CELULARIZACIONES FIBRA A FIBRA

Primer Encuentro de Jóvenes Topólogos TOP-UD

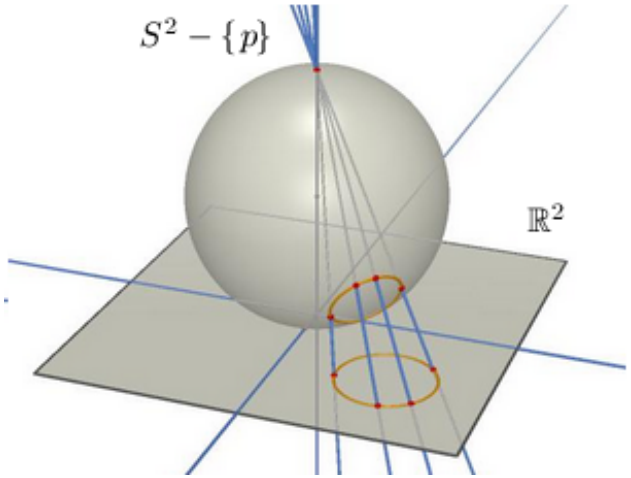
Carlos A. Giraldo

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS

23 de Mayo de 2014

Clasificación topológica

- La topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. Las transformaciones permitidas son aquellas en las cuales hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, de tal forma que 'puntos próximos' se corresponden con 'puntos próximos'. [1]



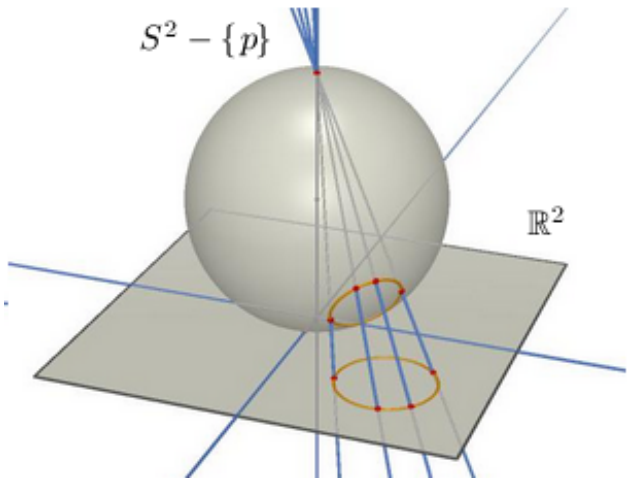
- El principal problema en topología ha sido la clasificación de los espacios topológico salvo equivalencia (salvo homeomorfismo o salvo equivalencia homotópica).

$$S^2 - \{p\} \text{ es homeomorfa a } \mathbb{R}^2, \ (S^2 - \{p\} \cong \mathbb{R}^2); \qquad Map(S^2 - \{p\}, \mathbb{R}^2)$$

[1] ¿Qué es la topología?, Marta Macho

Clasificación topológica

- La topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. Las transformaciones permitidas son aquellas en las cuales hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, de tal forma que 'puntos próximos' se corresponden con 'puntos próximos'. [1]



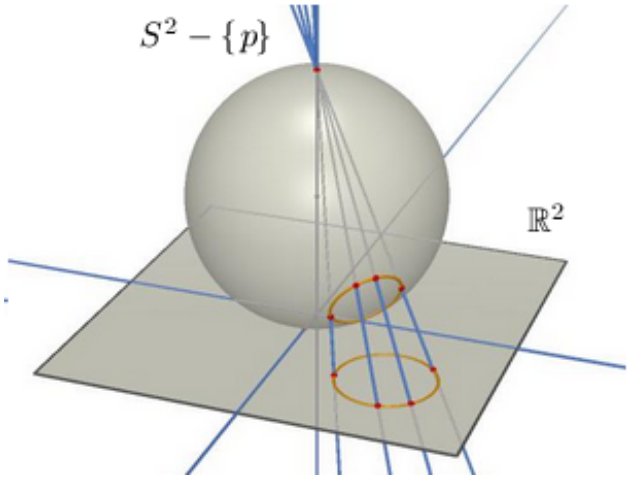
- El principal problema en topología ha sido la clasificación de los espacios topológico salvo equivalencia (salvo homeomorfismo o salvo equivalencia homotópica).

$$S^2 - \{p\} \text{ es homeomorfa a } \mathbb{R}^2, \ (S^2 - \{p\} \cong \mathbb{R}^2); \qquad Map(S^2 - \{p\}, \mathbb{R}^2)$$

[1] ¿Qué es la topología?, Marta Macho

Clasificación topológica

- La topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes. Las transformaciones permitidas son aquellas en las cuales hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y los de la transformada, de tal forma que 'puntos próximos' se corresponden con 'puntos próximos'. [1]



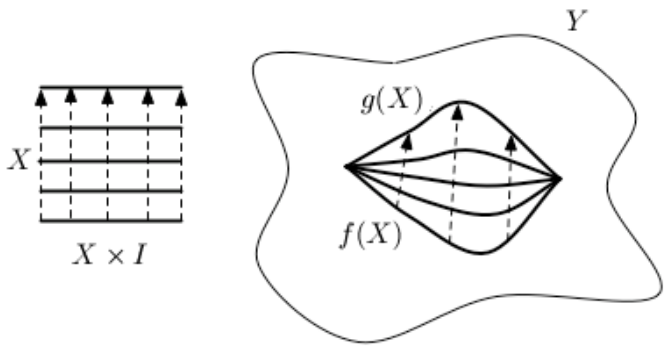
- El principal problema en topología ha sido la clasificación de los espacios topológico salvo equivalencia (salvo homeomorfismo o salvo equivalencia homotópica).

$$S^2 - \{p\} \text{ es homeomorfa a } \mathbb{R}^2, \ (S^2 - \{p\} \cong \mathbb{R}^2); \qquad Map(S^2 - \{p\}, \mathbb{R}^2)$$

[1] ¿Qué es la topología?, Marta Macho

Mientras que la clasificación salvo homeomorfismo involucra una transformación instantánea en la clasificación salvo homotopía se tiene una transformación gradual que deforma un espacio en otro.

$f, g : X \to Y \quad \Rightarrow \quad F : X \times I \to Y$



- Objetivo: Clasificación homotópica de los espacios topológicos y de sus aplicaciones

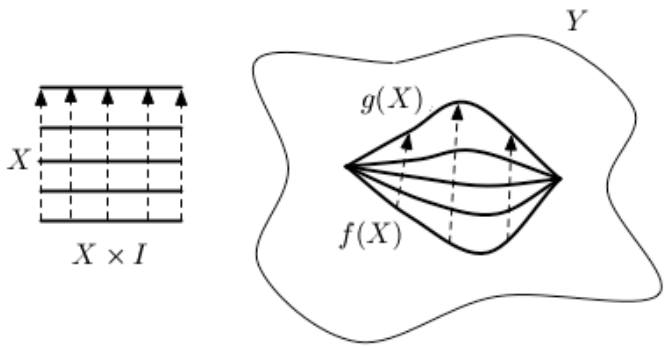
$$Cil \simeq S^1 \qquad \frac{Map(Cil, S^1)}{\simeq} = [Cil, S^1]$$

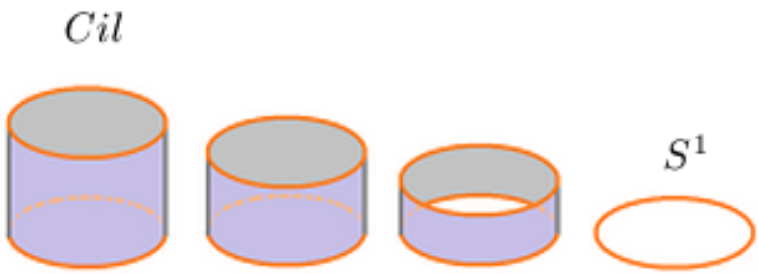
- Una forma usual de distinguir los espacios topológicos es a través **invariantes topológicos** de tipo algebraico, es decir, a un espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico A_X, de tal forma que si Y es otro espacio homeomorfo a X, entonces A_X es isomorfo a A_Y.

$$X \rightsquigarrow Grupo,\ Anillo,\ Módulo,\ Álgebra$$

Mientras que la clasificación salvo homeomorfismo involucra una transformación instantánea en la clasificación salvo homotopía se tiene una transformación gradual que deforma un espacio en otro.

$f, g : X \to Y \quad \Rightarrow \quad F : X \times I \to Y$





- Objetivo: Clasificación homotópica de los espacios topológicos y de sus aplicaciones

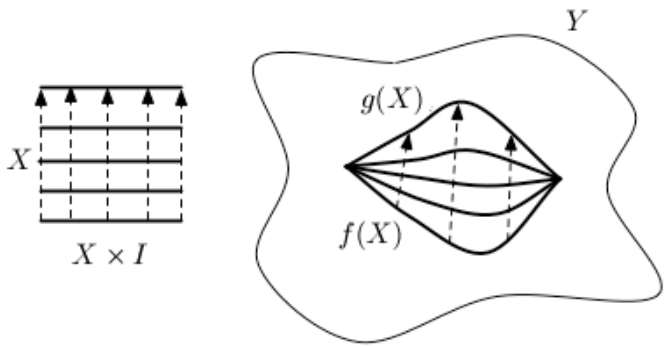
$$Cil \simeq S^1 \qquad \frac{Map(Cil, S^1)}{\simeq} = [Cil, S^1]$$

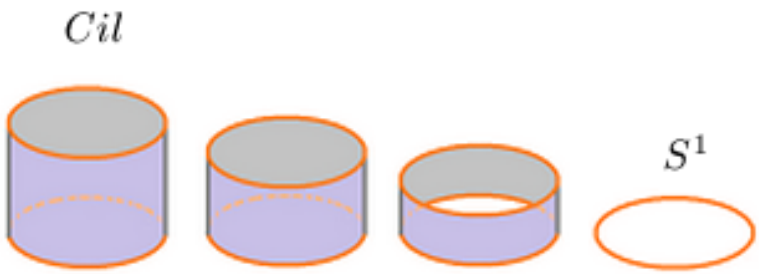
- Una forma usual de distinguir los espacios topológicos es a través **invariantes topológicos** de tipo algebraico, es decir, a un espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico A_X, de tal forma que si Y es otro espacio homeomorfo a X, entonces A_X es isomorfo a A_Y.

$$X \rightsquigarrow Grupo,\ Anillo,\ Módulo,\ Álgebra$$

Mientras que la clasificación salvo homeomorfismo involucra una transformación instantánea en la clasificación salvo homotopía se tiene una transformación gradual que deforma un espacio en otro.

$f, g : X \to Y \quad \Rightarrow \quad F : X \times I \to Y$





- Objetivo: Clasificación homotópica de los espacios topológicos y de sus aplicaciones

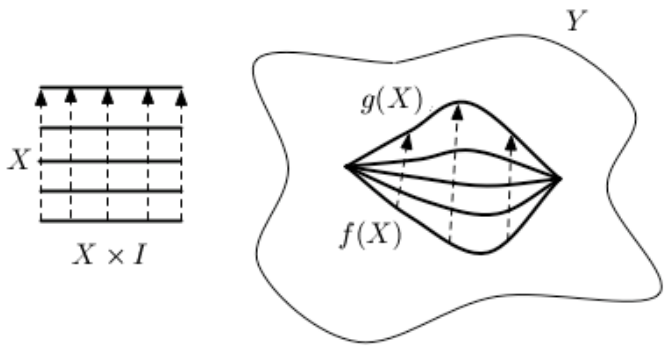
$$Cil \simeq S^1 \qquad \frac{Map(Cil, S^1)}{\simeq} = [Cil, S^1]$$

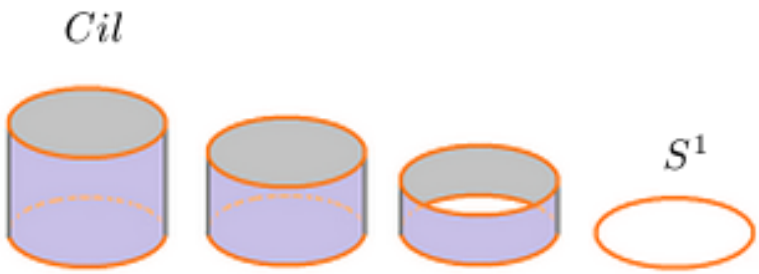
- Una forma usual de distinguir los espacios topológicos es a través **invariantes topológicos** de tipo algebraico, es decir, a un espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico A_X, de tal forma que si Y es otro espacio homeomorfo a X, entonces A_X es isomorfo a A_Y.

$$X \rightsquigarrow Grupo,\ Anillo,\ Módulo,\ Álgebra$$

Mientras que la clasificación salvo homeomorfismo involucra una transformación instantánea en la clasificación salvo homotopía se tiene una transformación gradual que deforma un espacio en otro.

$f, g : X \to Y \quad \Rightarrow \quad F : X \times I \to Y$





- Objetivo: Clasificación homotópica de los espacios topológicos y de sus aplicaciones

$$Cil \simeq S^1 \qquad \frac{Map(Cil, S^1)}{\simeq} = [Cil, S^1]$$

- Una forma usual de distinguir los espacios topológicos es a través **invariantes topológicos** de tipo algebraico, es decir, a un espacio topológico X se le asocia un objeto algebraico A_X, de tal forma que si Y es otro espacio homeomorfo a X, entonces A_X es isomorfo a A_Y.

$$X \rightsquigarrow Grupo,\ Anillo,\ Módulo,\ Álgebra$$

Dado un espacio topológico F, en teoría de homotopía clásica se estudian las propiedades de F que pueden ser detectadas por S^0 y sus suspensiones, es decir, se estudian las aplicaciones de $\Sigma^n S^0 \simeq S^n$ a F:

$$\text{Grupos de homotopía de } F \Rightarrow \pi_n(F) := [S^n, F]_*$$

HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

- Fibraciones de Serre: $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$

$$\ldots \to \pi_{i+1}(B) \to \pi_i(F) \to \pi_i(X) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

- Aproximación celular de F: $CW(F) \xrightarrow{\simeq} F$

$$\pi_i(CW(F)) \cong \pi_i(F)$$

- Piezas de Postnikov: $X < n > \hookrightarrow X \to X^{[n]}$

$$\pi_i(X) \cong \pi_i(X^{[n]}), \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X^{[n]}) \cong 0, \quad i > n$$

$$\pi_i(X < n >) \cong 0, \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X < n >) \cong \pi_i(X), \quad i > n$$

Dado un espacio topológico F, en teoría de homotopía clásica se estudian las propiedades de F que pueden ser detectadas por S^0 y sus suspensiones, es decir, se estudian las aplicaciones de $\Sigma^n S^0 \simeq S^n$ a F:

$$\text{Grupos de homotopía de } F \Rightarrow \pi_n(F) := [S^n, F]_*$$

HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

- Fibraciones de Serre: $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$

$$\ldots \to \pi_{i+1}(B) \to \pi_i(F) \to \pi_i(X) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

- Aproximación celular de F: $CW(F) \xrightarrow{\simeq} F$

$$\pi_i(CW(F)) \cong \pi_i(F)$$

- Piezas de Postnikov: $X < n > \hookrightarrow X \to X^{[n]}$

$$\pi_i(X) \cong \pi_i(X^{[n]}), \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X^{[n]}) \cong 0, \quad i > n$$

$$\pi_i(X < n >) \cong 0, \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X < n >) \cong \pi_i(X), \quad i > n$$

Dado un espacio topológico F, en teoría de homotopía clásica se estudian las propiedades de F que pueden ser detectadas por S^0 y sus suspensiones, es decir, se estudian las aplicaciones de $\Sigma^n S^0 \simeq S^n$ a F:

$$\text{Grupos de homotopía de } F \Rightarrow \pi_n(F) := [S^n, F]_*$$

HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

- Fibraciones de Serre: $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$

$$\ldots \to \pi_{i+1}(B) \to \pi_i(F) \to \pi_i(X) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

- Aproximación celular de F: $CW(F) \xrightarrow{\simeq} F$

$$\pi_i(CW(F)) \cong \pi_i(F)$$

- Piezas de Postnikov: $X < n > \hookrightarrow X \to X^{[n]}$

$$\pi_i(X) \cong \pi_i(X^{[n]}), \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X^{[n]}) \cong 0, \quad i > n$$

$$\pi_i(X < n >) \cong 0, \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X < n >) \cong \pi_i(X), \quad i > n$$

Dado un espacio topológico F, en teoría de homotopía clásica se estudian las propiedades de F que pueden ser detectadas por S^0 y sus suspensiones, es decir, se estudian las aplicaciones de $\Sigma^n S^0 \simeq S^n$ a F:

$$\text{Grupos de homotopía de } F \Rightarrow \pi_n(F) := [S^n, F]_*$$

HERRAMIENTAS DE CÁLCULO

- Fibraciones de Serre: $F \hookrightarrow X \xrightarrow{p} B$

$$\ldots \to \pi_{i+1}(B) \to \pi_i(F) \to \pi_i(X) \to \pi_i(B) \to \pi_{i-1}(F) \to \ldots$$

- Aproximación celular de F: $CW(F) \xrightarrow{\simeq} F$

$$\pi_i(CW(F)) \cong \pi_i(F)$$

- Piezas de Postnikov: $X < n > \hookrightarrow X \to X^{[n]}$

$$\pi_i(X) \cong \pi_i(X^{[n]}), \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X^{[n]}) \cong 0, \quad i > n$$

$$\pi_i(X < n >) \cong 0, \quad i \leq n; \qquad \pi_i(X < n >) \cong \pi_i(X), \quad i > n$$

Reemplazando S^0 por otro espacio conexo y punteado A también es posible estudiar las propiedades de F que pueden ser detectadas por A. La A-homotopía de F es el estudio de $[\Sigma^n A, F]_*$, o equivalentemente del tipo de homotopía de $Map_*(A, F)$ (Dror Farjoun, 1996).

- Grupos de A-homotopía de F, $\pi_n^A(F) := [\Sigma^n A, F]_* = \pi_n Map_*(A, F)$
- Aproximación A-celular de F: $CW_A(F) \xrightarrow{c_F} F$
- A-nulificación de F: $F \xrightarrow{l_F} P_A(F)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \\ X \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] & F \arrow[d] \\ & X \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \overline{X} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

¿Admite p una celularización fibra a fibra?

Si p tiene una celularización fibra a fibra, ¿es esta única?

Reemplazando S^0 por otro espacio conexo y punteado A también es posible estudiar las propiedades de F que pueden ser detectadas por A. La A-homotopía de F es el estudio de $[\Sigma^n A, F]_*$, o equivalentemente del tipo de homotopía de $Map_*(A, F)$ (Dror Farjoun, 1996).

- Grupos de A-homotopía de F, $\pi_n^A(F) := [\Sigma^n A, F]_* = \pi_n Map_*(A, F)$
- Aproximación A-celular de F: $CW_A(F) \xrightarrow{c_F} F$
- A-nulificación de F: $F \xrightarrow{l_F} P_A(F)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \\ X \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] & F \arrow[d] \\ & X \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \overline{X} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

¿Admite p una celularización fibra a fibra?

Si p tiene una celularización fibra a fibra, ¿es esta única?

Reemplazando S^0 por otro espacio conexo y punteado A también es posible estudiar las propiedades de F que pueden ser detectadas por A. La A-homotopía de F es el estudio de $[\Sigma^n A, F]_*$, o equivalentemente del tipo de homotopía de $Map_*(A, F)$ (Dror Farjoun, 1996).

- Grupos de A-homotopía de F, $\pi_n^A(F) := [\Sigma^n A, F]_* = \pi_n Map_*(A, F)$
- Aproximación A-celular de F: $CW_A(F) \xrightarrow{c_F} F$
- A-nulificación de F: $F \xrightarrow{l_F} P_A(F)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \\ X \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] & F \arrow[d] \\ & X \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \overline{X} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

¿Admite p una celularización fibra a fibra?

Si p tiene una celularización fibra a fibra, ¿es esta única?

Reemplazando S^0 por otro espacio conexo y punteado A también es posible estudiar las propiedades de F que pueden ser detectadas por A. La A-homotopía de F es el estudio de $[\Sigma^n A, F]_*$, o equivalentemente del tipo de homotopía de $Map_*(A, F)$ (Dror Farjoun, 1996).

- Grupos de A-homotopía de F, $\pi_n^A(F) := [\Sigma^n A, F]_* = \pi_n Map_*(A, F)$
- Aproximación A-celular de F: $CW_A(F) \xrightarrow{c_F} F$
- A-nulificación de F: $F \xrightarrow{l_F} P_A(F)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \\ X \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] & F \arrow[d] \\ & X \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \overline{X} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

¿Admite p una celularización fibra a fibra?

Si p tiene una celularización fibra a fibra, ¿es esta única?

Reemplazando S^0 por otro espacio conexo y punteado A también es posible estudiar las propiedades de F que pueden ser detectadas por A. La A-homotopía de F es el estudio de $[\Sigma^n A, F]_*$, o equivalentemente del tipo de homotopía de $Map_*(A, F)$ (Dror Farjoun, 1996).

- Grupos de A-homotopía de F, $\pi_n^A(F) := [\Sigma^n A, F]_* = \pi_n Map_*(A, F)$
- Aproximación A-celular de F: $CW_A(F) \xrightarrow{c_F} F$
- A-nulificación de F: $F \xrightarrow{l_F} P_A(F)$

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d] \\ X \arrow[d, "p"] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] & F \arrow[d] \\ & X \arrow[d, "p"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} CW_A F \arrow[r, "c_F"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ \overline{X} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

¿Admite p una celularización fibra a fibra?

Si p tiene una celularización fibra a fibra, ¿es esta única?

Teorema (Broto-Flores-Giraldo)

Sea $\mathcal{C}$ una EI-categoría con un número finito de objetos, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{B}$ C-diagramas, donde $\mathbf{B}$ el diagrama constante a el conjunto simplicial conexo B. Entonces el conjunto $[B, \overline{W}haut(\mathbf{F})]$ de clases de homotopía de aplicaciones de B a $\overline{W}haut(\mathbf{F})$ está en correspondencia bijectiva con el conjunto de clases de equivalencia de $\mathcal{C}$-diagramas de fibraciones con espacio base B y fibra del tipo de homotopía de $\mathbf{F}$.

$$f : * \to A \in \mathbf{S}: \qquad P_A : \mathbf{S} \to \mathbf{S} \xrightarrow{F \in \mathbf{S}} I_F : F \to P_A(F)$$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d, "I_F"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d] & B \arrow[d, equal] \\
P_A(F) \arrow[r] & \overline{X} \arrow[r, "q"'] & B
\end{tikzcd}$$

Definición (Dror, F.)

El espacio X se dice A-nulo si la aplicación $X \to Map(A, X)$ es una equivalencia débil. Si X es conexo lo anterior equivale a que $Map(A, X) \simeq *$.

Definición (Dror, F.)

Una aplicación $g : X \to Y$ se llama equivalencia local si para todo espacio A-nulo W la función inducida

$$g^\sharp : hom(Y, W) \xrightarrow{\simeq} hom(X, W)$$

es una equivalencia homotópica débil.

$$f : * \to A \in \mathbf{S}: \qquad P_A : \mathbf{S} \to \mathbf{S} \xrightarrow{F \in \mathbf{S}} I_F : F \to P_A(F)$$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d, "I_F"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d] & B \arrow[d, equal] \\
P_A(F) \arrow[r] & \overline{X} \arrow[r, "q"'] & B
\end{tikzcd}$$

Definición (Dror, F.)

El espacio X se dice A-nulo si la aplicación $X \to Map(A, X)$ es una equivalencia débil. Si X es conexo lo anterior equivale a que $Map(A, X) \simeq *$.

Definición (Dror, F.)

Una aplicación $g : X \to Y$ se llama equivalencia local si para todo espacio A-nulo W la función inducida

$$g^\sharp : hom(Y, W) \xrightarrow{\simeq} hom(X, W)$$

es una equivalencia homotópica débil.

Teorema (Dror,F.)

Sea F un espacio.

- $P_A(F)$ es A-nulo.
- $l_F : F \to P_F(A)$ es una equivalencia local.
- Si F es A-nulo, entonces $l_F : F \to P_F(A)$ es una equivalencia homotópica débil.

$$\begin{tikzcd}
haut(l_F) \arrow[r, dotted, "s_{P_A(F)}"] \arrow[d, dotted, "s_F"', "\simeq"] & haut(P_A(F))_{\Phi''} \arrow[d, "l_F^\sharp", "\simeq"'] \\
haut(F) \arrow[r, "l_{F,\sharp}"'] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & hom(F, P_A(F))_\Phi
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{W}haut(l_F) \arrow[d, "Bs_F", "\simeq"'] \\
B \arrow[ur, dotted, "\widetilde{m}"] \arrow[r, "m"] & \overline{W}haut(F)
\end{tikzcd}$$

Teorema (Dror,F.)

Sea F un espacio.

- $P_A(F)$ es A-nulo.
- $l_F : F \to P_F(A)$ es una equivalencia local.
- Si F es A-nulo, entonces $l_F : F \to P_F(A)$ es una equivalencia homotópica débil.

$$\begin{tikzcd}
haut(l_F) \arrow[r, dotted, "s_{P_A(F)}"] \arrow[d, dotted, "s_F"', "\simeq"] & haut(P_A(F))_{\Phi''} \arrow[d, "l_F^\sharp", "\simeq"'] \\
haut(F) \arrow[r, "l_{F,\sharp}"'] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & hom(F, P_A(F))_\Phi
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{W}haut(l_F) \arrow[d, "Bs_F", "\simeq"'] \\
B \arrow[r, "m"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{m}"] & \overline{W}haut(F)
\end{tikzcd}$$

Teorema (Dror,F.)

Sea F un espacio.

- $P_A(F)$ es A-nulo.
- $l_F : F \to P_F(A)$ es una equivalencia local.
- Si F es A-nulo, entonces $l_F : F \to P_F(A)$ es una equivalencia homotópica débil.

$$\begin{tikzcd}
haut(l_F) \arrow[r, dotted, "s_{P_A(F)}"] \arrow[d, dotted, "s_F"', "\simeq"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & haut(P_A(F))_{\Phi''} \arrow[d, "\simeq"', "l_F^\sharp"] \\
haut(F) \arrow[r, "l_{F,\sharp}"'] & hom(F, P_A(F))_\Phi
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \overline{W}haut(l_F) \arrow[d, "\simeq"', "Bs_F"] \\
B \arrow[ur, dotted, "\widetilde{m}"] \arrow[r, "m"] & \overline{W}haut(F)
\end{tikzcd}$$

Teorema

Sea $p : X \to B$ una fibración con fibra F y espacio base B simplemente conexo. Entonces las obstrucciones a la existencia y unicidad de una celularización fibra a fibra para p viven en $H^{i+1}(B, \pi_i(L))$ y $H^i(B, \pi_i(L))$ para $i \geq 1$, respectivamente, donde el espacio L es la fibra homotópica de la fibración $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$.

$$\mathcal{C} : \{\bullet \to \bullet\} \qquad \mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathfrak{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = CW_A F \xrightarrow{c_F} F$$

$$\begin{tikzcd}
haut(\mathbf{F}) \arrow[r, dotted, "s_F"] \arrow[d, dotted, "s_{CW_A F}"'] & haut(F) \arrow[d, "c_F^\sharp"] \\
haut(CW_A F) \arrow[r, "c_{F\sharp}"'] & Map(CW_A F, F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"] & Bhaut(\mathbf{F}) \arrow[d, "Bs_F"] \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & Bhaut(F)
\end{tikzcd}$$

$$L \hookrightarrow Bhaut(\mathbf{F}) \xrightarrow{Bs_F} Bhaut(F)$$

Próximo paso: Caracterizar el espacio L.

Teorema

Sea $p : X \to B$ una fibración con fibra F y espacio base B simplemente conexo. Entonces las obstrucciones a la existencia y unicidad de una celularización fibra a fibra para p viven en $H^{i+1}(B, \pi_i(L))$ y $H^i(B, \pi_i(L))$ para $i \geq 1$, respectivamente, donde el espacio L es la fibra homotópica de la fibración $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$.

$$\mathcal{C} : \{\bullet \to \bullet\} \qquad \mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathfrak{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = CW_A F \xrightarrow{c_{\mathbf{F}}} F$$

$$\begin{tikzcd}
haut(\mathbf{F}) \arrow[r, dotted, "s_{\mathbf{F}}"] \arrow[d, dotted, "s_{CW_A F}"'] & haut(F) \arrow[d, "c_F^\sharp"] \\
haut(CW_A F) \arrow[r, "c_{F\sharp}"'] & Map(CW_A F, F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"'] & Bhaut(\mathbf{F}) \arrow[d, "Bs_{\mathbf{F}}"] \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{h}"] & Bhaut(F)
\end{tikzcd}$$

$$L \hookrightarrow Bhaut(\mathbf{F}) \xrightarrow{Bs_{\mathbf{F}}} Bhaut(F)$$

Próximo paso: Caracterizar el espacio L.

Teorema

Sea $p : X \to B$ una fibración con fibra F y espacio base B simplemente conexo. Entonces las obstrucciones a la existencia y unicidad de una celularización fibra a fibra para p viven en $H^{i+1}(B, \pi_i(L))$ y $H^i(B, \pi_i(L))$ para $i \geq 1$, respectivamente, donde el espacio L es la fibra homotópica de la fibración $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$.

$$\mathcal{C} : \{\bullet \to \bullet\} \qquad \mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathfrak{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = CW_A F \xrightarrow{c_{\mathbf{F}}} F$$

$$\begin{tikzcd}
haut(\mathbf{F}) \arrow[r, dotted, "s_{\mathbf{F}}"] \arrow[d, dotted, "s_{CW_A F}"'] & haut(F) \arrow[d, "c_{\mathbf{F}}^{\sharp}"] \\
haut(CW_A F) \arrow[r, "c_{\mathbf{F}\sharp}"'] & Map(CW_A F, F)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"] & Bhaut(\mathbf{F}) \arrow[d, "Bs_{\mathbf{F}}"] \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{h}"] & Bhaut(F)
\end{tikzcd}$$

$$L \hookrightarrow Bhaut(\mathbf{F}) \xrightarrow{Bs_{\mathbf{F}}} Bhaut(F)$$

Próximo paso: Caracterizar el espacio L.

Teorema

Sea $p : X \to B$ una fibración con fibra F y espacio base B simplemente conexo. Entonces las obstrucciones a la existencia y unicidad de una celularización fibra a fibra para p viven en $H^{i+1}(B, \pi_i(L))$ y $H^i(B, \pi_i(L))$ para $i \geq 1$, respectivamente, donde el espacio L es la fibra homotópica de la fibración $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$.

$$\mathcal{C} : \{\bullet \to \bullet\} \qquad \mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathfrak{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = CW_A F \xrightarrow{c_{\mathbf{F}}} F$$

$$\begin{tikzcd}
haut(\mathbf{F}) \arrow[r, dotted, "s_{\mathbf{F}}"] \arrow[d, dotted, "s_{CW_A \mathbf{F}}"'] & haut(F) \arrow[d, "c_{\mathbf{F}}^{\sharp}"] \\
haut(CW_A F) \arrow[r, "c_{\mathbf{F}\sharp}"'] & Map(CW_A F, F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"] & Bhaut(\mathbf{F}) \arrow[d, "Bs_{\mathbf{F}}"] \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & Bhaut(F)
\end{tikzcd}$$

$$L \hookrightarrow Bhaut(\mathbf{F}) \xrightarrow{Bs_{\mathbf{F}}} Bhaut(F)$$

Próximo paso: Caracterizar el espacio L.

Teorema

Sea $p : X \to B$ una fibración con fibra F y espacio base B simplemente conexo. Entonces las obstrucciones a la existencia y unicidad de una celularización fibra a fibra para p viven en $H^{i+1}(B, \pi_i(L))$ y $H^i(B, \pi_i(L))$ para $i \geq 1$, respectivamente, donde el espacio L es la fibra homotópica de la fibración $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$.

$$\mathcal{C} : \{\bullet \to \bullet\} \qquad \mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathfrak{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = CW_A F \xrightarrow{c_{\mathbf{F}}} F$$

$$\begin{tikzcd}
haut(\mathbf{F}) \arrow[r, dotted, "s_{\mathbf{F}}"] \arrow[d, dotted, "s_{CW_A F}"'] & haut(F) \arrow[d, "c_{\mathbf{F}}^{\sharp}"] \\
haut(CW_A F) \arrow[r, "c_{\mathbf{F}\sharp}"'] & Map(CW_A F, F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"] & Bhaut(\mathbf{F}) \arrow[d, "Bs_{\mathbf{F}}"] \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & Bhaut(F)
\end{tikzcd}$$

$$L \hookrightarrow Bhaut(\mathbf{F}) \xrightarrow{Bs_{\mathbf{F}}} Bhaut(F)$$

Próximo paso: Caracterizar el espacio L.

Teorema

Sea $p : X \to B$ una fibración con fibra F y espacio base B simplemente conexo. Entonces las obstrucciones a la existencia y unicidad de una celularización fibra a fibra para p viven en $H^{i+1}(B, \pi_i(L))$ y $H^i(B, \pi_i(L))$ para $i \geq 1$, respectivamente, donde el espacio L es la fibra homotópica de la fibración $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$.

$$\mathcal{C} : \{\bullet \to \bullet\} \qquad \mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathfrak{S} \;\Rightarrow\; \mathbf{F} = CW_A F \xrightarrow{c_{\mathbf{F}}} F$$

$$\begin{tikzcd}
haut(\mathbf{F}) \arrow[r, dotted, "s_{\mathbf{F}}"] \arrow[d, dotted, "s_{CW_A \mathbf{F}}"'] & haut(F) \arrow[d, "c_{\mathbf{F}}^{\sharp}"] \\
haut(CW_A F) \arrow[r, "c_{\mathbf{F}\sharp}"'] & Map(CW_A F, F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"] & Bhaut(\mathbf{F}) \arrow[d, "Bs_{\mathbf{F}}"] \\
B \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{h}"] & Bhaut(F)
\end{tikzcd}$$

$$L \hookrightarrow Bhaut(\mathbf{F}) \xrightarrow{Bs_{\mathbf{F}}} Bhaut(F)$$

Próximo paso: Caracterizar el espacio L.

Teorema

Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z$ una sucesión fibrada y L la fibra homotópica de la fibración $L \hookrightarrow Bhaut(f) \longrightarrow Bhaut(Y)$. Entonces $L \simeq Map(X,Z)_c$, donde $Map(X,Z)_c$ es la componente de la aplicación constante en $Map(X,Z)$.

Corolario

Sea L la fibra hootópica de $Bs_F : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$. Entonces $\pi_i(L) \cong \pi_i(P_{\Sigma A} C_{ev})$

Sea A un espacio punteado y 0-conexo y $ev : \bigvee_{[A,F]_*} A \to F$ la función de evaluación, donde el wedge se toma sobre los representantes de todas las clases de homotopia de aplicaciones punteadas, y sea C_{ev} su cofibra homotópica. Entonces Then $CW_A F$ es la fibra homotópica de la composición: $F \to C_{ev} \to P_{\Sigma A} C_{ev}$

$$CW_A F \to F \to P_{\Sigma A} C_{ev}$$

(Chachólski, 1996)

Teorema

Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z$ una sucesión fibrada y L la fibra homotópica de la fibración $L \hookrightarrow Bhaut(f) \longrightarrow Bhaut(Y)$. Entonces $L \simeq Map(X,Z)_c$, donde $Map(X,Z)_c$ es la componente de la aplicación constante en $Map(X,Z)$.

Corolario

Sea L la fibra hootópica de $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$. Entonces $\pi_i(L) \cong \pi_i(P_{\Sigma A} C_{ev})$

Sea A un espacio punteado y 0-conexo y $ev : \bigvee_{[A,F]_*} A \to F$ la función de evaluación, donde el wedge se toma sobre los representantes de todas las clases de homotopia de aplicaciones punteadas, y sea C_{ev} su cofibra homotópica. Entonces Then $CW_A F$ es la fibra homotópica de la composición: $F \to C_{ev} \to P_{\Sigma A} C_{ev}$

$$CW_A F \to F \to P_{\Sigma A} C_{ev}$$

(Chachólski, 1996)

Teorema

Sea $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} Z$ una sucesión fibrada y L la fibra homotópica de la fibración $L \hookrightarrow Bhaut(f) \longrightarrow Bhaut(Y)$. Entonces $L \simeq Map(X,Z)_c$, donde $Map(X,Z)_c$ es la componente de la aplicación constante en $Map(X,Z)$.

Corolario

Sea L la fibra hootópica de $Bs_{\mathbf{F}} : Bhaut(\mathbf{F}) \to Bhaut(F)$. Entonces $\pi_i(L) \cong \pi_i(P_{\Sigma A} C_{ev})$

Sea A un espacio punteado y 0-conexo y $ev : \bigvee_{[A,F]_*} A \to F$ la función de evaluación, donde el wedge se toma sobre los representantes de todas las clases de homotopia de aplicaciones punteadas, y sea C_{ev} su cofibra homotópica. Entonces Then $CW_A F$ es la fibra homotópica de la composición: $F \to C_{ev} \to P_{\Sigma A} C_{ev}$

$$CW_A F \to F \to P_{\Sigma A} C_{ev}$$

(Chachólski, 1996)

Sea G un grupo finito y S un p-subgroup de Sylow de G, tal que:

- G es generado por elementos de orden 3,
- G no es un p-grupo, y
- $N_G(S)$ el normalizador de S en G controla la fusión in G y $S = Cl(S)$, donde $Cl(S)$ es el subgrupo cerrado de S que contiene todos los elementos de orden p de S.

Corolario

Sea $BG \hookrightarrow E \xrightarrow{g} B$ una fibración con espacio base simplemente conexo y $B\mathbb{Z}/p$-celular. Si G satisface las condiciones anteriores entonces g admite una única $B\mathbb{Z}/p$-celularización fibra a fibra.

Si G satisface las condiciones anteriores, se tiene que $CW_{B\mathbb{Z}/p}BG$ queda encajado en una fibración, donde el producto es tomado sobre todos los primos q que dividen el orden de G.

$$CW_{B\mathbb{Z}/p}BG \hookrightarrow BG \longrightarrow \prod_{q \neq p} BG_q^{\wedge} \simeq P_{\Sigma B\mathbb{Z}_p} C_{ev}$$

(Flores y Scherer, 2007)

Sea G un grupo finito y S un p-subgroup de Sylow de G, tal que:

- G es generado por elementos de orden 3,
- G no es un p-grupo, y
- $N_G(S)$ el normalizador de S en G controla la fusión in G y $S = Cl(S)$, donde $Cl(S)$ es el subgrupo cerrado de S que contiene todos los elementos de orden p de S.

Corolario

Sea $BG \hookrightarrow E \xrightarrow{g} B$ una fibración con espacio base simplemente conexo y $B\mathbb{Z}/p$-celular. Si G satisface las condiciones anteriores entonces g admite una única $B\mathbb{Z}/p$-celularización fibra a fibra.

Si G satisface las condiciones anteriores, se tiene que $CW_{B\mathbb{Z}/p}BG$ queda encajado en una fibración, donde el producto es tomado sobre todos los primos q que dividen el orden de G.

$$CW_{B\mathbb{Z}/p}BG \hookrightarrow BG \longrightarrow \prod_{q \neq p} BG_q^{\wedge} \simeq P_{\Sigma B\mathbb{Z}_p} C_{ev}$$

(Flores y Scherer, 2007)

Sea G un grupo finito y S un p-subgroup de Sylow de G, tal que:

- G es generado por elementos de orden 3,
- G no es un p-grupo, y
- $N_G(S)$ el normalizador de S en G controla la fusión in G y $S = Cl(S)$, donde $Cl(S)$ es el subgrupo cerrado de S que contiene todos los elementos de orden p de S.

Corolario

Sea $BG \hookrightarrow E \xrightarrow{g} B$ una fibración con espacio base simplemente conexo y $B\mathbb{Z}/p$-celular. Si G satisface las condiciones anteriores entonces g admite una única $B\mathbb{Z}/p$-celularización fibra a fibra.

Si G satisface las condiciones anteriores, se tiene que $CW_{B\mathbb{Z}/p}BG$ queda encajado en una fibración, donde el producto es tomado sobre todos los primos q que dividen el orden de G.

$$CW_{B\mathbb{Z}/p}BG \hookrightarrow BG \longrightarrow \prod_{q\neq p} BG_q^\wedge \simeq P_{\Sigma B\mathbb{Z}_p} C_{ev}$$

(Flores y Scherer, 2007)

Sea F un espacio de lazos infinitos 1-conexo, tal que $\pi_2 F$ es un grupo de torsión.

Corolario

Sea p un número primo y r un entero positivo. Si F satisface las condiciones anteriores y B es un espacio $B\mathbb{Z}/p^r$-cellular, entonces cualquier espacio fibrado $X \xrightarrow{g} B$ con fibra F admite una única $B\mathbb{Z}/p^r$-celularización fibra a fibra.

Sea p un número primo y r un entero positivo. Si F satisface las condiciones anteriores, entonces $P_{\Sigma B\mathbb{Z}/p^r} C_{ev} \simeq L_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} F$.

(Castellana y Gavira, 2012)

Sea F un espacio de lazos infinitos 1-conexo, tal que $\pi_2 F$ es un grupo de torsión.

Corolario

Sea p un número primo y r un entero positivo. Si F satisface las condiciones anteriores y B es un espacio $B\mathbb{Z}/p^r$-cellular, entonces cualquier espacio fibrado $X \xrightarrow{g} B$ con fibra F admite una única $B\mathbb{Z}/p^r$-celularización fibra a fibra.

Sea p un número primo y r un entero positivo. Si F satisface las condiciones anteriores, entonces $P_{\Sigma B\mathbb{Z}/p^r} C_{ev} \simeq L_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} F$.

(Castellana y Gavira, 2012)

Sea F un espacio de lazos infinitos 1-conexo, tal que $\pi_2 F$ es un grupo de torsión.

Corolario

Sea p un número primo y r un entero positivo. Si F satisface las condiciones anteriores y B es un espacio $B\mathbb{Z}/p^r$-cellular, entonces cualquier espacio fibrado $X \xrightarrow{g} B$ con fibra F admite una única $B\mathbb{Z}/p^r$-celularización fibra a fibra.

Sea p un número primo y r un entero positivo. Si F satisface las condiciones anteriores, entonces $P_{\Sigma B\mathbb{Z}/p^r} C_{ev} \simeq L_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} F$.

(Castellana y Gavira, 2012)

GRACIAS