in the teaching and learning of mathematics. Proceedings from Topics Study Group 21. Monterrey. México.
- Camelo, F., Mancera, G., Romero, J., Garcia, G. y Valero, P. (2011). The importance of the relation between the social-political context, interdisciplinarity and the learning of the mathamatics. Proceedings of the Sixth International. Mathematics Education and Society Conference Vol. 1, p. 299- 310. hhttp://www.ewi-psy.fuberlin.de/en/v/mes 6/documents/proceedings/Band 1Finale.pdf.
- García, G. y Valero, P. (2013). Presentación. En García, G., Valero, P., Salazar, C., Mancera, G., Camelo, F y Romero, J. Procesos de inclusión, exclusión y subjetividad en Educación Matemática, p. 13 - 16. Universidad Pedagógica Nacional.
- García, G., Valero, P. y Camelo, F. (2013). Escenarios y ambientes educativos de aprendizaje de las matemáticas. Cuestiones de subjetividades en educación matemática. Procesos de inclusión/exclusión, subjetividades en educación matemática. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. P. 47-76.
- Skovsmose, O. (1999). Hacia una filosofía de la educación matemática crítica. Bogotá: una empresa docente.
- Valero, P. (2012). La educación matemática como una red de prácticas sociales. En P. Valero y O. Skovsmose, (Eds.). Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. p. 299-326. Bogotá: una empresa docente.
- Valero, P., García, G., Camelo, F., Mancera, G. y Romero, J. (2012). Mathematics education and the dignity of being. Pythagoras 33(2). Journal of the association of Mathematics Education of South Africa 8. p. 34-41.

La circunferencia: Herramienta para descubrir, verificar y justificar propiedades en Educación Básica Primaria

Camargo Uribe, Leonor - Rozo Gutiérrez, Liliana - Cañón Gutiérrez, Mario A.
Universidad Pedagógica Nacional, (Colombia)

1. Descripción

El curso presenta una experiencia innovadora para el trabajo en geometría, en donde se estimula la participación de los estudiantes de Básica Primaria en la resolución de problemas de construcción geométrica con el apoyo de programas de geometría dinámica. Específicamente, se describe, fundamenta y ejemplifica un experimento de enseñanza en donde niños de quinto de primaria usan la circunferencia como herramienta para construir segmentos congruentes, verificar la congruencia de segmentos y justificar dicha congruencia.

La propuesta es fruto de una reflexión sostenida por más de 10 años en el equipo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, Æ•G de la Universidad Pedagógica Nacional —producto de sus estudios acerca del aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de matemáticas— y de la orientación de algunos trabajos de grado del programa de Maestría en Docencia de la Matemática, realizados por profesores de primaria y secundaria. Las actividades propuestas y el análisis de las mismas hacen parte del trabajo de grado que Liliana Rozo y Mario Cañón adelantan.

2. Objetivos

- Promover la reflexión sobre el aprendizaje de las matemáticas visto como participación en prácticas valoradas social y culturalmente.
- Impulsar una transformación en las prácticas de aula de geometría en primaria hacia el desarrollo de procesos de resolución de problemas, representación y argumentación.
- Ilustrar el provecho que puede sacarse de una figura geométrica como herramienta de construcción, verificación y justificación.

3. Sesiones

Sesión 1: Fundamentación conceptual

La propuesta se desarrolla a partir de los siguientes presupuestos que la fundamentan:

Presupuesto 1: El aprendizaje es un proceso social de participación en prácticas que las comunidades en las que nos desenvolvemos consideran relevantes. En particular, una clase es un espacio social en donde los estudiantes participan en actividades colectivas y discuten acerca del significado de dichas actividades, que hacen parte de las prácticas matemáticas escolares.

Específicamente, una clase de geometría es un espacio de participación en prácticas culturales en las que interactuamos con formas geométricas bi y tridimensionales, sus relaciones y sus transformaciones, la localización y la trayectoria recorrida por objetos o por nosotros mismos. Estas experiencias brindan a las personas la posibilidad de desarrollar el sentido espacial y el razonamiento matemático. Avanzar en el desarrollo del sentido espacial y del razonamiento geométrico implica una evolución en los recursos que usamos como comunidad, no exenta de tensiones, que va desde maneras intuitivas o informales como accedemos a información visual, la usamos y aceptamos su validez, hasta formas más sofisticadas de procesar y comunicar información, que usan recursos propios de la cultura matemática de nuestra

sociedad. La clase de geometría puede proponerse como empresa, descubrir y validar hechos científicos articulando dos tipos de prácticas: descubrir y justificar. El descubrimiento lleva a proponer enunciados de carácter general, fundamentados en la exploración, de los que se tiene certeza. Justificar significa argumentar su validez en un sistema de conocimientos aceptado por la comunidad.

Presupuesto 2: Las acciones humanas, tanto en el plano individual como en el plano social están mediadas por herramientas y signos. Este es un principio central en el ámbito educativo. Al usar mediadores en diseños didácticos cuidadosamente planeados, se despliega una rica actividad experimental, fuente de ideas y conjeturas y, a la vez, se generan vías de acceso al conocimiento a través de la comunicación.

En particular, los programas de geometría dinámica son potentes mediadores que favorecen una interacción de los estudiantes con representaciones geométricas y el trabajo colectivo alrededor de tales representaciones con las cuales descubrir propiedades y especialmente identificar relaciones de dependencia que llevan a formular enunciados condicionales. Como lo mencionan Sáenz-Ludlow y Athanasopoulou (2008), los programas de geometría dinámica son herramientas técnico-simbólicas que median el paso de la construcción a la representación y a la figura, median la comunicación sobre geometría entre el profesor y los estudiantes, e inducen y facilitan los procesos de clasificación.

Investigadores como Laborde (1996), Jones (1999), Mariotti (2001), de Villiers (2004), entre otros, señalan los beneficios de usar programas de geometría dinámica en el aula para la conceptualización de objetos geométricos: no solo permiten representar objetos geométricos sino que permiten realizar acciones sobre las representaciones, es decir, proporcionan un dominio de experimentación mediante la animación y el movimiento del arrastre sobre dichas representaciones bajo una teoría geométrica. Por ejemplo, el arrastre de elementos de una construcción, como lo menciona Olivero (2003) desde un punto de vista fenomenológico, tiene funciones como: i). Retroalimentar las acciones que realiza el usuario, permitiéndole tener el control sobre la representación. ii). Mediar entre la figura y la representación, permitiéndole al usuario hacer una distinción entre ambas nociones. iii). Examinar representaciones y buscar propiedades invariantes.

Sin embargo, la representación y manipulación de las representaciones en la pantalla por sí solas, haciendo uso de las herramientas del menú predeterminado o del arrastre, no necesariamente lleva a entender y apreciar las propiedades de los objetos geométricos. Por lo tanto, el diseño de tareas se convierte en una prioridad para desarrollar una adecuada mediación. Las tareas para desarrollar en los programas de geometría dinámica deben ser diferentes de las tareas geométricas para entornos de papel y lápiz, ya que cambiar las herramientas conduce a cambiar la manera en que las tareas son realizadas; las facilidades ofrecidas por los programas pueden brindar una interacción fuerte entre la visualización y el conocimiento en geometría (Laborde 1996). Es decir, las tareas propuestas deben permitir la exploración, las preguntas abiertas, la elaboración de conjeturas, entre otras, necesarias para que su resolución conduzca a un tratamiento geométrico.

Presupuesto 3: La contribución de una persona más experimentada, como guía durante el aprendizaje es fundamental; esta persona brinda apoyo gradual según se van desarrollando las competencias del aprendiz. La interacción entre el aprendiz y el experto activa funciones mentales que no han madurado en el aprendiz, pero que yacen en una región intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo.

Mediante dicha relación, el aprendiz inicia un proceso de acercamiento a la condición de experto, a través de su participación en actividades compartidas. En el ámbito educativo, es el profesor, como miembro experto en la clase, quien introduce a los estudiantes en los estándares del conocimiento ‘oficial’, a través de la coordinación entre las ideas que los alumnos son capaces de producir y aquellas admitidas por la comunidad académica de referencia, a las que potencialmente los estudiantes pueden acceder. Gracias al impulso que hace el profesor de un ambiente indagativo favorece la evolución de las formas discursivas desde formas intuitivas hasta formas científicas de comunicar y justificar. En particular, el profesor es el responsable de promover normas para regular los criterios compartidos, por ejemplo, sobre las representaciones adecuadas de las figuras geométricas.

Para crear una microcultura de aula que busque el establecimiento de significados compartidos, se necesita un esfuerzo explícito tanto de los estudiantes como del profesor para establecer normas sociomatemáticas que la promuevan (Yackel y Cobb, 1996). Las normas sociomatemáticas son

aspectos normativos establecidos en el transcurso de las interacciones en el aula entre los estudiantes y el docente y entre los estudiantes (de manera implícita o explícita), que regulan las acciones e interacciones de la microcultura del aula de matemáticas. Normas sociomatemáticas como las siguientes regulan las prácticas en el aula de una manera favorable: en el momento de explorar un dibujo es necesario observar lo que cambia, lo que no cambia y lo que cambia simultáneamente; en los dibujos geométricos en lápiz y papel se debe hacer alusión a las propiedades geométricas de la figura geométrica que se está representando; las justificaciones deben aludir al uso de los hechos geométricos establecidos en el aula, entre otras.

Sesión 2: Descripción de la secuencia de actividades

La propuesta está compuesta por cinco tareas, dirigidas a estudiantes de quinto de primaria utilizando el programa de geometría dinámica GeogebraPrim. Están encaminadas a la construcción, verificación y justificación de congruencia entre segmentos. Las tareas están organizadas de acuerdo con la siguiente trayectoria de enseñanza. (Ver figura 1).

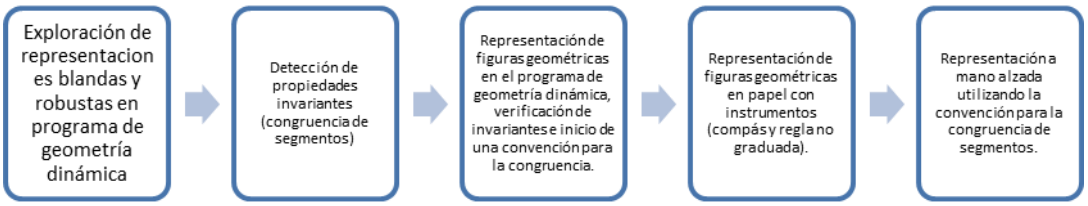


Figura 1. Trayectoria de enseñanza sugerida.

Para que los estudiantes reconozcan a la circunferencia como una herramienta para determinar, verificar y establecer congruencia entre segmentos se invita a los estudiantes a: i). Observar las características que hacen que a partir de un segmento se dibuje una circunferencia. ii). Realizar en GeogebraPrim el trazo de una circunferencia a través de la propiedad de equidistancia entre el centro y cualquier punto de la misma. iii). Detectar invariantes de la figura geométrica circunferencia (congruencia de radios y equidistancia de los puntos de la circunferencia al centro de la misma). iv). Establecer la relación entre la herramienta circunferencia del programa

de geometría dinámica y el instrumento de trazo compás. En la figura 2 se presentan cuatro tareas que se ajustan a la trayectoria de enseñanza.

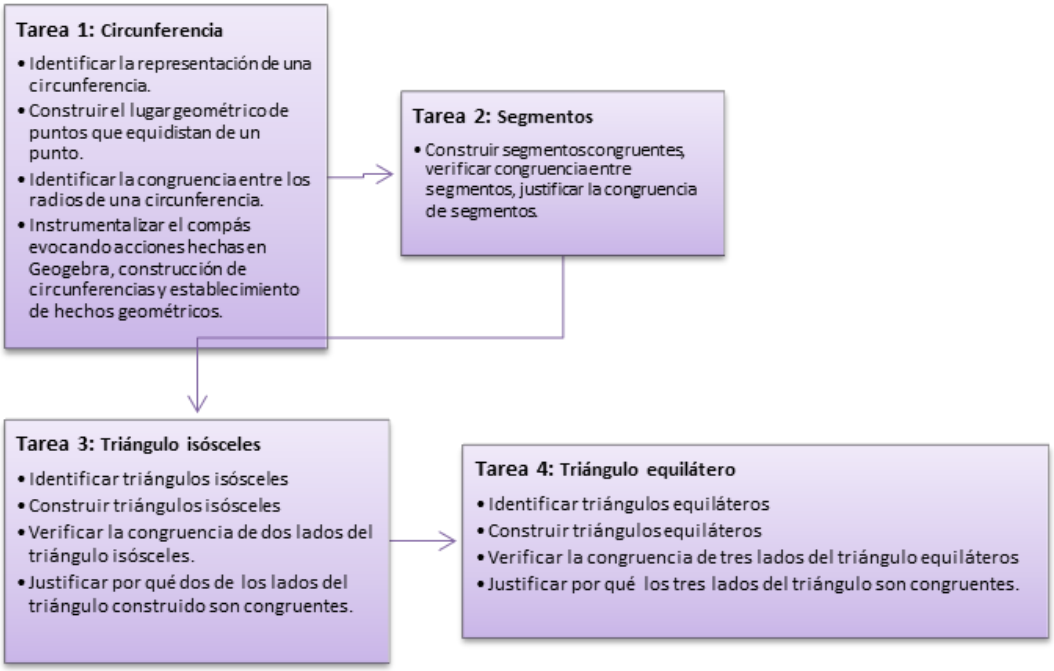


Figura 2. Secuencia de cuatro tareas que se ajustan a la trayectoria de enseñanza.

Tabla 1. Las cinco actividades propuestas y su finalidad.
Las actividades 1, 2, 3 y 5 se llevan a cabo en GeogebraPrim.

Actividad 1 Dibujar un segmento. Activar el rastro a uno de los extremos del segmento. Conservando la longitud del segmento, mover el extremo que tiene activo el rastro. Discutir: ¿Qué se dibujó en la pantalla? ¿Por qué a unos les quedó mejor el dibujo que a otros? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien hecho el dibujo? **Finalidad** • Identificar en la representación de una circunferencia el lugar geométrico de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. • Justificar que para que se dibuje una circunferencia es necesario que la longitud del segmento se mantenga fija.
Actividad 2

Dibujar un segmento.
Activar el rastro a uno de los extremos del segmento.
Dibujar los puntos por donde debe pasar el extremo con rastro para que la circunferencia quede bien dibujada.
Pasar el extremo con rastro por los puntos que se dibujaron.
Discutir: ¿Quedó bien dibujada la circunferencia? ¿Qué se debe tener en cuenta para que quede bien dibujada? ¿Qué condiciones deben cumplir los puntos que dibuje para que la circunferencia quede bien?

Finalidad

- Identificar la equidistancia entre cualquier punto de la circunferencia y el centro de la misma (primer hecho geométrico).

Actividad 3

Dibujar una circunferencia utilizando la herramienta del programa GeogebraPrim.
Identificar los elementos que aparecen en la pantalla (centro, circunferencia y punto sobre circunferencia[1]).
Discutir: ¿Qué objetos aparecen en la pantalla? ¿Dónde están ubicados los puntos? Mover los puntos para observar: qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.
Construir un segmento que una los dos puntos (centro y punto sobre circunferencia).
Volver a mover los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.
Construir otro radio, mover nuevamente los objetos y observar qué cambia, qué no cambia y qué cambia simultáneamente.

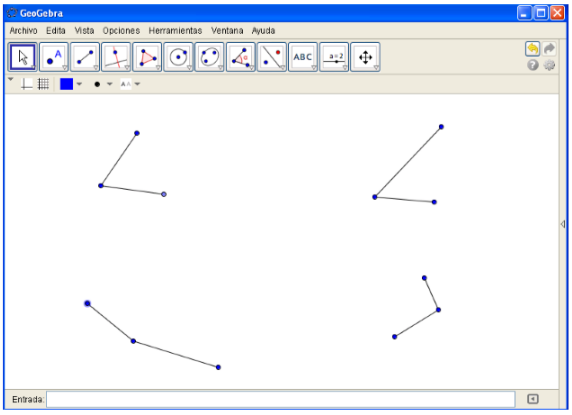
Finalidad

- Identificar la congruencia entre los radios de una circunferencia (segundo hecho geométrico).

Actividad 4

Se les entrega a los estudiantes una fotocopia con las siguientes actividades.

1. ¿Cuál pareja de segmentos, al activar el rastro, forma una circunferencia? ¿Por qué?

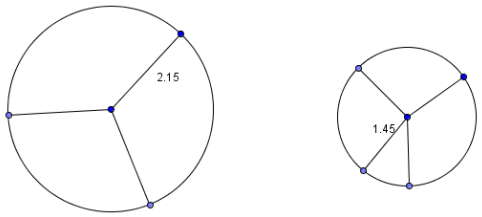


2. Ubicar seis puntos que estén a la misma distancia del punto dado y construir una circunferencia en cada caso. Utilizar el compás para marcar y luego para trazar la figura.

[1] En GeogebraPrim cuando se utiliza la herramienta predeterminada para construir una circunferencia, en la pantalla aparecen los objetos centro, circunferencia y punto sobre circunferencia.

3. Construir una circunferencia en cada caso, según la medida de cada radio.

4. Escribir cuál es la medida de los demás radios de cada circunferencia. Explicar por qué es esa la medida.



Finalidad

- Evocar en un contexto de lápiz y papel los dos hechos geométricos de la circunferencia.
- Utilizar el compás como instrumento de construcción en papel y lápiz.
- Relacionar la función del compás con los hechos geométricos de la circunferencia.

Actividad 5

Se presenta en GeogebraPrim un archivo con diferentes segmentos de longitud fija y una circunferencia con radio fijo[2]. Se les pide a los estudiantes que identifiquen los segmentos congruentes con el segmento *d* (el segmento *d* es congruente con el radio de la circunferencia). Luego, en lápiz y papel se presentan diferentes segmentos y se les pide que determinen los que son congruentes; esta actividad busca que utilicen el compás.

Finalidad

- Utilizar los dos hechos geométricos para establecer congruencia entre segmentos.
- Utilizar el compás como instrumento para transportar medidas.

Sesión 3: Ejemplos ilustrativos del trabajo de estudiantes de quinto de primaria

Los ejemplos con los que ilustramos la propuesta han sido tomados de una investigación en desarrollo, en la línea Argumentación y prueba en geometría, de la Universidad Pedagógica Nacional, realizada con estudiantes de grado quinto de educación básica primaria, que indaga por el establecimiento de aspectos normativos relacionados con la construcción de un criterio compartido sobre cuál dibujo es una representación adecuada de una figura geométrica.

[2] Los segmentos de longitud fija están estáticos. La circunferencia de radio fijo se puede mover por toda la interfaz.

La implementación de las tareas se llevó a cabo en el Colegio Distrital Ciudadela de Bosa, en la jornada mañana en el grado quinto, con 39 estudiantes entre los 10 y los 12 años de edad. La profesora titular de la asignatura de matemáticas participó en el diseño e implementación de la secuencia aunque no hizo parte del equipo investigador. La implementación se realizó en el cuarto período del año escolar durante dos clases de geometría que tenían una intensidad horaria de dos horas semanales cada una de 45 minutos.

Se conformaron grupos de trabajo que utilizaron el programa GeogebraPrim instalado en computadores portátiles. Las producciones de los estudiantes fueron videograbadoras en los computadores por medio del programa Camtasia. Los registros de las socializaciones fueron registrados en una cámara de video. Además se recolectaron producciones de los estudiantes en lápiz y papel. Para la interpretación y análisis tomamos las producciones relevantes de los estudiantes y las socializaciones del grupo durante la solución de la secuencia de tareas.

A continuación interpretamos el desempeño de algunos estudiantes frente al desarrollo de las cinco actividades propuestas.

Actividad 1

Cuando los estudiantes se enfrentaron a esta actividad se observó que algunos olvidaron la instrucción de mantener fija la longitud del segmento y movieron el extremo sin tener clara la finalidad. En este caso, parece que el uso del rastro está relacionado con el uso del programa Paint puesto que la mayoría de estudiantes intentaron utilizar el rastro como el lápiz de dibujo de este programa. En este momento fue necesario que la profesora interviniera para recordar las instrucciones dadas y la finalidad de estar trabajando en un SGD. Lo anterior alude a los conocimientos previos que los estudiantes tenían sobre programas en el computador.

Luego de superar la situación anterior, se observó que los estudiantes tenían dificultad para conservar la longitud del segmento y esto llevó a que en la pantalla no apareciera lo que se esperaba (una circunferencia). Al observar esto, los estudiantes veían como un error el dibujo que allí aparecía y cada vez que terminaban, y no veían una forma que pudieran reconocer “bien

hecha", borraban toda su construcción sin detenerse a observar qué era lo que hacía que su dibujo no quedara como lo esperaban; esto hace ver que conciben el error como algo malo de lo que no se puede aprender.

En esta actividad la profesora jugó un papel importante al crear un ambiente indagativo cuya finalidad era ayudar a sus alumnos a identificar formas geométricas sobre el dibujo final que aparecía en sus pantallas y como mejorarlo. Con el tratamiento que le dio la profesora a las intervenciones de los estudiantes, los estudiantes pasaron de relacionar el dibujo con formas de su entorno a relacionarlo con formas geométricas y empezar a pensar en figuras geométricas.

Actividad 2

Se observó que la mayoría de estudiantes no relacionaron la forma identificada en la Actividad 1 como una herramienta para resolver la tarea. Veían las actividades de manera aislada. Algunos estudiantes pasaron por alto que el segmento cambiaba de longitud al pasarlo por los puntos que dibujaron. Sin embargo, unos pocos estudiantes sí relacionaron la conclusión de la Actividad 1 con la realización de esta tarea y ubicaron los puntos teniendo en cuenta la longitud del segmento. Para explicar a los compañeros el mecanismo utilizado para dibujar los puntos, los estudiantes hacían alusión a una circunferencia mediante representaciones gestuales y gráficas.

Nuevamente se evidenció el papel mediador de la profesora al buscar que los estudiantes, que no solucionaron adecuadamente la actividad, relacionaran lo que concluyeron en la Actividad 1 y la utilidad de esa conclusión para realizar la actividad.

Actividad 3

Cuando los estudiantes se enfrentaron a esta actividad se observó la necesidad de utilizar un vocabulario geométrico adecuado y relacionar la terminología con las propiedades del objeto. Por ejemplo, se hizo evidente que los estudiantes se referían al punto que aparecía en la pantalla como el

centro de la circunferencia pero no podían explicar qué significaba que ese punto fuera el centro.

Cuando los estudiantes construyeron los dos radios de la circunferencia, en un primer momento, al explorar la construcción algunos no expresaron que los radios fueran congruentes. Por el contrario, dijeron que cada vez que se acercaban iban a parecer más congruentes, pero que si estaban alejados no eran congruentes. A través de varias preguntas la profesora se logró que los estudiantes recordaran lo que habían construido en las actividades anteriores y concluyeran que los radios de una circunferencia son congruentes.

Actividad 4

Algunos estudiantes evocaron las acciones realizadas en GeogebraPrim relacionadas al rastro, al solucionar el primer numeral de la actividad. Ellos mencionaron que la primera pareja de segmentos era la que cumplía que al activar el rastro se formara una circunferencia. Además, la mayoría de los estudiantes utilizaron los hechos geométricos para elegir la primera pareja de segmentos: unos hicieron alusión a la igualdad de distancia del centro a los extremos en ambos segmentos, y otros a la igualdad de medida entre ellos. En ambos casos, los estudiantes utilizaron el compás para verificar la congruencia de radios; además pudieron visualizar una circunferencia (en ausencia de ella) al reconocer segmentos congruentes.

Los estudiantes usaron el compás, tanto para construir circunferencias como para determinar equidistancias. Se observaron muchas dificultades para usar el compás por lo que fue necesario que la profesora lo explicara y, en ocasiones, llevara de la mano a algunos niños mientras lo usaban. También fue necesario que la profesora interviniera para que los estudiantes pudieran ver la relación entre la herramienta predeterminada del programa de geometría dinámica y el compás al construir una circunferencia, así como también relacionaran los movimientos tanto en uno (el efecto del arrastre) como en el otro (amplitud del compás). Para la solución del cuarto numeral los estudiantes hicieron uso de los hechos geométricos, mencionado además que no importaba la cantidad de radios que tuviera una circunferencia, todos iban a medir lo mismo.

Actividad 5

Para solucionar la actividad, los estudiantes observaron que los segmentos estaban fijos y exploraron varias estrategias antes de utilizar la circunferencia. Por ejemplo algunos de ellos trataron de construir un segmento, pero al moverlo para compararlo vieron que cambiaba de tamaño. Otros trataron de utilizar elementos externos al programa como reglas. Finalmente, luego de la exploración de los elementos que aparecían en la actividad, la mayoría de estudiantes realizaron primero una comparación del radio de la circunferencia con el segmento *d* y luego la utilizaron para hallar los demás radios congruentes. Para explicar las soluciones, los estudiantes hacen uso de los hechos geométricos establecidos en las anteriores actividades.

Finalmente en la actividad en lápiz y papel, los estudiantes relacionaron fácilmente la acción de comparar los segmentos en GeogebraPrim utilizando la circunferencia, con la acción de comparar la medida de los segmentos utilizando el compás. Entonces el compás se constituyó en una herramienta para comparar y transportar medidas.

4. Reflexiones

La aplicación de la secuencia de enseñanza permitió observar que aunque el programa de geometría dinámica proporciona una herramienta predeterminada para construir una circunferencia, la configuración de ésta carece de sentido para los estudiantes y es necesario que previamente se desarrollen actividades que contribuyan a establecer las relaciones geométricas implícitas en las herramientas que ofrece el programa. El uso de las herramientas predeterminadas de los programas de geometría dinámica no implica el reconocimiento de las propiedades geométricas que estas determinan.

Se ratifica la idea de que la identificación de la representación de una circunferencia no implica el reconocimiento de las relaciones entre los elementos que la componen. Se puede observar que al recorrer el camino hacia el reconociendo de las relaciones y propiedades de la circunferencia, éstas no son de fácil acceso para los estudiantes.

Aunque el uso de programas de geometría dinámica es un entorno útil para favorecer la enseñanza de la geometría, también introduce cuestionamientos y retos referidos a su función y uso los cuales es necesario conocer y abordar con la finalidad de mejorar la labor docente y aportar en la investigación de didáctica de las matemáticas, en temas relacionados con el uso significativo y comprensivo de las herramientas predeterminadas.

Insistimos en que es apropiado, conveniente y necesario que los estudiantes: i). Identifiquen los elementos de un dibujo. ii). Expresen lo que observan al arrastrar los elementos de un dibujo. ii). Comprendan los hechos geométricos con los cuales están configuradas las herramientas predeterminadas de los programas de geometría dinámica.

Además, es apropiado, conveniente y necesario que los profesores: i). Diseñen y propongan a sus estudiantes actividades de exploración para que ellos identifiquen invariantes y relaciones entre los elementos de una figura. ii). Acompañen los hallazgos de los estudiantes con cuestionamientos que ayuden a validar o refutar dichos hallazgo. iii). Diseñen secuencias que involucren el uso de los sistemas de geometría dinámica, instrumentos de trazo y las convenciones para la representación de figuras geométricas.

Referencias bibliográficas

- De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35 (5), p. 703-724.
- Jones, K. (1999). Student interpretations of a dynamic geometry environment. Proceedings of the First Conference of the European Society of Research in Mathematics Education I.I + I.II. Web site: http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html. Consultado el 12 de marzo de 2014.
- Laborde, C. (1996). Cabri-Geometra o una nueva relación con la geometría. En Puig, L (Eds.), Investigar y enseñar: Variedades de la educación matemática. Colombia: Una empresa docente y Grupo editorial Iberoamérica.
- Mariotti, M.A. (2001). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics. 44 (1), p. 25-53.

- Olivero, F. (2003). The proving process within a dynamic geometry environment. Tesis de doctorado, University of Bristol, Graduate School of Education, England.
- Sáenz-Ludlow, A., y Athanasopoulou, A. (2008). The GSP, as a technical-symbolic tool, mediating both geometric conceptualizations and communication. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), Semiotics in mathematics education. Epistemology, history, classroom and culture. p. 195–214. The Netherlands: Sense Publishers.
- Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458. doi:10.2307/749877

Ideas estadísticas fundamentales y el ciclo investigativo en educación básica

Bonilla E., Martha
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia). Grupo MESCUD

1. Descripción

Uno de los propósitos de la educación estadística actual es lograr la formación de ciudadanos estadísticamente competentes, con lo cual se pone de manifiesto la necesidad de transformar la formación estadística basada en procedimientos y cálculos, la mayoría de las veces desligados de contextos reales, hacia una educación estadística centrada en la participación en procesos de producción y análisis de datos reales. El trabajo centrado en las ideas estadísticas fundamentales a partir del ciclo investigativo, se constituye es una propuesta innovadora que pretende aportar al logro de ese propósito. En este curso se abordarán sintéticamente estas ideas y se ejemplificará el trabajo mencionado.

2. Marco conceptual

La discusión actual sobre la formación estadística escolar apuesta por que los aprendan estadística participando en procesos orientados a la producción y el tratamiento de los datos reales, donde los estudiantes diseñen y desarrollen investigaciones estadísticas, esto es: formulen preguntas, recojan datos (observaciones, experimentos), analicen y obtengan conclusiones y predicciones basados en los datos (Franklin y cols., 2005; Batanero, 2011, Zapata, 2012, Zapata 2013).

La educación estadística pretende formar una "cultura estadística" (competencia estadística) que significa que los estudiantes han de ser capaces de:

- Interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos.
- Discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal 2002, citado por Batanero, 2011).

Algunos investigadores como Burrill y Biehler (2011, citados por Batanero, 2012), proponen organizar el currículo escolar de estadística, a partir del tratamiento de las "ideas fundamentales":

- **Datos**: Son números en contexto. Su producción es una fuente importante para otorgar significado al trabajo estadístico. Plantearse una pregunta, que implique tomar datos en el salón de clase, puede proporcionar un escenario importante para definir los datos, elaborar un plan de recolección, analizar y tomar decisiones, esto es para participar en un ciclo investigativo.
- **Variabilidad**: la variabilidad de los datos es inherente a ellos. Las diferencias de los individuos, las mediciones, el diseño experimental, el muestreo, el azar son fuentes de variabilidad, que son necesarios de estudiar y cuantificar. Que los estudiantes tomen conciencia de la presencia de la variabilidad y que la puedan explicar, son dos objetivos de la formación estadística.
- **Gráficos y tablas**: Se constituyen en las representaciones a partir de las cuales es posible organizar y analizar los datos. Obtener una nueva información a partir de los cambios de representación es uno de los modos de razonamiento estadístico denominado transnumeración, para los cual son útiles los gráficos y las tablas,
- **Distribución**: El análisis de los datos se ocupa de describir y predecir el comportamiento de los datos como agregados, como colecciones.

Para describir el conjunto de datos y explicar sus patrones de variación la distribución de los datos resulta necesaria.

- **Asociación y correlación**: Establecer relación entre variables, bien sea cuantitativas o cualitativas, puede ser uno de los requerimientos para dar solución a las preguntas estadísticas planteadas. Analizar los grados de asociación o correlación que pueden presentarse entre variables (aleatorias) es uno de los procesos estadísticos importantes que debe ser objeto de tratamiento escolar.
- **Muestreo y la inferencia**. La posibilidad de "generalizar" hacer inferencias con cierto grado de certeza sobre una población basado en el análisis de una muestra es un objetivo de la estadística. La representatividad la aleatoriedad son dos aspectos claves para conseguir ese propósito. La posibilidad de hacer
- **Probabilidad y azar**. Describir y analizar la incertidumbre presente en los datos requiere de modelos probabilísticos.

Estas ideas proporcionan un marco para el diseño curricular y el trabajo en el aula.

3. El trabajo en el aula

La propuesta de los autores insiste en la necesidad de que las actividades de aprendizaje en las que participen los estudiantes les brinden oportunidades para describir e interpretar el mundo, haciendo uso de las ideas fundamentales y los métodos estadísticos, dando mucha importancia al contexto y a la producción de los datos. Esta propuesta se concreta en el ciclo investigativo, descrito en la siguiente figura.

Un ciclo investigativo consta de: Problema (preguntas de investigación), Plan (los procedimientos utilizados para llevar a cabo el estudio), Datos (el proceso de recopilación de la información), Análisis (resúmenes estadísticos y análisis para responder a las preguntas planteadas), Conclusiones (declaraciones acerca de lo que se ha aprendido con respecto a las preguntas de investigación) (Zapata, 2011)

Ejemplos de preguntas o problemas en los cuales se desarrolla el ciclo investigativo

Ejemplo 1: Los hábitos alimenticios

EL ICBF ha entregado a las instituciones educativas en las que se brinda el refrigerio, los siguientes datos para que definan si los alimentos ofrecidos cumplen con las condiciones nutricionales, que están estipuladas en la tabla siguiente:

Tabla 1. Recomendaciones de consumo diario de calorías para la población colombiana. ICBF

	Edad (años)	Peso (Kg.)	Calorías (kilocalorías)
	7	22	1790
	8	25	1830
	9	28	1900
Hombres	10-12	36	2270
Mujeres	10-12	37	2000

¿Qué tan cerca está nuestra clase de estas recomendaciones?

Ejemplo 2:

La administración de la ciudad va a convertir algunas vías de la ciudad en vía exclusiva para el transporte público. La administración ha recibido muchas críticas por esta medida. Los periodistas argumentan que no ha sido eficiente, a usted lo contratan para que de una opinión.

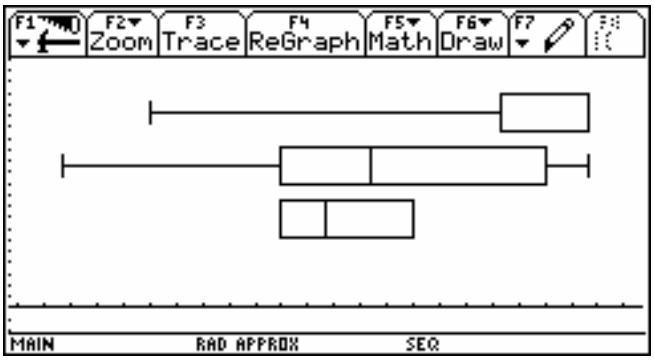
Ejemplo3:

La siguiente información corresponde a una información producida por el Banco Mundial. http://www.bancomundial.org/es/news/feature/2014/02/27/infographic-food-loss-waste. A partir de esa información presentada en la gráfica, plantéese una pregunta estadística y resuélvela.

Ejemplo 4:

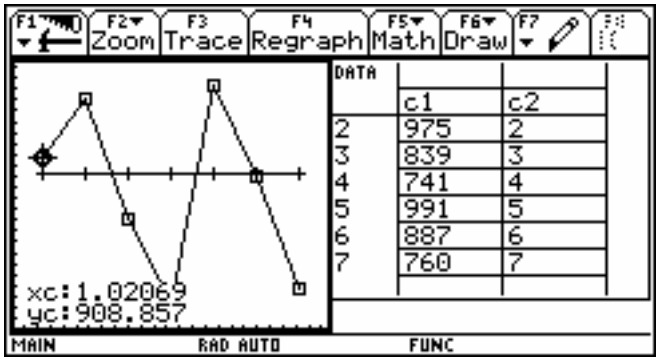
¿Cuál marca de bombillos?

Para realizar una experiencia de control de calidad se seleccionaron 20 bombillas de cada una de las tres marcas que un almacén expende. Las bombillas fueron encendidas y se registró el tiempo de duración en horas, desde el momento en que se prenden hasta cuando se funden. En los tres diagramas de caja que sigue se presenta los resultados de la experiencia. Basándose en la información de las gráficas argumente su decisión de comprar o no alguna de las tres marcas, en el supuesto de que los precios no varíen demasiado. Tomado de Castiblanco et al. p. 40.



Ejemplo 5:

La empresa de teléfonos de la ciudad, debido al cambio de tecnologías para registrar las marcaciones realizadas por usted en un mes, decidió presentarle la siguiente propuesta de pago para los siguientes siete meses:



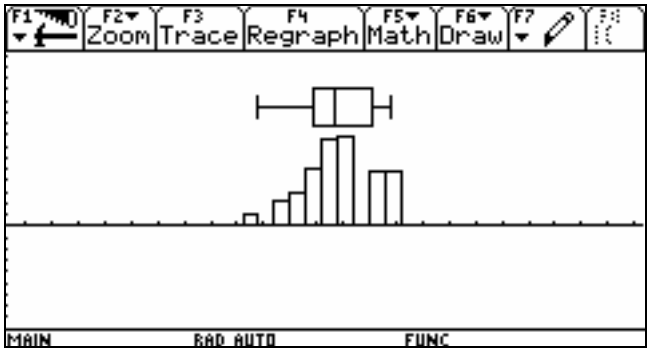
Pagar lo correspondiente a 891 marcaciones, con lo cual a usted no se le aumentará el valor del servicio por los siete meses siguientes.

Como usted se puede presentar una contrapropuesta, después de analizar los datos presentados en la gráfica, usted le ofrece a la empresa un pago correspondiente a 887 pulsaciones argumentando que es una propuesta equitativa puesto que ese es el valor por encima del cual están tres consumos y por debajo de los otros tres. La empresa le responde con un NO, argumentando que eso significa para ellos pérdida de dinero.

Dé argumentos para demostrar con cuál de las dos propuestas ni usted ni la empresa pierden dinero. Apóyese en gráficos y tablas. Tomado de Castiblanco et al.

Ejemplo 6:

Con la información que se dispone en la gráfica siguiente, reconstruya los datos e invente una situación. Tomado de Castiblanco et al. p. 49.



Ejemplo 7.

Un profesor lee la siguiente noticia en un periódico de distribución masiva y gratuita.

América sufre de obesidad

> Quito (Epel). América es el continente con la más alta tasa de obesidad en el mundo, aseguró la representante en Ecuador de la Organización Panamericana de la Salud (OPS), Gina Tambini. “La obesidad, el sobrepeso afecta al menos

> uno de cada dos adultos y ya hay algunos países donde es tres de cada cuatro", dijo Tambini. "Uno de cada cinco niños o niñas y adolescentes está siendo afectado y en algunos países ya es uno de cada tres", advitió. (Tomado de ADN, Agosto 27 de 2014).

Le parece que esta información puede servir para proponerles a los alumnos desarrollar un trabajo estadístico. Si usted fuera uno de los estudiantes de ese profesor ¿Qué pregunta estadística se plantearía?

4. A manera de síntesis

Como se mencionó anteriormente la educación estadística tiene como uno de sus objetivos proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permitan aprender a hacer estadística y aprender los conceptos y herramientas estadísticas en el marco del desarrollo de un ciclo investigativo. Este ciclo puede convertirse en un entorno de aprendizaje que vincule el currículo con los contextos cotidianos, científicos sociales, etc., en los que transcurre la vida de los estudiantes

Referencias bibliográficas

- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística: Conferencia inaugural. Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística. Buenos Aires.http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.pdf.
- Castiblanco, C., Urquina, H., Bonilla, M. Y Romero, J. (2004) Pensamiento estadístico y tecnologías computacionales. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistics ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.).
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y otros. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework.* Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. International Statistical Review 70(1), p. 1-25.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review, 67(3), p. 221-248.
- Zapata, L. y González, D. (2012). Enseñanza de la estadística más allá de los conceptos y procedimientos. En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13 Encuentro

Colombiano de Matemática Educativa. p. 845-851. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

- Zapata, L. (2011) ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística?. Revista Virtual Universidad Católica del Norte.
- Zapata-Cardona, L., & Rocha-Salamanca, P. (2013). Lucia La clase de estadística más allá del currículo: Un estudio de caso en la escuela primaria colombiana. En A. Salcedo, Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas, p. 153-166. Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Regresar al índice general

Experiencias invitadas

Índice de esta sección

Las matemáticas en la escuela.
Perspectiva desde la Escuela Pedagógica Experimental 333

Experiencia de covariación a partir del recubrimiento de
superficies..... 350

Experiencia de pasantía de extensión: el compromiso de la
escuela y la universidad por la educación matemática inclusiva 357

Experiencia de innovación: la matemática, como elemento de
análisis de problemáticas sociales 371

Enseñanza de la geometría utilizando el software dinámico
Cabri. Una experiencia gracias al acompañamiento de la
Universidad Distrital Francisco José de Caldas 386

Las matemáticas en la escuela.
Perspectiva desde la Escuela Pedagógica Experimental

Segura, Dino - Malagón, Janeth - Hernández, Erika
Rayo, Germán - Pulido, Jairo y Rojas, Johnatan
janeth.malagon@epe.edu.co – erika.hernandez@epe.edu.co
Grupo de Matemáticas Escuela Pedagógica Experimental EPE, (Colombia)

Resumen

Se hace una presentación de los elementos que como grupo de profesores de matemáticas, consideramos característicos de la experiencia EPE en la enseñanza de las matemáticas. Entre estos resaltamos el trabajo por problemas centrado en el pensamiento matemático, la invención de regularidades y el trabajo en equipo. También se discute acerca de los aprendizajes caracterológicos y de la importancia de aprender a aprender. Esta exposición está acompañada de una mirada panorámica a algunos proyectos de investigación que hemos adelantado y de algunas reflexiones acerca de los contextos de investigación, que se posibilitan por la innovación de la Escuela Pedagógica Experimental.

Palabras clave: Pensamiento matemático, ambientes de aprendizaje, construcción matemática, la clase en torno a problemas, recurrencias, regularidades.

1. Introducción

La propuesta de matemáticas que construimos permanentemente en la EPE y cuyos planteamientos presentaremos a continuación, son válidos para todos los niveles, desde los más pequeños hasta los estudiantes de media vocacional. En todos los casos sin embargo, lo que se hace está íntimamente relacionado con los resultados

de las experiencias en el aula y esto es un asunto que depende de la experiencia individual y colectiva (que es lo que le da sentido a los problemas que se plantean) y del desarrollo intelectual y afectivo (que es lo que determina tanto las posibilidades de búsqueda como las condiciones de apropiación). Un eje central en la exposición es el reconocimiento de la complejidad y diversidad del pensamiento de los niños. De esta manera abordamos la concepción de lo que consideramos es la matemática, las regularidades, patrones y modelos, el pensamiento matemático, concepciones de aprendizaje, condiciones de trabajo, la clase en torno a problemas, la importancia del reto y la fertilidad de las matemáticas, el trabajo en colectivo, la investigación y como investigar.

2. Referente conceptual

Para presentar referentes de la propuesta de matemáticas de la EPE, nos remitimos inicialmente a los aportes de la obra de Jean Piaget (1926, 1969) con la teoría constructivista del aprendizaje, también hemos tenido en cuenta aportes de constructivistas radicales como Humberto Maturana, Francisco Varela y de manera más puntual para valorar la actividad de los estudiantes tomamos las consideraciones que Gregory Bateson (1998) plantea, a propósito de un artículo de M. Mead sobre diferentes culturas. En este artículo Bateson desarrolla la idea de que en cualquier acto de aprendizaje existen otros aprendizajes y que estos otros aprendizajes, que son inevitables, con frecuencia son más importantes y determinantes para la formación de los individuos que los aprendizajes relacionados con las metas. A manera de ejemplo cuando la actividad de matemáticas es memorística, como cuando los niños de segundo de primaria tienen que repetir las tablas de multiplicar, y después deben dar cuenta de estas en un examen, aprenden también que las matemáticas son repetitivas, mecánicas y que además no admiten equivocación; elementos que a nuestro juicio distan de lo que es hacer matemáticas.

En consecuencia, si concebimos que la clase parte de una situación problema que se constituye en un reto para los estudiantes, también nos apoyamos en autores como Perelman (1968), Martin Gardner (1989), Adrian Paenza (2005), o en los libros sobre actividades matemáticas de B. Bolt (1988,1989), Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1988). Estos autores son

categorizados por hacer matemática recreativa y usualmente sus propuestas son consideradas como un anexo al desarrollo de los contenidos estandarizados por lineamientos curriculares en matemáticas; un elemento que refuerza esta idea es la forma como en algunos textos de matemáticas se presentan este tipo de juegos o retos como un apartado que no tiene que ver con el desarrollo de la propuesta central.

3. Descripción de la experiencia

La Escuela Pedagógica Experimental, EPE es una innovación educativa reconocida en el ámbito local y nacional. En 37 años de labores ha generado y enriquecido las discusiones en los diferentes espacios de la comunidad docente. A través de una dinámica de investigación y reflexión al interior de la escuela sobre su quehacer pedagógico, ha participado en diferentes eventos como simposios, talleres, encuentros y congresos, en los cuales se ha dado a conocer y ha puesto en consideración la necesidad de una escuela pertinente para el país.

En este contexto se sitúan las matemáticas en la EPE, y los diferentes grupos de profesores que han conformado las asesorías de trabajo han logrado reflexiones en torno al hacer matemáticas, la propuesta de trabajo en las clases puede verse a partir de lo que denominamos la sintaxis de la innovación (IDEP 2005) en el cual se sitúan cuatro momentos:

1) **Problema:** Momento inicial en el cual se plantean actividades desencadenantes que generan pensamiento en los estudiantes.

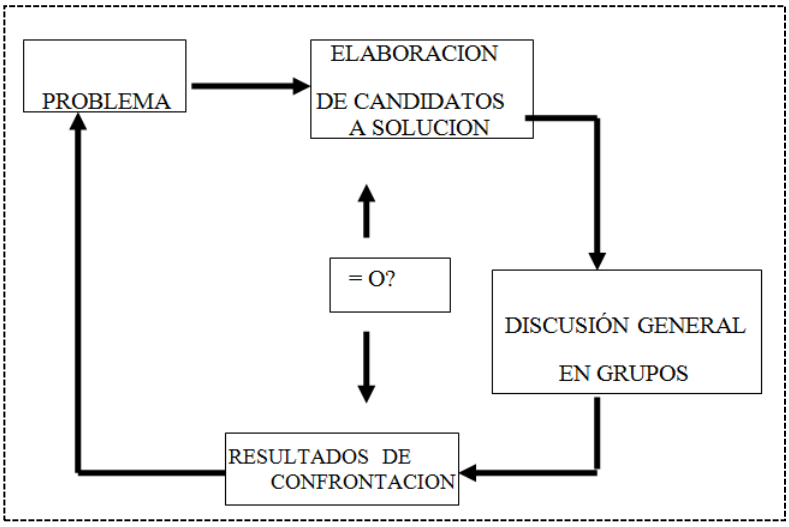
2) **Elaboración a candidatos a solución:** En pequeños grupos de trabajo y ocasionalmente de manera individual, los estudiantes se embarcan en la búsqueda de soluciones al problema planteado.

3) **Discusión general en grupos:** Las propuestas que se logran en los grupos, y que sintetizan una alternativa, se someten a discusión en el grupo general, constituido por todos los estudiantes. En este momento se presentan exposiciones, argumentaciones, intentos de pruebas validatorias, preguntas, etc. Entre los integrantes del grupo que como los

colectivos de una comunidad académica someten a consideración la propuesta de un miembro de ella.

4) **Resultados de la confrontación:** Esta actividad se concreta luego en una confrontación de la hipótesis con la realidad que ha sido construida por todos. El resultado de esta confrontación conduce bien a una reformulación del problema inicial (o reinterpretación) o una aceptación de la resolución como solución al problema.

El esquema número 1 que ilustra la dinámica.



Cuadro 1. Ciclo que representa la dinámica de clase en la EPE.

4. Reflexiones

Parte de esta reflexión sobre el hacer matemáticas en la EPE, se presentó en VI Encuentro Departamental de Experiencias en el aula en Educación Matemática, a continuación se describen los siete elementos que la conforman.

1. La concepción de lo que es la matemática. Discusión entre lo construido y la construcción. La importancia de lo construido y los contenidos.

Usualmente al considerar el papel de la escuela en lo que tiene que ver con el conocimiento, se plantea la interacción entre tres elementos: el estudiante, el maestro y los contenidos, que en el caso de las matemáticas se restringe a los algoritmos, procedimientos y formas de razonamiento. Si estos se consideran como elementos de un sistema, su dinámica es la de un sistema cerrado. Si en algún momento aludimos a lo cotidiano, se hace como una estrategia para llegar a los contenidos, no porque en tal referencia al mundo de la vida sea determinante. Estos tres elementos están en el corazón de las didácticas.

En nuestro caso pensamos que las cosas son de otra manera de tal suerte que para nosotros la triada de un sistema – clase sería: el estudiante, el maestro y la actividad, vistos fundamentalmente como un sistema abierto, esto es, en intercambio de emociones e información con el entorno. En este caso, las referencias a lo cotidiano son bienvenidas. Estos elementos nos plantean el qué hacer, no ante una didáctica, sino ante una tarea que concebimos más como la de "hacer matemáticas", esto es, matematizar, en dos instancias, la matematización de los problemas y los desarrollos que de ello se desprenden.

En la alternativa que se propone no nos centramos en el logro de los contenidos, sino más bien, en la utilización de ellos en cuanto son útiles para abocar la actividad. Y, es por esto, que los contenidos son importantes. Entre otras cosas no aspiramos a que los estudiantes construyan en las actividades los algoritmos y procedimientos (tales como la forma de sumar o de factorizar o de determinar el común denominador, por ejemplo) sino que buscamos que en cuanto sean necesarios, sepan utilizarlos y elaboren su significado.

2. Regularidades, patrones y modelos. Invención de variables para establecer correlaciones, multiplicaciones lógicas de múltiples entradas. Juego con invariantes.

La opción que estamos planteando tiene que ver con concepciones acerca de lo que es la matemática, lo que es el aprendizaje y sobre el papel del estudiante en estos procesos.

En cuanto a lo primero, anotemos que a nuestro juicio lo que mejor puede caracterizar lo que hacen los matemáticos o lo que es una mirada matemática, es la actividad de búsqueda de regularidades y patrones. Así pues, el matemático no es aquel que posee la información o los datos o que domina los resultados que se han obtenido en la práctica de hacer matemáticas, sino quien efectivamente hace matemáticas. Y esta visión tiene que ver con la capacidad de establecer correlaciones entre variables que ha inventado e identificar en las transformaciones que se dan, los invariantes que caracterizan los procesos. Estas afirmaciones son más claras mediante un ejemplo.

Supongamos que se trata de establecer, como le tocó a Galileo cuando estudiaba el movimiento de los graves, cuál es la ley de formación de una sucesión de datos experimentales, se trataba de los números:

1 3 5 7 … [1]

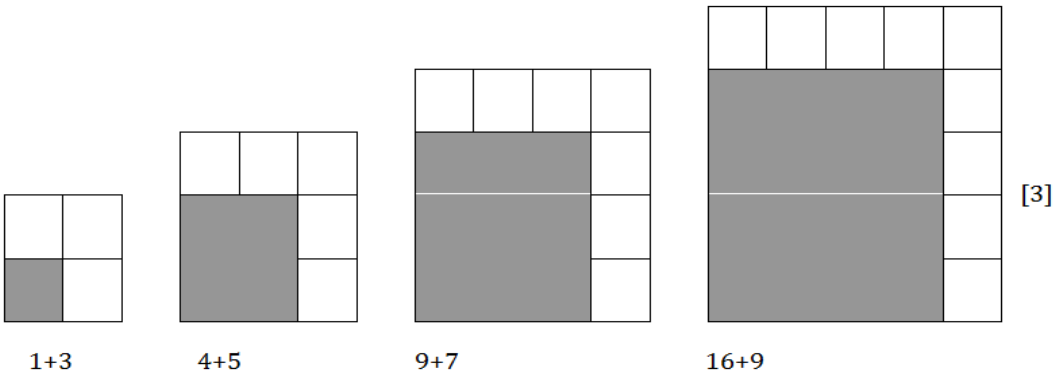
De primer golpe de vista es claro que se trata de los números impares, pero pensar que esto está relacionado con los cuadrados de los enteros, es otra cosa:

1 4 9 16 25 … [2]

3 5 7 9 …

El que estos números sean la diferencia entre cuadrados sucesivos, es introducir otra variable que le da sentido a la aparición de la secuencia inicial, esta correlación es un invento de quien trata de encontrar sentido a las relaciones que aparecen.

Pesar además el que esta segunda correlación tenga sentido, es otra reflexión tan interesante como las anteriores, veamos.



[3]

Notemos cómo en el ejemplo se articulan elementos algebraicos, aritméticos y geométricos, que al menos en el problema de Galileo se relacionaban con un problema de física.

Notemos además, que en el proceso se han ido introduciendo variables e identificando significados de una manera dictada más por la imaginación y la creatividad que de acuerdo con un procedimiento predeterminado. En [1] se identifican los impares, en [2] se identifican no sólo los cuadrados sino que se plantean las diferencias sucesivas entre ellos y en [3] se relacionan las diferencias encontradas con el significado geométrico de los cuadrados.

Otro elemento interesante es que la creatividad depende de lo que se sabe. Cada uno de los pasos requiere de informaciones comprendidas, el nuevo conocimiento se basa recurrentemente en el conocimiento anterior.

Ahora bien, cuando se adelantan estas reflexiones, se está pensando simultáneamente en varias variables al mismo tiempo, en nuestro caso, tenemos dos multiplicaciones lógicas que se correlacionan.

tiempos	distancias
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

n^2	diferencia
1	1
4	3
9	5
16	7
25	9

La distancia no depende de t sino de t^2.

La primera tabla es un resultado experimental, la segunda es una elaboración matemática. La segunda nos permite postular al correlacionarla con la primera, que la distancia recorrida depende del tiempo al cuadrado.

Este ejemplo nos permite también introducirnos en lo que es la matematización. En muchos otros casos tenemos datos, que a pesar de que toman su significado de la vida cotidiana, se elaboran y desarrollan en el ámbito de la matemática y para la matemática. Tal es el caso de tomar, por ejemplo un cubo de n unidades de lado y preguntarnos, cuando se pinte exteriormente, cuantos cubos unitarios tendrán una, dos, tres o cuatro caras pintadas. En este caso es interesante ver cómo la aproximación al problema desde la recurrencia es una estrategia útil en la matematización, esto es, explorar cuál sería la solución para cubos de una unidad, de dos unidades, de tres unidades, etc., y de establecer leyes de formación que nos permitirán anticiparnos a cualquier caso particular.

3. El pensamiento matemático, convencimiento de un orden posible. Formas de razonamiento: Recurrencias, simetrías, operaciones lógicas piagetianas. La conversación.

Con estas reflexiones podemos ya aproximarnos a lo que entendemos por pensamiento matemático y al estudio de las condiciones y contextos que lo posibilitan. Las estrategias que se siguen para inventar variables y establecer correlaciones entre ellas que den cuenta de lo que sucede en el problema que se estudia pueden ser muy variadas. Pero existe una predisposición, que podríamos denominar una actitud matemática que está en su base, se trata de la convicción de que la construcción de tal regularidad es posible. En otras palabras, como punto de partida para las búsquedas tenemos el firme convencimiento de que es posible mediante las matemáticas pasar del caos al cosmos. Esta predisposición va unida a otro elemento que es fundamental y es la confianza en la propia racionalidad, que se manifiesta en las búsquedas que los estudiantes emprenden y que lo hacen con el optimismo que se desprende que tal búsqueda no es infructuosa.

Dichas actitudes están asociadas al pensamiento recurrente, el cual se evidencia por ejemplo en contextos de clase, cuando en la resolución de problemas surgen las sucesiones [1] y [2]; los estudiantes establecen los términos siguientes a partir de la regularidad que construyen, en [1] dan cuenta que, de 1 a 3 hay 2 de diferencia, de 3 a 5 hay 2 de diferencia y así pueden establecer toda la secuencia.

En [2] las diferencias van en incremento, es decir de 1 a 4 hay 3, de 4 a 9 hay 5 y de 9 a 6, hay 7. De esta manera se ve que la diferencia va aumentando de a 2 unidades.

Si bien en ambos ejemplos es posible determinar una función que las determine: $2n + 1$ y n^2, los estudiantes hacen la formación observando el comportamiento de los números e "inventando" la recurrencia, en casos como la sucesión de Fibonacci 1,1,2,3,5,8,11,… no existe una función que la defina y solamente es posible conocer los términos por la recurrencia.

En los programas de matemáticas usuales, tiene mayor importancia el trabajo con las funciones, que determinan a partir de los valores que se den a la variable independiente x, $y = f(x)$, mientras que con las recurrencia es posible aproximarse a un nuevo valor de la función, sin referirnos a la existencia de x, solo construyendo las regularidades que se encuentran en las sucesiones de números, como lo vimos en los ejemplos anteriores. Además los ordenadores (por ejemplo la hoja de cálculo de Excel) también propician y requieren esta forma de pensamiento.

Ahora bien, la experiencia nos ha mostrado que las correlaciones que se proponen y los modelos (regularidades formalizadas) que se encuentran son usualmente inesperados. Esta circunstancia hace que el papel del maestro adquiera unos matices muy distintos de los usuales cuando se enseñan las matemáticas, ahora se trata más bien de un interlocutor inteligente que está dispuesto a escuchar, que pregunta y que posee la disposición a valorar y comprender lo que se propone o lo que se pregunta, se trata más bien de un Sócrates, en cuanto su conversación está inmersa en el diálogo y la mayéutica. Existen situaciones en las que los estudiantes han propuesto más de veinte aproximaciones distintas (ver, por ejemplo, nuestro artículo: *La multiplicidad de los patrones y la inagotabilidad del pensamiento*).

De estos trabajos vale la pena resaltar que aunque las operaciones lógicas propuestas por Piaget (clasificación, seriación, multiplicaciones lógicas, compensaciones, pensamiento multiplicativo, pensamiento correlacional, pensamiento probabilística) están presentes con frecuencia, muchos razonamientos se basan en las recurrencias (iteraciones) y las simetrías (pensamiento espacial) y que el método de prueba es con frecuencia el absurdo.

Así pues, las formas de razonamiento son importantes en las elaboraciones, a nivel de pensamiento. Sin embargo, los resultados no dependen exclusivamente de ello. Lo que es determinante desde el punto de vista contextual es el ambiente que se genera en las búsquedas de aula; en particular, el no temer a equivocarse y la conversación. Lo primero surge del convencimiento de que existen variadas posibilidades de solución, de que la solución casi siempre es antecedida de intentos fallidos y del convencimiento de la importancia del trabajo cooperativo, sin competencias individuales, ni premios o castigos en términos de calificaciones. Lo segundo, es una característica del ambiente de aula que se genera en la cual de manera espontánea se comparten los intentos y se socializan las discusiones.

Con respecto a esto último anotemos que uno de los resultados que hemos obtenido en nuestras investigaciones es que las matemáticas, como disciplina, se construyen, en los procesos de discusión y argumentación que se dan cuando se prueba o se refuta una propuesta de solución que se propone. Finalmente, recalquemos que este entorno de trabajo es una contribución que se hace desde la clase para lograr ambientes de convivencia deseables y si se quiere democráticos.

4. Ambientes de aprendizaje: Proto y deuteroaprendizajes, las predisposiciones y la importancia de aprender a aprender.

En los párrafos anteriores hemos enfatizado en la importancia del ambiente de trabajo que se genera cuando trabajamos en torno a problemas. El punto clave sobre el que queremos enfatizar es que el centro de la atención de las actividades no se encuentra en los problemas específicos que se estudian, sino de los ambientes de trabajo que se propician potenciado por las

conversaciones que se dan y que se concreta en las predisposiciones que se generan (como aprendizajes).

Dicho de otra manera, lo que queremos con las actividades es propiciar que los aprendizajes sean distintos al usual, en cuanto lo que queremos crear son ambientes de indagación. Nos decidimos por esta opción porque concebimos el aprendizaje diferente a la simple repetición y memorización. Por ejemplo, porque valoramos la importancia de aprender por ensayo y error, o por intuición, o por descubrimiento o aprender haciendo o inventando; en todos estos casos, fundamentalmente por el papel protagónico que juegan los sujetos en estos tipos de aprendizaje.

Ya se había mencionado que Bateson desarrolla la idea de que en cualquier acto de aprendizaje existen otros aprendizajes y que estos otros aprendizajes, que son inevitables, con frecuencia son más importantes y determinantes para la formación de los individuos que los aprendizajes relacionados con las metas. Para referirse a ellos Bateson denomina protoaprendizaje al aprendizaje de las metas de la actividad y deuteroaprendizaje a lo que se aprende en los procesos, que son predisposiciones, esto es, aprendizajes caracteriológicos. Así, cuando en una clase de matemáticas usual alguien aprende las tablas de multiplicar repitiendo y memorizando, no solo aprende, por ejemplo, que 8 por 6 es 48 (protoaprendizaje) sino que aprende a aprender (por repetición y memorización), aprende que las tablas de multiplicar son matemáticas, aprende que tanto los contenidos como los motivos del aprendizaje son determinados externamente, aprende que los jueces del aprendizaje son externos al proceso mismo, es por ejemplo, el maestro; aprende que lo que se aprende (por ejemplo los casos de factorización) posee una existencia externa e independiente de quien aprende, de tal suerte que quien aprende es un ser pasivo frente a sus aprendizajes, entre otras cosas porque una de las cualidades más importantes en esos procesos es la obediencia. Y, si otras prácticas escolares y en otras asignaturas se mantienen los mismos formatos de aprendizaje, estos deuteroaprendizajes serán reforzados continuamente y la escuela será lo que es hoy en día para muchos maestros y estudiantes, un lugar invivible y estéril.

Como en nuestra propuesta la atención no está en las metas, los aprendizajes a que nos estamos refiriendo no dependen del problema puntual que se

proponga, sino del clima de la clase que se constituya. Entre los frutos que consideramos de importancia tenemos:

- El estudiante no trabaja por recibir a cambio una gratificación externa, sea esta una calificación o un regalo. La actividad misma es auto-motivante. (La actividad posee una motivación intrínseca). Haber logrado una solución es motivo o una estrategia novedosa es motivo de orgullos y satisfacciones.
- Se logra gusto por las matemáticas. No es extraño que al preguntar por las asignaturas que más le gustan, los estudiantes elijan las matemáticas como su asignatura favorita.
- Se logra un sentido de realización y de protagonismo. Aunque con frecuencia los logros no son individuales sino que pertenecen al grupo como un todo, la elaboración de confianza en sí mismo y en la propia racionalidad van de la mano con las satisfacciones y los orgullos.
- Ahora bien, desde el punto de vista del colectivo en que se desarrollan las actividades, debemos destacar la capacidad de trabajar en grupo y de elaborar en tales contextos normas, construir liderazgos y elementos de auto–organización.

5. Condiciones de trabajo. La clase en torno a problemas, la importancia del reto y la fertilidad de las matemáticas.

El problema del sentido. Para que la clase sea significativa tanto para los estudiantes, como para los maestros, se basa en problemas, esto es en situaciones que son posibles de resolver, pero que inmediatamente no se sabe cuál es la solución. De un modo distinto serían los ejercicios que usualmente se proponen y en los que los muchachos aprenden procedimientos que luego aplican a situaciones similares, generalmente de manera mecánica. Por el contrario, los problemas permiten que los estudiantes realicen búsquedas, planteen conjeturas y argumentos que posteriormente validan a través del diálogo y la discusión.

Son problemas desencadenantes. Desde otra perspectiva, los problemas son desencadenantes de variadas formas, en cuanto a pensamiento y al desarrollo de contenidos, si bien un problema puede estar localizado en una temática particular de la matemática, las búsquedas y algoritmos pueden recurrir como se afirmó anteriormente a diversidad de formas de pensamiento y campos de la matemática. Esta diversidad conduce a la invención de variadas respuestas y, también a variados algoritmos que inventan los grupos. La invención de algoritmos es, en particular, interesante en cuanto despoja a los algoritmos usuales de su carácter absoluto en cuanto los relativiza.

Cuando se plantean problemas como:

> En una granja hay cerdos y gallinas, si se cuentan 84 patas y 27 animales, ¿Cuántos de estos son cerdos, y cuántas gallinas?,

Es una situación típica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (tema de álgebra) los muchachos suelen realizar tanteos, toma de datos y utilizar procedimientos distintos a simplemente plantear las ecuaciones. Con esto logran incluso procesos que pueden ser sistematizados y se convierten en algoritmos generales que se utilizan para una variedad grande de problemas, que no son necesariamente los que se enseñan. Como ejemplo veamos el razonamiento siguiente:

> Son 15 cerdos y 12 gallinas y lo resolvimos de la siguiente manera, como hay 84 patas esto lo dividimos en 2 y es 42, que sería la totalidad de animales en el caso de que todas fueran gallinas, pero como sabemos que hay 27 animales y que de esos algunos son cerdos, entonces a 42 le restamos las 27 cabezas y sobran 15 que son los cerdos, pues a estos hay que colocarles los pares de patas que sobran porque ellos tienen 4 patas.

Es un algoritmo que se discute, cuestiona, se pone a prueba y se valida.

Pueden proponerse incluso problemas que son irresolubles y que en la búsqueda de la solución (que no existe) se logran explicaciones y argumentos que denotan comprensión y construcción disciplinaria. En situaciones como: *Encuentra tres números consecutivos que sumados den 121*, los estudiantes en las búsquedas deducen por ejemplo algunas características de los números enteros. A propósito, el estudio de este tipo de problemas condujo a la elaboración de proyectos de grado por un grupo de estudiantes de la Universidad Distrital, proyecto LEBEM.

Los problemas se constituyen en un reto. Una característica importante de los problemas es que se conviertan en un reto para los chicos, si bien su nivel de dificultad no puede ser tan simple que permite una respuesta o algoritmo inmediato, tampoco puede estar tan lejano de la matemática que ha construido el estudiante; lo ideal es que se puedan establecer conjeturas y tanteos que posteriormente puedan ser sistematizados para lograr soluciones.

El reto es un estado que mantiene a los estudiantes en permanente indagación, de tal suerte que a veces el espacio de búsqueda se extiende más allá de la clase, porque el interés que despierta en los chicos, los lleva a pensar permanentemente en el problema. En la EPE no es extraño ver que los estudiantes busquen al maestro de matemáticas para contarle en qué estado está el proceso de resolución de un problema.

Se trata de problemas abiertos. Es importante que los problemas que se elijan den origen a distintas reflexiones (geométricas, aritméticas o recursivas, etc.) y desencadenen diversas formas de pensamiento, razonamiento y contenidos.

Muchas de las situaciones que abordamos como problemas de clase pueden originarse como un acertijo; por ejemplo, problemas como el salto de la rana con 3, 4, 5, …, n fichas por color, o misioneros y caníbales generalizando para n parejas. También como un juego, el tangram, armar cubos. O, con situaciones de la cotidianidad cómo el diseño de aparatos para medir, por ejemplo, longitudes de circunferencia o el diámetro del tronco de un árbol. Al abordar las situaciones es cuando los estudiantes van construyendo razonamientos disciplinarios y tienen que recurrir al uso de los algoritmos, como ya se había mencionado con anterioridad.

6. El trabajo en colectivo. Construcción disciplinaria a partir de la argumentación. El colectivo y la auto-organización (convivencia). Reconocimiento y proyección de la heterogeneidad.

En la EPE no existen sillas individuales, los chicos se disponen en mesas de trabajo, que comparten entre 4 y 6 individuos, si bien el aprendizaje es individual, la manera de aprender y de desenvolverse cotidianamente se hace en colectivo, los muchachos a través del diálogo, la argumentación y confrontación se aproximan y construyen soluciones que se validan. La experiencia nos lleva a afirmar que efectivamente a través de este ejercicio (de equipos de trabajo) se resignifican las fuentes de conocimiento o los contextos de aprendizaje, pues puede ser un par (compañero) quien enseñe a otro. De hecho, un elemento importante del trabajo en colectivo es la construcción compartida de lenguajes y conocimientos, ya que "en el diálogo, lo que se conversa no es simplemente el ir y venir de frases que se encontraban previamente en la mente de quienes conversan. Lo que se dice en la conversación es una creación colectiva" (IDEP 2003).

El resultado de la conversación, no es solo lo que dice un individuo, es la concreción de la construcción conjunta, el punto de encuentro, va más allá de la elaboración individual, conduce a la reflexión y la retroalimentación del ejercicio de conversar. Ante problemas como:

> Un lavador A demora 1 hora lavando un carro, y un lavador B demora dos horas. ¿Cuánto tiempo demorarían juntos simultáneamente para lavar el mismo carro?

La respuesta inmediata es una hora y media, porque 1+2 dividido en 2 es 1 y medio (se hacen promedios). En el ejercicio de dialogar surgen argumentos como: –No puede ser, si un solo lavador dura una hora, y hay otro, el tiempo no puede ser mayor–.

Por otra parte, cuando se constituye un colectivo se crea una vivencia de convivencia. El colectivo es mucho más que un grupo de personas, se trata de un grupo de personas que está comprometido con búsquedas compartidas. Y sea cual fuere la búsqueda en que se embarca el colectivo y lo define, el comportamiento de los miembros del colectivo está ahora determinado por los acuerdos explícitos o tácitos que surgen en las dinámicas de las

búsquedas en colectivo. Es entonces cuando se establecen normas de acción, parámetros e incluso sanciones. Se trata de formas de auto-organización que le pertenecen al colectivo y que pueden cambiar cuando el colectivo lo estime conveniente puesto que no son impuestas desde el exterior al colectivo, sino inherentes a su propia dinámica.

7. La investigación: La actividad del niño y el maestro. La indagación y la capacidad de sorprenderse. Una nueva concepción de ser maestro y la recuperación de la mayéutica.

Si la clase está concebida como un espacio para hacer matemáticas, el maestro no puede ser simplemente la persona que transmite los contenidos terminados, podría pensarse más bien como un orientador que presenta y plantea preguntas pertinentes para desatascar, o para desencadenar argumentos, en una dinámica muy cercana a la mayéutica. Sin embargo, la riqueza de su hacer se extiende cuando se asume como alguien que investiga. La investigación se concreta en la posibilidad de diseñar situaciones que originan diversidad de pensamientos y formalizaciones, materializados en las diferentes soluciones y los diversos caminos que siguen los estudiantes. Se trata entre otras cosas de caracterizar y categorizar los diferentes niveles de pensamiento y niveles de formalización- Esto hace que la labor del docente se dimensione y se proyecte en la sistematización y producción académica.

En nuestra investigación sobre el modelaje matemático (IDEP 2003), pudimos ver, como se mencionó antes, la diversidad del pensamiento cuando se presentaron más de 23 soluciones al problema del Salto de la rana, así como pudimos evidenciar los diferentes pasos que se dan para establecer modelos en los problemas de conteo, o el valor de la recurrencia (de esto dan cuenta los artículos resultado de la investigación). También plantear la clase con problemas irresolubles se ha convertido en el motivo para investigar. El componente investigativo enriquece las actividades del aula, porque las preguntas que van surgiendo de las reflexiones enriquecen las mismas actividades.

En un sentido análogo el niño en la búsqueda de la solución, investiga, muchas veces en compañía de su maestro (cuando el problema es genuino), al conjeturar, probar, equivocarse tiene una actitud científica y si bien su investigación culmina cuando en compañía del grupo valida la solución, se predispone para ver que la clase de matemáticas puede darle satisfacciones, desde el mismo hacer, sin necesidad de un condicionante externo como lo es la calificación.

Referencias bibliográficas

- Bateson, G. (1972). Pasos hacia una ecología de la mente. Editorial Lumen. Buenos Aires, Argentina.
- Bolt, B., Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1989). Pensar Matemáticamente. Editorial Labor. Madrid, España.
- Malagón, J. (2005). Informe final Proyecto de investigación sobre modelos matemáticos. Investigación e Innovación educativa y Pedagógica (IDEP) Bogotá, Colombia.
- Segura, D., Malagón, J., (2003). El modelaje matemático en estudiantes de educación básica (6º, 7º 8º y 9º grados): la validación de los modelos y los procesos de matematización de la experiencia. Estudio a partir de dos familias de problemas. Investigación e Innovación educativa y Pedagógica (IDEP) Bogotá, Colombia.
- Segura, D. (2002). Información y conocimiento, una diferencia enriquecedora. Museolúdica. Bogotá: Museo de la Ciencia y el Juego No. 9 (22,34), Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Experiencia de covariación a partir del recubrimiento de superficies

Triana, Javier - Guacaneme Suárez, Edgar Alberto - Navarro, Ninfa
Orozco Tróchez, José - Palomá, Alfonso - López, Maryory - Stepanian, Vasken

javiertriana@colegiochampagnat.edu.co, guacaneme@pedagogica.edu.co
ninfanavarro@colegiochampagnat.edu.co, joseluisorozco@colegiochampagnat.edu.co
alfonsopaloma@colegiochampagnat.edu.co, maryorylopez@colegiochampagnat.edu.co
vaskenstepanian@colegiochampagnat.edu.co

Colegio Champagnat - Universidad Pedagógica Nacional, (Colombia)

Resumen

En esta comunicación se expresan los aspectos que los profesores del área de matemáticas del colegio Champagnat de Bogotá, tuvieron en cuenta para el diseño de una secuencia de tareas y las implicaciones que este diseño tiene sobre el currículo de matemáticas a través de la reformulación de las encontradas en los libros de texto del proyecto "Juega y construye la matemática" y de la incursión de la tecnología en el aula; hemos reconocido aspectos de nuestro conocimiento didáctico y teórico relacionado con el pensamiento variacional y razonamiento covariacional, específicamente cómo los estudiantes construyen los conceptos ligados a éste, lo cual se ha convertido en nuestro objeto de estudio, por lo tanto cobra relevancia el diseño de secuencias de tareas orientadas al desarrollo de este pensamiento, mediado por instrumentos tecnológicos, lo cual ha motivado y puesto sobre la mesa aspectos del currículo de matemáticas que son necesarios modificar para llevar esta tarea adelante.

Palabras clave: Pensamiento variacional, secuencia didáctica, tecnología, razonamiento, aula.

1. Antecedentes

Los profesores de matemáticas del colegio Champagnat de Bogotá, hemos emprendido un ejercicio colectivo de aprendizaje, a partir de la reflexión y estudio de la gestión del quehacer docente, cuando llevamos al aula tareas que buscan desarrollar el pensamiento variacional. Este pensamiento fue escogido por tres razones:

- Primero, es un eje curricular transversal a los grados escolares y que su estudio se inicia muy temprano en esta escolaridad. En esta dirección, entre otras ideas, se propone el estudio de "… situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica… [o]… el estudio de los patrones" (MEN, 1998, p. 50) como una manera de acceder a las relaciones funcionales en donde "…emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio" (p. 51).

- Segundo, es uno de los logros para alcanzar en la educación básica, que "presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas." (MEN, 1998, p. 49). En esta dirección se reconoce que el pensamiento variacional está relacionado con nociones y conceptos como: constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, modelos funcionales, relaciones de desigualdad, y ecuaciones e inecuaciones.

- Tercero, se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias" (MEN, 2006, p. 66).

Teniendo en cuenta lo anterior, los profesores del área pasaron a una etapa de elaboración de materiales como libros y juegos que promovieran el desarrollo de este pensamiento, que se convirtió en la primera fase del proyecto: Juega y construye la matemática. Esta etapa genera avances en primaria a través de juegos como casa de cambio, pero no dio sus frutos en bachillerato y por eso en el año 2012 el proyecto pasa a una etapa de revisión y adecuación del material.

Así se crean espacios de asesoría del proyecto para la reflexión, la sensibilización, el reconocimiento de saberes, explícitos e implícitos en los documentos (Tareas[1] propuestas en las cartillas del proyecto "Juega construye la matemática"), buscando la pertinencia, potencia generativa y su relación con el desarrollo del pensamiento variacional. Del cual se concluyó:

- Las tareas propuestas tienen un gran potencial generativo de conceptos matemáticos, las cuales para lograr un mejor aprovechamiento, se deben reformular y complementar, de tal forma que se puedan trabajar en diferentes grados de escolaridad.
- Es necesario agregar a los niveles de razonamiento covariacional propuestos por Carlson, el nivel cero que implica el reconocimiento de las magnitudes que varían en la situación problema que se plantea.
- Es necesario que los profesores nos capacitemos permanentemente en el uso del software para educación matemática, en la evaluación por competencias, en las tendencias actuales en teorías de investigación y psicología del aprendizaje para reflexionar sobre el quehacer en el aula aplicarlas al diseño de la secuencia de tareas.

Siguiendo este el camino para el año 2013 y 2014, tomando elementos de los puntos anteriores discutidos en el espacio de asesoría se comienzan a crear secuencias de tareas a partir de las propuestas de los docentes, la cual se encuentra en el presente documento.

[1] Tarea (Taller, consulta, situación problema a resolver, etc.) que se indica al estudiante para que haga, actividad lo que hace el estudiante (generalmente está relacionado con la actividad mental).

2. Pregunta de investigación

El diseño de tareas por parte del profesor está integrado a su conocimiento profesional y es fundamental para la gestión y la evaluación, tener planeado el trabajo permite tener claridad sobre los momentos y el tipo de evaluación más adecuada, conocer el objetivo de enseñanza aprendizaje y la forma de lograrlo. Así, el diseñar, permite conocer con antelación el nivel de desempeño deseado que se espera de los estudiantes, lo que permite en la gestión, si es necesario, reformular las tareas de forma tal que sean transversales al currículo y se conviertan en generadoras de conceptos; y permite determinar el marco teórico y la metodología conveniente para soportar este proceso.

En el diseño también se requiere de aclarar un pregunta de investigación que lo harán posible, de acuerdo a nuestras visiones acerca de la puesta en marcha de la investigación una propuesta para su realización: i). ¿Cómo los estudiantes construyen los conocimientos y las habilidades necesarias para que desarrollen el pensamiento variacional y el razonamiento covariacional?

3. Marco conceptual de referencia

Con base en la pregunta de investigación hemos hecho un análisis sobre lo que entendemos que el pensamiento variacional: i). No es un contenido ni un procedimiento matemático que se ubique en un grado escolar se configura como un asunto trasversal del currículo. ii). Es uno de los tipos que configura el pensamiento matemático, pero se articula con los demás tipos de pensamiento. iii). Convive en estrecha relación con el aprendizaje de temas matemáticos relacionados con el estudio de la variación y el cambio. iv). Para desarrollar el estudio anterior se configura en una herramienta primordial el apoyo de la tecnología. A partir de esto consideramos que el trabajo de análisis realizado cuenta con dos insumos de referencia:

El contenido de las disposiciones curriculares para las matemáticas escolares en Colombia (MEN, 1998, 2006), consideran el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la

variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

Para comprender el avance del pensamiento variacional y covariacional en los estudiantes consideramos basarnos en la propuesta de Carlson et al. (2003). En dicho marco, los autores interpretan al razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2003, p. 124). Con base en esta descripción, Carlson y sus colaboradores proponen un marco conceptual que involucra un conjunto de cinco acciones mentales y cinco niveles, que se relacionan en la siguiente tabla 1.

3. Secuencia de tareas

La secuencia de tareas diseñada que se presentará es una forma de abordar con estudiantes de Bachillerato, el estudio de relaciones de covariación, al realizar una tarea de recubrimiento de una superficie rectangular con fichas cuadradas. Inicialmente las longitudes de los lados tanto de la superficie como de las fichas son números enteros positivos; luego se plantea la situación problema con números racionales, incluido el estudio de tener que recubrir una superficie con una ficha de mayor tamaño que la superficie a recubrir. Finalmente se intenta modelar la situación utilizando como recurso informático el programa GeoGebra. Todo este estudio se soporta en el

pensamiento variacional y el razonamiento covariacional y de manera particular en lo niveles propuestos por Carlson.

Tabla 1. Marco conceptual que involucra un conjunto de cinco acciones mentales y cinco niveles. Carlson et al., 2003.

Nivel de razonamiento covariacional	Acción mental
Nivel 1 (N1). Coordinación: En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.
Nivel 2 (N2). Dirección: En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa: En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.
Nivel 4 (N4). Razón promedio: En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada
Nivel 5 (N5). Razón instantánea: En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

4. Metodología

El taller se desarrollará en grupos máximo de tres integrantes, utilizando como recursos: material fotocopiado y el software de Geometría Dinámica GeoGebra, en los siguientes momentos:

- **Primer momento.** Organización de la tarea. (Entrega del taller, producto a entregar, criterios para la entrega y de valoración).
- **Segundo momento**. Interacción del profesor con los estudiantes y de los estudiantes con sus compañeros de grupo. ¿Quién convoca o inicia la interacción en cada grupo?, ¿Qué dificultades se van presentando?

Es un momento sociocultural muy diverso muy enriquecedor, la interacción del docente puede ser individual, con grupos pequeños o con el colectivo total.

- **Tercer momento**. Socialización de saberes, aprendizajes. Es importante tener en cuenta que los acuerdos consensuados y las conclusiones obtenidas grupalmente, frente a las preguntas planteas en la situación problema, formulada inicialmente. Es importante tomar postura epistemológica frente a la construcción y aplicación del conocimiento.

- **Cuarto momento**. Uso de los resultados. Los resultados del proceso deben obedecer a uno o a varios propósitos, se deben aceptar los acuerdos del grupo, porque, es un conocimiento válido para esa, micro-sociedad de estudiantes, antropológicamente el salón de clases recrea un ambiente social, con diferentes personas, diferentes formas de: aprender y de concebir el entorno, de pensar, con personas que tienen diferentes inteligencias.

Referencias bibliográficas

- Gómez V., M. el alt. (1998). Copyright Ministerio de Educación. En: Trámite.http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Castaño García J. (2007). Colegio Champagnat de Bogotá, área de Matemática. Proyecto “Construye la Matemática”
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA 8* (2), p. 121-156.
- Vera, J., Rodríguez, A., y Ríos, A. (2012). Juega y construye la matemática. Quinto Grado. Bogotá: Ed. Kimpres.

Experiencia de pasantía de extensión: el compromiso de la escuela y la universidad por la educación matemática inclusiva

Castro, Claudia - Torres, Elizabeth - Gil, Diana - Hougthon, Rosa - García, Melba

mathclaudiacastro@yahoo.com, elizatorrespuentes@gmail.com, dianagilchaves@yahoo.es
rosahoughtonp@gmail.com, melbagarcia@telecom.com.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

La experiencia de pasantías de extensión de los estudiantes para profesor de matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas LEBEM, que se presenta es producto de un acuerdo de voluntades entre la Universidad Distrital y los colegios José Félix Restrepo IED y OEA IED. Los propósitos son la colaboración mutua y solidaria para por una parte, contribuir a la formación de los futuros profesores de matemáticas para el trabajo en contextos de diversidad y hacer posible el acceso a la matemática a todos los niños, niñas y jóvenes. Y por otra, apoyar procesos académicos en el área de matemáticas para los estudiantes de la educación básica y media de las instituciones educativas mencionadas, en particular a estudiantes en condición de discapacidad visual incluidos en el aula regular. A continuación se hace una breve presentación de las orientaciones que tiene el trabajo de pasantía y algunos de los aprendizajes y reflexiones de carácter pedagógico y didáctico que logran los estudiantes para profesor.

Palabras clave: Inclusión, educación matemática, diversidad, formación.

1. Introducción

La consolidación de propuestas que permitan el trabajo conjunto entre la Universidad Distrital, como formadora de futuros docentes de matemáticas para la educación básica y media y las Instituciones Educativas del Distrito, son de gran importancia para hacer realidad la inclusión educativa. Puesto que, implica el hacer realizable el derecho que tienen todos los estudiantes de acceder a la educación en general y en particular a la matemática, independientemente de sus características y necesidades individuales.

La inclusión educativa es un tema transversal a los países de América latina y el Caribe, puesto que

> …aunque las políticas públicas de los países de América Latina y el Caribe, desde la década pasada, han proclamado la lucha contra la desigualdad o la lucha por la igualdad de oportunidades con equidad, como uno de los propósitos a lograr, la situación de desigualdad se mantiene o se profundiza (León, et al., p. 25).

Según el estudio realizado por el Comité Español de Representantes de Personas con Discapacidad (CERMI) realizado en el 2009, señala que en Colombia "el porcentaje de personas ciegas que no saben leer ni escribir se acerca a 34%, tan sólo 43% de los ciegos entre 6 y 44 años asiste a la escuela y sólo 0.3% obtiene un título universitario" (Citado por León, et al., p. 30).

Para poder dar respuesta a estas necesidades, se debe tener en cuenta diferentes aspectos, para que haya una verdadera educación inclusiva, entre ellos: el respeto por la diferencia, que implica una etapa de sensibilización por pate de todo la comunidad (docentes, estudiantes, administrativos); adecuaciones curriculares que hagan posible la flexibilidad; adaptación de materiales educativos; adecuaciones físicas en las instalaciones educativas; estrategias pedagógicas para el diseño de las actividades didácticas; y la formación de profesores de matemáticas que hagan posible las acciones anteriores.

Esta experiencia de pasantía centra su atención en la formación de profesores, sensibles, consientes y hábiles en la creación de estrategias pedagógicas y didácticas para la adaptación de recursos educativos y trabajo en el aula de clases de matemáticas. Formación que se complementa con el trabajo académico en el contexto educativo de los colegios José Félix

Restrepo IED y OEA IED que llevan un poco más de 15 años vinculando estudiantes con discapacidad visual, y que son instituciones que entienden la inclusión educativa como: una posibilidad para la transformación educativa y una de las dimensiones centrales de la educación de calidad, que promueve el desarrollo humano de cada uno de sus miembros.

En este sentido, vale la pena mencionar las claves para la Educación Inclusiva:

- **El trabajo en equipo colaborativo:** entre tiflólogos, docentes, estudiantes, padres, redes naturales de apoyo, interinstitucionalidad, etc., que promueva un ambiente de trabajo, que fomente un liderazgo compartido en las diferentes acciones de los equipos.
- **La participación:** como factor clave para la inclusión educativa, participación y colaboración, desarrolla el propósito de "aprender juntos".
- **La asignación de recursos**: humanos, didácticos, financieros y tiflotecnológicos, ya que para que una política educativa sea perdurable, debe ir acompañada de políticas económicas, educativas y sociales.
- **La confianza**: que es la que nos permite empezar a ver al otro diferente y pasar de la discapacidad a la capacidad.
- **El Respeto**: por cada persona, cada estudiante y el reconocimiento de sus derechos. En ocasiones "no es necesario pegar para dejar rasguños en el alma" y es en la convivencia en donde podemos destruir los mitos y prejuicios y educar en el respeto.
- **La actitud**: es uno de los ingredientes claves, ya que implica una complicidad profunda y esencial de todos los maestros implicados en este proceso.
- **Currículo pertinente y renovado**: evitando la pedagogía de la condescendencia que excluye del conocimiento por una que dignifique a través de Aprendizajes Significativos.

- **Desarrollo de unas competencias mínimas de participación**: pertinencia, derechos, con objetivos claros acorde al Proyecto de Vida.

2. Referente Conceptual

Se quiere centrar la atención en dos aspectos fundamentales, por una parte la formación de los profesores para la atención a poblaciones diversas, y segundo la formación de profesores de matemáticas para poblaciones diversas, la primera de ellas permite el reconocimiento de la atención adecuada que se le debe dar al estudiante en el aula y la segunda hace mayor énfasis sobre las estrategias pedagógicas que debe tener en cuenta un profesor de matemáticas en un aula inclusiva.

Formación de profesores

A principios del siglo XX en países europeos se inicia una preocupación por los niños con alguna condición específica y que no asistían a la escuela regular. Esto implicó el surgimiento de la educación especial, respecto a la formación profesoral, Parra (2010) afirma que con el surgimiento de la educación especial se generó la necesidad de tener profesores preparados, programas para mejorar el aprendizaje, materiales específicos y centros especializados, es decir profesores dedicados exclusivamente a este tipo de población.

Al respecto, es conveniente mencionar el Informe Waarnock en 1978, desarrollado en España con el apoyo de la UNESCO, instauran algunas sugerencias conceptuales y prioridades respecto a la atención a niños y niñas con necesidades educativas especiales, para garantizar su derecho a la educación, para esto se establece la formación del profesorado para la atención de esta población.

En las dos referencias anteriores se menciona de manera particular la formación de profesores para estudiantes con necesidades educativas especiales, pero cuando se dan los procesos de integración, que tuvieron origen en la década de los 60 en los países desarrollados, y posteriormente

los de inclusión generados a partir de los años 90, la formación de profesores se descentraliza de la educación especial, para dar paso a la formación de profesores de todas la áreas del conocimiento para la atención a población diversa, pero esto no ha sido suficiente. Lo anterior demuestra que históricamente se han desarrollado acciones respecto a la atención de estudiantes diversos, estas se encuentran asociadas con la formación del profesorado.

En Colombia, se plasma de manera explícita desde la Constitución Política (1991) y la Ley General de Educación (1994) el derecho a la educación que tiene todas las personas. Por su parte, el Ministerio de Educación Nacional, adopta las diferentes propuestas dadas a nivel internacional y emite políticas que dan cuenta de la necesidad de realizar procesos de integración e inclusión en las instituciones de educación básica y media.

Los procesos de integración y posteriormente los de inclusión, se vienen dando en Colombia desde mediados de la década de los noventa. En el Plan Decenal de Educación 1996-2005, se puede evidenciar como objetivo (numeral 5, literal c): "superar toda forma de discriminación y corregir los factores de inequidad que afectan el sistema educativo" (p. 9). El mismo documento tiene como meta, asegurar la educación, acceso y permanencia a todos los grupos poblacionales.

Posteriormente, se propone en el plan decenal de educación 2006-2016, se establece en relación con la inclusión:

> Garantizar y promover por parte del Estado, a través de políticas públicas, el derecho y el acceso a un sistema educativo público sostenible que asegure la calidad, la permanencia y la pertinencia en condiciones de inclusión, así como la permanencia en el mismo, en todos los niveles: inicial, básico, medio y superior (p. 39).

Y en relación con la formación de los docentes de educación superior, señala:

> "Fortalecer la calidad de la educación superior con la implementación de propuestas para la formación de los docentes universitarios que enfaticen en lo pedagógico, didáctico, epistemológico, ético e investigativo como producción de conocimiento, desde lo disciplinar y profesional" (p. 47).

El Ministerio de Educación Nacional MEN, las diferentes secretarías de educación del país, la Universidad Pedagógica Nacional, Universidad de

Antioquia, Universidad Manuela Beltrán, forman educadores especiales en el nivel de pregrado, y la Universidad Colegio Mayor de Nuestra Señora del Rosario y la Universidad Nacional de Colombia, ofrecen formación posgradual en ese campo de investigación.

Las secretarias de educación en convenio con instituciones educativas, ofrecen programas de formación permanente para los profesores, estos programas tienen el propósito de brindar estrategias pedagógicas a los docentes de las diferentes áreas de la educación básica y media, para que construyan y desarrollen estrategias pedagógicas y didácticas, que les permita reconocer y atender la diversidad de los estudiantes en el aula.

Por otra parte, en algunos colegios de inclusión cuentan con aulas especializadas en las que se desempeñan personas expertas que brindan apoyo a los docentes de la institución respecto al manejo de la población, recursos, estrategias, etc. Para el caso de los colegios con estudiantes en condición de discapacidad visual, se cuenta con el Centro de Recursos y Apoyos Tiflológicos[2], conformado principalmente por un componente humano, comprendido por toda la comunidad educativa de la institución como son los directivos, docentes, personal administrativo, padres de familia, estudiantes videntes e invidentes y la comunidad del sector, bajo la asesoría y orientación permanente de los docentes de apoyo en tiflología.

La formación de profesores de matemáticas en la Universidad Distrital

La Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital, desde el año 2000 aproximadamente, constituyó un grupo de docentes interesados en la necesidad que se le presentaba a los estudiantes de las diferentes licenciaturas en las prácticas escolares, cuando se encontraban con niños en alguna condición de discapacidad.

[2] Centro de Recursos y Apoyos Tiflológicos: es el conjunto de programas, acciones, estrategias, recursos y espacios dispuestos en el colegio, mediante unas políticas dinámicas flexibles y transversales a todos los programas, planes y proyectos de la institución educativa, que promueve las condiciones adecuadas para garantizar la integración e inclusión de los/las estudiantes con discapacidad visual (ciegos y de baja visión) en equidad de condiciones.

Este grupo se ha ido consolidando y en este momento tiene presencia en la facultad mediante el proyecto transversal de Necesidades Educativas Especiales NEES, que brinda espacios académicos para la formación de "todos" los licenciados; brinda electivas que les permite a los estudiantes recibir formación especializada sobre Braile, lenguaje de señas, entre otras.

Además el grupo participo en un proyecto para la elaboración de "*Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad"*[3] Actualmente se desarrolla un proyecto de investigación "*Desarrollo didáctico y tecnológico en la generación de escenarios didácticos que acogen la diversidad para la formación de profesores de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas*"

La Universidad Distrital, la Facultad de Ciencias y Educación y la LEBEM se encuentran comprometidos con la formación de docentes en general y en particular profesores de matemáticas para la educación básica primaria, básica secundaria y la educación media que hagan posible que la matemática llegue a todos los niños, niñas y jóvenes.

La misión de la LEBEM es formar profesionales de la educación matemática como sujetos autónomos, críticos, no segregadores, con capacidad de transformación e innovación de las prácticas educativas y pedagógicas. En este sentido, la LEBEM se encuentra comprometida en la formación de sus estudiantes para profesor, en tanto propende por desarrollar en ellos un sentido reflexivo, con compromiso frente a la sociedad y con un sentido crítico en relación a la diversidad. Los estudiantes para profesor de la Universidad Distrital reciben su formación para la atención a la diversidad en el aula de matemáticas, desde varias vertientes:

- **Desde las prácticas pedagógicas**: los estudiantes han realizado sus prácticas en instituciones inclusivas de carácter público como son los colegios OEA, José Félix Restrepo, República de Panamá; y en instituciones exclusivas como el colegio Bolivia IED y el colegio Filadelfia para sordos.

[3] Se realizó con la colaboración de los miembros del consorcio del proyecto ALTER-NATIVA: ALTER-NATIVA es un proyecto subvencionado por la Unión Europea en el marco del programa ALFA III-2da. Convocatoria 2010. ALFA es un programa de cooperación internacional entre la Unión Europea y América Latina para la Educación Superior. Participaron en el grupo de matemáticas: México, Nicaragua, Salvador y Colombia.

- **A través de electivas**: los estudiantes cuentan con un espacio electivo obligatorio y transversal de la Facultad de Ciencias y Educación, denominado Formación de profesores en NEE y otros espacios electivos opcionales como Braille y Ábaco; Mediaciones semióticas y culturales para la comunicación en el aula con población ciega; Lengua de señas I y II, entre otras.
- **A partir de las pasantías**: los estudiantes pueden tomar la modalidad pasantía como opción de trabajo de grado. El proyecto curricular ha contado con convenios con instituciones en las que se debe desarrollar la pasantía con población vulnerable y con estudiantes en condición de discapacidad visual.

3. Descripción de la experiencia

La experiencia de pasantía de extensión es fruto del trabajo realizado a partir de las prácticas pedagógicas que se vienen desarrollando en aulas inclusivas y exclusivas desde el año 2006. Castro, Torres y Gil (2013) reportan todo el recorrido que se ha realizado, concluyendo que "esta formación contribuye a la defensa del derecho a la educación, la garantía de la calidad y la atención integral a poblaciones vulnerables y diversas" (p. 75).

En el año 2010 una vez concluida una de las prácticas en el colegio José Félix Restrepo IED, se establece un acuerdo que posteriormente se convierte en convenio, para que los estudiantes para profesor de la LEBEM, acompañaran y apoyaran los procesos de aprendizaje de los estudiantes con limitación visual. El impacto de este convenio, hace que el colegio OEA IED, busque la posibilidad, de que sus estudiantes, de condiciones vulnerables y limitación visual obtengan los mismos beneficios.

Una vez se establece convenio y acuerdos entre las instituciones, hay un compromiso mutuo entre universidad y escuela. La disposición tanto de pasantes como de los estudiantes beneficiados, produce resultados valiosos que redunda en posibilidades de formación para los primeros y mejoramiento en sus aprendizajes para los segundos.

Las instituciones escolares se comprometen a realizar procesos de formación a los pasantes, que tienen que ver con estrategias pedagógicas, adaptación de materiales, uso y función de la tiflotecnología y otros recursos.

¿Qué aprenden los pasantes?

Aspectos generales de la **escritura en braille**. Los pasantes aprender a codificar y decodificar, a transcribir de tinta a braille y viceversa, asegurando la mejora significativa de los procesos de comunicación con sus estudiantes.

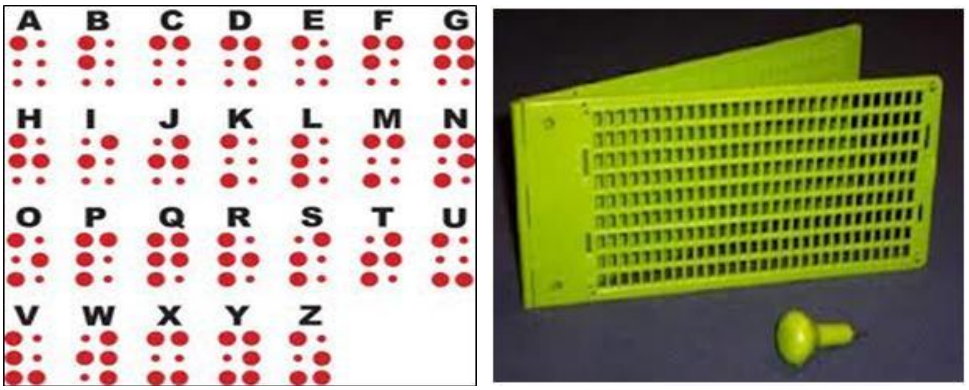


Figura 1. Escritura braille.

Signografía matemática en braille (Martínez, 2004). En concordancia con el anterior aspecto, el conocimiento de la escritura matemática en braille por parte de los pasantes es fundamental para poder seguir los avances o dificultades de los estudiantes. Sindy Joya, pasante en el año 2011, afirma

> "si quiero apoyar a un estudiante del curso de álgebra, lo mínimo que debo saber es la escritura en braille de las expresiones algebraicas, o sino cómo sé que el estudiante está resolviendo bien las situaciones que le pongo, esto debo resolverlo en mi clase, no puedo esperar a que la tiflóloga me indique qué hizo el estudiante después de la clase" (p. 99).

1.3. Signos unificadores y paréntesis auxiliares

Signo braille	Puntos braille	Signo en tinta	Significado
...	126 ... 345	( )	paréntesis
...	12356 ... 23456	[ ]	corchetes
...	5-123 ... 456-2	{ }	llaves
...	5-13 ... 46-2	⟨ ⟩	paréntesis angulares

Figura 2. Paréntesis en Braille tomado de Martínez (2004, p. 16).

5.4. Ejemplos de transcripción de expresiones algebráicas

3a	
3a+5x	
$7x^3-2x^2+x+1$	
$\sqrt{x^2+y^2}$	

Figura 3. Expresiones algebraicas en braille tomado de Martínez (2004, p. 62).

Adaptación de materiales: los estudiantes adoptan estrategias para la adaptación de recursos de tipo inclusivo que faciliten la participación, acceso y compresión, no solo de los estudiantes, en condición de discapacidad

visual, sino de todos los estudiantes de la clase. Para ello adoptan elementos del diseño universal, lo que permite que cualquier objeto matemático sea accesible para todos los estudiantes.

Figura 4. Fichas para trabajar expresiones algebraicas en braille.

Los pasantes, aprenden a hacer de la escuela el espacio privilegiado para vivir la inclusión. A reconocer a cada estudiante como un ser diverso y a la vez singular, a promover la diferencia, aprecia la diversidad y a transformarla en una ventaja, un valor, una oportunidad y un derecho, por lo tanto, los estudiantes con discapacidad visual en la escuela, son una oportunidad de desarrollo para todos.

Algunos títulos de los trabajos de los pasantes

- Enseñanza de la elipse como sección cónica, una propuesta inclusiva para grado décimo. Autora: Sindy Joya. Año 2012.
- Una propuesta para la inclusión de la población en condición de discapacidad visual a través del álgebra geométrica. Catherine Velasco, Sandra Mora y Esperanza Montes. Año 2013.
- Una propuesta inclusiva para la representación grafico-geométrica de los poliedros con población ciega. Yenny Torres y Jenny Gaviria. Año 2013.

- Propuesta para el trabajo de la estructura multiplicativa en un aula integrada por alumnos con deficiencias visuales implementando el uso del ábaco sorobán. Dumar Barreto y Fabio Fúmeme. Año 2013.
- Una propuesta inclusiva de la enseñanza de la ubicación y localización espacial para estudiantes de grado 3°. Ángela Sparza y Emerson Santana. Año 2013.
- Diseño de una propuesta inclusiva para estudiantes de séptimo grado del Colegio José Félix Restrepo IED, para reconocer y realizar construcciones de figuras geométricas elementales con regla y compás. Javier Bohórquez. Año 2014.
- Regálame una indicación para ubicarme en un mundo externo. Ángela Moreno. Año 2014.

4. Reflexiones

La experiencia de la pasantía de extensión en convenio entre la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y los colegios José Félix Restrepo y OEA, ha permitido hacer posible la educación matemática inclusiva, mediante el trabajo con los estudiantes en condición de discapacidad visual, al observar y analizar los logros en lo social, afectivo y cognitivo al aprender matemáticas en cada uno de ellos.

Además de poder observar y analizar que el trabajo realizado con esta población, potencia, el desarrollo del trabajo con el resto de los estudiantes videntes de las dos instituciones. Es decir, todos estudiantes se benefician con cambios en las metodologías y en las estrategias de trabajo en el aula de clase.

La pasantía de extensión además de ser un medio para formar profesores de matemáticas para la atención a la diversidad, se ha convertido en la posibilidad de hacer trasformaciones en las prácticas pedagógicas de las aulas de matemáticas de las instituciones donde se realiza la pasantía, con el propósito de socializar las experiencias y afectar en lo posible a otros sectores del sistema educativo.

Hemos logrado un impacto en los niños y niñas de los colegios José Félix Restrepo y OEA, pues se ha pasado de la apatía total por las matemáticas a una comprensión significativa, donde la matemática desde su esencia permite explicar y hacer evidentes aquellos fenómenos cotidianos que parecen confusos. Los estudiantes de los colegios se han dado cuenta que sí pueden aprender matemáticas, cambiando la cultura del miedo, por el "yo sí puedo". El apoyo individualizado, ha permitido que el estudiante en condición de discapacidad visual, reconozca sus fortalezas respecto al aprendizaje de las matemáticas, este componente ha sido vital para cada uno de esos estudiantes que han contado con el acompañamiento (por parte del pasante), en la construcción de los objetos de la matemática escolar.

Los estudiantes para profesor, se robustecen en experiencia, y se sensibilizan para enfrentar una realidad en su vida profesional, concientizarse que dentro de sus prácticas encontrarán seres humanos totalmente diversos que les exigirán el gran reto no solo de aplicar lo aprendido en la academia si no de dinamizarlo con estrategias innovadoras, variadas y creativas: la educación inclusiva. La formación y experiencia que adquieren en los colegios con el apoyo de las/ los tiflólogos y los profesores, les da una identidad con su profesión.

Uno de los aspectos más sobre salientes de esta experiencia es el trabajo conjunto entre las Instituciones educativas José Félix Restrepo y OEA, y la Universidad Distrital a través de la LEBEM, puesto que ambas partes reconocen la necesidad y la importancia de construir puentes y de hacer trabajo conjunto ente Universidad y realidad educativa, pues se tiene en común la búsqueda de una educación más equitativa, liberadora, igualitaria y digna.

Referencias bibliográficas

- Castro, C., Torres, E. y Gil, D. (2013). Experiencias educativas y prácticas pedagógicas en la Universidad Distrital. Fondo de publicaciones Universidad Distrital. Bogotá.
- Constitución política de Colombia de 1991. Presidencia de la República. Actualizado en septiembre de 2011 de conformidad con la versión del Senado de la República de

Colombia. Recuperado de: http://wsp.presidencia.gov.co/Normativa/Documents/Constitucion-Politica-Colombia.pdf consultado el 20 de octubre de 2011.

- Joya, S. (2013). Enseñanza de la elipse como sección cónica, una propuesta inclusiva para grado décimo. Informe de pasantía. Universidad Distrital. Bogotá.
- León, O; Bonilla, M; Romero, J; Gil, D; Correal, M; Ávila, C; Bacca, J; Cavanzo, A & Guevara, J. (2013). Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para La formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad. México, Universidad Pedagógica Nacional y Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Ley 115 de 1994. (1994). Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf consultado el 20 de Marzo de 2011
- Martínez, F. (2004). Guías de la Comisión Braille Española. Signografía matemática. Madrid, España. Comisión Braille Española. Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE). Dirección General. Dirección de Cultura y Deporte. Departamento de Recursos Culturales.
- MEN. (1997). Plan decenal de educación 1996-2005. Recuperado de http://www.plandecenal.edu.co/html/1726/w3-article-121191.html consultado el 12 de noviembre de 2011.
- MEN. (2014). Colombia avanza hacia una educación inclusiva con calidad (I). Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-168443.html consultado el 21 de agosto de 2014.
- MEN. (s.f). Plan decenal de educación 2006-2016. Recuperado de http://planipolis.iiep.unesco.org/upload/Colombia/Colombia_plan_decenal_educacion_2006-2016.pdf consultado el 12 de noviembre de 2011.
- Parra, C. (2010). Educación inclusiva en Colombia. Un derecho para todos. Fondo de publicaciones Universidad Sergio Arboleda. Bogotá.

Experiencia de innovación: la matemática, como elemento de análisis de problemáticas sociales

Liceo Segovia, (Colombia). Área de matemáticas

1. Introducción

El Liceo Segovia es un colegio de la Institución Teresiana que 51 años de funcionamiento y cuyo PEI es: Formación de agentes de cambio, agentes de transformación social que tiene sus fundamentos en la Propuesta Socioeducativa de la Institución Teresiana: "Educar en tiempos difíciles".

La metodología de trabajo del colegio es por proyectos integrados, ésta se ha implementado desde el año 2001. Anualmente son elegidos por los y las estudiantes 3 o 4 proyectos a través de un ejercicio democrático de selección de una problemática social, que convoca a todas las áreas del conocimiento. El área de matemáticas, hace parte de un grupo de áreas; desde las cuales se abordan problemáticas de la realidad. Los elementos propios de la misma, aportan desde el estudio interdisciplinar al análisis y/o solución de las problemáticas elegidas.

2. Descripción de la experiencia

La contextualización de realidades locales, nacionales y mundiales; en articulación con el PEI del colegio y a la luz de la Propuesta Socioeducativa de la Institución Teresiana (PSEIT), son características centrales del trabajo desde el área y claro está, desde el colegio.

Tenemos como carta de navegación en nuestra tarea pedagógica la PSEIT *"Educar en tiempos difíciles"* que es un referente teórico-práctico, clave en nuestras maneras de abordar el proceso formativo para todos los miembros de la comunidad educativa y de la cual nos retroalimentamos permanentemente. Su característica básica es una lectura crítica y permanente de la realidad y de los contextos en donde estamos; trabajo inicial en cada uno de los proyectos integrados. Por eso nuestro trabajo tiene como centro las problemáticas sociales cuyo objetivo principal es articularnos con nuestro PEI: *"Formación de agentes de cambio, agentes de transformación social"*

En el marco de la propuesta socioeducativa, la matemática se concibe como la ciencia de las interrelaciones y está presente en el comprender, en el convivir y en el actuar, es un área que proporciona los medios para analizar y deducir. La relación entre la matemática y la vida es muy estrecha, se hace más evidente en el trabajo por proyectos, abriendo la posibilidad para el trabajo de temas del currículo en las distintas problemáticas que se plantean y también profundizar e investigar en temas que convencionalmente no se encuentran en este. "*Hay que juntar también la ciencia porque el cumplimiento de tus deberes exige ciencia, que no podrás enseñar si no la posees…"(PSEIT)*.

Los valores propios de esta área son entre otros, la disciplina intelectual, la autocrítica, la claridad, precisión y objetividad, la capacidad de reflexión y análisis, los hábitos de orden y la sistematización, la ayuda mutua, la creatividad y la originalidad, la responsabilidad y la constancia.

> Vosotros, pues, aplicando todo cuidado, juntad a vuestra fe, virtud, y a la virtud, ciencia. Y a la ciencia templanza, y a la templanza, paciencia, y a la paciencia, piedad" (Fe, virtud, ciencia y estudio. San Pedro Poveda, 1919,1920, 1930).

Se reconoce a la matemática como una ciencia que tiene todas las posibilidades para el análisis y planteamiento de posibles soluciones, a problemáticas sociales.

Proyectos integrados como metodología de trabajo

Los proyectos integrados como metodología de trabajo nos abren grandes posibilidades para que desde las distintas áreas, aportemos al estudio de la realidad; es decir que el conocimiento cobra sentido en la medida que permite analizar dicha realidad y proponer acciones concretas frente a situaciones de desigualdad, pobreza, injusticia y exclusión.

Contextualizar el aprendizaje, hace de éste algo realmente significativo. Contar con los intereses de los y las estudiantes en la construcción de sus propios proyectos integrados, nos permite aprender junto con ellos y ellas, nos implica llevar a cabo procesos de negociación y elección. Y en esa dinámica diaria que implica el trabajo por áreas, se promueve en los y las estudiantes una formación para que desde los primeros años sean capaces de hacer su propio horario y decidir con responsabilidad su asistencia a esas diferentes áreas, esto les ha permitido a ellos y a ellas, irse construyendo como seres autónomos y responsables en esa toma de decisiones; igualmente el no tener un único texto guía, sino que puedan contar con textos de distintas editoriales, con fuentes plurales de consulta; favorece la investigación, el pensamiento crítico y divergente y propicia en los y las estudiantes la necesidad de evidenciar estos diferentes puntos de vista de la información que a diario reciben para poder asumir una posición crítica frente a la misma, que implique un análisis de esas diferentes miradas.

Construcción del proyecto

Se parte siempre del análisis de la realidad, estudiando, analizando y cuestionando los elementos que intervienen en alguna situación problematizadora, que dará paso a la construcción del tópico generador y los hilos conductores del proyecto.

La elección de la problemática, a partir del segundo período, la hacen los y las estudiantes, después de haber escuchado los argumentos del planteamiento y teniendo como base que sea integradora, y que convoque a las áreas de estudio.

Un proyecto integrado está formado así:

- *Tópico generador,* como la problemática a abordar desde las distintas áreas.
- *Hilos conductores,* como los grandes interrogantes que no son de respuesta inmediata, sino que requieren consulta, investigación, recopilación de información desde diversas fuentes, y análisis; que permitan proponer caminos de solución.
- *Metas de comprensión,* que es aquello que queremos que los y las estudiantes comprendan.
- *Criterios de evaluación,* que describen qué elementos serán tenidos en cuenta para la evaluación.
- *Cronograma,* que da paso a las distintas etapas del proyecto.

Etapas del proyecto

- **Exploración/Sensibilización**, que es el primer acercamiento a la definición de la problemática y que busca que nos interpele y genere inquietudes.
- **Indagación**, como la línea, tenida en cuenta, desde cada departamento. Orienta el aporte desde cada una, para llegar a responder los hilos y a plantear posibles soluciones a la problemática. Esta línea se denomina orientaciones temáticas; muestra el camino que durante esta etapa, seguirá cada área. Por ejemplo, en matemáticas, se pueden plantear temáticas del currículo o que sean del área, sin que necesariamente estén en el mismo. Esta etapa se desarrolla en los espacios de ATP (área de trabajo personal), a la cual los y las estudiantes asisten de acuerdo a un horario que han elaborado por sí solos; o en el caso de los más pequeños, que han hecho con apoyo de sus tutores. En este espacio, los y las estudiantes, toman su material y estudian por sí solos, preguntando las dudas al docente.
- **Profundización**, como la búsqueda de algunos y nuevos enfoques que se descubren y hacen parte de nuevos aportes o prioridades que conlleven a desarrollar estrategias de solución a la problemática. Por lo general, se plantea una o dos actividades que apunte a esta etapa.

- En las diversas etapas, se busca que haya participación de las familias, planteando alguna actividad dentro del proyecto, que la invite a hacer parte del mismo a través de sus aportes.
- **Centros de interés/ATS** (área de trabajo socializado), como el trabajo en equipo que permita compartir visiones, posturas, intereses comunes, posibles estrategias. En esta etapa, los y las estudiantes, plantean una forma creativa de mostrar lo trabajado en todo el proyecto.
- **Socialización**, como la puesta en común de lo trabajado en grupo.
- **Interniveles**. Es una etapa que se lleva a cabo, cuando los proyectos son comunes de kínder a once. Implica el trabajo con estudiantes de kínder a once, que comparten las visiones de la problemática desde las distintas edades.

3. Referentes teóricos e ideas

Algunos referentes de trabajo en el colegio, que desde el área de Matemáticas también hemos asumido, son:

Enfoque socioeducativo de la PSEIT

"La concepción que considera la educación –entendida en un sentido amplio– como toda actividad orientada a la maduración integral de cada persona y al desarrollo de los grupos sociales, afirma que éste es un aspecto clave en la promoción de una transformación social comprometida con los procesos de humanización y construcción de sociedades sostenibles y justas. Enfatiza la estrecha interdependencia entre el tipo de personas que queremos formar, los procesos, y experiencias que promovemos y las sociedades que pretendemos ayudar a construir. Es lo que convenimos en llamar enfoque socioeducativo" (XVI Asamblea plenaria de 2006).

PSEIT. Es una propuesta de inspiración povedana, que parte del reconocimiento de la pluralidad y que desde las distintas realidades de América, plantea a la educación y la cultura, como bases para la transformación social. Escrita en clave de la justicia y la solidaridad para

todos y todas, y reconociendo el diálogo fe-ciencia, como uno de sus puntos clave. Está diseñada a partir de varios títulos: Constataciones y referentes (Contexto y perspectivas, corrientes pedagógicas transformadoras y desafíos actuales a la luz de la pedagogía Povedana, líneas estratégicas (énfasis comunes; presentados en forma de triadas y subrayados específicos). Finalmente un anexo, con la selección de varios textos del fundador de la I.T. Pedro Poveda.

Pedagogías transformadoras. PSEIT "Educar en tiempos difíciles"

"Una pedagogía transformadora de inspiración cristiana y teresiana se propone promover una educación:

- Humanizadora y personalizadora, que reconoce el valor sagrado de cada persona.
- Estimula su crecimiento en todas sus dimensiones, en interacción con los demás.
- Contextualizada, históricamente situada, atenta a los desafíos de la construcción de sociedades democráticas, justas y solidarias y comprometidas con el ejercicio de una ciudadanía activa y crítica.
- Que quiere colaborar en la afirmación de una globalización solidaria, capaz de promover una conciencia planetaria, el reconocimiento de las diferentes culturas, la perspectiva de género, la valoración positiva de la propia identidad y de la diversidad cultural latinoamericana.
- Que cree en la vivencia de valores como los de la justicia, solidaridad, derechos humanos, diálogo, respeto mutuo, dignidad humana, paz, preservación del medio ambiente, ética y trascendencia como estructurantes fundamentales de la vida humana en su dimensión individual, comunitaria, social y cósmica.
- Que favorece procesos de construcción del conocimiento en el ámbito personal y colectivo, el diálogo entre las ciencias, los saberes sociales y los avances tecnológicos, así como la perspectiva interdisciplinar de análisis de la realidad.
- Atenta al diálogo fe-culturas-justicia, que exige promover la inculturación de la fe, la experiencia religiosa, la conciencia eclesial y el diálogo interreligioso"

Enseñanza para la compresión

La mejor forma de promover la enseñanza para la comprensión se desarrolla asumiendo el currículo como un proyecto de investigación en la acción o acción reflexión, que supera la relación unidireccional de especialistas, docentes y estudiantes, y que hace de la docencia una práctica dialogante.

La enseñanza para la comprensión, involucra a los y las estudiantes en su proceso de aprendizaje. Las preguntas claves de los mismos, determinan qué contenidos deben comprenderse, identificando temas relevantes a través de los tópicos generadores y organizando propuestas curriculares, alrededor de ellas. Además clarifica que los estudiantes, deben comprender, articulando metas claras y motivándolos haciéndolos parte de esencial de su propio aprendizaje.

Pedagogías críticas

El contexto se constituye en el espacio en el cual el conocimiento adquiere significado. La educación no se puede entender al margen de un contexto, al margen de la sociedad. Una educación divorciada de su contexto carece de valor. Este es uno de los postulados de la pedagogía crítica.

La pedagogía crítica se enfrenta a los problemas reales que se espera que sean analizados, comprendidos y transformados en beneficio de la comunidad afectada. Decimos, entonces, que la pedagogía crítica es contextualizada porque examina las prácticas educativas en su contexto y analiza sus vínculos políticos y sociales. De acuerdo con lo expuesto por McLaren (1997), a continuación señalamos algunas características que se le asignan a la pedagogía crítica:

- Entiende la educación como un proceso de negociación que facilita la comprensión de los significados de la realidad. De ahí la importancia de la formación de la autoconciencia, que convierte a la comunicación biunívoca en un proceso de permanente construcción de significados que se apoyan en las experiencias personales.

- Está encaminada a la transformación social en beneficio de los más débiles. La educación como acción emancipadora debe considerar las desigualdades sociales existentes en el mundo globalizado, así como adquirir un compromiso con la justicia y la equidad y con la emancipación de las ideologías dominantes.

- Apuesta por la autonomía y el autofortalecimiento. Debe permitir a los profesores, y a la comunidad educativa en general, identificar las

limitaciones y potenciar las capacidades de tal forma que éstas sean la base para la autosuperación.

Entre los elementos que requiere la pedagogía crítica se pueden señalar los siguientes: la participación, la comunicación, la significación, la humanización, la transformación y la contextualización.

Según Noam Chomsky (2002), lo que un individuo interioriza a través del proceso de socialización –las representaciones internas– depende del contexto en el que éste está inmerso (familiar, social, cultural y educativo). Cada individuo interactúa e interpreta de diferente manera la realidad en la que vive; esta interpretación se basa en las representaciones internas que construye. Según sean estas interpretaciones, así serán las actuaciones que realice; por ello, un individuo es más competente en la medida en que sus representaciones internas favorecen una mejor actuación sobre su vida. Al respecto, Lundgren (1992) y Pérez Gómez (1998), entre otros autores, consideran que la educación debe tener presente estas relaciones y determinar cómo las condiciones estructurales de la sociedad influyen en el proceso educativo.

Una educación contextualizada utiliza el entorno como recurso pedagógico (Fernández y Justicia, 1987; Harlen, 1998). Una educación contextualizada será aquella que motive las relaciones del conocimiento con el contexto real del individuo y que lleve al conocimiento más allá, examinando las situaciones de otros contextos, analizando sus contradicciones y encuentros.

Los currículos cerrados constituyen un obstáculo para que el estudiante, en contacto con su realidad, descubra, comparta, discuta y reconstruya nuevos significados, que en la dinámica de los currículos pocos flexibles permanecen ocultos detrás de los intereses academicistas que privilegian la neutralidad antes que la asunción de un enfoque crítico que lleve a optar por la emancipación, por la transformación, por la autonomía. Si el currículo es crítico, debe ser abierto y flexible y tener en la mira la comunidad, la región, el país y el mundo”.

Educación personalizada

"Busca humanizar a hombres, mujeres, niños y niñas. Parte de creer en el estudiante como una persona original, creativa, única e irrepetible con posibilidades, con capacidad de autogobernarse, de entablar relaciones y con el deseo de darle sentido a su vida. La finalidad de la metodología personalizante es servir de guía y orientación al desarrollo de la personalidad de los estudiantes. Para lograr este objetivo se requiere de un maestro que en su quehacer educativo involucre acciones metodológicas como las siguientes:

- Fomentar el diálogo, propiciar la participación democrática, la toma de decisiones, el trabajo en equipo, la búsqueda de la verdad en forma participativa.
- Establecer una relación de comprensión y empatía con los estudiantes a nivel individual y cooperativo.
- Reconocer y valorar las potencialidades de los estudiantes como seres humanos identificando los talentos que hay en cada uno de ellos para propiciar su desarrollo.
- Involucrar al estudiante en forma activa y responsable en la construcción del conocimiento mediante un plan de trabajo y unos objetivos claros y precisos.
- Hacer uso de la tecnología educativa para ayudar en la orientación y desenvolvimiento del proceso de humanizar y personalizar la educación.
- Crecer en armonía con la comunidad educativa en los valores y características que propone la educación personalizada.
- Fomentar desde las distintas disciplinas del conocimiento una cultura centrada en los valores, que unifique las mentalidades científicas, técnicas y humanísticas que se dan en el establecimiento educativo y en la sociedad en general.
- Facilitar aprendizajes pertinentes enfocados al desarrollo humano con la finalidad de lograr los cambios sociales que exige la sociedad actual.
- Conocer y respetar los estilos y ritmos de aprendizaje de cada estudiante.
- Basar la orientación del aprendizaje en el desarrollo de las potencialidades y no en las limitaciones de los estudiantes.
- Reconocer y aceptar que cada estudiante tiene talentos y posibilidades y por lo tanto es capaz de aprender, sólo necesita un adulto mediador que lo acompañe a encontrar el método apropiado a sus características cognitivas y emocionales para seguir él solo en el aprender a aprender".

Paradigma ecológico contextual

El aprendizaje contextual y compartido sería una de sus principales manifestaciones. En este sentido el contexto, como conducta vivenciada y significativa para el sujeto debe ser incorporado al aula y favorecer el aprendizaje significativo. Como tal, el contexto se convierte en vivencia interpretada y conceptualizada. De este modo el proceso de enseñanza-aprendizaje no es solo situacional, sino también personal y psicosocial.

El aprendizaje compartido socializador (Vygotsky) resulta importante para este paradigma. El profesor, los padres, la escuela, el barrio... se convierte de hecho en mediadores de la cultura contextualizada.

El paradigma ecológico, según Hamilton, se preocupa sobre todo de:

- Atender a la interacción entre personas y su entorno, profundizando en la reciprocidad de sus acciones.
- Asumir el proceso de enseñanza-aprendizaje como un proceso interactivo continuo.
- Analizar el contexto del aula como influido por otros contextos y en permanente interdependencia.
- Tratar procesos no observables como pensamientos, actitudes y creencias o percepciones de los agentes del aula.

Shulman (1986) concreta más esta unidad de análisis desde una perspectiva ecológica. Y afirma que se centra en:

- El ecosistema del alumno.
- La clase.
- El profesor.
- Su escuela/centro.
- La comunidad que enmarca el entorno.

4. Sistematización de la experiencia

Después de estudiar varias concepciones de sistematización, la definimos como: Una reflexión pedagógica de la experiencia. La realizamos de forma escrita, y en colectivo; teniendo como énfasis los siguientes apartados: Desarrollo de cada etapa del proyecto, implicación de las familias, qué de

nuevo se hizo, presencia de PSEIT y PEI en el proyecto, conceptos abordados, cómo se constató y evaluó, aciertos, dificultades.

Proyecto integrado y el trabajo en matemáticas

Desde nuestra metodología de trabajo, por proyectos integrados; este tercer período académico, y después de una elección democrática por parte de los y las estudiantes de kínder a once, estamos desarrollando el siguiente proyecto integrado: "*Citizenship and cultura behind the great metropolises*".

Tópico generador. Ciudadanía y cultura detrás de las grandes metrópolis

Hilos conductores

- ¿Cómo los principios de igualdad, justicia y libertad aportan a la formación de una ciudadanía activa y crítica?
- ¿Por qué la globalización ha impactado las culturas de las grandes metrópolis?
- ¿Cómo las expresiones culturales deberían influir en la humanización de las grandes metrópolis?
- ¿Cómo ejercer una ciudadanía crítica, intercultural, responsable y transformadora?

Metas de comprensión

Comprenderé que:

- Una ciudadanía activa y crítica, se fundamenta en la "vida como centro, en la solidaridad con el género humano, en la participación, en la inclusión y en el asumir el riesgo de transformar la realidad"
- La globalización ha generado cambios en las formas de vivir, sentir y actuar de los ciudadanos y ciudadanas de las grandes metrópolis.
- Las expresiones culturales podrían influir en la humanización de las grandes metrópolis.
- Ejerciendo una ciudadanía crítica, intercultural y responsable, podré generar transformaciones que impliquen ambientes de inclusión y cultura.

Criterios de evaluación

- Reconozco que una ciudadanía activa y crítica, se fundamenta en la "vida como centro, en la solidaridad con el género humano, en la participación, en la inclusión y en el asumir el riesgo de transformar la realidad"
- Analizo los cambios que ha generado la globalización en la vida de los ciudadanos y ciudadanas de las grandes metrópolis.
- Valoro las expresiones culturales como medios de humanización de las grandes metrópolis.
- Identifico los elementos de una ciudadanía que puede transformar.
- Reconozco que ejerciendo una ciudadanía crítica, intercultural y responsable, podré generar transformaciones que impliquen ambientes de inclusión y cultura.

5. Desarrollo del proyecto

Desde el área de matemáticas, el proyecto integrado del tercer periodo, ha sido abordado desde el estudio de las formas geométricas y sus estructuras, análisis de sus características y relaciones, así como la visualización espacial a través de la construcción y la manipulación de representaciones mentales de objetos de dos o tres dimensiones con el objetivo de promover habilidades en la planeación de viviendas justas y humanizantes en las ciudades, desde su urbanización y arquitectura; analizando cómo, muchas veces las construcciones en las ciudades, no responden a la necesidad de humanizar nuestras grandes ciudades.

Con los estudiantes de grado once, además, se trabajó el crecimiento (o decrecimiento) poblacional y sus incidencias en la vida.

También analizaron, cómo otras construcciones llenas de la maravilla de la geometría, han hecho de algunas metrópolis, ejemplos de desarrollo humano.

La idea fue, que finalmente, plantearan modelos de construcciones dignas y humanas, a través del uso de la geometría. Esto implicará a la vez, que como ciudadanas y ciudadanos se impliquen no sólo en cómo construir en nuestras ciudades, sino en cómo promover actitudes ciudadanas críticas, en estos espacios.

Los niños y niñas de los primeros niveles, trabajaron en cuanto a las nociones espaciales cerca – lejos, derecha izquierda, expresiones de tiempo (durar más que, menos que; tardar más que, menos que), esquina- calles y carreras y los puntos cardinales (norte, sur, oriente, occidente), como orientación con respecto al sol; y así pudieron reconocer dentro de la ciudad Bogotá, fácilmente la ubicación de sus viviendas, dentro de las 20 localidades en que está dividida.

La ubicación espacial en el plano, fue otro de los temas abordados; reconociendo los pares ordenados y el movimiento horizontal y vertical; como identificación de calles, carreras, diagonales y transversales. Dibujar la ubicación de sus viviendas, les permitió reconocer que no estamos solos ni solas dentro de una cuadra, sino que estamos con otros y otras. Se utilizó el metro, para determinar a nivel general, que una cuadra mide 100 m pero que puede variar por la extensión de la ciudad y de las localidades. Reconocieron avenidas principales y los lugares más comunes para ellos; enfatizando en cada momento que comparten con otros seres fuera de sus viviendas; seres y lugares que deben cuidar, respetar e incluir dentro de su convivencia. Así mismo propusieron acciones que involucraran a otros y otras y que busquen el bienestar colectivo. Aquí mismo, se pudo trabajar con las conversiones entre submúltiplos y múltiplos del metro, teniendo en cuenta las relaciones de equivalencia entre ellas. Esto con el fin de poder determinar extensiones, formas y dimensiones de los lugares.

Conocieron las 10 ciudades más grandes de Colombia, revisando las construcciones y estableciendo relación con algunas figuras planas y sólidas que se utilizan en ésta; buscando que analicen algunas construcciones y puedan plantear modelos de vivienda que permitan tener una vida digna y pensando en cómo la geometría puede utilizarse para optimizar los espacios, los recursos y los ambientes.

Para los grados de bachillerato; se realizó un acercamiento a la arquitectura en grandes metrópolis, como un instrumento representativo de las mismas y como expresiones de lo que hemos sido, somos y seremos, dando cuenta, a través de ellas de cómo es un pueblo, su cultura y su visión.

En este sentido, la geometría se mostró como un componente básico de la arquitectura, los estudiantes observaron la habitación donde habitan, la casa

donde viven, el salón de clase, entre otros lugares, concluyendo que tienen forma prismática, y llevaron su observación a otras formas poliédricas de muchas edificaciones sorprendentes. Tuvieron la posibilidad de apreciar las metrópolis con ejemplos sobresalientes que muestran la cultura de una sociedad a través del diálogo geometría y arquitectura. También pudieron identificar la triangulación de estructuras y formas espaciales en obras arquitectónicas famosas, finalmente hicieron una reflexión sobre cómo la geometría podría aportar para el diseño de ciudades que proporcionen condiciones de vivienda dignas para todos los ciudadanos.

Posteriormente hicieron una investigación en los textos de matemáticas; en inglés; sobre polígonos, círculos, perímetros, áreas y volúmenes, conceptos que debían aplicar en la elaboración de una maqueta que representara una metrópolis, los niños y niñas elaboraron distintos cuerpos sólidos, incluyendo los sólidos platónicos; y luego los aplicaron en su maqueta, para la construcción de edificios y viviendas, coincidiendo en la importancia de asignar regiones para zonas verdes, museos, hospitales, colegios y demás espacios de recreación como derechos fundamentales de los y las ciudadanas.

Adicional a esto se realizaron ejercicios de papiroflexia, para la representación de sólidos, que permitió entender sus elementos y características. Con el grado once, además, se trabajó el crecimiento-decrecimiento exponencial de la población; y su representación a través de funciones exponenciales y su análisis; llegando a ver cómo en el mundo, este comportamiento de las poblaciones; afecta de múltiples maneras la vida en general.

6. Resultados y dificultades desde el área

Dificultades

- Temor a la innovación, particularmente de parte de algunas familias.
- Algunas realidades que promueven el conocimiento segmentado y competitivo.

- Algunos temas requieren de mecanización, y a veces, no se comprende que ésta no necesariamente se hace a través de cientos de ejercicios; sino de algunos bien escogidos.
- No todos los proyectos, resultan como se han planeado. A veces las orientaciones temáticas, toman un rumbo diferente al que debe tener, que es el tópico generador.

Resultados

- El acercamiento de las familias a la propuesta de innovación.
- El manejo del currículo, desde una mirada problematizadora de la Matemática.
- Formación en competencias matemáticas para solucionar problemáticas de la realidad.
- Reconocimiento de la Matemática, como base de análisis y solución de diversas problemáticas.
- Formación en autonomía.
- Desarrollo de habilidades que permiten a los y las estudiantes, estudiar por sí solos, textos y material de Matemáticas.
- Las temáticas que no se desarrollan en el proyecto y que son básicas; se llevan a cabo en los espacios de monitorias. Resulta sencillo abordarlas, por el grado de comprensión que logran los y las estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Poveda, San Pedro. (1919, 1920, 1930). Fe, virtud, ciencia y estudio.
- PEI: Formación de agentes de cambio, agentes de transformación social. Liceo Segovia.
- Enseñanza para la compresión. Consultado en: http://www.monografias.com/trabajos 17/ensenanza-para-comprension/ensenanza-para-comprension.shtml#ixzz39f4GAkcz
- Pedagogías críticas. Conultado en: https://guayacan.uninorte.edu.co/divisiones/iese/ lumen/ediciones/4/articulos/monica_borja.html
- Buitrago Jerez, Orfa y Amaya, Blanca Lilia. Educación personalizada.
- Paradigma ecológico contextual. Consultado en: http://es.slideshare.net/garrick.xa/ paradigmas-de-la-educacion-completo.

Enseñanza de la geometría utilizando el software dinámico Cabri.

Una experiencia gracias al acompañamiento de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Institución Educativa Departamental Pompilio Martínez de Cajicá, (Colombia).
Área de matemáticas

1. El contexto

Cada día la utilización de la tecnología se hace más necesaria en la vida de los seres humanos, es importante conocer y utilizar las diferentes herramientas al igual que la aplicación de las TIC, para poder avanzar al ritmo que lo hace el resto del mundo. Por esta razón las instituciones educativas deben brindar a sus estudiantes formación en el manejo y aprovechamiento de estos recursos.

La IED Pompilio Martínez se preocupa por brindar a sus estudiantes una educación integral, de calidad y acorde a las necesidades de su población. Esta institución de carácter oficial se encuentra ubicada en el municipio de Cajicá, Cundinamarca, atiende alrededor de 1400 estudiantes desde los grados preescolares hasta el grado undécimo y promociona bachilleres con énfasis en Gestión Ambiental.

2. Las oportunidades que brinda un convenio

Para el fortalecimiento del área de matemáticas se ha establecido un convenio con la Universidad Distrital Francisco José de Caldas el cual permite desarrollar un proyecto en la enseñanza de la geometría utilizando un software dinámico Cabri.

El convenio se originó por la propuesta que le hizo el doctor Carlos Vasco de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas a la rectora de la institución. El convenio establece el desarrollo de un proyecto creado por el doctor Martín Acosta Gempeler, profesor de la misma universidad.

En junio de 2013 se inició la capacitación teórica y práctica dada por el profesor Martín Acosta a las docentes de matemáticas la cual se continúa en la actualidad. Dicha capacitación se realiza semanalmente los viernes de 10:30 a.m. a 12:30 p.m. donde se comentan las actividades realizadas durante la semana, logros e inquietudes que se han presentado y se hace una realimentación, también se preparan las actividades a realizar la siguiente semana.

Podemos afirmar que actualmente este es un proyecto institucional puesto que se ha incluido en el plan de estudio de matemáticas para los grados sexto y séptimo, con proyección de cubrir todos los grados, además todas las docentes del área están comprometidas con la implementación del mismo.

3. Desarrollo del proyecto

La ejecución del proyecto se inició en el año 2014 en los grados sexto y séptimo, se trabajó el tema de simetría axial en el primer semestre, luego traslación y se pretende desarrollar también simetría central. Para la enseñanza de cada tema se presentan cuatro actividades y en cada una de ellas se deben desarrollar tarea, cada tarea pretende trabajar una propiedad o característica especial del tema. Las actividades se han planeado y organizado previamente para desarrollar de manera progresiva el tema.

Existe un documento llamado "Análisis *a priori*" en que se presentan las posibles acciones, reacciones y situaciones que se pueden dar por parte de los estudiantes y las recomendaciones para que los docentes los guíen y no permitan que abandonen la actividad.

Para la realización de las actividades los estudiantes trabajan por parejas intentando resolver las tareas con la ayuda del software y las figuras preparadas, comentando, discutiendo y poniéndose de acuerdo sobre las estrategias a seguir para alcanzar la tarea indicada. Al terminar cada serie los

estudiantes dibujan en el cuaderno y registran las acciones realizadas en cada una de ellas, lo que permite plasmar en el papel lo que se ha hecho en el computador.

Al finalizar cada actividad se realiza una puesta en común por parte de los estudiantes en la que ellos cuentan lo que experimentaron, las dificultades encontradas, las estrategias utilizadas y los logros obtenidos. Se tiene especial cuidado de iniciar con aquellos grupos que no lograron culminar todas las series y así, al compartir sus avances sienten que su trabajo es importante y que los demás valoran lo que han hecho. Además se sienten seguros de expresar y contar la experiencia que han tenido utilizando su lenguaje cotidiano, no es necesario emplear los términos técnicos del área y no es indispensable utilizar y aplicar conceptos geométricos. Al terminar cada puesta en común se sacan conclusiones.

Finalizando las series tres y cuatro se debe realizar una construcción que permite aplicar las propiedades analizadas en las series anteriores y que lleva a la adquisición del tema que se trabaja. En este momento se presenta el paso de la precepción a la teoría. Ahora el docente da a conocer a los estudiantes el nombre del tema que se ha estado trabajando y conjuntamente con los ellos, organiza las propiedades analizadas dando los nombres técnicos, lo cual se conoce como la institucionalización (relación del conocimiento con el saber).

4. Reflexiones

Como docentes al vivir esta experiencia, encontramos diferencias significativas en la enseñanza aprendizaje de la geometría respecto a clases anteriores, pues ahora el estudiante construye su propio conocimiento mediante la realización de las tareas. El profesor es un acompañante del proceso que anima a los estudiantes para que no abandonen el trabajo y los guía para que culminen exitosamente las tareas.

En cuanto a nuestro quehacer como docentes en los demás temas de matemáticas, hemos reflexionado sobre cómo aplicar esta metodología y lograr que los estudiantes, mediante nuestra orientación y el desarrollo de actividades logren construir sus propios conocimientos.

Se pretende que este proyecto se aplique en todos los grados de bachillerato. Para el año 2015 ya se ha estructurado la asignación académica para grado octavo, en el que se incluyen las dos horas destinadas a la clase de geometría que este año corresponde solo a los grados sexto y séptimo. De igual manera se planea ampliar el cubrimiento a grado quinto en algunos años.

Para efectos de socialización del proyecto, se ha dado a conocer a los docentes del municipio en el Coloquio Municipal organizado por el CIFE de la Universidad de los Andes, el día 28 de agosto 2014. También en la institución se dio a conocer el proyecto a los estudiantes de grado octavo, noveno, décimo y undécimo, mediante una exposición llevada a cabo por los estudiantes de grado sexto y séptimo que están recibiendo está formación el pasado 03 de septiembre de 2014 en el "Día de la matemáticas".

5. Conclusiones

Los padres de familia tienen la oportunidad de conocer el trabajo que realizan sus hijos cada semana, revisan los apuntes que ellos llevan en sus cuadernos y nos envían sus comentarios al respecto. Los padres manifiestas su agrado por la nueva metodología que se está llevando y algunos manifiestan su interés de que se amplíe a las clases de matemáticas en general.

La aplicación de este proyecto ha sido de gran impacto especialmente en el trabajo como docentes de matemáticas, nos ha cuestionado en nuestro papel de docentes que se limitan a transmitir información. Ahora nos preocupamos por orientar a nuestros estudiantes para que analicen, cuestionen, den sus puntos de vista de las experiencias que viven en cada clase y que sean ellos quienes construyan sus conocimientos no solo en la geometría sino en los demás temas de la matemática.

En cuanto al desempeño de nuestros estudiantes observamos que ahora son más expresivos, ha mejorado notoriamente la participación en las diferentes clases, sus comentarios son críticos, tienen argumentos, valoran y respetan la opinión de sus compañeros, logrando concluir finalmente las características y propiedades del tema que se trabaja.

Regresar al índice general

Talleres

Índice de esta sección

Prácticas matemáticas en la geometría de Descartes. Aportes a la formación de profesores 392

Caminos para desarrollar competencias matemáticas desde la educación inicial 401

Gestión y estructuración del espacio con profesores. Una estrategia para centrar la atención en estudiantes con dificultades de adaptación a la vida escolar 408

Otra forma de evaluar un programa de matemáticas para niños en condición de extraedad, sin pruebas masivas 415

Introducción al cálculo de probabilidades con GeoGebra 421

Actividades para la enseñanza de la ecuación de la recta utilizando el software gratuito CaRMetal 430

Matemáticas y TIC 435

Problemas de variación para el aprendizaje de la derivada 439

Prácticas matemáticas en la geometría de Descartes.
Aportes a la formación de profesores

Bello, Jhon Helver - Forero, Alberto
jhbelloc@udistrital.edu.co - albertoforero84@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

El taller contribuye en el análisis de las prácticas asociadas al uso de la relación: instrumento –representación gráfica– representación simbólica; que históricamente se pueden deducir del trabajo que René Descartes presentó en uno de los apartados del discurso del método, llamado Geometría. En este documento Descartes, rompe con la tradición que dejó la geometría euclideana, propone un nuevo modelo de resolución de problemas geométricos y cuestiona el valor de certeza y exactitud de la noción de construcción. Con el fin de acercar a los asistentes a las prácticas matemáticas que llevaron a Descartes a estos planteamientos, se plantean algunas actividades para desarrollar con estudiantes para profesor de matemáticas, pensando que a partir de este trabajo ellos pueden reflexionar sobre elementos que configuran el desarrollo del álgebra escolar.

Palabras clave: Geometría Descartes, representaciones, instrumentos, formación de profesores.

1. Temáticas

La propuesta desarrolla actividades que se pueden abordar desde el modelo de solución de problemas geométricos propuestos por Descartes, con el ánimo de que profesores en formación usen este conocimiento para reflexionar sobre el álgebra escolar.

2. Objetivos

- Desarrollar un ejemplo de uso de la historia de las matemáticas en la formación de profesores de matemáticas.
- Reflexionar sobre los aspectos que aparecen en la geometría de Descartes sobre el uso de representaciones en la solución de problemas geométricos.

3. Referentes teóricos básicos

Inicialmente se van a realizar algunos planteamientos generales sobre el marco en que se incluyen propuestas como esta. Seguidamente, se trazan las ideas teóricas que llevan a buscar en la historia de la matemática aspectos para el trabajo en la formación de profesores. Luego se presentan a partir de algunos elementos expuestos por Descartes en el texto de la Geometría reflexiones sobre la relación entre los instrumentos mecánicos, las representaciones gráficas que producen éstos y su desarrollo simbólico.

La historia de la matemática en la formación de profesores

Al hacer una revisión del uso de la historia de las matemáticas en los programas de formación de matemáticas en Colombia, Torres & Guacaneme (2012), encuentran que la historia de la matemática ha sido usada en la formación de profesores de matemáticas a partir de anécdotas, cursos sobre el tema o haciendo uso de análisis históricos de algunos objetos matemáticos. Sin embargo, el lugar de esta área de conocimiento en este tipo de formación es todavía difuso y puede seguir siendo etéreo en el impacto sobre las reflexiones que deberían hacer los futuros profesores sobre las matemáticas, la constitución de objetos matemáticos y el uso de herramientas que permitan su construcción.

En este sentido, Arboleda (2012) ha planteado que la historia de la matemática debe estar situada pedagógicamente para contribuir en el desarrollo de la capacidad del profesor para saber-analizar su propia práctica, entendiendo esta dualidad como *"una interrogación del docente sobre los*

conocimientos que se movilizan en su experiencia (incluso los de su propia formación), con el fin de establecer en qué medida se reconoce en ellos o debe reproducir" (Arboleda, 2012, p. 1)

De acuerdo a lo anterior, el papel de la historia se enmarca en los aspectos que permitieron la constitución de lo matemático en algún periodo de la historia, lo que implica para el formador de profesores profundizar en las intimidades propias de la historia de la matemática y extraer las prácticas asociadas al uso, rigor y validación del asunto matemático en cuestión. De esta manera compartimos con Glas (2007, p. 25) que ""*las matemáticas son el producto de una práctica humana común, pero al mismo tiempo este producto es parcialmente independiente de la práctica que la produjo".* Lo que implica reconocer que las matemáticas son únicas como práctica social y por lo tanto su historia recorre diferentes posturas epistemológicas y ontológicas no solamente de los objetos sino también de las propias matemáticas.

El caso de la geometría de Descartes

Como un caso particular de las posturas propuestas en el aparatado anterior, se tomará la traducción al español de la Geometría de Descartes realizada por Sánchez en 1996, con el fin de comprender las prácticas de la temprana edad moderna, que se acentuaron en esta obra y que permiten que los historiadores localicen al autor en la historia del álgebra y al contenido de este texto como la creación de la geometría analítica a partir del uso de una nueva forma de abordar problema geométricos. Nos vamos a centrar en las prácticas que se evidencian en el texto respecto a la actividad de representar en ella, y el uso de instrumentos y ecuaciones.

El trabajo sobre las representaciones asociadas a una curva en Descartes

En la perspectiva de la Europa del siglo XVII, preguntas sobre formas apropiadas de representación dominaron la actividad intelectual, no solo en ciencia y matemáticas, quizás aún más profundamente en discusiones religiosas, políticas, legales y filosóficas. (Shappin y Shaffer, 1985), por eso

se considera que la simbología cartesiana y su relación con las construcciones geométricas hacían parte del método cartesiano en sus trabajos filosóficos, es decir no sólo era una búsqueda por solucionar problemas geométricos sino que además comprendía una manifestación del pensamiento cartesiano, específicamente en geometría. Esta búsqueda logró intervenir en el trabajo de La Geometría, como una herramienta fundamental en el proceso de solución de problemas geométricos, caracterizada en el problema de Pappus (Bello y Forero, 2014).

La representación jugó un papel fundamental en la construcción y tratamiento de las situaciones problema en el discurso cartesiano, la aceptabilidad de una curva como geométrica se daba en términos de su construcción, pero, a pesar de que las ecuaciones algebraicas intervinieron radicalmente en la geometría, para Descartes no eran una representación con la cual se determine la aceptabilidad de una curva, únicamente fueron un medio para la clasificación de las mismas, "Descartes no considera la ecuación como una representación suficiente para una curva" (Mehrtens, Bos, & Schneider, 1981, p. 46). Para este escrito, se pretende demostrar diferentes relaciones entre las representaciones asociadas a un problema específico y un instrumento mecánico cartesiano expuesto en el libro II.

Para describirlo, se consideran las líneas AB, AD, AF y así cuatro, que se supone van a ser descritas por el instrumento YZ. Este instrumento consiste de varias reglas unidas de tal forma que YZ forme a lo largo de la línea AN el ángulo XYZ incrementándose o decreciendo en tamaño y cuando sus lados están juntos, los puntos B, C, D, E, F, G todos coinciden con A; pero como el tamaño del ángulo está creciendo, la regla BC formando ángulos rectos con XY en el punto B, empuja hacia Z a la regla CD que se desliza a lo largo de YZ siempre en ángulos rectos. De la misma forma, CD empuja a DE, que se desliza a los largo de la línea YX siempre paralela a BC; DE empuja a EF; EF empuja a FG; y así sucesivamente. Así imaginamos una infinidad de reglas, cada una empujando a otra, la mitad de ellas haciendo ángulos iguales con YX y el resto con YZ.

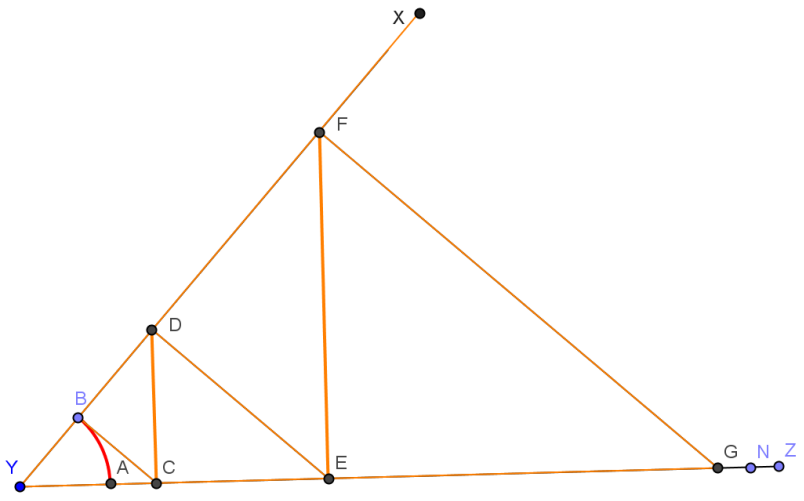


Figura 1. Instrumento para construcción de curvas de diferente complejidad

Ahora, como el ángulo XYZ crece, el punto B describe la curva AB, que es un círculo; cuando las intersecciones de las otras reglas a saber, los puntos D, F, H describen las otras curvas, AD, AF, AH, de donde éstas son más complejas que la primera y así más complejas que el círculo.

El trabajo simbólico sobre lo instrumental

A partir del instrumento expuesto por Descartes en su segundo libro de La Geometría, es posible realizar un trabajo deductivo, exponiendo el método cartesiano para interpretar simbólicamente las curvas que describe el instrumento. Para obtener ecuaciones asociadas a las curvas construidas en el instrumento, el método cartesiano manifiesta que es necesario identificar características de las reglas que intervienen en el mismo, identificando cuales son las cantidades conocidas y las cantidades desconocidas, luego es importante referenciar que las cantidades conocidas fijas se pueden representar por las letras a, b, c, d,.. y las cantidades desconocidas por las letras x, y, z.

Para este caso, las cantidades constantes son YA, YB y las variables son YC, CD, YD, y así consecutivamente. De esta forma es posible definir $YA = YB = a, YC = x,\ CD = y,\ YD = z$; entonces

$$z : x :: x : a$$

$$z = \frac{x^2}{a}$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

entonces es posible deducir que la ecuación para AD es

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2)$$

Si ahora se establece $YA = YB = a, YE = x,\ EF = y,\ YF = z$; entonces:

$$z : x :: x : YD$$

$$YD = \frac{x^2}{z}$$

$$x : YD = YD : YC$$

$$YC = \frac{\left(\frac{x^4}{z^2}\right)}{x} = \frac{x^3}{z^2}$$

y así es posible obtener

$$z = \sqrt[3]{\frac{x^4}{a}}, \qquad z^2 = x^2 + y^2$$

Entonces la ecuación para la curva AF es

$$x^8 = a^2(x^2 + y^2)^3$$

Hay que establecer en esta relación tal como lo nombra Bos (2001) el producto del análisis de la curva y su instrumento es la representación simbólica de la curva, aspecto que epistemológicamente le otorga un valor menor a este tipo de escritura; no es en Descartes donde lo simbólico toma la importancia de la etapa de la modernidad, es un trabajo simbólico sobre la curva construida a partir de un instrumento que parecía llevar la responsabilidad de otorgar validez al proceso.

El trabajo geométrico sobre lo instrumental

En los problemas geométricos previos al trabajo de Descartes, el énfasis estaba principalmente sobre las construcciones con regla y compás, lo que hacía limitar el número de curvas que se podían analizar y construir; para Bos (1981), desde la antigüedad hasta comienzos del siglo XVII la colección de curvas no cambió; fueron Descartes y Fermat quienes ampliaron este conjunto al involucrar una gran variedad de curvas algebraicas, estas son, las definidas por ecuaciones que contemplan el uso de operaciones algebraicas +, -, x, ÷, $\sqrt[k]{\ }$, con $k > 1$ entero.

En este sentido, el trabajo cartesiano sobre los instrumentos mecánicos permitió abrir un panorama que hasta los periodos previos a Descartes se obviaba por tener un carácter de "inexacto" en cuanto a la medida; así, la noción de curva se hace fundamental en el trabajo matemático y de diversas aplicaciones asociadas al concepto. De esta forma se habla de la complejidad de la curva, dependiendo del tipo de instrumentos que se utilizan para su construcción, para establecer una caracterización en donde la circunferencia y en general todas las secciones cónicas se establecen como las curvas de primer género, pero luego se establecen curvas, como en el caso del instrumento tratado en este escrito, AF, generada por el instrumento, gracias al empuje que dan las reglas anteriores, este concepto asocia la idea de complejidad de una curva a su construcción geométrica, es decir si una curva M es construida haciendo uso de las relaciones instrumentales y geométricas de otra curva N entonces M puede ser únicamente de igual o mayor complejidad que N.

La relación entre el trabajo geométrico y el trabajo algebraico

El trabajo simbólico en Descartes partió de la diferenciación de las cantidades conocidas y desconocidas, aspecto que ya había sido trabajado por Viète, como un medio para lograr encontrar ecuaciones que presentaron la relación entre las cantidades variables, haciendo uso de los parámetros conocidos. Este trabajo algebraico no podría haberse afianzado sin el uso de las diferentes herramientas geométricas que intervenían en el instrumento mecánico, principalmente las relaciones proporcionales entre los segmentos

presentes en la construcción y las relaciones en y entre triángulos y figuras geométricas.

4. Propuesta de actividades

A continuación se presentan dos actividades cuya solución llevan a reflexionar sobre los planteamientos teóricos anteriores. Situaciones con la misma intencionalidad son trabajadas en los espacios académicos de Problemas del Álgebra Geométrica y reflexionados en Didáctica del Álgebra de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital, LEBEM y serán trabajadas y reflexionadas durante el taller.

Las situaciones permiten comparar el abordaje desde la geometría y desde el álgebra, su solución por cualquiera de los caminos lleva a reflexionar la relación histórica entre elementos geométricos y el planteamiento y solución de ecuaciones. El proceso que permite la solución de cada uno de los problemas aporta la discusión que permite comprender la importancia del álgebra, el uso de la letra y la solución de ecuaciones.

- **Situación 1:** Construir un triángulo equilátero cuya área sea dada. A partir de éste, construya otro triángulo equilátero que tenga el triple de área que el triángulo equilátero inicial.

  -Describa un proceso geométrico que le permita solucionar la situación.
  -Describa un proceso algebraico que le permita solucionar la situación.
  -¿Qué relaciones encuentra entre los procesos anteriormente descritos?
  -¿Qué aspectos le permiten indicar que cada una de las soluciones es válida?

- **Situación 2:** Dado un círculo de radio 1, ¿es posible cortarlo por una recta paralela a uno de sus diámetros, de tal forma que sus partes queden en razón de 2 a 3?

  -Describa un proceso geométrico que le permita solucionar la situación.
  -Describa un proceso algebraico que le permita solucionar la situación.
  -¿Qué relaciones encuentra entre los procesos anteriormente descritos?

-Analice las situaciones y establezca los aspectos que considera fundamentales para cada una de las soluciones.

Referencias bibliográficas

- Arboleda, L. C. (2012). Los estudios históricos en educación matemática desde la perspectiva de la práctica docente. En A. C. Zambrano, & C. Uribe (Edits.), *La Formación de Educadores en Ciencias en el Contexto de la Investigación en el Aula* (págs. 1-5). Bogotá: Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología.
- Bos, H. (2001). *Redefining geometrical exactness: Descartes transformation of the early modern concept of construction.* New York: Springer.
- Descartes, R. (1996). *Discurso del método. La dióptrica. Los meteoros. La geometría.* (J. M. Sánchez Ron, Ed. & G. Quintás, Trad.) Barcelona: Círculo de lectores.
- Glas, E. (2007). Mathematics as Objective Knowledge and as Human Practice. En B. Kerkhove, & J. Bendegem (Edits.), *Perspectives on Mathematical Practice*. p. 25-42. New York: Springer.
- Mehrtens, H., Bos, H., & Schneider, I. (1981). *Social history of nineteenth century mathematics.* Boston: Springer.
- Shapin, S., & Schaffer, S. (1985). *Leviatan and the Air-Pump. Hobbes, Boyle, and the experimental life.* New Jersey: Pricenton University Press.
- Torres, L. A., & Guacaneme, E. (2012). *La Historia de la Matemática en Algunos Programas Colombianos.* Reporte de Investigación, Universidad del Valle, Cali.

Caminos para desarrollar competencias matemáticas desde la educación inicial

Jiménez Díaz, Nelssy
nelssyj@yahoo.com
Universidad Francisco José de Caldas, (Colombia). Maestría en Educación

Resumen

Las respuestas a la pregunta ¿a qué van los niños al preescolar?, se han transformado a través de los tiempos. El preescolar, hoy en día como antes, busca que los niños sean felices, que compartan, que jueguen y aprendan, y fomenta la formación integral mediante el desarrollo de las dimensiones, en particular aquellas vinculadas a las Trayectorias de Aprendizaje Matemático (TAM). ¿Qué metas establecer para las TAM en Educación Inicial?, ¿a través de qué niveles avanzan los niños en sus TAM desde su nacimiento?, ¿qué secuencia de actividades promueve el desarrollo de las TAM?

El taller ofrece un conjunto de metas, niveles de desarrollo y secuencia de actividades, que han sido implementadas en algunos colegios de la SED, para potenciar las habilidades lógico-matemático. Mediante un trabajo teórico-práctico se busca que los asistentes fundamenten, diseñen, enriquezcan y profundicen las trayectorias a través de los cuales los niños avanzan hacia las competencias.

Palabras clave: Trayectorias de aprendizaje, competencias, educación inicial, primera infancia.

1. Temáticas

El interés de la propuesta surge como parte del seminario doctoral sobre Desafíos y amenazas del Discurso de las competencias (Vasco, 2013), y en particular sobre el trabajo de maestría: “La caracterización y desarrollo del sentido numérico en los niños de las Aulas de Primera Infancia (API)”. El

trabajo sobre competencias en el seminario inició con una revisión histórica de las necesidades por las que los niños han asistido al preescolar, se identificaron las razones por las que actualmente se da importancia a la educación en la Primera Infancia, por ejemplo, la UNICEF (2001), reconoce que esta etapa es un tiempo decisivo para hacer inversión y obtener posteriormente, importantes retornos sociales y económicos que se manifiestan en el desarrollo humano de las comunidades.

El MEN (2009) y la SED (2010) han descrito las dimensiones y los pilares de la educación inicial, mediante documentos que no logran con suficiente profundidad y articulación, mostrar a los docentes de las aulas de primera infancia y preescolar, cómo, en el eje de las relaciones lógico-matemáticas se desarrolla "la representación del mundo a través de sistemas y procedimientos por medio de un código propio, integrado por los diversos símbolos matemáticos" (SED, 2010. p. 57), ni cómo lograr trabajar los elementos que permitan una práctica del conteo y de la resolución de problemas, para fortalecer la consolidación y la apropiación de los sistemas de representación y de formación del signo numérico en particular y del sentido numérico en general.

Se evidenció en el trabajo del seminario doctoral, que se requieren procesos de formación mediante talleres teórico-prácticos, para colectivos de docentes que reconozcan, reestructuren, diseñen y evalúen rutas, a manera de Trayectorias de Aprendizaje, fundamentadas en el desarrollo del pensamiento del niño. Espacios para compartir y discutir, en los que se haga una exploración analítica de lo que se enuncia como "representación", "sistemas", "símbolos" y "procedimientos" para la educación inicial y se diseñen secuencias de actividades que favorezcan el desarrollo del eje de las relaciones lógico-matemáticas.

2. Objetivo

- Identificar y rediseñar Trayectorias de Aprendizaje para potenciar el desarrollo de competencias relacionadas con habilidades lógico-matemático de niños de aulas de preescolar y primera infancia, mediante actividades teórico-prácticas.

3. Referentes teóricos básicos

Los referentes básicos del taller inician con una breve revisión histórica del preescolar, que permite la contextualización de las necesidades a las que responde la educación de la primera infancia. Luego se presentan la noción de competencia que se asume para el presente trabajo y las Trayectorias de Aprendizaje como parte de los experimentos de enseñanza, que permiten establecer metas, acordar niveles de desarrollo y diseñar secuencias de actividades para potenciar las competencias en los niños de edad preescolar y de Primera Infancia.

Según Zúñiga et al. (2010), se pueden observar tres etapas en el desarrollo de la educación preescolar en el mundo, las cuales se presentan a menudo superpuestas parcialmente en el tiempo. En la primera, la etapa pre-pedagógica, predominó el cuidado de los niños, el asistencialismo y la protección, mientras sus madres hacían parte de los procesos de industrialización; en una segunda etapa, con representantes en el siglo XIX, se implementaron elementos de la pedagogía que incluyen las formas de organización de los espacios y tiempos escolares; y una tercera etapa, en la década de 1940, orientada por los principios de Fröebel, se refiere concretamente a las formas de aprendizaje de los niños, a cargo de personas que reciben formación especializada para su atención.

En Colombia, la noción de competencia para la educación inicial propuesta por la Secretaria de Educación del Distrito (SED, 2010), presenta concepciones sobre el desarrollo humano y sobre el desarrollo integral del niño, en las que convergen varias dimensiones. Las dimensiones son el marco para analizar el proceso de desarrollo infantil y se constituyen en conjuntos de capacidades que no se potencian de forma automática, ni homogénea; requieren la interacción apoyada en los cuatro pilares (el juego, el arte, la literatura y la exploración del medio), entendidos como maneras en las que el niño se relaciona con el mismo, con los otros, con lo otro y con la cultura, y son concebidas como partes esenciales de un todo (Amar, Abello y Tirado, 2004).

Se proponen cinco dimensiones del desarrollo infantil: personal-social, corporal, comunicativa, artística y cognitiva. Estas dimensiones, se presentan como grupos de capacidades y de habilidades, cuyo criterio de agrupación

puede implicar una crítica relativa a su carácter "simplificador, muchas veces injustificado y, por sobre todo, arbitrario;… otra crítica es que, si bien se entiende que estas [habilidades] realmente son la sumatoria de otras más elementales,… frecuentemente terminan convirtiéndose en unidades por si mismas." (Acosta y Vasco, 2013, p. 47).

En particular, la dimensión cognitiva se ha relacionado con el estudio del proceso cognoscitivo de los sujetos (Kamii & Devries, 1983), es decir, con hacer evidente cómo captan el mundo interno y externo, cómo organizan la información recibida a través de la experiencia y además cómo, progresiva y permanentemente, construyen y reconstruyen el conocimiento. El desarrollo de las relaciones lógico matemáticas, involucradas en esta dimensión, tienen que ver con la representación del mundo a través de sistemas y procedimientos por medio de un código propio, que usa diversos símbolos matemáticos, busca desarrollar el pensamiento de los niños a través de la resolución de problemas de la vida cotidiana. (SED, 2010, p. 206). Sin embargo, algunas de las habilidades planteadas para esta dimensión, como por ejemplo: "Plantear estrategias para contar los diversos elementos, correspondencia uno a uno, agrupación por cantidades, uso de sus dedos para llevar las cuentas, etc." (p. 213), parecen "la sumatoria de las habilidades adquiridas en una serie de tareas que tienen un objetivo y una base de conocimientos en común y bien delimitada" (Acosta y Vasco, 2013, p. 52)

En el documento del MEN (2009), titulado "Desarrollo infantil y competencias en la primera infancia", las competencias refieren a dos significados. En un primer significado, "las competencias de los bebés se pueden entender como esa capacidad para interactuar con el mundo. Al inicio las competencias tienen la forma de 'hacer', que posibilita la adaptación" (p. 21), son capacidades generales que posibilitan los 'haceres', 'saberes' y 'el poder hacer', que los niños manifiestan a los largo de su desarrollo (p. 17). Se observa en este significado, una relación de cercanía entre competencia y capacidad, es decir, la competencia en el texto del MEN parece referirse, según Acosta y Vasco (2013) a los procesos, funciones o características cognitivas previas a su desarrollo; esto es,… capacidades… como ese acervo de recursos básico y subyacente que sin duda tiene una base biológica,… no son talentos cognitivos completamente desarrollados que usualmente se ven, tales como las habilidades matemáticas o espaciales (p. 36).

En un segundo significado, el documento del MEN (2009) menciona que "la competencia se caracteriza porque moviliza o potencia el conocimiento que surge de una situación específica, hacia diversas situaciones y este carácter flexible le brinda a los niños más posibilidades de 'poder hacer' y de un desarrollo autónomo."(p. 21). En esta segunda referencia, parece más adecuado, para evitar ambigüedades, asumir para el presente escrito, siguiendo a Acosta y Vasco (2013), que aquello a lo que el MEN denomina Competencias, son "habilidades", entendidas como "capacidades que han sido desarrolladas hasta el punto de ser consideradas como destrezas [en los niños menores de 6 años]" (p. 36), y proponer que las competencias, se dan en etapas posteriores de desarrollo de dichas habilidades.

Sobre el desarrollo de habilidades cognitivas que tienen que ver con establecer relaciones y operar con ellas y que, según Castaño (2007), refieren al pensamiento lógico matemático de los niños, el documento del MEN (2009) no hace ninguna alusión. En particular, procesos como los de reconocimiento de las cantidades de un grupo, el conteo, la estimación, la percepción de la forma, la intuición probabilística, las relaciones entre clases, que para algunos autores son vitales al ser humano, el texto del MEN no los menciona.

Sobre las Trayectorias de Aprendizaje, según Clements & Sarama (2009), los niños desde que nacen siguen procesos naturales de desarrollo, adquiriendo ideas y habilidades a su manera. Cuando los profesores comprenden estos procesos de desarrollo, elaboran y siguen secuencias de actividades basadas en tales procesos, construyen ambientes de aprendizaje que son apropiados y efectivos en términos de desarrollo. Estas rutas de desarrollo son la base para las Trayectorias hipotéticas de Aprendizaje (THA).

Las Trayectorias de Aprendizaje tienen tres partes: una meta matemática, un camino de desarrollo a lo largo de la cual los niños se desarrollan para alcanzar esa meta y un conjunto de actividades de enseñanza que corresponde a cada uno de los niveles de pensamiento. Las metas están relacionadas para el contexto nacional con las competencias para la primera infancia del MEN (2009), con el lineamiento para la educación inicial de la SED (2010) y con los Estándares Básicos de Competencias para los grados de primaria (MEN, 2006).

Las THA dan al profesor un criterio para decidir cómo puede avanzar el aprendizaje. Clements & Sarama (2009), proponen THA para el desarrollo del sentido numérico, para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial y para el desarrollo de la medida, de las cuales se desarrollaran en el taller de actividades que permitan la reflexión desde la práctica.

4. Propuesta de actividades

La secuencia metodológica se organiza en cuatro momentos en los que se comparte y construye de manera participativa, cada uno orientado por una pregunta.

- **Momento 1**. ¿En quiénes nos apoyamos?
  Conversatorio para reconocer los referentes conceptuales que fundamentan el eje del pensamiento lógico matemático para las aulas de primera infancia.

- **Momento 2.** ¿Cómo lo hacemos con los niños y las niñas?
  Actividad grupal para vivenciar el desarrollo de las habilidades cognitivas vinculadas a Trayectorias de Aprendizaje.

- **Momento 3.** ¿Cómo funciona?
  Actividad grupal para explorar y potenciar niveles de desarrollo referidos al pensamiento lógico matemático de los niños.

- **Momento 4.** ¿Para qué me sirve?
  Puesta en común sobre estrategias para el seguimiento de metas y propósitos relativos a las habilidades lógico-matemático de niños de aulas de preescolar y primera infancia.

Referencias bibliográficas

- Acosta, D., y Vasco, C. (2013). *Habilidades, competencias y experticias: más allá del saber qué y el saber cómo*. Bogotá: Corporación Universitaria Unitec, Universidad de Manizales y la Fundación Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (Cinde).
- Amar, J., Abello, R., y Tirado, D. (2004) *Desarrollo infantil y construcción del mundo social*. Universidad del Norte. Barranquilla, Colombia: Uninorte
- Castaño, J. (2007). Una *aproximación al proceso de comprensión de los numerales por parte de los niños: relaciones entre representaciones mentales y representaciones semióticas.* Universitas Psychologica, *7*(3), 895-905. doi:10.11144/399
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach.* New York: Routledge.
- Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia. UNICEF (2001). *Estado mundial de la infancia 2001*. Nueva York: UNESCO-UNICEF.
- Jiménez, N., y Díaz, F. (julio, 2013) *Una estrategia para el desarrollo del sentido numérico en estudiantes en condición de extraedad*. Trabajo presentado en la Vigésima Séptima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa Relme 27, Buenos Aires.
- Kamii, C., & Devries, R., (1983) *El Conocimiento Físico en la Educación Preescolar: Implicaciones de la Teoría de Piaget.* España: Siglo XXI Editores.
- Ministerio de Educación Nacional. (2009). *Desarrollo infantil y competencias en la Primera Infancia*. Bogotá. Imprenta Nacional de Colombia.
- Secretaría de Educación Distrital de Bogotá. (2010). *Lineamiento pedagógico y curricular para la Educación Inicial en el Distrito*. Bogotá: Imprenta Nacional.
- Vasco, C. (diciembre, 2013). *Seminario Doctoral Desafíos y amenazas del discurso de las competencias*. Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación Matemática. Seminario llevado a cabo en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.
- Zúñiga, F. M., García, B. S., Pérez, D., Mayordomo A., Colmenar M. C., García C., et al. (2010). *Historia y perspectiva actual de la educación infantil*. Barcelona: Editorial Grao.

Gestión y estructuración del espacio con profesores. Una estrategia para centrar la atención en estudiantes con dificultades de adaptación a la vida escolar

Mejía Osorio, Jeny Alexandra - Sepúlveda Sepúlveda, Edison
allexa03@hotmail.com - edulocoito@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia). Egresados

Resumen

El desarrollo práctico-teórico con los participantes al taller, permite generar algunas estrategias de intervención pedagógica para el manejo de situaciones académicas y disciplinarias, que ayuden a centrar y mejorar la atención de los estudiantes, basados en el desarrollo vivencial de la experiencia de Gestión y Estructuración del Espacio, al realizar una serie de recorridos sobre figuras geométricas que buscan desinhibir el sistema nervioso de la persona, para enfrentar miedos y mejorar las relaciones interpersonales. Así mismo, los recorridos sobre las figuras geométricas ayudan a identificar la timidez, inseguridad, agresividad, dispersión, fascinación y aceptación durante una actividad. De ahí que la metodología propuesta por Degoumois se desarrolle en la persona para atender las necesidades de adaptación a la vida escolar.

Palabras clave: Reequilibrio, metodología práctico-teórica, vivencial, lúdica, estructuración y gestión del espacio.

1. Temáticas

El desarrollo del presente taller, está basado en la propuesta de Degoumois (2008), denominada Estructuración y Gestión del Espacio, que busca desde la estimulación y el desbloqueo del sistema nervioso, fortalecer el aprendizaje de los estudiantes, al posibilitar el liberar tensiones, miedos, preocupaciones y vacíos, a través de recorridos, movimientos y estímulos múltiples sobre figuras geométricas (línea, cuadrado, rectángulo, rombo, círculo, etc.). Gracias a esta metodología se puede contribuir a la solución de las necesidades de adaptación a la vida escolar que presentan los estudiantes con dificultades dentro del aula de clase.

Dado que la metodología es práctico-teórica, lúdica y centrada en la persona, permite estimular y desbloquear el sistema nervioso para liberar y fortalecer el potencial de aprendizaje, desarrollo y desempeño. De esta forma, se convierte en una estrategia para intervenir en el aula y trabajar con aquellos estudiantes que tienen limitaciones para sostener el equilibrio y la confianza ante el estrés, para aprender, para organizar y comprender la información, para la lectura, para manejar las relaciones de las matemáticas, para desarrollar relaciones con los otros, para proyectarse y para su actuar en general. Es así, que tales limitaciones se pueden superar y transformar, mediante los recorridos sobre figuras geométricas, incorporando, movimientos y estímulos múltiples que permiten gradualmente reconstruir una dinámica de vida y de responsabilidad frente a un “yo” construido previamente.

2. objetivos

- Presentar una propuesta para el trabajo pedagógico, que permita atender las necesidades de la persona al desinhibir el sistema nervioso para enfrentar miedos y mejorar las relaciones interpersonales.

- Propiciar un espacio en el que a partir de la propia práctica, se tenga un acercamiento a las estrategias de gestión y reestructuración como medio para intervenir en el aula y trabajar con estudiantes que tienen limitaciones para sostener el equilibrio.

- Generar estrategias de intervención pedagógica para el manejo de situaciones académicas y disciplinarias, que ayuden a centrar y mejorar la atención de los estudiantes.

- Contribuir a la solución de las necesidades de adaptación a la vida escolar que presentan los estudiantes con dificultades dentro del aula de clase.

3. Referentes teóricos básicos

En primera medida, nos referimos a Malinowski (2007), quien en su documento "La contribución del pensamiento complejo a la reforma de la inteligencia humana: una perspectiva histórico-comparativa.", nos muestra como cada uno hace parte de los cambios de un conocimiento, por lo que según nuestras irregularidades como personas podemos formarnos y podemos formar a otras, y lograr que este conocimiento transcienda en las personas para realizar críticas que contribuyan a hacer una reflexión personal.

Así pues, el autor reconoce como tales conocimientos aunque han sido construidos de manera lineal, se pueden transformar y es aquí donde nos referimos a la metodología de Estructuración y Gestión del Espacio propuesta por Degoumois (2008), al constituirse como una metodología vivencial en la que a partir de una serie de recorridos sobre una secuencia de formas geométricas, busca referencias fundamentales para construir, interiorizar, reconocer, asimilar, referenciar, abstraer y utilizar, experiencias motrices, visuales y repetitivas que permiten la construcción de nuevas referencias motrices, preceptúales en la persona lo cual conlleva a mejorar las experiencias de vida cognitiva, académica y las relaciones interpersonales. Con los recorridos por las figuras geométricas, y a partir de la experiencia vivencial se le posibilita a la estudiante centrar la atención, mejorar la percepción, al tiempo que se genera en ésta la improvisación, creatividad, autenticidad, transparencia y reconciliación; al ser estrategias propicias para la superación de los miedos.

De esta manera se consigue que el sistema nervioso se relaje y que haya un mayor dinamismo en varios de los sistemas del niño y/o adulto. Los avances

del proceso (incluidos los avances de la socialización y la disminución de la agresividad) van dando espacio a una dinámica de vida cada vez más estructurada y responsable. Para tener una mayor profundización de los aspectos que se pretenden abordar, es necesario tener una conciencia de la realidad, de la vida y nuestro actuar en ellas, al ser referencias que nuestro cerebro ha construido a lo largo de la vida.

Resulta pues en este punto importante, el reconocer avances que se han logrado a partir de la implementación de la metodología, y es aquí, donde a partir de las investigaciones realizadas por Pérez J., Vargas M. Teresa y Villalobos O. (2006), se reconocen diferentes dificultades que exteriorizan los niños con problemas de adaptación a la vida escolar, al caracterizarse por:

- Dificultad para la comprensión y aplicación de conceptos en el análisis de situaciones problemáticas y en la puesta en escena de soluciones diversas y acertadas.
- Baja capacidad de asimilación y uso de información, relacionada con una variedad de elementos, conceptos y habilidades que no se manejan.
- Dificultades en la percepción y baja capacidad de síntesis.

Y es a la superación de tales dificultades, que trabajos como los desarrollados por Poveda J. (2011), Sarmiento S. (2011) & Mora M. y Castiblanco D. (2011) han apuntado a tratar. De igual forma, se reconoce que las aplicaciones de esta metodología y su aplicación en el ámbito escolar, son amplias y han sido comprobadas con éxito en Instituciones Educativas como John F. Kennedy (escuela pública estatal) y con grupos de educadores de las escuelas públicas (incluidos Directivos, Docentes y Orientadores), en la perspectiva de construir en cada institución Educativa un entorno humano y académico con una mayor disponibilidad, apertura y motivación para la consolidación eficiente del proyecto educativo.

En consecuencia, todo esto termina por tener sentido, cuando reconocemos que el rol del profesor no debe cambiar en ningún contexto y que se debe actuar de igual forma en todos los entornos y no solo en un salón de clase, lo cual contribuye a formar a los estudiantes como personas legítimas. En tal sentido, se busca poder generar en los estudiantes diferentes cambios significativos en su comportamiento, es decir el desarrollo de cada una de las actividades debe permitirles transformar sus actitudes y facilitar la

concentración en el aula de clase, pero esta traducción que los niños van a realizar se debe tener en cuenta que sea la adecuada, dado que no siempre se quiere lo que se pretenden, por tal razón es importante tener cuidado pues al transfundir en la vida de ellos habrán cambios para bien o para mal, ya que existirán variedad de interpretaciones y de ideas.

En esta instancia lo que se pretende es tomar conciencia de la importancia de cometer errores, porque a partir de ellos se puede aprender a pasar las adversidades de la vida y del conocimiento. En tal sentido, reconocemos que algunas de las dificultades que presenta la memoria están sujetas a numerosas fuentes de error, lo cual puede estar generando en los estudiantes algún tipo de complejo hacia la realidad, evidenciándose en dificultades de atención e hiperactividad, producto de estos errores mentales que fomentan en la mayoría la protección de estos por parte de cada uno de los individuos pertenecientes a un entorno y sobre los cuales buscamos trabajar para generar sujetos que sean entes de cambio para la misma sociedad en la cual en todo momento han de participar.

4. Propuesta de actividades

Como primera medida, hemos de reconocer que el trabajo que se realiza sobre las figuras geométricas, le ayuda a la persona a conocer sus limitaciones y habilidades frente a una acción, ello se logra con la permanencia y exigencia que se hace cuando se proponen las actividades. En tal sentido, al ser un trabajo vivencial es indispensable que la persona que asiste al taller, trabaje constantemente, para identificar y mejorar las debilidades que se presentan cuando nuestro cerebro tiene organizado y estructurado diversas actitudes.

La participación de los asistentes al taller ha de darse de manera activa, con el fin confrontar los propios límites personales evidenciados en los momentos en que la persona establece sus exigencias frente a una determinada acción, exigencia que le posibilita conocer y buscar estrategias para superar aquellos miedos que la cohíben a realizar una actividad. Para este proceso es indispensable la expresión de la persona, al permitir en el

trabajo la afirmación y veracidad de las acciones que están realizando, que conlleva a tener presente aquellas circunstancias que lo limitan, por lo cual es importante que la persona asuma la responsabilidad de cumplir con sus objetivos, al permitir estos la organización de los procesos que va a realizar para superar aquellas debilidades, que le originan una desatención a las cosas que hace.

De acuerdo a lo expuesto en relación a las figuras geométricas, la metodología propone algunas características propias de cada una de ellas y que se exponen seguidamente.

- Línea→ desarrolla el equilibrio frente a un límite, equilibrio frente a la aceptación y la afirmación de quién soy yo frente a los otros.
- Cuadrado→ base fundamental de la construcción personal, social y cognitiva.

Es a partir del trabajo sobre tales figuras que gira el trabajo en torno al desarrollo del taller. Entrando un poco a aclarar la idea, mencionaremos que se desarrolla trabajo tanto individual como grupal, de acuerdo a una serie de dinámicas que se posibilitan al trabajar sobre las figuras geométricas, tales como:

- Primeros recorridos en la línea reconociendo quién soy yo.
- Repetición de Secuencias de palabras con diferentes tiempos.
- Secuencias de movimientos que permiten ritmo, sucesiones, coordinación y equilibrio.

Actividades con los ojos vendados, en los que se guían unos participantes a otros y realizan ejercicios que les generen dificultades como: cargar un balón, pasar una carretilla, entre otros.

En tal sentido, dado que cada una de las figuras geométricas posibilita una construcción personal, se proponen ejecuciones y rutinas que ayudan al desarrollo del equilibrio y la coordinación (motriz, de atención y emocional). Este proceso genera progresivamente la confianza en sí mismo y en el grupo al liberar tensiones, inhibiciones, bloqueos, titubeos, tartamudeos y otros que se originan en la ausencia de referencias (en su debilidad y en la falta de madurez en distintos aspectos de la construcción personal). De esta manera se consigue que el sistema nervioso se relaje y que haya un mayor

dinamismo en varios de los sistemas de la persona niño y/o adulto. Los avances del proceso (incluidos los avances de la socialización y la disminución de la agresividad) van dando espacio a una dinámica de vida cada vez más estructurada y responsable.

Referencias bibliográficas

- Degoumois, D. (2002). *Π abre nuestro corazón*. Aquarius viva Colombia, Fundación La Fuerza de Vida.
- Degoumois, D. (2008). *A todos los niños del cielo y de la tierra*. Fundación La Fuerza de Vida.
- Degoumois, D. (2009). *Planeador de actividades fundación la fuerza de vida*. Bogotá, Colombia.
- Malinowski N. (2007) *La contribución del pensamiento complejo a la reforma de la inteligencia humana: La perspectiva histórico-comparativa*. Sonora
- Mora M. & Castiblanco D. (2011) *Formación integral: en la búsqueda de la adaptación a la vida escolar.* Tesis para optar por El título de Licenciado en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Morín E. (2000). *La mente bien ordenada*. Editorial: Seix barral. Barcelona
- Morín E. (2000) *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Paris.
- Sánchez N., Bonilla M., & Villalobos O. (2009). *Proyecto de extensión*. Proyecto INDEXUR.
- Vargas, M. *Gestión del espacio y desarrollo de habilidades lectoras, bases indispensables en la resolución de problemas* Universidad EAN
- Pérez, J., Vargas, M., & Villalobos, O. (2006). *Gestión del espacio y desarrollo de habilidades lectoras, bases indispensables en la resolución de problemas*. Universidad EAN, Bogotá, Colombia.
- Poveda J. (2011). *Gestión Y Estructuración del Espacio: en adaptación para niños con problemas de comportamiento.* Tesis para optar por El título de Licenciado en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.
- Sánchez N., & Vargas M. (2011). *Re*-equilibrio *y estructuración cognitiva y Desarrollo vital de niños y jóvenes*. I Congreso Internacional de Educación Universitaria y Prácticas Educativas Innovadoras. Ciudad de México. México.
- Sarmiento S. (2011). *Estructuración y Gestión del Espacio: herramienta para la adaptación a la vida escolar de estudiantes con problemas de dispersión*. Tesis para optar por El título de Licenciado en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá D.C.

Otra forma de evaluar un programa de matemáticas para niños en condición de extraedad, sin pruebas masivas

Díaz Celis, Faberth
faberthd@yahoo.com
Universidad Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Los programas son considerados como documentos oficiales de carácter nacional, en los que se indican el conjunto de contenidos, objetivos, etc., a desarrollar en un determinado nivel, constituyéndose así en los puntos de referencia para que el profesor pueda reflexionar sobre lo que debe ser su trabajo en el aula. Los programas se evalúan generalmente mediante las valoraciones de los desempeños de los estudiantes, que son consideradas como evaluaciones de resultado. Sin embargo, limitar la evaluación de programas a este tipo de pruebas de desempeño de los estudiantes, deja de lado la oportunidad de evaluar el "potencial" que tienen los programas para promover el aprendizaje.

Se ofrecen en el taller, actividades teórico-prácticas sobre cómo diseñar y ajustar un modelo de evaluación por comparación, aplicado al Programa Procesos Básicos para el desarrollo de sentido numérico en estudiantes en condición de extraedad, tomando como referente las Trayectorias de Aprendizaje (TA).

Palabras clave: Evaluación de programas, trayectorias de aprendizaje, sentido numérico, extraedad.

1. Temáticas

El Programa Procesos Básicos, propuesto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2001) atiende a los niños, niñas y jóvenes en situación de extraedad y les ofrece la posibilidad de avanzar dos grados en un año, se propone hacer realidad las políticas de inclusión mediante la atención educativa a quienes por diversas razones de orden cultural, social y económico han abandonado la escuela o nunca han accedido a ella.

Los requerimientos del programa (SED, 2010) incluyen el permanente ajuste y adecuación de su diseño, para garantizar el aprendizaje de los estudiantes en condición de extraedad, lo cual implica evaluar si la secuencia de actividades del programa se relaciona con las metas propuestas para el desarrollo del sentido numérico en el contexto nacional, si tiene en cuenta un desarrollo progresivo del aprendizaje del sentido numérico en los estudiantes y si la secuencia de actividades promueve dicho desarrollo progresivo.

Díaz (2012), reporta evaluaciones sobre los desempeños de los estudiantes, los cuales se consideran como evaluaciones de resultado del programa, porque permiten comparar los puntajes promedios y de desviación obtenidos por los grupos de estudiantes antes y después de la implementación del programa. Sin embargo, limitar la evaluación a este tipo de pruebas de desempeño de los estudiantes, puede dejar de lado la oportunidad de evaluar el "potencial" que tiene el programa, en su diseño, para promover el aprendizaje.

La búsqueda de respuestas a preguntas tales como, ¿qué metas establece el programa de acuerdo con las expectativas educativas sobre el desarrollo del sentido numérico?, ¿en qué etapa empieza la secuencia de actividades a "potenciar" el desarrollo del sentido numérico?, ¿cómo saber la progresión de desarrollo del sentido numérico?, ¿qué caminos de aprendizaje sigue la secuencia de actividades?, permite evaluar el potencial del programas de acuerdo a un referente.

Desarrollar talleres teórico-prácticos que permitan reflexionar sobre la evaluación de programas tomando como referente de evaluación las Trayectorias de Aprendizaje propuestas por Clements & Sarama (2009), les ofrece a los docentes la posibilidad de comprender y diseñar otras formas de evaluar el "potencial" de un programa, que complementan las que se basan

en la valoración de los desempeños de los estudiantes. Además, les permite a los docentes: proponer, validar y reformular metas y actividades que están dentro de las capacidades de desarrollo de los niños e identificar los niveles de progresión a través de los que se moviliza el pensamiento matemático. Se seleccionan las Trayectorias de Aprendizaje del sentido numérico, porque conforman algunas de las metas más importantes que las instancias sociales asignan a la escuela (León, Calderón y Orjuela, 2009).

2. Objetivo

- Evaluar la secuencia de actividades para el desarrollo del sentido numérico del Programa Procesos Básicos para niños en condición de extraedad, tomando como referente una Trayectoria de Aprendizaje.

3. Referentes teóricos básicos

La evaluación de programas se configura como un componente intrínseco de los procesos educativos desde una consideración globalizada de los mismos. Se concibe como un "proceso sistemático, diseñado intencional y técnicamente, de recogida de información rigurosa - valiosa, válida y fiable - orientado a valorar la calidad y los logros de un programa, como base para la posterior toma de decisiones de mejora, tanto del programa como del personal implicado y de modo indirecto, del cuerpo social en el que está inmerso." (Pérez, 2004, p. 143).

En consecuencia, como referentes conceptuales del taller se abordan tres caminos de exploración (Díaz, 2014): el primero, tiene que ver con la condición de extraedad, que identifica las características de la población de estudiantes del programa; el segundo, caracteriza el sentido numérico como componente disciplinar que se desarrolla con la secuencia de actividades propuestas por el programa y requeridas por las instancias sociales para esta población; el tercero, caracteriza las Trayectorias de Aprendizaje como referente de comparación para evaluar el "potencial" del Programa Procesos

Básicos para promover de aprendizaje del sentido numérico en dicha población.

En cuanto a la condición de extraedad: los efectos de la cultura y el estatus socioeconómico (SES, por sus siglas en inglés) en el nivel de aprendizaje de las matemáticas, han sido reportados por algunos autores en el contexto internacional, latinoamericano y nacional (Wright, 1991). Algunos resultados de investigaciones reportan que el conocimiento matemático es más desarrollado en los niños de familias de ingresos medios, en comparación con los alcanzados por los niños de familias con ingresos más bajos (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Lo cual parece indicar que los conocimientos adquiridos por algunos niños antes de los cuatro años, son alcanzados por otros solo hasta los siete años de edad, cuando las condiciones socio económicas no los incentivan (Wright, 1991).

La idea de homogeneidad con la que se tiende a pensar sobre quienes asisten a un establecimiento educativo asume que existen ciertos estudiantes que podrían estar en desigualdad de condiciones. Confrontar, como plantea León et al. (2013), esta homogeneidad utópica, se traduce en reconocer una heterogeneidad visible en la sociedad que se corresponde con "la diversidad en el aula, donde no es posible concebir a los otros como sujetos idénticos" (p. 14).

En cuanto al sentido numérico: León, Calderón y Orjuela (2009), señalan que una de las metas más importantes que las instancias sociales asignan a la escuela, es el desarrollo en los estudiantes de la habilidad para hacer razonamientos con información cuantitativa.

Para Sarama & Clements (2009), los componentes del sentido numérico no se limitan a las operaciones aritméticas estándar de sumar, restar, multiplicar y dividir, se incluyen además "operaciones como contar, comparar, separar en unidades, agrupar, descomponer y componer" (p. 27). Plantean, estos autores, que los componentes del sentido numérico, incluyendo la composición y descomposición de números, el reconocimiento de la magnitud relativa de los números, la magnitud absoluta de los números, el uso de puntos de referencia, el uso de las representaciones, la comprensión de los efectos de las operaciones aritmética, la invención de estrategias, la estimación, generan una disposición hacia lo que se denomina dar sentido a los números.

La expresión "Trayectorias de Aprendizaje" (TA) se usa para referirse a las predicciones del profesor sobre el camino por el que el aprendizaje puede continuar. Las TA proporcionan al profesor un criterio racional para decidir el diseño que él considera, la mejor conjetura de cómo puede avanzar el aprendizaje.

Las TA tienen tres partes: *a)* Una meta o propósito matemático, entendido como el conjunto de los conceptos y habilidades que son matemáticamente centrales, coherentes, y consistentes con el pensamiento de los niños y generadoras de futuros aprendizajes. *B)* Una ruta de desarrollo a lo largo de la cual los niños progresan, constituída por los niveles de pensamiento cada uno más sofisticado que el anterior y que conducen a la meta matemática. *C)* Un conjunto de actividades instruccionales, o tareas relacionadas para cada uno de los niveles de pensamiento, que fomentan el paso de un nivel a otro.

4. Propuesta de actividades

La secuencia metodológica se organiza en cuatro momentos en los que se comparte y construye de manera participativa, actividades orientadas por las siguientes preguntas:

- **Momento 1.** ¿En quiénes nos apoyamos?
  Conversatorio que pretende reconocer los referentes conceptuales que fundamentan la evaluación de un programa para el desarrollo del sentido numérico tomando como referente las TA: extraedad y sentido numérico.

- **Momento 2**. ¿Cómo establecer los criterios y cómo aplicarlos?
  Actividad de comparación desarrollada en parejas que busca vivenciar algunas de las actividades propuestas sobre: criterios de comparación entre metas, criterios de comparación entre actividades y análisis de contenido.

- **Momento 3**. ¿Secuencia de niveles de desarrollo?
  Actividad individual y luego colectiva para identificar algunas técnicas de análisis de unidades de información tales como rejillas de análisis y graficas de relación.

- **Momento 4.** ¿Para qué me sirve?
  Puesta en común sobre las posibilidades de aplicación del modelo de evaluación con referente, a los Programas curriculares del área de matemáticas, en los que se comparan las metas y logros, los niveles de desarrollo y la secuencias de actividades.

Referencias bibliográficas

- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach*. New York: Routledge.
- Díaz, F. (2012). *El desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes en condición de extra edad del Programa Procesos Básicos*. (Tesis de maestría inédita). Universidad Externado de Colombia, Bogotá, Colombia.
- Díaz, F. (2014). *Evaluación de la secuencia de actividades para el desarrollo de sentido numérico del Programa Procesos Básicos, tomando como referencia una trayectoria de aprendizaje del número*. (Tesis de maestría inédita). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.
- León, O., Calderón, D., y Orjuela, M. (2009). *La relación lenguaje-matemáticas en la didáctica de los sistemas de numeración: aplicaciones en población sorda.* Curso dictado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia.
- León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Avila, C., Bacca, J., Cavanzo, A., Guevara, C., Saiz, M., García, R., Saiz, E., Rojas, N., Peralta, M., Flores, W., y Márquez, A. (2013). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación de profesorado de matemáticas.* México: Universidad pedagógica Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (2001). *Programa aceleración del Aprendizaje: Guía para docentes*. Bogotá.
- Pérez, G. (2004). *Modelos de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural.* Madrid: Narcea, S.A.
- Sarama, J. & Clements, D. H., (2009). *Early childhood mathematics education research*. New York: Routledge.
- Secretaria de Educación de Bogotá (2010). *Volver a la escuela. Incluyendo a las niñas, niños y jóvenes en extra edad escolar Programa Aceleración y Primeras Letras en el contexto de una Bogotá sin indiferencia*. Bogotá.
- Wright, B. (1991). *What number knowledge is possessed by children beginning the kindergarten year of school?* Mathematics Education Research Journal, 3(1), p. 1-16.

Introducción al cálculo de probabilidades con GeoGebra

Caro Moreno, Andrés Felipe

candres44@hotmail.com
Universidad Distrital. (Colombia)

Resumen

El propósito del taller es llevar a cabo la descripción y caracterización de las distribuciones de probabilidad discreta, por medio del análisis de gráficos y tablas que genera GeoGebra, pues éste software permite profundizar de forma dinámica los conceptos fundamentales o característicos de dichas distribuciones; el taller se encuentra dirigido a estudiantes del último ciclo escolar para la introducción y formalización de las aplicaciones del cálculo probabilístico, que se pueden realizar de manera sencilla con ayuda del software.

Palabras clave: Recurso informático, cálculo probabilístico, distribuciones probabilísticas.

1. Temáticas

Caracterizar las diferencias conceptuales entre las distintas distribuciones discretas mediante el análisis de gráficos, tablas y diagramas, con el fin de integrar la tecnología en la enseñanza de las distribuciones de probabilidad discreta a través del uso de GeoGebra; de esta forma las herramientas tecnológicas en la estocástica cobran un sentido práctico y sencillo de manipular, como lo establece (MEN, 1998) en su apartado: el uso de las TIC para la manipulación y utilización de programas para la enseñanza aprendizaje de la estocástica escolar, permitiendo que las personas interesadas en la probabilidad encuentren una ventaja más que una

desventaja al momento de aplicarla a un contexto. Análogamente y de acuerdo con lo que plantea (Badii & Castillo, 2007), desarrollar problemas en distribuciones de probabilidad discreta por medio de herramientas tecnológicas, permiten generar un proceso más específico y real a las necesidades tecnológicas actuales.

2. Objetivos

- Identificar qué condiciones o variables son necesarias para establecer la probabilidad de un evento en cada una de las distribuciones discretas según los valores requeridos por GeoGebra.

- Caracterizar las distribuciones de probabilidad discretas por medio de cambios en las variables a través de GeoGebra.

- Reconocer a partir de la vista gráfica y la tabla de determinada distribución de probabilidad discreta: la media, la desviación estándar y el rango que le corresponde, por medio de la manipulación de datos que permite GeoGebra.

3. Referentes teóricos básicos

El marco referencial se divide en tres campos, el uso de Herramientas Tecnologías en el aula, la metodología del Tallery un apartado para las nociones básicas de las distribuciones probabilísticas a utilizar. Con respecto al primero según (Morrissey, 2007) el uso del Software permite:

> "Promover la cooperación y coordinación entre profesores en la renovación de los recursos docentes, de los métodos de evaluación, y en el uso de las nuevas tecnologías. Considerar al estudiante como verdadero protagonista en el aprendizaje y potenciar enfoques en los que se usen metodologías activas y de colaboración con ellos. Preparar al estudiante no sólo en conocimientos, sino también en destrezas y habilidades. A partir de la manipulación de herramientas virtuales para construcción de saberes"

De lo anterior, se infiere que la intención en la implementación de GeoGebra es dar significado a los conceptos de probabilidad en un entorno de acción distinto, promoviendo la exploración, la experimentación, el desarrollo de ideas y las habilidades de los estudiantes; en otras palabras, es una alternativa de innovación y hacer uso de ella permite explotar los beneficios de la herramienta (como las variaciones de los problemas o la representación gráfica de los mismos que pueden hacerse de manera simultánea) y adecuar la interacción docente-estudiante en un ambiente potencial para la comprensión del cálculo de las distribuciones de probabilidad discretas.

Puesto que con la incorporación del software GeoGebra, se procura lograr la adquisición de conocimientos y la formación óptima de los estudiantes a través de sus habilidades y actitudes, fortaleciendo el desarrollo de sus capacidades en el proceso de aprendizaje de las matemáticas a través del empleo de una metodología activa, la cual según Olga (2009), ofrece múltiples ventajas como, potenciar la comprensión autónoma, posibilitar la retroalimentación de los conceptos trabajados, aportar rapidez en los estudiantes; incluso, resulta ser una manera más efectiva de lograr un aprendizaje significativo.

Respecto a las distribuciones de probabilidad discreta a trabajar, la primera es la de una variable aleatoria discreta, o distribución binomial. Ésta distribución es propia de los procesos que representan datos discretos, donde los resultados de un experimento tiene sólo dos resultados posibles que son mutuamente exclusivos; para (Badii et al., 2007c) sus ejemplos son tales como “muerto o vivo, enfermo o saludable, verdadero y falso, etc., en donde la obtención del resultado deseado se considera como éxito "p" y el resultado no deseado como fracaso "q", donde, q = 1 – p “(Badii et al., 2007c).

De una muestra aleatoria de n de una población de N, el número x favorable tendría una distribución binomial cuando el tamaño muestra n es pequeño respecto al número de N, el número x a favor tiene una distribución de probabilidad hipergeométrica, cuya fórmula es:

$$P(x) = \frac{C_x^r C_{N-x}^{N-r}}{C_n^N}$$

Dónde: N = número de elementos en la población. r = número de elementos que tienen una característica específica, por ejemplo el número de personas a favor un producto particular. n = número de elementos en el muestra.

Según (Badii et al., 2000). La distribución de Poisson representa un modelo para la distribución de frecuencias relativas del número de eventos raros que ocurren en una unidad de tiempo, de distancia, de espacio, etc., con la cual pueden ser descritos por una variable aleatoria discreta.

"Utilizamos la letra y mayúscula X para representar a la variable aleatoria puede tomar valores enteros (0, 1, 2, 3, 4, etc.) y la letra minúscula x para señalar un valor específico que dicha variable puede tomar. La probabilidad de tener exactamente x presentaciones en una distribución de Poisson se calcula con la fórmula:"

$$p(x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Dónde: Para el caso del programa los valores requeridos por GeoGebra son λ(es el número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por intervalo de tiempo) yx = número de eventos raros por unidad de tiempo de distancia de espacio.

4. Propuesta de actividades

La metodología del taller consiste en que por medio de GeoGebra los asistentes logren establecer las ventajas del uso del cálculo de probabilidad es a través de la manipulación y el razonamiento de las siguientes preguntas orientadoras:

- ¿Qué condiciones o variables son necesarias para establecer la probabilidad de un evento en cada una de las distribuciones según los valores requeridos por el programa?

- ¿Se puede a partir de la gráfica y la distribución de probabilidades que tiene determinado evento averiguar la media y la desviación estándar?

Para ello, el taller se divide en dos partes, la primera consiste en el reconocimiento de las herramientas u opciones que trae GeoGebra para el cálculo de probabilidades y la segunda, en la implementación de estas herramientas para la solución de 2 problemas a partir de su uso. Por tanto, se iniciará con el reconocimiento de las herramientas que trae GeoGebra para el cálculo de probabilidades y su uso.

Para las distribuciones de probabilidad es necesario acceder a la ventana de Cálculo de Probabilidades por medio del ícono texto, que se encuentra en la barra de herramientas de GeoGebra. Dentro de dicha ventana, se encuentran distintas distribuciones discretas para trabajar (Binomial, Poisson, Pascal e Hipergeométrica). (Ver anexo 1).

Después de la explicación de las condiciones de uso y utilización de cada una de las distribuciones de probabilidad que se van a utilizar durante el taller, se entregará por grupos de tres o cuatro personas los siguientes problemas, para que por medio de la solución se dé solución a las preguntas orientadoras:

- La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a una cierta distancia es de 0,2. Si lo intenta cinco veces, calcula las siguientes probabilidades: a. No acierte ninguna vez. b. Acierte alguna. c. Acierte dos veces.

- En la inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0.2 imperfecciones en promedio por minuto. Determine las probabilidades de identificar: a) una imperfección en 3 minutos, b) al menos dos imperfecciones en 5 minutos, c) cuando más una imperfección en 15 minutos.

Referencias bibliográficas

- Badii, M.H. & J. Castillo (2007).Técnicas Cuantitativas en la Investigación. 348 pp. UANL, Monterrey. ISBN: 970-694-377-3.
- Martín Pliego FJ, Ruiz-Maya L. Estadística I: Probabilidad. Madrid: Editorial AC; 1997.

- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Bogotá.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Ministerio de Educación Nacional: Bogotá.
- Morrissey, Jerome (2007), El uso de TIC en la enseñanza y el aprendizaje. Cuestiones y desafíos, http://coleccion.educ.ar/coleccion/CD30/contenido/pdf/morrisey.pdf
- Palmgren J. Poisson Distribution. En: Armitage P, Colton T editores. Encyclopedia of Biostatistics. Vol. 4. Chichester: John Wiley & Sons; 1998. p. 3398-3402.
- Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 38, 289-321
- Vera, H & Silva, M. (2005.). Una propuesta educativa en informática educacional para la enseñanza de la matemática. Recuperado de: http://www.sadpro.ucv.ve/agenda/online/vo16n17a0.html.
- Olga, Coll, Vicente; Blasco, (2009). Aprendizaje de la estadística económico-empresarial y uso de las TICs. EDUTEC-E, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, Nº 28 (marzo). http://edutec.rediris.es/Revelec2/revelec28/articulos_28_pdf/EdutecE_Coll_Blasco_n28.pdf Fecha de consulta: 27/07/2009.

Anexo 1: Introducción a las herramientas de GeoGebra para el cálculo de probabilidades

Las herramientas y su uso:

Acceso a la plataforma de cálculo de probabilidades:

Para acceder al cálculo de probabilidades hay dos opciones que dependen del tipo de problema, la primera es por medio de la vista Gráfica en donde el ícono de cálculo de probabilidades se encuentra en la barra de herramientas en el submenú del ícono ABC; la segunda opción es mediante la hoja de cálculo, en la cual el cálculo de probabilidades se encuentra en el submenú de Análisis

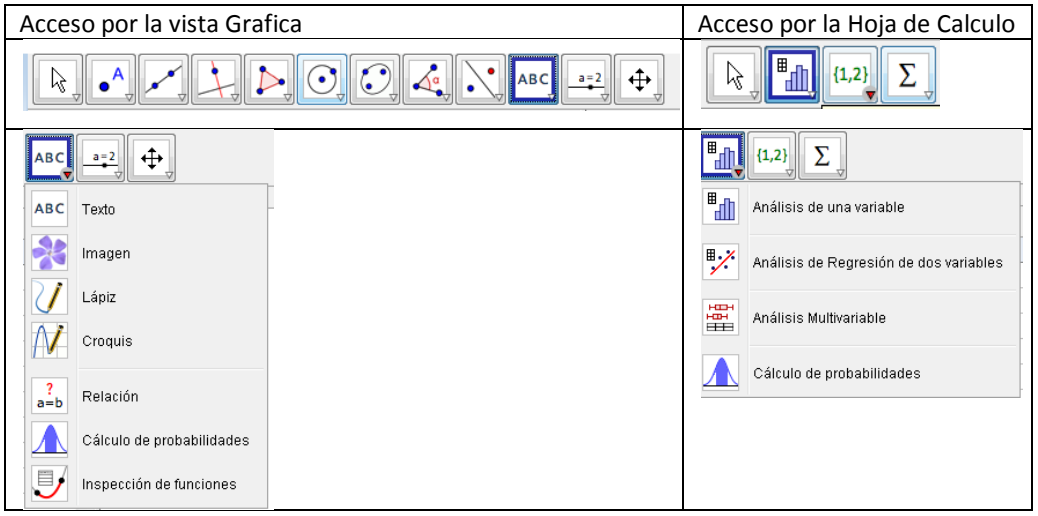


Figura 1.

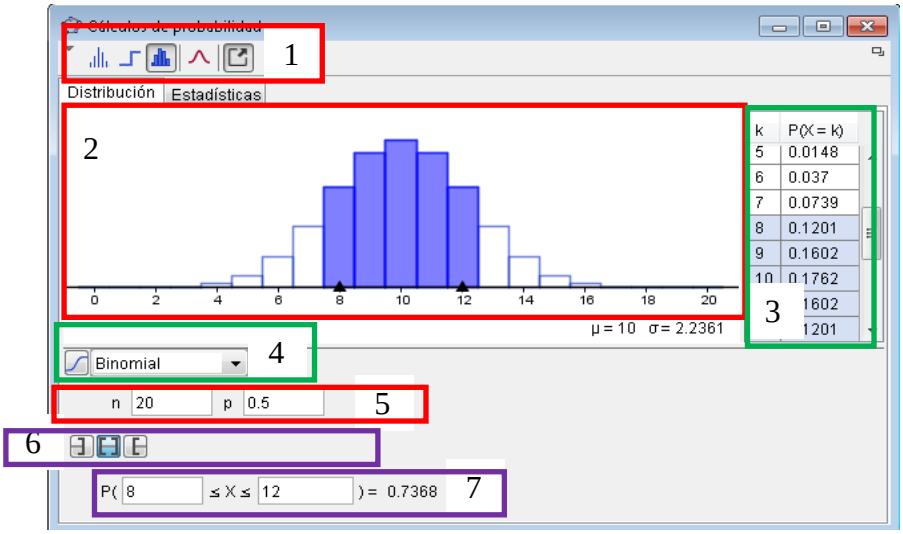


Figura 2.

La ventana de cálculo de probabilidades cuenta con:

- Tipo de gráfica
- Vista de la distribución
- Tabla de probabilidades
- Tipo de distribución
- Entrada de variables
- Tipo de probabilidad
- Rangos de probabilidad y resultado

Anexo 2: Ejemplo del uso del cálculo de probabilidades con GeoGebra en una distribución de Poisson

Para hacer uso de las herramientas se recurrirá al siguiente problema:

La probabilidad de encontrarse una moneda en la calle es de 0,0002 cada vez que se desplaza por la ciudad, si se realizan 3000 desplazamientos por la cuidad:

- ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 3 monedas?
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrarse de 2 a 6 monedas en los 3000 desplazamientos?
- ¿Cuál es la probabilidad de encontrarse menos de 5 monedas?

Para resolver el problema es necesario establecer las variables en los términos que son requeridas para este tipo de distribución por Geogebra; para un periodo de tamaño n la distribución de la media muestral seguirá una distribución Poisson con respecto a una probabilidad de evento p.

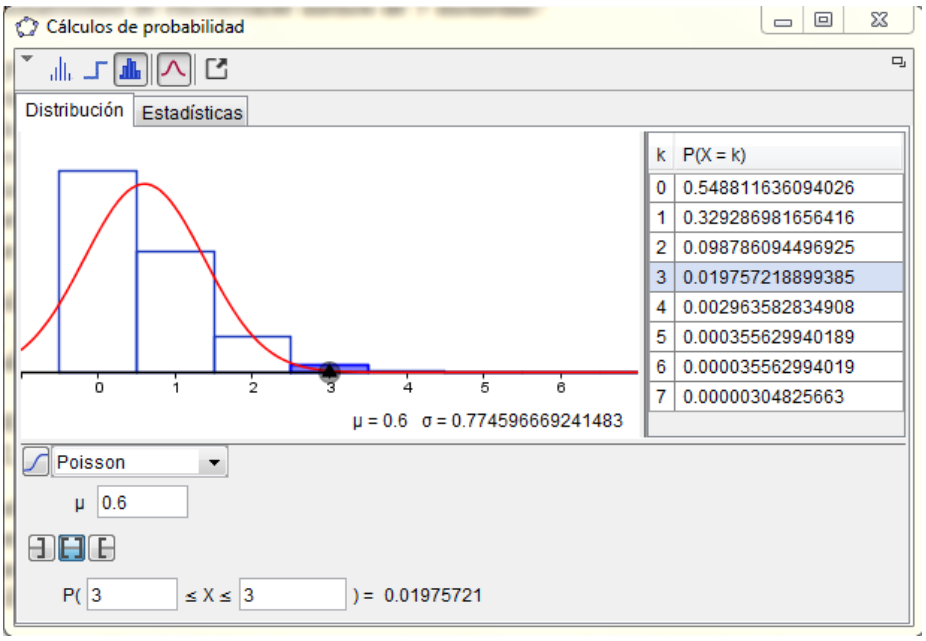


Figura 3.

Una vez seleccionada la herramienta Cálculo de probabilidades, indicamos que la distribución sigue (4) una Poisson e introducimos el valor de μ (5), que en nuestro ejemplo será.

Como la probabilidad "p" es menor que 0,1, y el producto " n * p " es menor que 100, entonces aplicamos el modelo de distribución de Poisson para su solución.

$\mu = n * p = 3000 * 0.0002 = 0.6$

$$Po(3000; 0.0002, x = 3) = Po(0.6, x = 3)$$

Lo siguiente es indicar el tipo de probabilidad (6) que para la primera pregunta es intervalo, y establecer los parámetros (7) que en nuestro ejemplo son 3 y 3 como se observa en la ilustración 3.

Por tanto, $Po\,(0.6, x = 3) = 0{,}0892$. Lo que quiere decir qué, la probabilidad de encontrar 3 monedas en los 3000 desplazamientospor la cuidad es del 8,9%

Simultáneamente al desarrollo de los otros ítems del problema, se desarrollara por medio de la herramienta cálculo de probabilidades la solución de las siguientes preguntas, a partir de la manipulación de la herramienta cálculo de probabilidades como lo describe Morrissey (2007):

- ¿Qué condiciones o variables son necesarias para establecer la probabilidad de un evento en cada una de las distribuciones según los valores requeridos por el programa?

- ¿Qué permite evidenciar la vista de probabilidades acumuladas, en la solución de los problemas planteados?

- ¿Se puede a partir de las gráficas de probabilidades y la distribución que tiene averiguar la media y la desviación estándar? Y ¿Por medio de la media y desviación con ayuda de las gráficas determinar la distribución a la que corresponde?

Actividades para la enseñanza de la ecuación de la recta utilizando el software gratuito CaRMetal

Ángel Veloza, Judith Rocío - Cárdenas Sánchez, Yuri Paola
Hernández Martín, Harold Alberto - Pinzón Amaya, Katherin Esmeralda
rocio--angel@hotmail.com - estudiantenrpao@gmail.com
cardenal-1995@hotmail.com - kathe9992@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

La presente propuesta quiere dar a conocer una serie de actividades desarrolladas en el software gratuito CaRMetal, para trabajar las relaciones entre la gráfica y la ecuación de la recta, de tal forma que los profesores de matemáticas en ejercicio y formación puedan evidenciar cómo aprovechar y hacer uso del potencial de este software para la enseñanza de diferentes saberes, a través de un aprendizaje por adaptación.

Palabras clave: CaRMetal, registros semióticos, gráfica, ecuación.

1. Temáticas

Actualmente existe una presión social para implementar e usar las tecnologías informáticas en la enseñanza. Sin embargo, los profesores de matemáticas experimentan muchas dificultades para el uso de las mismas, por su falta de experiencia en el uso didáctico, es por ello que uno de los mayores retos de "*los educadores matemáticos es el de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje"* (Arcavi & Hadas, 2000, p. 41. Citado por Gamboa, 2007, p. 15). Teniendo en cuenta lo anterior, nace el interés de plantear una propuesta en la que se involucren las TIC´s. Así se piensa que una estrategia para el logro de esto, es el trabajo con un software de

geometría dinámica en específico, que esté al alcance de todos, con el fin de propiciar la creación de diversas actividades para trabajar las relaciones entre la gráfica y la ecuación de la recta.

Según diversos estudios como los de Torregrosa, Haro, Penalva, Llinares, entre otros, los programas de software de geometría dinámica permiten la creación de espacios e interacciones en donde la experimentación e investigación juegan uno de los papeles más importantes que potencian la construcción y adquisición de un saber; luego estos pueden ser entendidos como recursos en pro de la educación matemática.

Por esta razón en este taller presentamos actividades de clase con un diseño didáctico para lograr un aprendizaje sobre la relación entre ecuación y gráfica de una recta. De esta manera queremos mostrar un ejemplo claro de lo que puede lograrse con la tecnología, e introducir algunas herramientas didácticas del software CaRMetal.

2. Objetivos

- Proponer actividades de clase para promover el aprendizaje por adaptación del concepto de ecuación de una recta, aprovechando el potencial del software CaRMetal.

- Proporcionar a los profesores participantes una experiencia de aprendizaje utilizando el software CaRMetal.

- Permitir que los profesores de matemáticas en ejercicio y formación utilicen el software dinámico de geometría CaRMetal, para la enseñanza del concepto de ecuación de una recta.

- Reflexionar sobre el concepto de aprendizaje por adaptación cuando se promueve la interacción de los estudiantes con el software dinámico de geometría CaRMetal.

3. Referentes teóricos básicos

Siguiendo las orientaciones de Duval, se intenta trabajar la conversión entre registros de representación: el registro algebraico (ecuación) y el registro geométrico (gráfica), para lograr un aprendizaje del concepto de recta.

La conversión de registros semióticos es una transformación de un registro a uno nuevo, así si en nuestro registro 1 está la recta vista desde una expresión algebraica (ecuación) pasamos de éste al registro 2, en el que veremos el tratamiento de la gráfica de la recta. Básicamente se propondrá entonces problemas en los que los alumnos tengan que ver con esa conversión: necesitando interpretar la ecuación para poder relacionarla con su gráfica correspondiente y viceversa, puesto que "el cambio de forma semiótica de representación constituye una operación cognitiva básica". (San Martín s. f., p. 03). San Martin (s. f) señala que Duval (1999) cree como fundamental considerar:

> "• La importancia de la coordinación de diversos registros de representación semiótica. Establece que muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación.
>
> • El considerar al conocimiento conceptual (la comprensión) como el invariante de múltiples representaciones semióticas.
>
> • En base a diferentes registros de representación, definir variables independientes específicas para contenidos cognitivos y organizar propuestas didácticas para desarrollar la coordinación de registros de representación. (p. 4)".

Luego esto fundamenta la importancia de considerar el tratamiento de dos registros semióticos para el diseño y creación de estas actividades en el software didáctico de geometría CaRMetal.

Por otra parte, intentamos plantear situaciones que propicien el aprendizaje por adaptación, de acuerdo con la teoría de Brousseau: se busca que los alumnos interactúen con el software para intentar resolver un problema, y en esa interacción reciban retroacciones del software que les permitan validar o invalidar sus estrategias y de esta manera construyan su propio conocimiento.

4. Propuesta de actividades

Para el desarrollo de esta propuesta se trabajará en sala de informática, en la que los profesores asumirán el rol de alumnos e interactuarán con las figuras preparadas con el fin resolver los problemas propuestos.

Luego se realizará una discusión abierta sobre el diseño de las actividades y las posibilidades de aprendizaje que propician o no en los alumnos. Durante esta discusión se mostrarán las distintas herramientas del software que permiten realizar el diseño didáctico.

Un ejemplo del tipo de actividades a presentar es la siguiente:

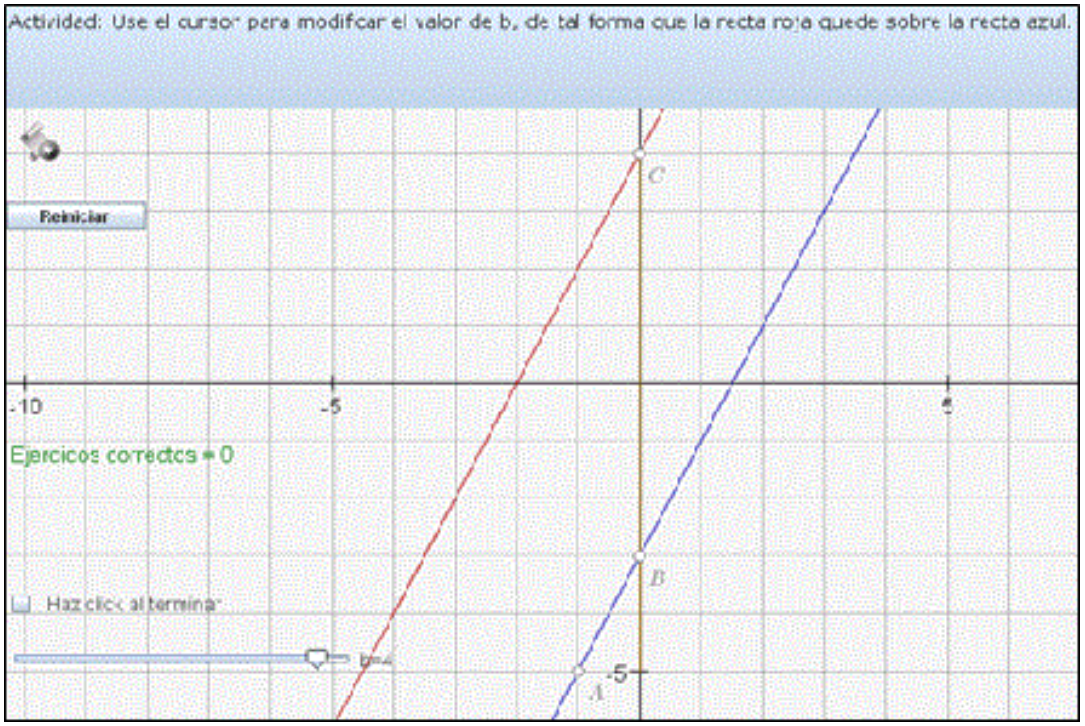


Figura 1. En esta actividad se pretende estudiar la relación entre la variable (b) (corte de la ordenada de la recta) de la ecuación *y=ax+b*, con respecto a la gráfica.

Como se muestra en la figura 1, la actividad pide que el participante mueva el cursor de tal forma que la recta azul quede sobrepuesta en la recta roja; el movimiento de esta recta azul es paralelo a la recta roja, así, lo que se busca es que la movilidad de la recta azul denote el corte de la ordenada (variable (b)) de la ecuación de la recta. Cabe resaltar que el expositor de la propuesta no interviene directamente en el desarrollo de ésta, dado que las

actividades cuentan con enunciados y mensajes automáticos que guían al participante para que la interacción que se genere sea entre el sujeto (participante) y el medio (software).

Referencias bibliográficas

- D´ Amore, B. (2004). *Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución*. Uno. 35, p. 90-106. Recuperado de: http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/479%20 Conceptualisacion.pdf
- Gambio, R. A. (2007). *Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, Número 3, p. 11-44. Recuperado de http://cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno3/cuaderno3_c1.pdf
- San Martín, O. J. (s. f.). *Un registro de representación semiótica de naturaleza geométrica para la trigonometría*. Memorias XII congreso nacional de investigación educativa- Educación y conocimientos disciplinares. Recuperado de: http://www. comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v09/ponencias/at05/PRE1178828913.pdf
- Tamayo, O. E. (s. f.). *Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Revista educación y pedagogía, 18(45), p. 37-41. Recuperado de: http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/ revistaeyp/article/viewFile/6085/5491
- Universidad Nacional de Catamarca. (s. f.). *Cómo se aprende matemática utilizando un software específico* (Editorial científica universitaria). Estrategias de aprendizaje que utilizan los alumnos universitarios cuando aprenden matemática con un software de matemática específico. Recuperado de: http://www.editorial.unca.edu.ar /Publicacione%20on%20line/DIGITESIS/Curotto%20Margarita/pdf/capitulo-6.pdf

Matemáticas y TIC

Fajardo, Edgar
fajardoedgar111@gmail.com
Colegio Distrital Juan Lozano y Lozano, (Colombia)

Resumen

Mediante el taller se pretende exaltar la importancia que tienen las TIC para mediar el proceso enseñanza aprendizaje en el área de matemáticas. Cómo con un computador portátil y el videobeam se puede apoyar el desarrollo de las clases; en algunos casos con presentaciones en Power Point, con ejercicios para resolver utilizando Excel o GeoGebra, imágenes o videos descargados de internet, navegación a través de un enlace en la web, acertijos de lógica o simplemente planteando el desarrollo de una guía de comprensión lectora en Word. Pero la a esencia del taller se centra en compartir la experiencia sobre el uso de dos plataformas http://www.thatquiz.org/es/ y https://es.khanacademy.org/. En cada una de estas plataformas me registre como docente. Aprendí a administrarlas y creé los cursos presenciales en forma virtual. Las plataformas me ha permitido hacer un seguimiento detallado de: evaluaciones, tiempo de estudio, avances, logros, reconocimientos y dificultades de cada estudiante.

Palabras clave: Aprendizaje, thatquiz, khanacademy, virtualidad.

1. Temáticas

La propuesta pretende dar respuesta a inquietudes: ¿cómo motivar y despertar el gusto por el aprendizaje de las matemáticas?, ¿cómo poder acompañar y monitorear el trabajo hecho en casa?, ¿cómo respetar los ritmos y mejorar los niveles de aprendizaje?, ¿Cómo facilitar y optimizar el proceso de evaluación de las actividades propuestas?, ¿cómo lograr que los estudiantes aprendan a aprender?

Principales resultados de la propuesta:

- Lograr que los estudiantes participen de la propuesta con interés, entusiasmo y compromiso.
- Romper con el "magistrocentrismo" de la exposición tradicional. Por ejemplo el hecho que el estudiante pueda observar mediante videos explicaciones y procedimientos diversos para abordar un tema, ya marca una gran diferencia.
- Aplicar gracias al uso de las TIC, diferentes formas de evaluación, realizar actividades de refuerzo y recuperación y ofrecer alternativas para los diferentes ritmos de aprendizaje y profundidad.
- Crear nuevos entornos de aprendizaje sin la exigencia de coincidencia en espacio y tiempo con mis estudiantes; así mismo, se ha logrado una optimización en el manejo del tiempo.
- Lograr desde la clase de matemáticas el crecimiento personal y formación en valores usando las TIC. (mediante presentaciones, reflexiones, acertijos, preguntas de matemática recreativa, videos y lecturas de motivación y superación con las que acostumbro iniciar las clases).
- Enseñar a los estudiantes a utilizar más y de mejor manera la red Internet para apoyar sus procesos académicos en otras áreas.
- Poner al servicio de la clase las posibilidades y oportunidades que ofrecen las TIC de tal forma que el aprendizaje es más significativo y mi labor más efectiva y gratificante.

2. Objetivos

En el taller básicamente se propone:

- Compartir las evidencias de lo que han hecho los estudiantes mediante el uso de las plataformas citadas.

- Hacer una demostración de los roles que pueden asumir los usuarios de las plataformas en primer lugar como estudiantes y finalmente como docentes.

- Involucrar a los participantes para que asuman inicialmente el rol de estudiantes y como aplicación y reto el de docentes.

3. Referentes teóricos básicos

A través del uso de la plataforma http://www.thatquiz.org/es/, me registré como docente. Aprendí a administrarla, creé los cursos presenciales en forma virtual, a cada estudiante le asigné una contraseña, orienté y motivé a los estudiantes sobre su uso. La plataforma me ha permitido crear mis propios exámenes, formular mis propias preguntas, variar la cantidad y tipo de las mismas, seleccionar diversos grados de dificultad y mezclar diferentes temas, al tiempo que he podido hacer un seguimiento claro y conciso con base en los resultados, gráficas y tablas de cada prueba. El estudiante puede simular y preparar con anterioridad el examen las veces que quiera y posteriormente con un código de examen proporcionado por mí, presenta la prueba.

De otro lado, está la plataforma https://es.khanacademy.org/, me registre como docente aprendí a administrarla en el rol de docente, creé los cursos presenciales en forma virtual. Una vez creado los cursos y los estudiantes estén registrados la plataforma me ha permitido hacer un seguimiento detallado de: tiempo de estudio, avances, logros, reconocimientos y dificultades de cada estudiante. He podido monitorear y acompañar el progreso de cada uno. La cuenta para cada estudiante es como un cuaderno interactivo en el cual queda registrado todos los videos que observe y los ejercicios que resuelva, ante el error, la plataforma señala la corrección, da tips para su desarrollo y le sugiere observar un video con una explicación. La plataforma me mantiene informado sobre el avance de cada estudiante y en mi cuenta puedo observar el cuaderno virtual de cada uno. La clave está en la motivación y demostración que hago con los estudiantes sobre la forma apropiada de uso.

4. Propuesta de actividades

- Inducción, presentación.
- Descripción de la estrategia pedagógica, características de los estudiantes e instituciones donde se lleva a cabo. (3 minutos).
- Presentación en Powert Point. (Cuento tecnológico 2 minutos).
- Exposición sobre uso y manejo de la plataforma http://www.thatquiz.org/es/.
- Con base en mi cuenta de thatquiz contar y simular como los estudiantes estudian y presentan las evaluaciones. (5 minutos).
- Proponer ejercicio para ser desarrollado por los asistentes; asumen el rol de estudiantes. (5 minutos).
- Registro en la plataforma, creación a manera de ejemplo de una clase y asignación de un examen por parte de los participantes. Asumen el rol de docentes (10 minutos).
- Diseño y creación de exámenes. (5 minutos).
- Exposición sobre uso y manejo de la plataforma https://es.khanacademy.org/.
- Presentación de resultados con base en mi cuenta de khanacademy. (5 minutos).
- Registro, exploración y navegación de la plataforma. (10 minutos).
- Sesión de preguntas y respuestas.

Referencias bibliográficas digitales

- http://www.thatquiz.org/es/
- https://es.khanacademy.org/

Problemas de variación para el aprendizaje de la derivada

Bohórquez, Luis Ángel
labohorqueza@udistrital.edu.co
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Este taller tiene como propósito primordial presentar una introducción a la resolución de problemas como metodología de trabajo en clase, de tal forma que a partir de ello se considere una caracterización de problema matemático y de problema de variación y su utilidad para generar aprendizajes sobre el concepto de derivada.

Palabras clave: Resolución de problemas, aprendizaje derivada, problemas de variación.

1. Temática

La resolución de problemas, los problemas de variación y el aprendizaje de la derivada a partir de los problemas de variación.

2. Objetivos

- Presentar una introducción de la resolución de problemas como metodología de trabajo.
- Caracterizar los problemas de variación y presentar probabilidades de trabajo con estos problemas para el aprendizaje de la derivada.

3. Referentes teóricos básicos

Resolución de problemas

Sobre la resolución de problemas se ha dicho que es un término del cual no existe una caracterización universalmente aceptada (Schoenfeld, 1985, 2007; Stanic y Kilpatrick, 1989; Pérez, 1993; Tortosa, 1999 y Santos-Trigo, 2007). De hecho, en los trabajos de Schoenfeld (1985), Stanic y Kilpatrick (1989), Pérez (1993) y Bohórquez y Sanjuán (2009) se han recopilado más de catorce significados diferentes de este término. Esta situación generó la intención de varios autores, por ejemplo Schoenfeld (1985, 2007) de agrupar por enfoques o tendencias los trabajos asociados a la resolución de problemas.

Los enfoques de los trabajos sobre resolución de problemas que Schoenfeld (1985) identificó a mediados de los ochenta fueron cuatro. En el primer enfoque, este autor, ubica los trabajos donde los problemas son presentados en forma escrita y que a menudo son problemas muy sencillos que ponen la matemática en el contexto del "mundo real". En el segundo ubicó aquellos trabajos donde se privilegia el uso de matemáticas sofisticadas para tratar los problemas que se reflejan en el "mundo real". El tercer enfoque lo conforman aquellos trabajos alrededor del estudio de los procesos cognitivos, los cuales consisten en realizar intentos de exploración detallada de aspectos del pensamiento matemático en relación con problemas más o menos complejos y finalmente en el cuarto grupo se encuentran las propuestas que tienen por propósito la determinación y la enseñanza de los tipos de habilidades requeridas para resolver problemas matemáticos complejos (Schoenfeld, 1985). El enfoque de este último grupo se basa, en su mayoría, en la obra de Polya (1945).

La obra de Pólya (1945) también es base fundamental de uno de los enfoques que identificaron Stanic y Kilpatrick (1989) sobre las formas de trabajar la resolución de problemas. Estos autores señalaron que la resolución de problemas se ha empleado en la escuela de tres maneras. La primera como contexto de aplicación, con fines recreativos o para propiciar la motivación; la segunda como un tema específico del currículo, esto es, para desarrollar la habilidad de resolver problemas [aquí el trabajo de Pólya

(1945) es de vital importancia]; la tercera como aquella en donde la resolución de problemas se identifica con la actividad matemática, es decir, en donde hacer matemáticas es resolver problemas.

Dadas las diferentes formas de trabajar la resolución de problemas, Rivera y Santos-Trigo (1999), Codina y Rivera (2001) y Santos-Trigo (2007) recomiendan que los profesores de matemáticas que deseen trabajar con resolución de problemas reflexionen sobre lo que entiende por una enseñanza-aprendizaje basada en la resolución de problemas e incluso Codina y Rivera (2001) consideran conveniente que se discutan los términos problema, resolución y solución.

Sobre el término problema

El término problema, al igual que la resolución de problemas, no está definido de una manera única. En la literatura se encuentran autores como Kilpatrick (1985), Castro (1991), Schoelfeld (1992), Puig (1996), Codina (2000), Santos-Trigo (2007) y Bohórquez y Sanjuán (2009) que han efectuado recopilaciones de los diferentes significados del término problema, así como de los términos solución y resolución. De hecho, Kilpatrick (1985), Schoelfeld (1992), Puig (1996) y Santos-Trigo (2007), además de presentar diferentes significados de estos términos, proponen definiciones sobre los mismos. Otro autor que propuso una caracterización de problema fue D'Amore (1997), quien sugirió una distinción, en sus palabras muy usual, algo trivial y sin embargo útil, entre problemas y ejercicios.

Para D'Amore (1997), tanto ejercicios como problemas se refieren a situaciones problemáticas debidas a varios factores. En donde los ejercicios pueden ser resueltos utilizando reglas ya aprendidas o en vías de consolidación y, por tanto, entran en la categoría de refuerzo o aplicación inmediata de conceptos. Por su parte los problemas, implican o bien el uso de más reglas (algunas incluso explícitas, en ese momento) o bien una sucesión de operaciones cuya elección implica un acto estratégico, quizás creativo, del propio estudiante. Esto es, según D'Amore, Fandiño y Marazzani (2004) el ejercicio se desarrolla en la zona afectiva de Vygotsky el problema se desarrolla en la zona potencial.

En la caracterización de problema que presenta D'Amore (1997), se hace explicito el hecho que debe haber una relación de interés y creatividad por parte de quien lo aborda. Para Bohórquez, Bonilla, Romero y Narváez (en prensa) el requerimiento de la presencia del resolutor y de su implicación con ese algo acarrea que, sus conocimientos previos, sus intereses, sus experiencias, entre otros aspectos, entran a ser parte de lo que se considera un problema. De esta manera, los problemas se caracterizan porque implican una relación de problematización entre quien percibe el algo y el algo percibido. Santos-Trigo (2007) había hecho alusión a esta relación por medio del listado de criterios que consideró deben intervenir en el diseño de problemas para que éstos tengan potencial matemático en el aula de clase, a saber:

1. Los problemas deben ser accesibles a una diversidad de estudiantes.
2. Los problemas deben exigir a los estudiantes un proceso de reflexión e inserción.
3. Los problemas deben posibilitar acercamientos a su solución a través de emprender caminos diversos, que impliquen el uso de ideas matemáticas ricas y que permitan involucrar aspectos diferentes de la disciplina.
4. Las soluciones de los problemas deben posibilitar que emerjan ideas matemáticas sin que para ello los estudiantes sientan que requieren usar trucos sofisticados.

El diseño de problemas con las características anteriores se facilitaría para el profesor de matemáticas si en su formación los problemas matemáticos se utilizan como instrumentos de aprendizaje que potencien las prácticas de matematización, modelación, conjeturación y demostración de propiedades matemáticas (Bohórquez et al., n.d.). En otras palabras, se requiere que en la formación de profesores la resolución de problemas sea entendida, en la clasificación de Stanic y Kilpatrick (1989), como una actividad ligada al aprender a pensar matemáticamente.

En esta perspectiva, Lesh y Zawojewski (2007) definen la resolución de problemas como "el proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar

interpretaciones –y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas". Para Santos-Trigo (2008) "lo relevante en esta visión es que el estudiante desarrolle recursos, estrategias, y herramientas que le permitan recuperarse de dificultades iniciales y robustecer sus formas de pensar acerca de su propio aprendizaje y la resolución de problemas" (p. 3). De hecho, para este autor un aspecto importante de la caracterización de resolución de problemas de Lesh y Zawojewski (2007) es que la comprensión o el desarrollo de las ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión donde el estudiante constantemente refina o transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje.

Participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje implica para Bohórquez et al. (en prensa), que en el ambiente de la clase está incorporada la intencionalidad de que toda producción matemática que el estudiante y/o el grupo realice dentro o fuera de la clase será objeto de análisis y contrastación con las de los otros (estudiantes o grupos). En otras palabras, toda actividad matemática realizada por un individuo debe hacerse pensando en que va dirigida a otro(s), con lo que se tiene en cuenta la perspectiva de que existe una comunidad que colabora en la construcción del conocimiento individual y grupal.

Desde la perspectiva anterior, el ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas se caracteriza por la conformación de una comunidad de aprendizaje que involucra al profesor, a los estudiantes y al objeto matemático, y que tiene como meta común compartida la resolución de un problema matemático y sus transformaciones, acompañado de momentos de metacognición colectiva y de procesos de socialización de la resolución del problema. De esta manera, en palabras de Radford (2006), se espera que el estudiante que resuelva con éxito problemas matemáticos sea capaz de explicarse o de entender o interesarse en las soluciones de los otros o de ayudar a los otros. Esto es, aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, es decir, a ser-con-otros.

Ahora bien, como el ambiente de aprendizaje aquí caracterizado es diseñado para estudiantes para profesor vale la pena recordar que aquí no sólo se resuelve el problema matemático, con todas las implicaciones descritas

anteriormente, sino que este estudiante debe también pensar en el problema como un instrumento con el cual es posible generar aprendizaje matemático (Llinares, 2008).

Problema de variación

La caracterización de problema de variación la establecen Bohórquez et al. (en prensa) de la siguiente manera:

> Un problema de variación es una clase que hace parte de una amplia estructura conformada por distintas formas de variación que explican la infinitud de situaciones en la que está presente alguna forma de cambio. Esta clase puede traducirse en proposiciones matemáticas que involucran *el reconocimiento de variables, parámetros, cuantificadores, relaciones funcionales y relaciones de covariación, y un objetivo: la optimización.* (p. 3).

Teniendo en cuenta esa caracterización un ejemplo de problema de variación seria el siguiente:

La resistencia de la viga

La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho *a* por el cuadrado de su altura *h*. Se quiere aserrar un tronco de madera de forma cilíndrica, con diámetro *phi* dado, una viga de sección rectangular. Pierre asegura que es posible encontrar las dimensiones de la viga de mayor resistencia, calculándolas por medio de pequeñas alteraciones a una de las dimensiones. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?

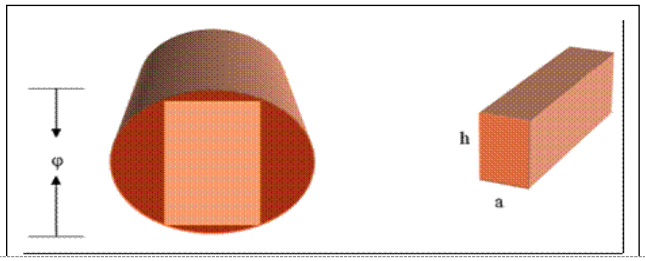


Figura 1. Representación gráfica resistencia de la viga.

El problema de la viga es un problema con características similares a los problemas típicos de optimización. Este tipo de problemas (los problemas de optimización) están presentes en casi todos los libros de cálculo. Además, según Bohórquez et al. (en prensa), la resolución de este tipo de problemas está relacionada el manejo y comprensión de aspectos relativos al modelo del continuo de Cantor-Bolzano-Weierstrass. En particular, está asociado directamente con el concepto derivada, sin embargo su resolución requiere acudir en alguna medida a la estrategia establecida por Fermat quien abordó problemas de optimización como el presentado antes que existiera la derivada y lo hizo a partir de considerar *pequeñas perturbaciones*.

4. Propuesta de actividades

En el taller se propondrán dos problemas de características similares y se pedirá a los asistentes que intenten resolverlo individualmente. Posteriormente se solicitará a que conformen grupos de tres personas para discutir, entre otras cosas, sobre las estrategias de resolución propuestas y sobre las características de los problemas mismos. Los problemas se presentan en la siguiente guía:

Taller: Problemas de variación para el aprendizaje de la derivada

La resistencia de la viga[1]

La resistencia de una viga de sección rectangular es proporcional al producto de su ancho a por el cuadrado de su altura h. Se quiere aserrar un tronco de madera de forma cilíndrica, con diámetro φ dado, una viga de sección rectangular. Pierre asegura que es posible encontrar las dimensiones de la viga de mayor resistencia, calculándolas por medio de pequeñas alteraciones a una de las dimensiones. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? (Ver figura 2).

[1]Bonilla, Bohórquez, Narváez y Romero (2010). *Construcción del significado de variación en estudiantes para profesor de matemáticas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia).

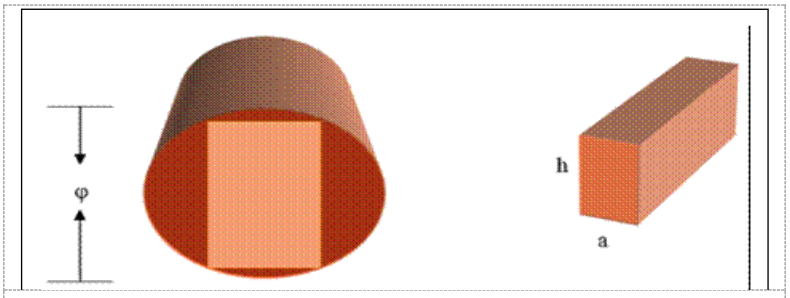


Figura 2. Representación gráfica resistencia de la viga.

Hacia la cabaña

Un turista se encuentra en un bosque a 2 km de una larga carretera recta. Desea caminar a su cabaña, que se encuentra a 10 km. de distancia por el bosque y también a 2 km. de la carretera (ver figura 3). Puede caminar a una velocidad de 8 km/h por la carretera pero solamente a 3 km/h por el bosque. Así decide caminar primero hacia la carretera, después por la carretera y finalmente por el bosque hacia la cabaña. El turista concluye que el ángulo θ que minimizará el tiempo total necesario para que llegue a su cabaña lo puede obtener haciendo pequeñas alteraciones a algunas de las magnitudes involucradas en la información.

¿Estás de acuerdo con el turista? Explica tu respuesta

¿Cuánto tiempo se ahorra en comparación con la ruta directa por el bosque?

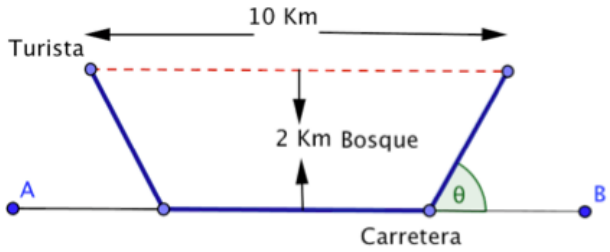


Figura 3. Recorrido del turista

Referencias bibliográficas

- Bohórquez, A. & Sanjuán, A. (2009). Consideraciones sobre la resolución de problemas en la actualidad. En: Memorias noveno encuentro de matemática educativa. Diez años de lineamientos curriculares. Asociación Colombiana de Matemática Educativa ASOCOLME. (p. 35-43). Valledupar. Grupo Editorial Gaia.
- Bohórquez, A., Bonilla, M., Narváez, D. & Romero, J. (en prensa). Los ciclos de resolución deproblemas: ambientes de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas. Cartilla. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Codina, A. (2000). Elementos para una reflexión acerca del uso de la computadora en el aprendizaje de estudiantes de bachillerato vía resolución de problemas, (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.
- Codina, A & Rivera, A. (2001). Hacia una instrucción basada en la resolución de
- problemas: lostérminos problema, solución y resolución. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.) Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro (p. 125-135) Granada: Editorial Universidad de Granada.
- D'Amore, B. (1997). Problemas. Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas. Madrid: Síntesis.
- Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Twenty-five Years of Research on TeachingMathematical Problem Solving'. In E. A. Silver (Ed.), Teaching and Learning Mathematical ProblemSolving: Multiple Research Perspective (p. 1-15). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.,Publishers.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003a). Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching. Mahwash, New Jersey: Lawrence ErlbaumAssociation.
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003b). Foundations of a models and modeling perspective on mathematicsteaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Modelsand modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving. Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lesh, R., Zawojewski, J. & English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of smallGroup learning activities. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modelingperspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving. Mahwah, NJ: Lawrence ErlbaumAssociates, Inc.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), Second handbookof research on mathematics teaching and learning (p. 763-804). Charlotte, NC: Information AgePublishing.
- Santos-Trigo M. (2007). Cómo plantear y resolver problemas matemáticos. México: Editorial Trillas.

- Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco, (Eds.), Investigación en Educación Matemática 12. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (p. 3-27). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" / Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.

Regresar al índice general

Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Facultad de Ciencias y Educación

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
Especialización en Educación Matemática
Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática
Doctorado Interinstitucional en Educación con énfasis en Educación Matemática