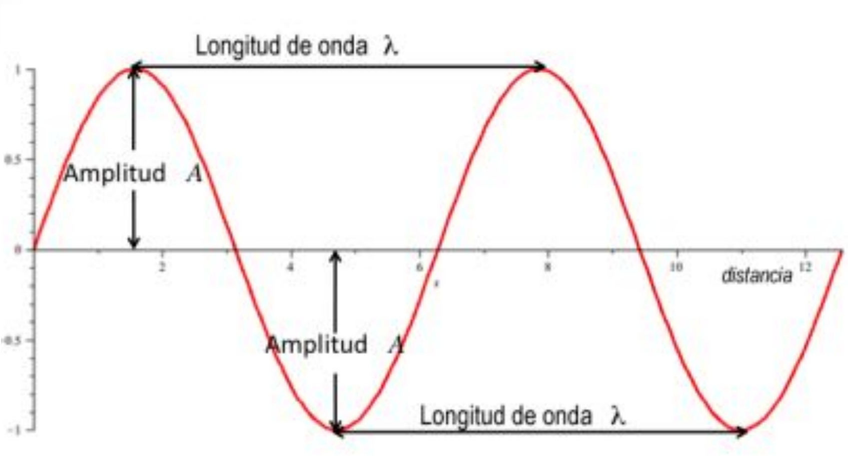
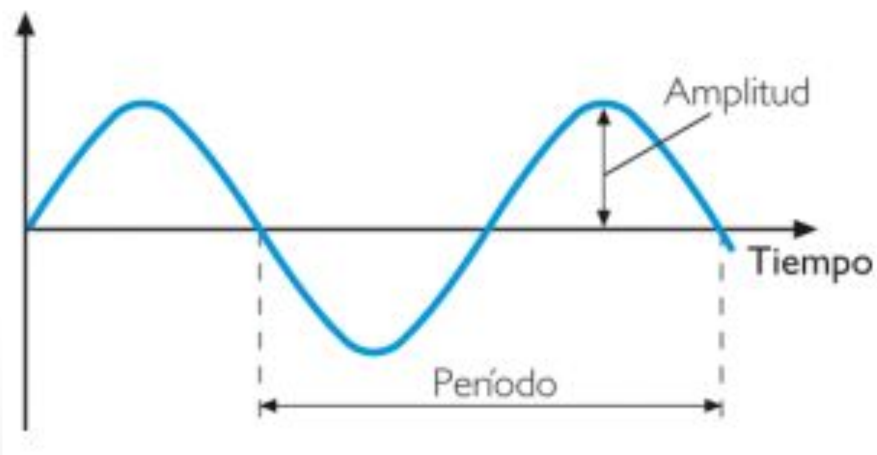
Aspectos trascendentes de la Elipsometría.

«Formalismo matemático para la caracterización óptica de materiales por medio de diferentes configuraciones elipsométricas»

Jose Antonio Reyes Vega
20141135025

Características de una Onda



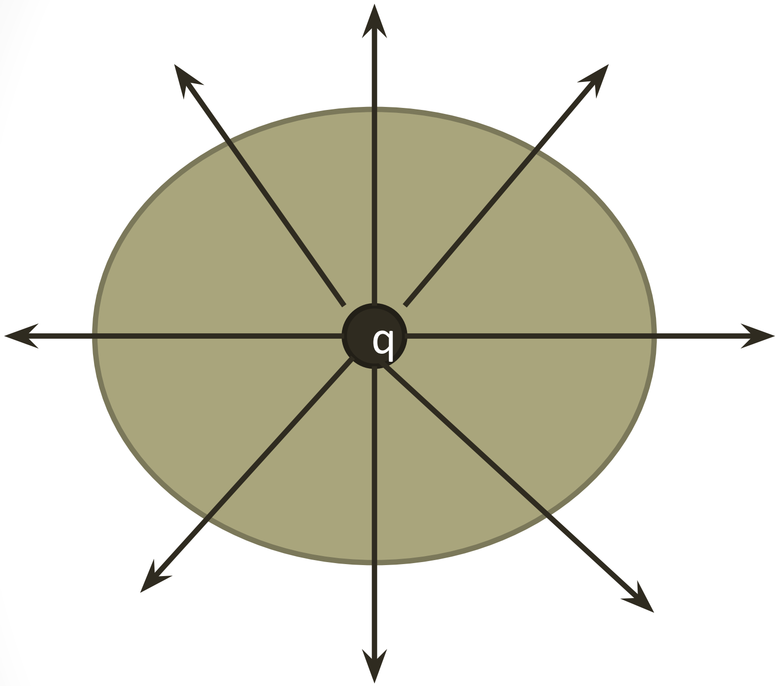


https://lidiaconlaquimica.wordpress.com/tag/ecuacion-de-onda/

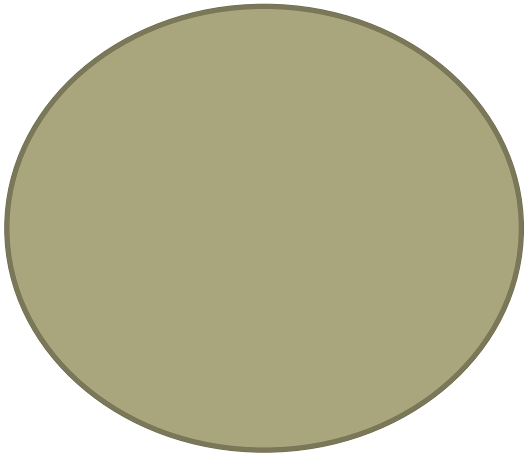
- $\nabla \phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$

- Amplitud (A).
- Periodo (T).
- Longitud de onda (λ).
- Dirección de propagación ($\boldsymbol{k}$).

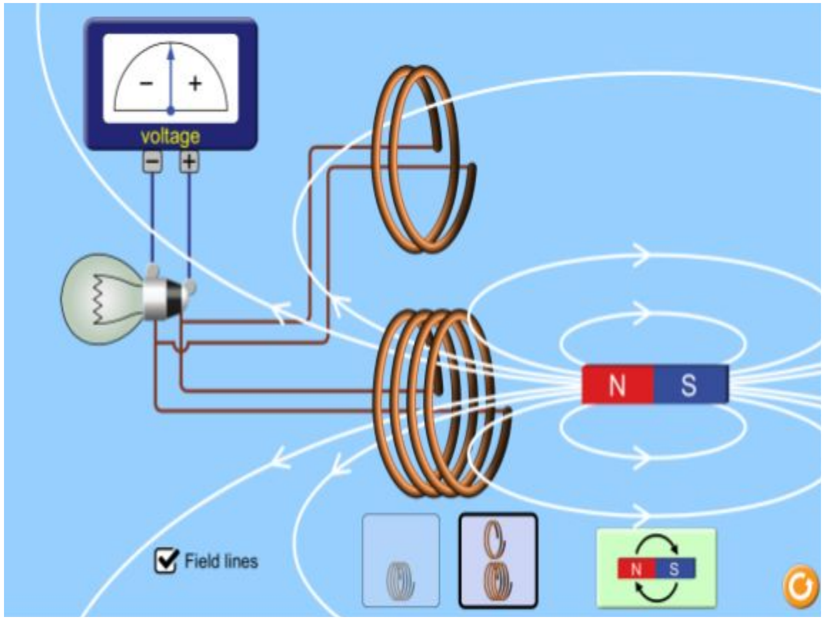
Ecuaciones de Maxwell



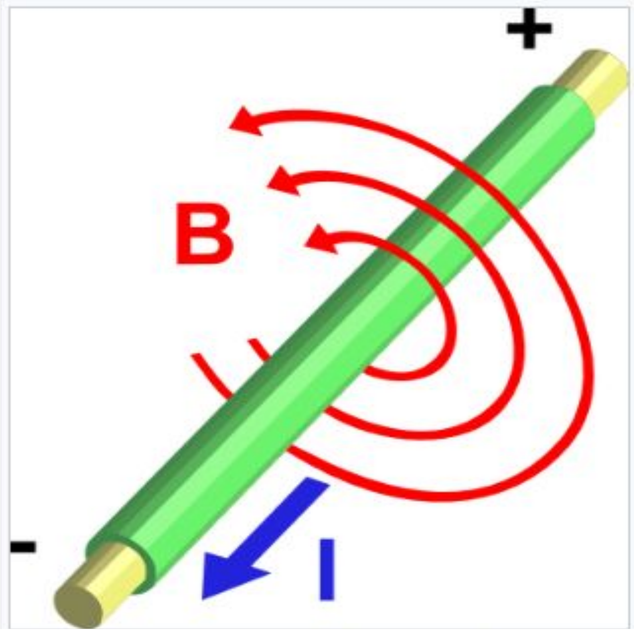
$$\nabla . \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o}$$



$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0$$



https://phet.colorado.edu/es/simulation/faradays-law



https://es.wikipedia.org/wiki/Ley_de_Amp%C3%A8re

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_o \left[\boldsymbol{j} + \epsilon_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right]$$

Fuentes de campo

Electrostática y Magneto estática.

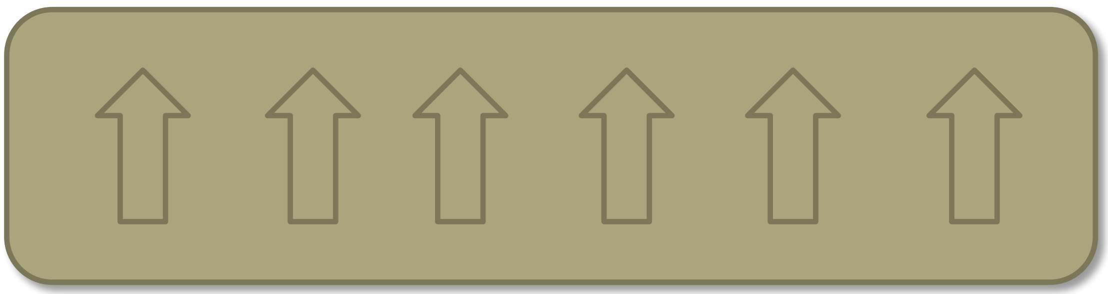
- Cargas.
- Corrientes.

Electrodinámica y Magneto dinámica.

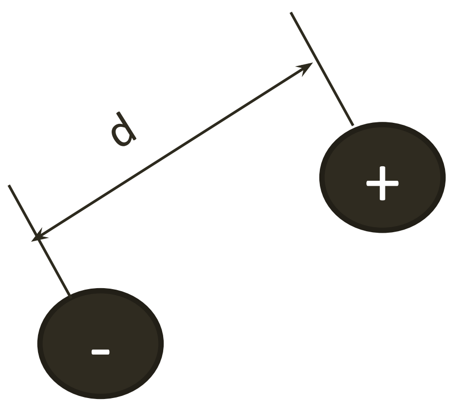
- Campo eléctrico.
- Campo magnetico

Propiedades de la materia

- **Polarizabilidad:**



Densidad de dipolos eléctricos.



$$\mathbf{P} = \frac{\boldsymbol{p}}{V}$$

$$\mathrm{P} = \epsilon_o(\chi_1 E + \chi_2 E^2 + ..)$$

$$\rho = \nabla P$$

En el vacío	En la materia	Óptica lineal

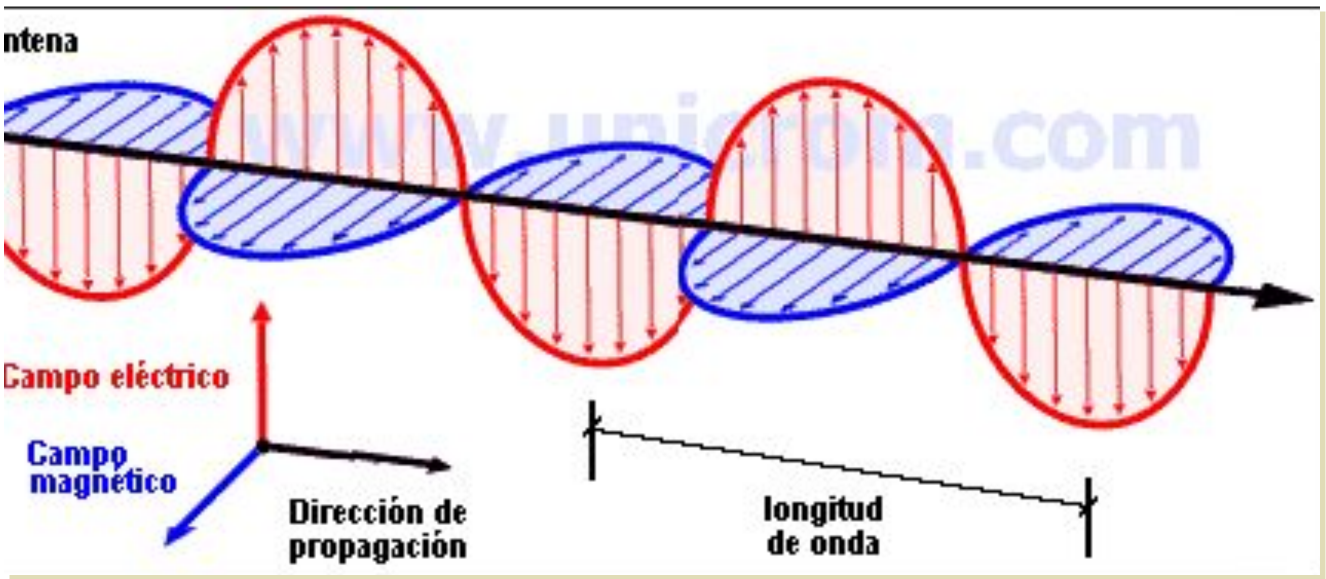
$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]E = \left[\mu_o \frac{\partial j}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_o}\right)\right]$$

Donde la velocidad de propagación viene dada por:

$$v = \frac{c}{N}$$

Solución ecuación de onda con $j = 0 \text{ y } \rho = 0$

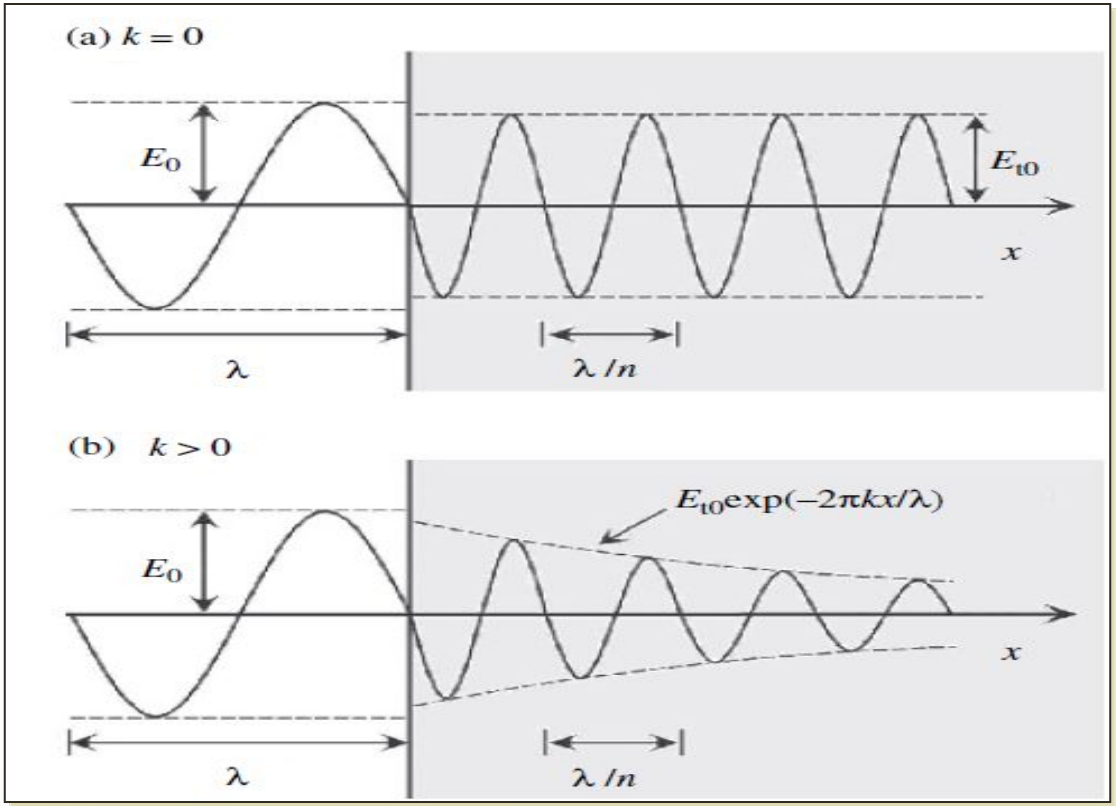
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_o} e^{i(wt - kx + \delta)}$$



http://unicrom.com/composicion-onda-electromagnetica/

Índice de refracción

$$\boldsymbol{E} = \left[E_o e^{-\frac{2\pi\kappa x}{\lambda}}\right] e^{i\left(wt - \frac{2\pi n}{\lambda}x + \delta\right)} \widehat{\boldsymbol{E}}$$



En general

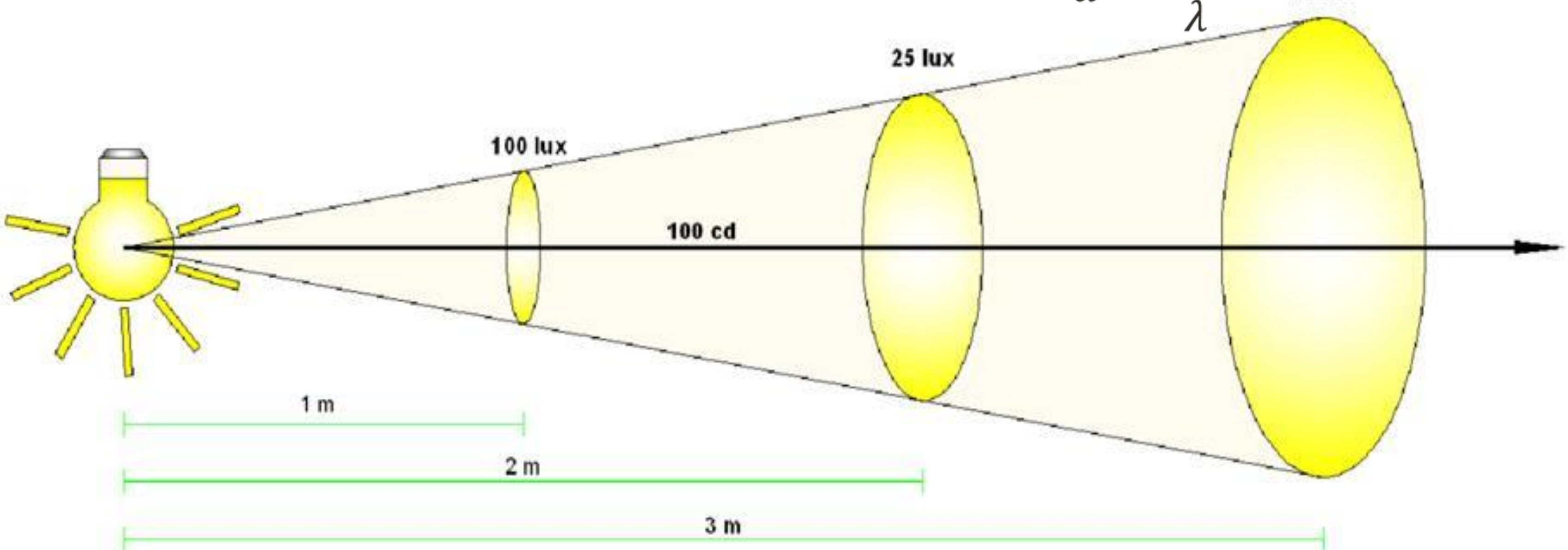
$$N = n - i\kappa$$

$$k = \frac{2\pi N}{\lambda}$$

Intensidad de luz

- $$I = \frac{E_o^2}{2\mu_o c}$$

$$\alpha = \frac{4\pi\kappa}{\lambda}$$

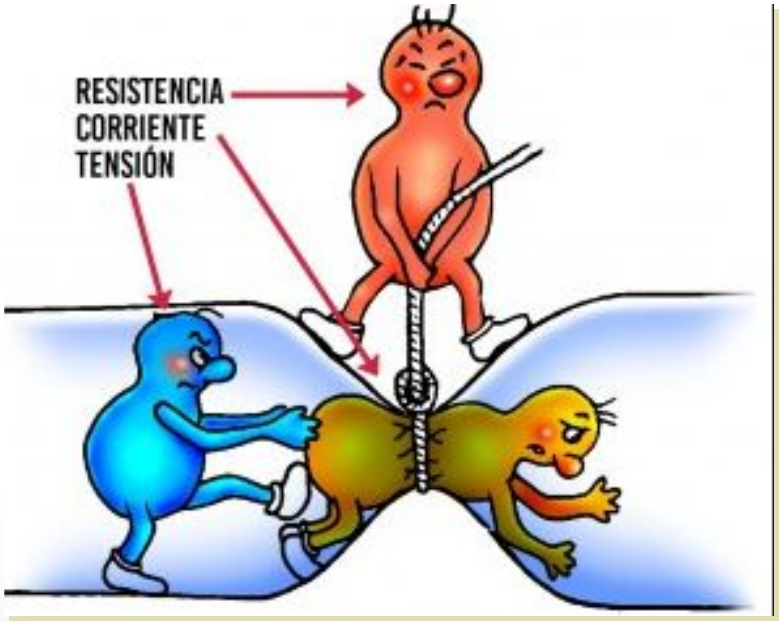


http://www.higieneindustrialyambiente.com/analisis-medicion-monitoreo-luz-iluminacion-laboral-quito-guayaquil-cuenca-ecuador.php?tablajb=iluminacion&p=17&t=Medicion-de-iluminacion-de-ambientes-de-trabajo&

En metales

$$Ley\ de\ ohm\ en\ forma\ diferencial$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$



http://programacasasegura.org/co/wp-content/uploads/sites/4/2016/08/ohm___-300x245.jpg

Tabla de clasificación
Grafeno
Plata
Cobre
Oro
Aluminio
Wolframio

$$k = \mu_o[\epsilon\epsilon_o\omega^2 + i\sigma\omega]$$

Relación constantes ópticas

Constante óptica				
Relaciones	……			

Índice de Refracción (N): Propiedad de desviar un haz de luz y/o absorberlo.

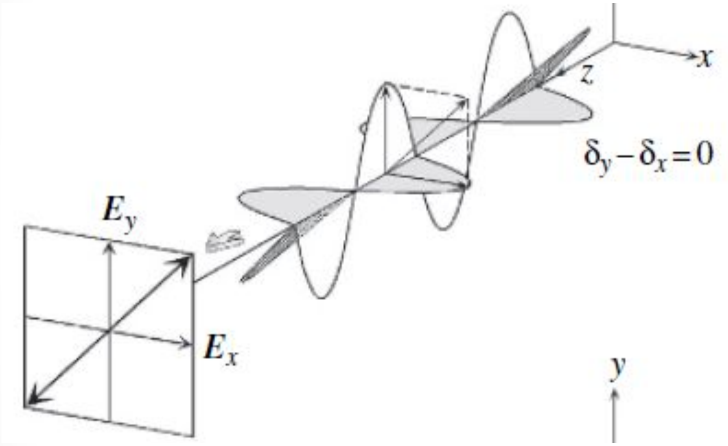
Constante Dieléctrica (ϵ): Cantidad vinculada a la facilidad de orientar dipolos eléctricos.

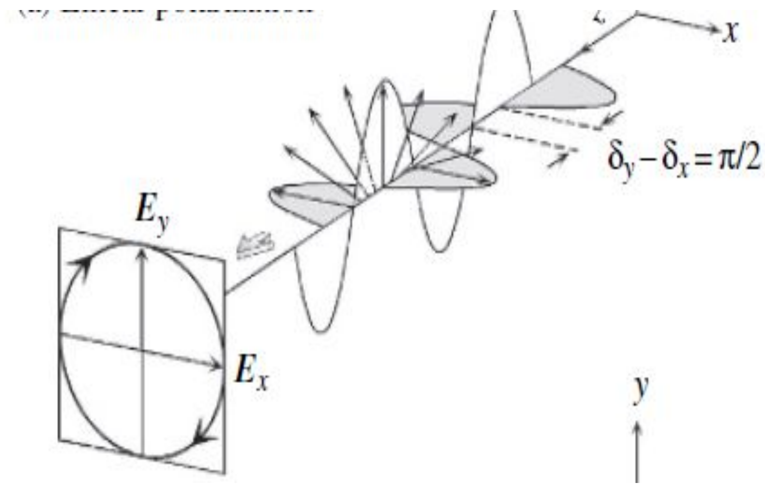
Conductividad eléctrica (σ) : Libertad de desplazamiento por parte de los electrones de valencia.

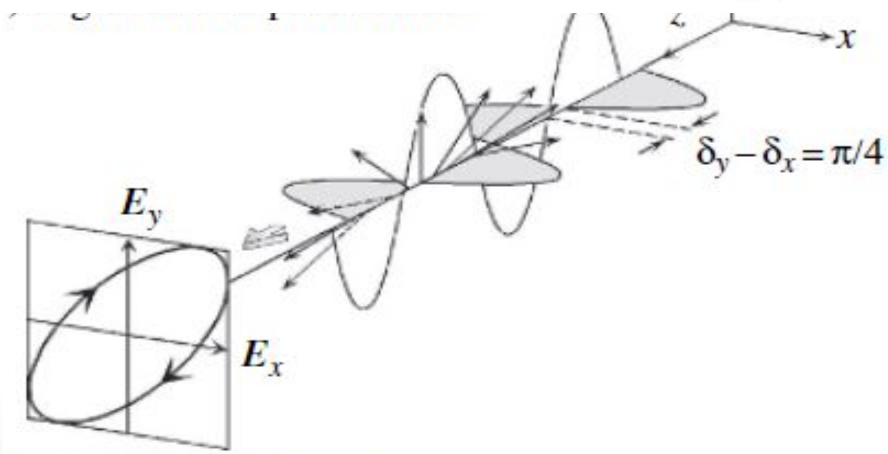
Coeficiente de extinción (α): Disminución de la intensidad de la luz.

Polarización OEM

$$\left(\frac{E_p}{E_{op}}\right)^2 + \left(\frac{E_s}{E_{os}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_p}{E_{op}}\right)\left(\frac{E_s}{E_{os}}\right)Cos(\Delta) = Sen(\Delta)$$







Formalismo de Stokes y jones

- Jones: Matriz 2x1 configurada a partir de las componentes de **E.**

$$E = \begin{bmatrix} E_p \\ E_s \end{bmatrix}$$

- Stokes: Matriz 4x1 configurada a partir de la intensidad de luz.

$$\begin{bmatrix} S_o \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x + I_y \\ I_x - I_y \\ I_{45} - I_{-45} \\ I_R - I_L \end{bmatrix}$$

Instrumentos ópticos

- Fuente: Fuente de la OEM.
- Polarizador [P]: Polariza linealmente la OEM dada por la fuente, con una contribución tipo p y tipo s.
- Compensador [C]: Establece un retardo entre las componentes tipo p y tipo s.
- Muestra [M]: Objeto de estudio.
- Analizador [A]: Polarizador lineal.
- Detector: Detecta la intensidad de la luz.

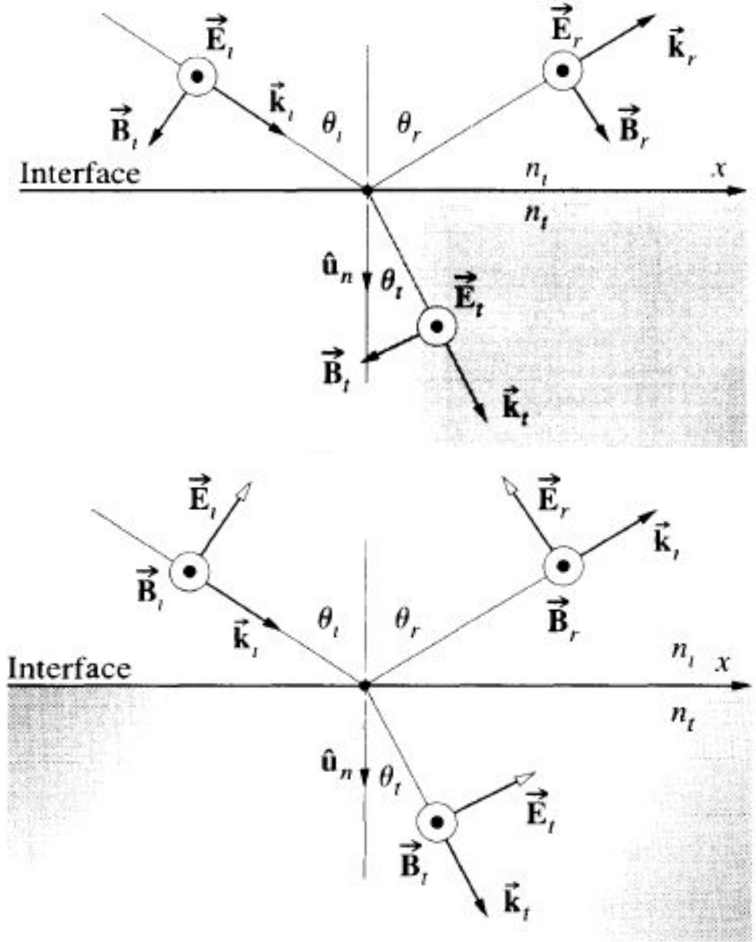
Reflexión (ecuaciones de Fresnel)

-

- $\widetilde{r_p} = \frac{\widetilde{N_2}\cos(\theta_i) - \widetilde{N_1}\cos(\theta_t)}{\widetilde{N_2}\cos(\theta_i) + \widetilde{N_1}\cos(\theta_t)}$

- $\widetilde{r_s} = \frac{\widetilde{N_1}\cos(\theta_i) - \widetilde{N_2}\cos(\theta_t)}{\widetilde{N_1}\cos(\theta_i) + \widetilde{N_2}\cos(\theta_t)}$

$\widetilde{N_1}\, sen(\theta_i) = \widetilde{N_2} sen(\theta_t)$



	Linealmente polarizada tipo p	Linealmente polarizada tipo s	Linealmente polarizada tipo (p,s)	Linealmente polarizada tipo (p,-s)	Circularmente (derecha)	Circularmente (izquierda)	No polarizada
Jones							------
Stokes							

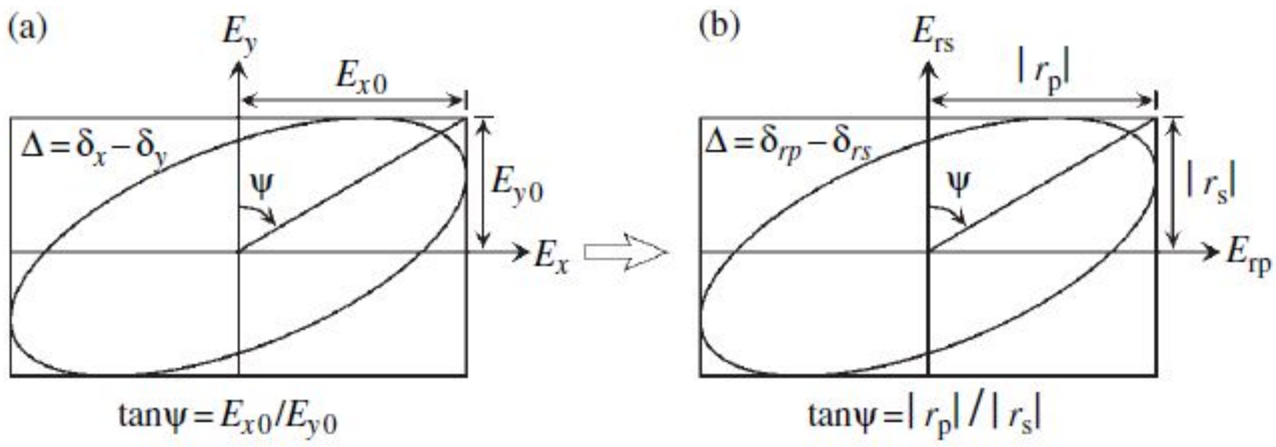
	Polarizador lineal.	Polarizador lineal tipo p	Polarizador lineal tipo s	Matriz rotación	Retardador
Jones					

Polarizador lineal componente p l [P]	Polarizador lineal componente s [P]	Compensador [C]	

-

- $E = E_p\hat{p} + E_s\hat{s} = \begin{bmatrix} E_p \\ E_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{op}}{E_{os}} e^{i\Delta} \\ 1 \end{bmatrix} E_{os} e^{i(\omega \mathrm{t} - kx + \delta_s)}$

$$\rho = Tan(\Psi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta} = \frac{\widetilde{r_p}}{\widetilde{r_s}}$$



Elipsometría

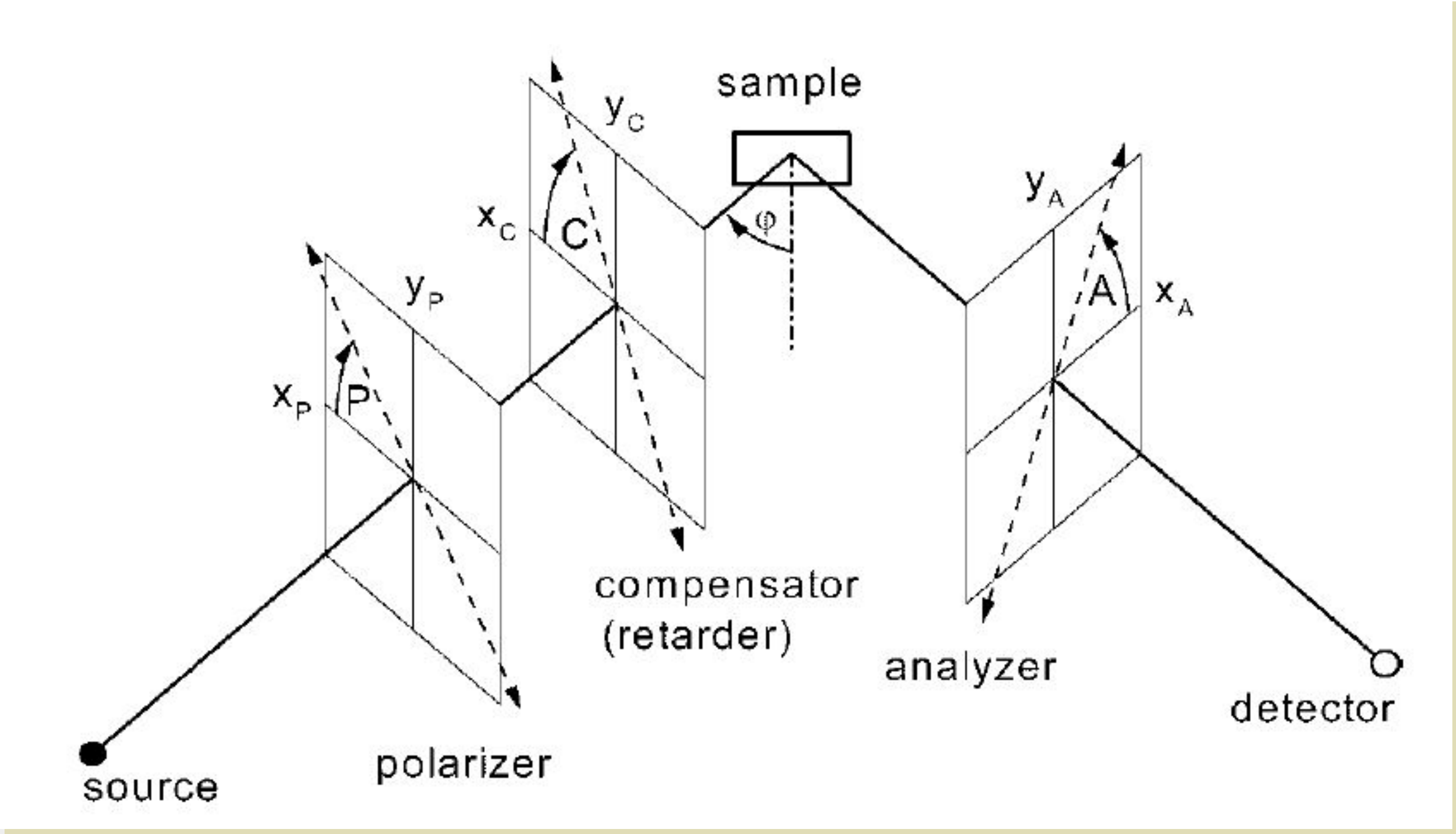
- Técnica de medición de los ángulos Ψ y Δ con el fin de determinar las constantes ópticas, a partir del cambio del estado de polarización del vector de campo eléctrico descomponiéndolo en las componentes tipo (p) y tipo (s) del campo eléctrico.

Principalmente se clasifican dos tipos de técnicas:

- ***Elipsometría Nula:*** Se configura de tal forma que la intensidad medida sea nula.

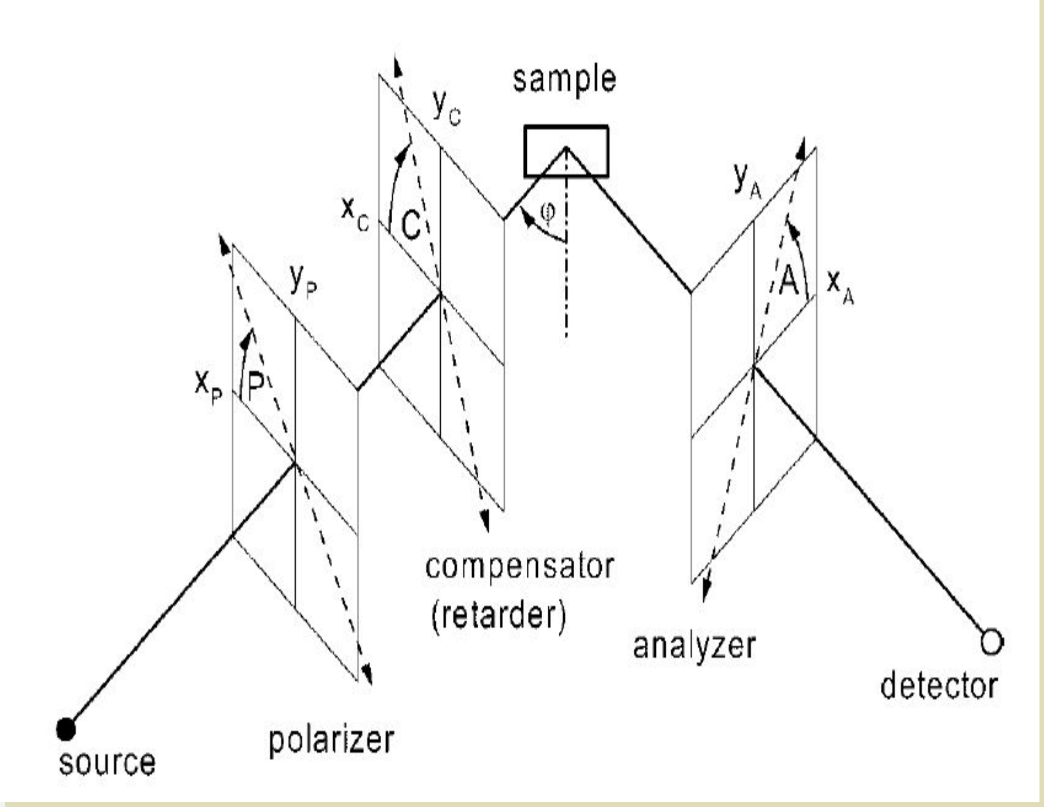
- ***Elipsometría fotométrica*:** Se rota uno de los componentes de tal forma de obtener la relación entre el Angulo vs la intensidad.

Esquema montaje elipsometríco



Elipsometría nula

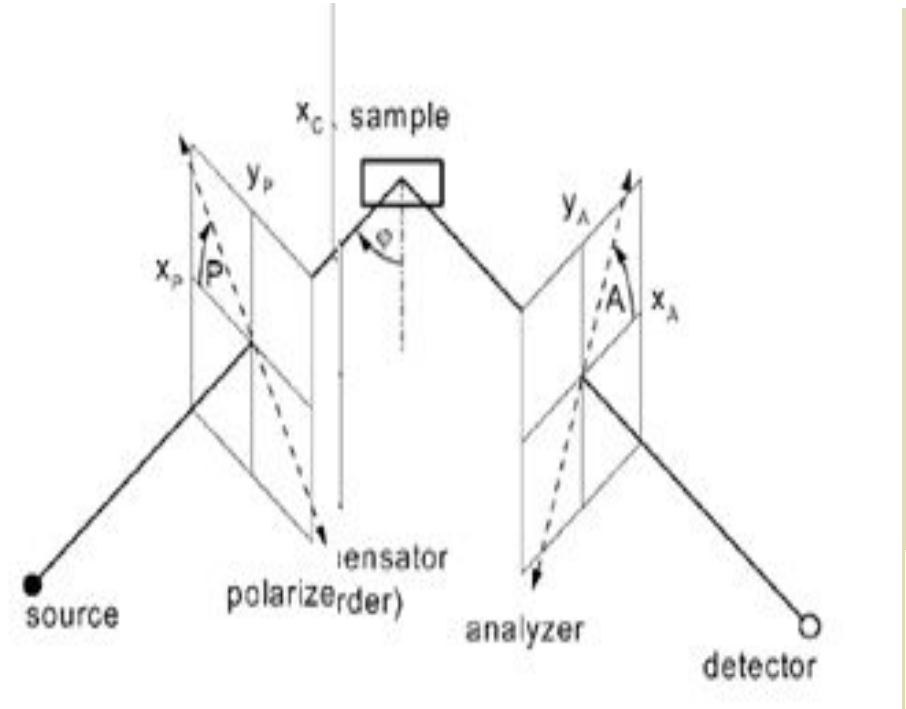
$$L_{out} = [A][R_A][S][R_{-C}][C][R_C][R_{-P}][P]L_{in} = [0]$$



$$-2\left(\mathrm{p} - \frac{\pi}{4}\right) = \Delta$$

$$-A = \Psi$$

Configuración PSA

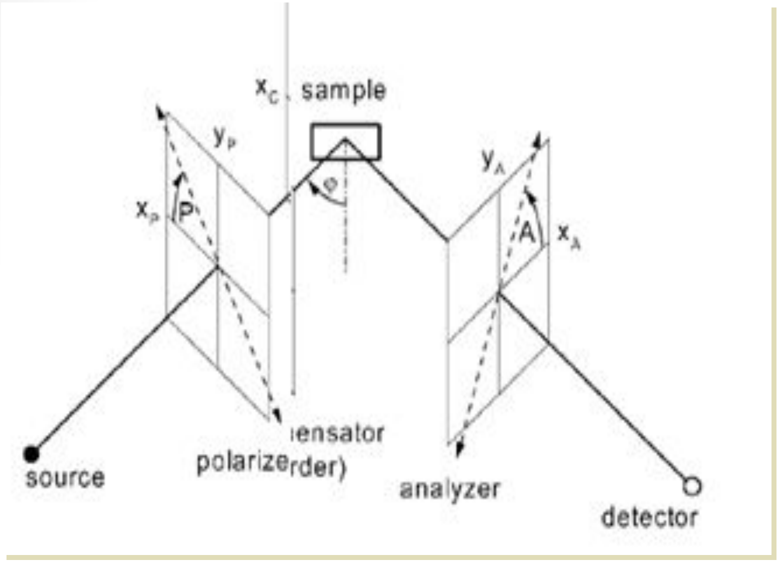


$$L_{out} = [A][R_A][S][R_{-P}][P]L_{in}$$

$$\boldsymbol{tan^2(\psi) = tan^2(P)\,\frac{I_{(0)}}{I_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}}$$

$$\boldsymbol{cos(\Delta) = \frac{\left(I_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} - I_{(0)} - I_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)}{2\sqrt{I_{(0)}I_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}}}}$$

Elipsometría Fotométrica (Analizador rotatorio)

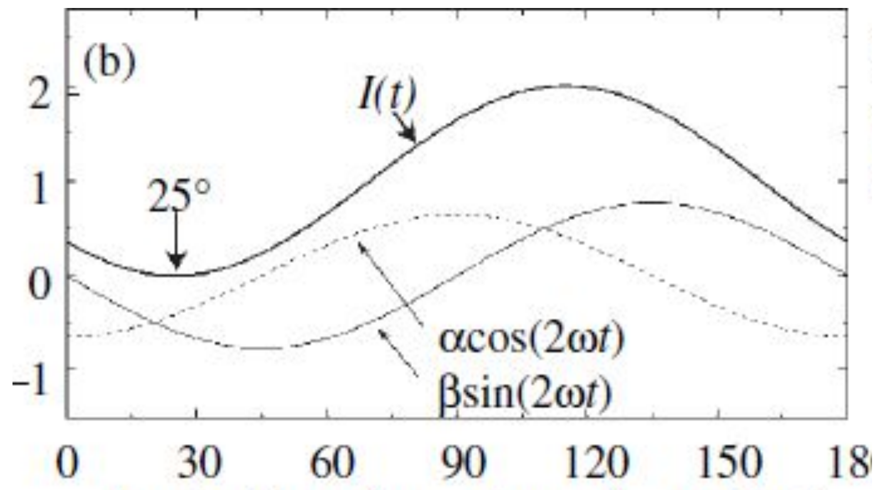


$$L_{out} = [A][R_A][S][R_{-P}][P][L_{in}]$$

$$I(t) = I_o(1 + S_1 Cos(2\omega t) + S_2 Sen(2\omega t))$$

$$S_1 = -Cos\ (2\Psi)$$

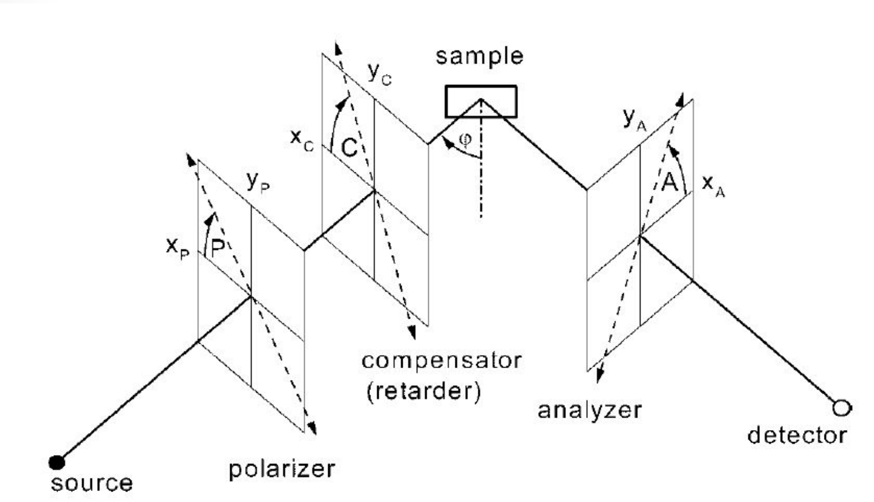
$$S_2 = Sen(2\Psi)Cos(\Delta)$$

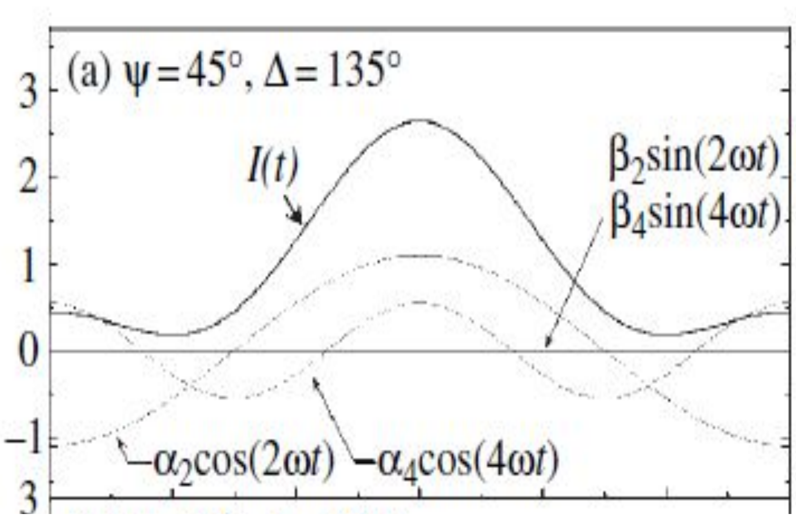


Elipsometría Fotométrica (Compensador rotatorio)

$$L_{out} = [A][R_A][R_{-C}][C][R_C][S][R_{-P}][P][L_{in}]$$

$$I(t) = I_o(1 + \alpha_2 Co(2\omega t) + \beta_2 Sen\ (2\omega t) + \alpha_4 Cos(4\omega \mathrm{t}9 + \beta_4 Sen(4\omega t)\ )$$





$$\alpha_o \beta_4 = PSen^2\left(\frac{\delta}{2}\right) Cos(2\epsilon) Cos(2A) \qquad \alpha_o \alpha_4 = PSen^2\left(\frac{\delta}{2}\right) Cps(2\epsilon) Cos(2A)$$

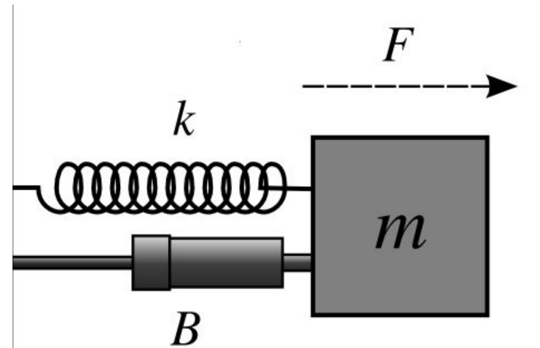
$$\alpha_o \alpha_2 = PSen(\delta) Sen(2\epsilon) Sen(2A) \qquad \alpha_o \beta_2 = -PSen(\delta) Sen(2\epsilon) Cos(2A)$$

$$\alpha_o = 1 + PCos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) Cos(2\epsilon) Cos(2A)$$

Modelos Microscópicos

- Lorentz: Oscilador-armónico-amortiguado-forzado «materiales dieléctricos».

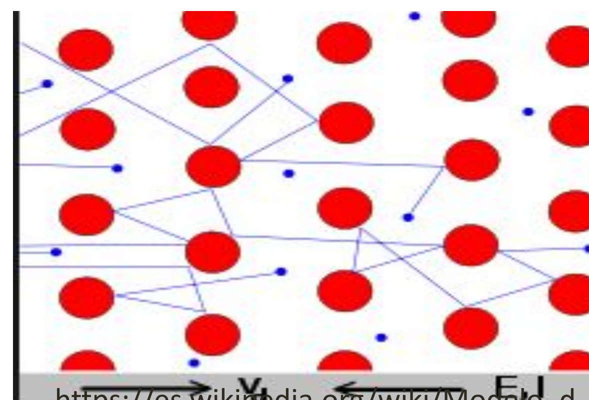
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_o^2 (x - x_o) = -\frac{eE_o}{m_e} e^{i\omega t}$$



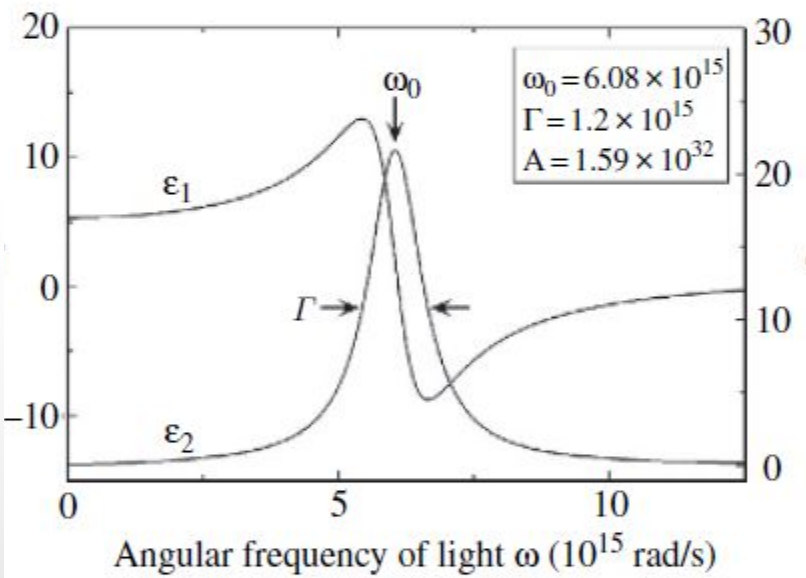
http://www.compelect.com.co/blog/2017/05/como-simular-un-sistema-masa-resorte-con-simulink/

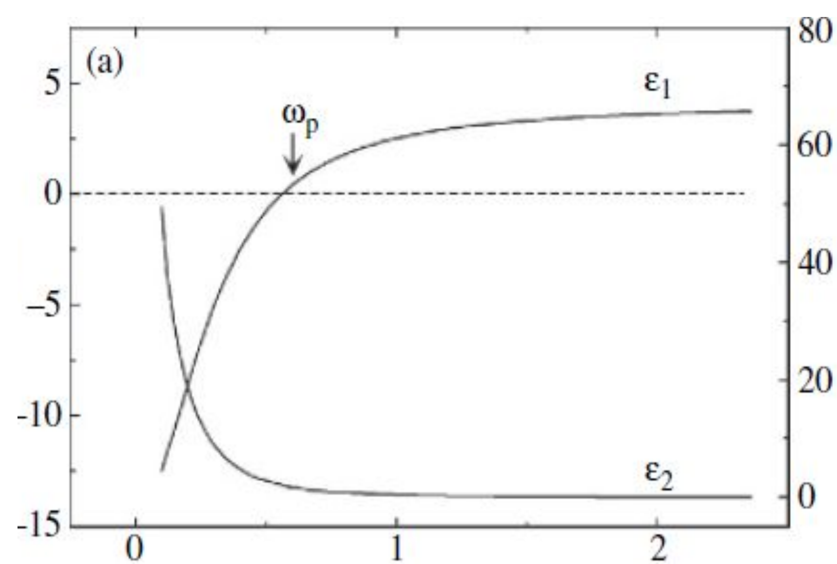
- Drude: Electrones libres sometidos a una fuerza externa y una fuerza viscosa «materiales conductores».

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{eE_o}{m_e} e^{i\omega t}$$


https://es.wikipedia.org/wiki/Modelo_de_Drude

Modelo	Lorentz «dieléctricos»	Drude «conductores»
Ecuación diferencial	$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_o^2 (x - x_o) = -\frac{eE_o}{m_e} e^{i\omega t}$	$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{eE_o}{m_e} e^{i\omega t}$
Amplitud	$x_o = -\frac{eE_o}{m_e[\omega_o^2 - \omega^2 + i\gamma\omega]}$	$x_o = -\frac{eE_o}{m_e[i\gamma\omega - \omega^2]}$
Constante dieléctrica.	$\epsilon = 1 - \sum_{k=1}^{n_k} \frac{e^2 \eta_e f_k}{\epsilon_o m_e[\omega_{ok}^2 - \omega^2 + i\gamma_k\omega]}$	$\epsilon = 1 - \frac{e^2 \eta_e}{\epsilon_o \omega m_e [i\gamma - \omega]}$ $\epsilon = 1 - \frac{1}{\left[\frac{i\gamma}{\omega} - 1\right]} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2$



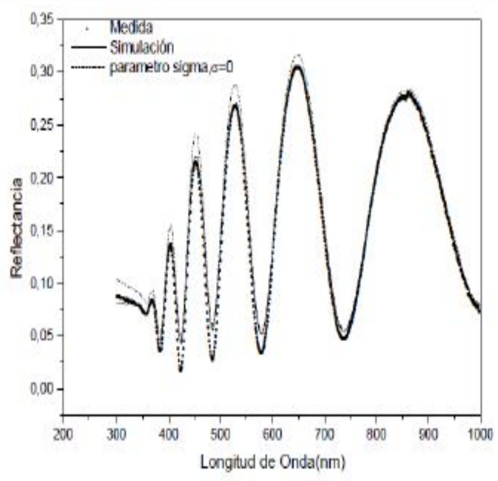


Elipsometría espectral

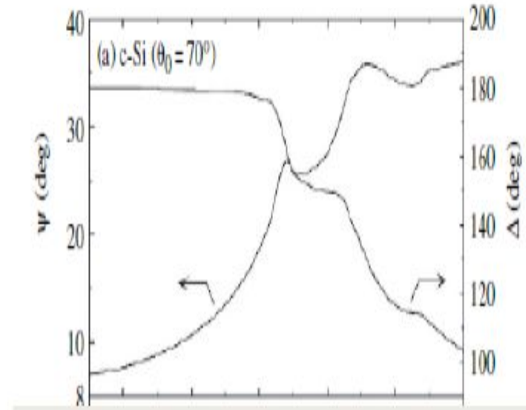
- El carácter espectral viene dado por la variación de la longitud de onda incidente sobre la muestra y la respectiva medición de la reflectancia.

$$R_p = r_p^2 \qquad\qquad R_s = r_s^2$$

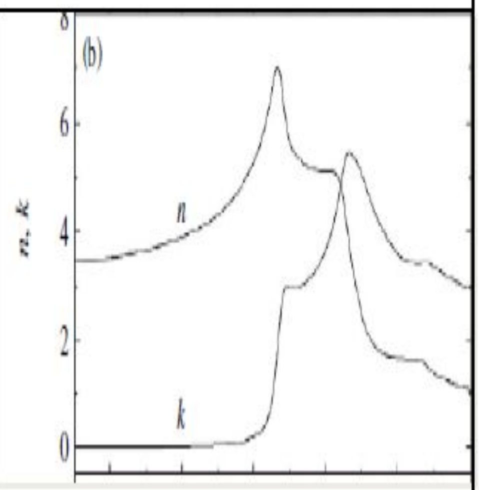
<table>
<tr>
<th>Medición reflectancia con curva de ajuste a partir de modelos microscópicos</th>
<th>Deducción ángulos elipsometrícos, a partir de los resultados de la curva de ajuste</th>
<th>Curvas del índice de refracción complejo</th>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>



</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Fuentes

- [1] Fujiwara, H. (2007). Spectroscopic Ellipsometry: Principles and Applications. *Wiley.*
- [2] *Riedling, K.* (1988). Ellipsometry for Industrial Applications. Springer-Verlag.
- [3] *Tompkins, H* y *Eugene, I.* (2005). Handbook of Ellipsometry. Springer.
- [4] Hetch, E. (2002). Optics. Addison Wesley.