Comportamiento circuitos RLC

Circuitos de segundo orden

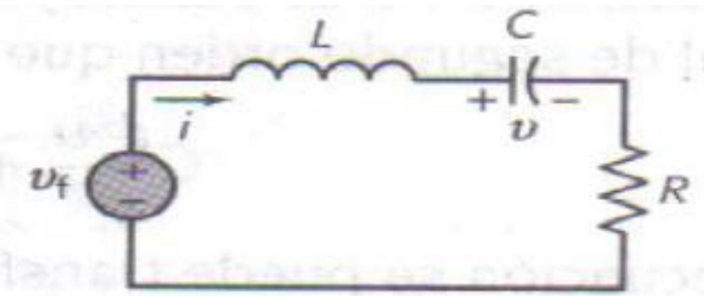
Circuito RLC general

- Obtención ecuación diferencial
- Respuesta forzada
- Respuesta natural
- Solución

Obtención ecuación diferencial

- Circuito serie
- Circuito paralelo
- Otro ejemplo

Circuito RLC serie



$$L\frac{di}{dt} + v + Ri = v_f$$

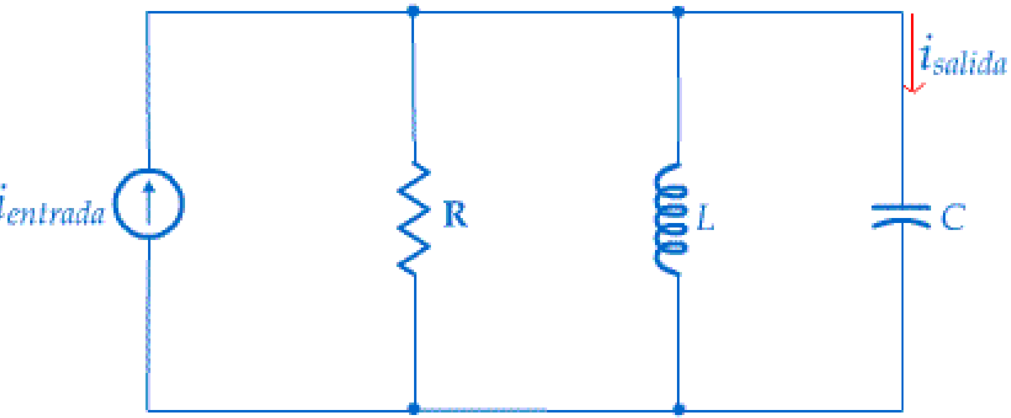
$$\frac{di}{dt} + \frac{v}{L} + \frac{R}{L}i = \frac{v_f}{L}$$

$$C\frac{dv}{dt} = i$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L} + \frac{RC}{L}\frac{dv}{dt} = \frac{v_f}{L}$$

- Ecuación diferencial de segundo orden

Circuito RLC paralelo



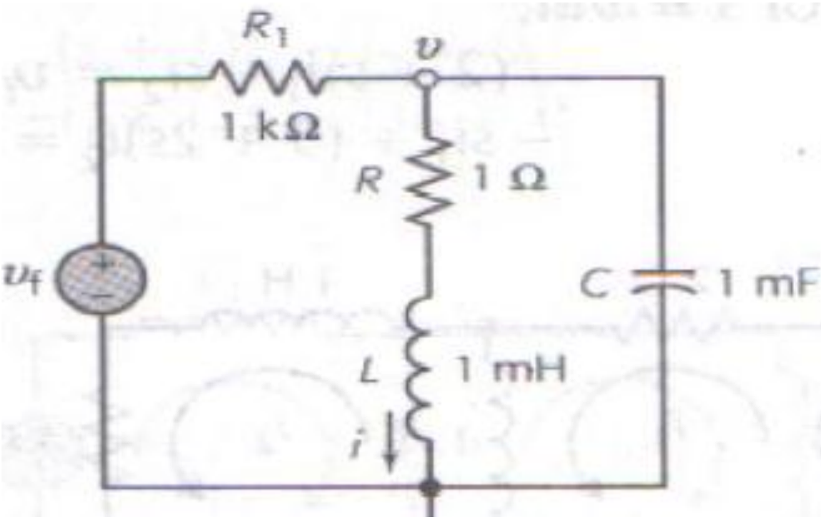
$$CL\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{Ldi}{Rdt}+i=i_f$$

$$\frac{v}{R}+i+C\frac{dv}{dt}=i_f$$

$$v=\frac{Ldi}{dt}$$

- Ecuación diferencial de segundo orden

Otro ejemplo



En rama de la bobina

$$Ri + L\frac{di}{dt} = v$$

$$\frac{v}{R_1} - \frac{v_f}{R_1} + i + C\frac{dv}{dt}$$

- Hallar i

$$\frac{v_f - v}{R_1} = i + C\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{v - v_f}{R_1} + i + C\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{Ri+L\frac{di}{dt}}{R_1} - \frac{v_f}{R_1} + i + C\frac{d(Ri+L\frac{di}{dt})}{dt}=0$$

$$CL\frac{d^2i}{dt^2} + (L + CR)\frac{di}{dt} + i = \frac{v_f}{R_1}$$

Respuesta forzada de un circuito RLC

- Circuito serie
- Circuito paralelo
- Otro ejemplo

En cualquier caso la respuesta forzada es de la forma de la función de excitación

Función de excitación	Solución propuesta
K	A
Kt	$At + B$
Kt^2	$At^2 + Bt + C$
$K \operatorname{sen} \omega t$	$A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$
Ke^{-at}	Ae^{-at}

Circuito paralelo RLC

- Con R=6Ω, L=7H, C=1/42F e I_f=1 A determinar la respuesta forzada de la corriente sobe L
- Como en este curso la función de excitación es una constante

$$CL\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{Ldi}{Rdt}+i=i_f$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{\frac{1}{42}6dt}+\frac{1}{7\frac{1}{42}}i=\frac{1}{7\frac{1}{42}}1$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{CRdt}+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{LC}i_f$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{7di}{dt}+6i=6$$

Circuito RLC paralelo

- La respuesta ha de ser de la forma i_{fo}=A=1 A

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{7di}{dt} + 6i = 6$$

$$\frac{d^2 1}{dt^2} + \frac{7d1}{dt} + 6(1) = 6$$

$$0A + (0A) + 6A = 6$$

$$A = 1$$

Circuito serie RLC

- Con R=6Ω, L=7H, C=1/42F e v_f=5 V determinar la respuesta forzada del voltaje sobre el condensador
- Como en este curso la función de excitación es una constante

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L} + \frac{RC}{L}\frac{dv}{dt} = \frac{v_f}{L}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{LC} + \frac{Rdv}{Ldt} = \frac{v_f}{LC} \qquad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{Rdv}{Ldt} + \frac{v}{LC} = \frac{v_f}{LC}$$

Circuito RLC serie

- Remplazar datos y sabiendo que es una constante A

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{6dv}{7dt}+\frac{v}{7\frac{1}{42}}=\frac{5}{7\frac{1}{42}}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2}+\frac{6dv}{7dt}+6v=30$$

$$\frac{d^25}{dt^2}+\frac{6d5}{7dt}+6*5=30$$

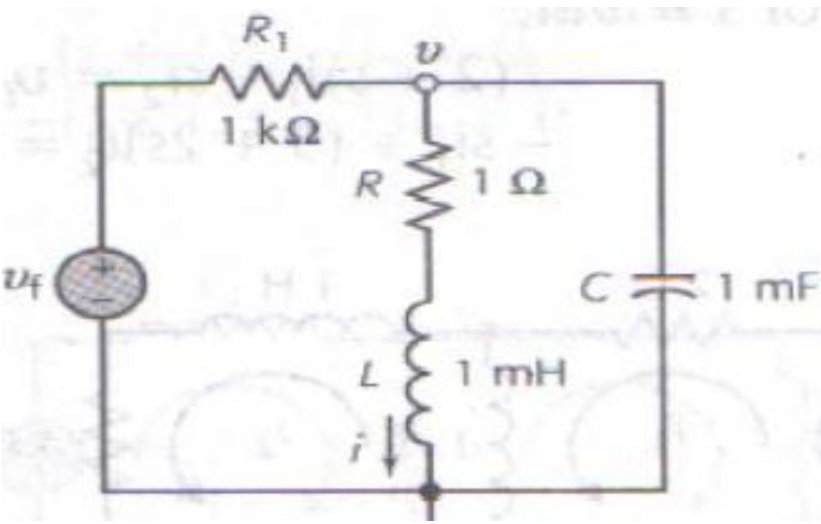
$$0(\mathrm{A})+\frac{6}{7}(0)A+6*5A=30$$

$$30A=30$$

$$A=1\ v$$

Otro ejemplo

- Del circuito hallar la respuesta de corriente sobre el lazo de R y L, con v_f=5V



$$CL\frac{d^2i}{dt^2}+(L+CR)\frac{di}{dt}+i=\frac{v_f}{R_1}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{(L+CR)}{CL}\frac{di}{dt}+\frac{1}{CL}i=\frac{v_f}{CLR_1}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{(10^{-3}+10^{-3}1)}{10^{-3}10^{-3}}\frac{di}{dt}+\frac{1}{10^{-3}10^{-3}}i=\frac{5}{10^{-3}10^{-3}10^3}$$

Otro ejemplo

- La solución es de la forma i=A = 1001 A
- $i = \frac{5}{1001}$A

$$10^6 \frac{5}{1001} A = 5 * 10^6$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{2(10^{-3})}{10^{-6}} \frac{di}{dt} + \frac{1}{10^{-6}} i = \frac{5}{10^{-3}}$$

$$A = 1001$$

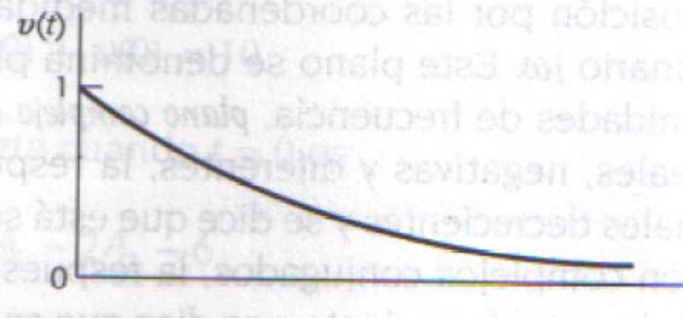
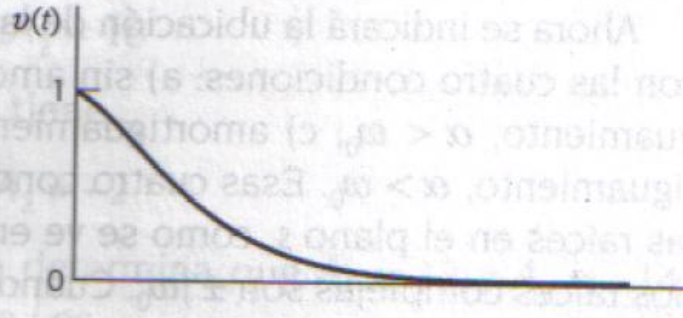
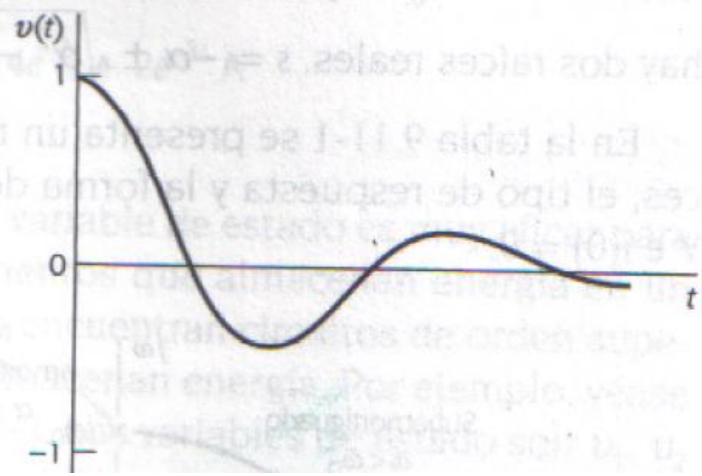
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2(10^3)\ \frac{di}{dt} + 10^6 i = 5(10^6)$$

$$\frac{d^2(\frac{5}{1001})}{dt^2} + 2000 \frac{d\frac{5}{1001}}{dt} + 10^6 \frac{5}{1001} = 5 * 10^6$$

$$0\mathrm{A} + 2000 * 0A + 10^6 \frac{5}{1001} A = 5 * 10^6$$

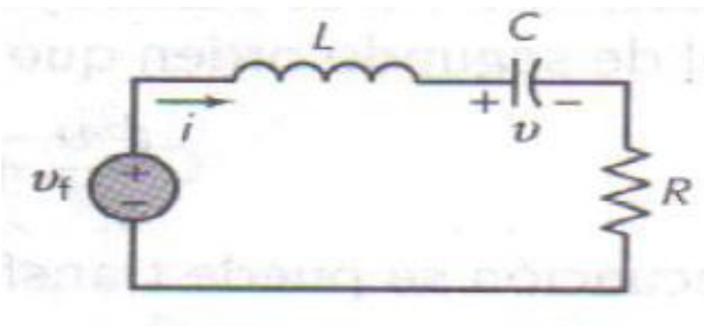
Respuesta natural y respuesta completa de un circuito RLC

- Circuito serie
- Circuito paralelo
- Otro ejemplo

Ubicación de las raíces	Tipo de respuesta	Forma de la respuesta cuando $v(0) = 1$ V e $i(0) = 0$
$s = -r_1, -r_2$ dos raíces reales	Sobreamortiguada	
$s = -r_1, -r_1$ dos raíces iguales	Críticamente amortiguada	
$s = -\alpha \pm j\omega_a$	Subamortiguada	

Circuito serie

- Con R=6Ω, L=7H, C=1/42F e v_f=5 V determinar la respuesta natural y la respuesta completa del voltaje sobre el condensador



$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{LC} + \frac{Rdv}{Ldt} = \frac{v_f}{LC}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{6dv}{7dt} + 6v = 30$$

$$s^2 + \frac{6}{7}s + 6 = 0$$

Circuito serie

$\alpha < \omega_a$ respuesta subamortiguada

$$s = \frac{-\frac{6}{7} \pm \left((\frac{6}{7})^2 - 4(1)(6) \right)^{1/2}}{2(1)} = \frac{-\frac{6}{7} \pm \left(\frac{36}{49} - 24 \right)^{1/2}}{2}$$

$$s = \frac{-\frac{6}{7} \pm \left(-\frac{1140}{49} \right)^{1/2}}{2} = -\frac{3}{7} \pm 2{,}411706145j$$

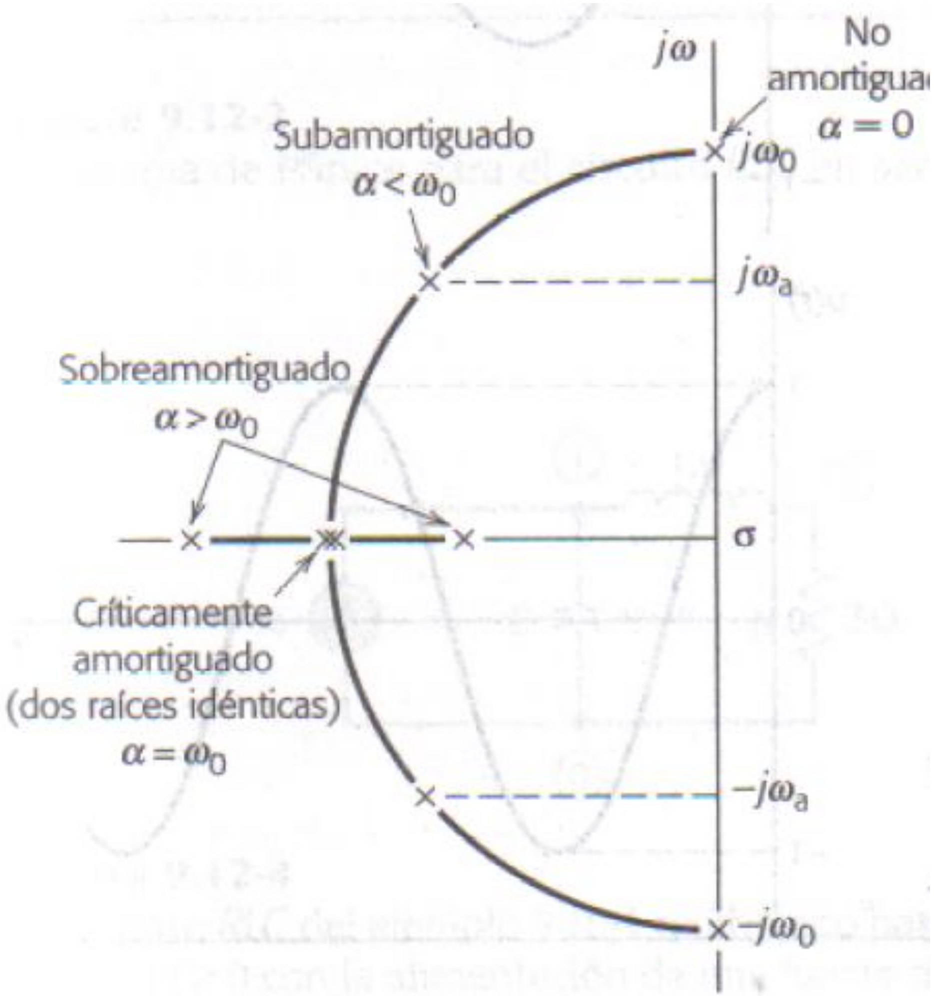
$$s = -\alpha \pm j w_a$$

$$\alpha = \frac{3}{7} \quad y \quad \omega_a = 2{,}411706145$$

$$s = -\alpha \pm (\alpha^2 - {w^2}_0)^{1/2}$$

$$v_n = A_1 e^{\left(-\frac{3}{7} + 2{,}4117j\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{3}{7} - 2{,}4117j\right)t}$$

Ubicación raíces complejas



Circuito serie respuesta completa

- Entonces

$$v_{for} = 1$$

$$v_n = A_1 e^{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{3}{7}-2{,}4117j\right)t}$$

$$v_{comp} = v_n + \ v_{fo} = A_1 e^{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{3}{7}-2{,}4117j\right)t} + 1$$

$$0V = A_1 e^0 + A_2 e^0 + 1$$

$$-A_2 - 1 = A_1$$

- Ahora derivando y remplazando en t=0

$$\frac{dv_{comp}}{dt} = \frac{d}{dt}A_1e^{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)t} + \frac{d}{dt}A_2e^{\left(-\frac{3}{7}-2{,}4117j\right)t} + \frac{d1}{dt}$$

$$\frac{dv_{comp}}{dt} = \left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_1e^{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)t} + \left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_2e^{\left(-\frac{3}{7}-2{,}4117j\right)t} + 0$$

$$\frac{dv_{comp}}{dt} = \left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_1e^{0} + \left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_2e^{0}$$

$$0 = \left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_1 1 + \left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_2 1$$

Circuito serie

- Como la derivada de 0 es 0

$$0=\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_1+\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_2$$

$$-\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_1=\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_2$$

$$\frac{-\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)A_1}{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)}=A_2 \qquad \frac{\left(\frac{3}{7}-2{,}4117j\right)A_1}{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)}=A_2$$

Circuito serie

$$\frac{\left(\frac{3}{7} - 2{,}4117j\right) A_1}{\left(-\frac{3}{7} + 2{,}4117j\right)} = A_2$$

$$\frac{(2{,}44948\angle - 79{,}8234) A_1}{(2{,}44948\angle - 79{,}8234)} = A_2$$

$$A_1 = A_2$$

Respuesta completa circuito RLC serie

$$A_1 = A_2$$

$$-1 = A_1 + A_2$$

$$-1 = A_2 + A_2$$

$$-1/2 = A_2 = A_1$$

$$v_{comp} = A_1 e^{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)t} + A_2 e^{\left(-\frac{3}{7}-2{,}4117j\right)t} + 1$$

$$v_{comp} = -\frac{1}{2} e^{\left(-\frac{3}{7}+2{,}4117j\right)t} + -\frac{1}{2}\ e^{\left(-\frac{3}{7}-2{,}4117j\right)t} + 1$$

Circuito paralelo RLC

- Con R=6Ω, L=7H, C=1/42F e I_f=1 A determinar la respuesta natural y la respuesta completa de la corriente sobre L

$$CL\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{Ldi}{Rdt}+i=i_f$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{\frac{1}{42}6dt}+\frac{1}{7\frac{1}{42}}i=\frac{1}{7\frac{1}{42}}1$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{di}{CRdt}+\frac{1}{LC}i=\frac{1}{LC}i_f$$

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{7di}{dt}+6i=6$$

Respuesta natural RLC paralelo

- La forma de la respuesta natural es (sobreamortiguada)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{7di}{dt} + 6i = 6 \qquad\qquad s^2 + 7s + 6 = 0$$

$$s = \frac{-7 \pm ((7)^2 - 4(1)(6))^{1/2}}{2(1)} = \frac{-7 \pm (49 - 24)^{1/2}}{2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$s_1 = -1 \qquad\qquad s_2 = -6$$

$$i_n = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$$

Respuesta completa RLC paralelo

- La corriente en t=0 ayuda a establecer ecuación parar hallar constantes

$$i_n = A_1e^{-t} + A_2e^{-6t} \qquad\qquad i_{for} = 1$$

$$i_{comp} = i_n + i_{fo} = A_1e^{-t} + A_2e^{-6t} + 1$$

$$0 = A_1e^0 + A_2e^0 + 1$$

$$-1 = A_1 + A_2$$

- Ahora derivando y remplazando en t=0

$$\frac{di_{comp}}{dt} = \frac{d}{dt}A_1e^{-t} + \frac{d}{dt}A_2e^{-6t} + \frac{d1}{dt}$$

$$\frac{di_{comp}}{dt} = -A_1e^{-t} + -6A_2e^{-6t} + 0$$

$$\frac{di_{comp}}{dt} = 0 = -A_1e^{-t} + -6A_2e^{-6t}$$

$$0 = -A_1e^{-0} + -6A_2e^{-6(0)}$$

$$-6A_2 = A_1$$

$$0 = -A_1 - 6A_2$$

Respuesta completa RLC paralelo

$-6A_2 = A_1$

$-1 = A_1 + A_2$

$-1 = -6A_2 \quad +A_2$

$-1 = -5A_2$

$\frac{1}{5} = A_2$

$-6A_2 = A_1$

$-6(\frac{1}{5}) \quad = A_1 = -(\frac{6}{5})$

- La respuesta completa queda

$$i_{comp} = i_n + i_{fo} = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} + 1$$

$$i_{comp} = -\frac{6}{5} e^{-t} + \frac{1}{5} e^{-6t} + 1$$