ISOMORFISMO DE GRUPOS POR MEDIO DE CATEGORÍAS EQUIVALENTES

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

MANUEL FELIPE CERPA TORRES
Semillero ITENUA

23 de Mayo de 2015

Indice

1. Acciones de Grupos y Monoides sobre conjuntos
2. Categorías y Funtores
3. Algunos resultados importantes
4. Teorema principal
5. Bibliografía

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Acciones de Grupos y Monoides

Definición

Sea M un conjunto y A un grupo (monoide). Una acción a derecha de A en M (o una A-acción) es una transformación $* : M \times A \to M$ tal que:

- $xe = x$ para todas las x en M.
- $x(g_1 g_2) = (xa_1)a_2$ para todas las x en M y todos los a_1, a_2 en A.

De éste modo decimos que M es una A-acción. Para el caso de que la acción sea izquierda, se escribe $* : A \times M \to M$, y cumple las mismas propiedades.

Definición

Sea M una A-acción. $N \subseteq M$ es una subacción de M si $AN \subseteq N$. La G-acción M se dice descomponible si existen subacciones no vacías $M_1, M_2 \subseteq M$ tales que $M \cong M_1 \cup M_2$. De otro modo, M es llamado indescomponible.

Definición

Una A-acción S es cíclica si $S = As$ para algún s de S.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Categorías y funtores

Definición

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ categorías. Un funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se denomina fiel siempre que todas las restricciones del conjunto de morfismos $F : Hom_{\mathbf{A}}(A, A') \to Hom_{\mathbf{B}}(F(A), F(A'))$ sean inyectivas.

Definición

El funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se denomina pleno siempre que todas las restricciones del conjunto de morfismos $F : Hom_{\mathbf{A}}(A, A') \to Hom_{\mathbf{B}}(F(A), F(A'))$ sean sobreyectivas.

Definición

El funtor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es representativo si para todo objeto B de $\mathbf{B}$ existe un objeto A de $\mathbf{A}$ tal que $F(A) \cong B$.

Definición

Un objeto B de una categoría $\mathbf{B}$ se dice que es un generador si para cualesquiera dos $\mathbf{B}$-morfismos $f, g : X \to Y$, si $f \neq g$ entonces existe un morfismo $h : B \to X$ tal que $f \circ h \neq g \circ h$.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Definición

Sean $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ funtores. Una transformación natural τ de F a G (denotada $\tau : F \to G$) es una función que asigna a cada $\mathbf{A}$-objeto A, un $\mathbf{B}$-morfismo $\tau_A : F(A) \to G(A)$ de tal forma que para cada $\mathbf{A}$-morfismo $f : A \to A'$, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(A') \arrow[r, "\tau_{A'}"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

conmuta.

Ejemplo

Sean U : **Grp** $\to$ **set** el funtor olvido y sea S : **Grp** $\to$ **Set** definido por:
Para cada grupo G, $S(G) = G^2$.
Para cada morfismo de grupos $f : G \to H$ se tiene que $S(f) = f^2$, donde para $xy \in G^2$ se tiene $S(f)(xy) = f^2(xy) = f(x)f(y)$.
Sea $\tau : S \to U$ definida como
$\tau_G(S(G)) = U(G)$, es decir, $\tau_G(G^2) = G$, tal que para cada $xy \in G^2$ se tiene $\tau_G(xy) = xy$

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Se verá que τ es una transformación natural. Sean G, H grupos y $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Sea gg' en G^2. Así,

$$\begin{aligned} U(f)\tau_G(gg') &= f(gg') \\ &= f(g)f(g') \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \tau_H(S(f))(gg') &= \tau_H(f(g)f(g')) \\ &= f(g)f(g') \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Así, τ es una transformación natural, es decir, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} S(G) \arrow[r, "\tau_G"'] \arrow[d, "S(f)"] & U(G) \arrow[d, "U(f)"] \\ S(H) \arrow[r, "\tau_H"'] & U(H) \end{tikzcd}$$

Conmuta.

Ahora, τ se denomina isomorfismo natural (equivalencia natural) si todo isomorfismo τ_A pertenece a las Iso-transformaciones, es decir, τ_A está en la clase de todos los isomorfismos en la categoría **B**.

Definición

Un funtor $G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se dice adjunto si para todo $\mathbf{B}$-objeto B existe una flecha G-universal con dominio B, es decir, una flecha estructurada (f, A) que consiste de un $\mathbf{A}$-objeto A y un $\mathbf{B}$-morfismo $f : B \to G(A)$. Que sea G-universal significa que para cada flecha estructurada (f', A') con dominio B, existe un único $\mathbf{A}$-morfismo $\hat{f} : A \to A'$, con $f' = G(\hat{f}) \circ f$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & G(A) \arrow[d, "G(\hat{f})"] \\ & G(A') \end{tikzcd}$$

Definición

Sea S una A-acción fija, donde A es un monoide.
Se define el funtor $Hom_A(S,-) : \mathbf{A\text{-}Act} \to \mathbf{Set}$, tal que para cada A-acción B, $Hom_A(S,-)(B) = Hom_A(S,B)$, y para cada A-morfismo de acciones $f : B \to C$ se tiene que $Hom_A(S,-)(f) = Hom_A(S,f)$, donde $Hom_A(S,g) : Hom_A(S,B) \to Hom_A(S,C)$.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Definición

Un objeto P en **A-Act** es proyectivo si el funtor $Hom_A(P, -)$ preserva epimorfismos, es decir, para f en $Hom_A(P, X)$ y $\varphi : Y \to X$ un epimorfismo, se tiene que existe $\rho : P \to Y$ tal que $f = \varphi \circ \rho$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\rho"'] & X \\ & Y \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Algunos resultados importantes

Lema

Toda A-acción cíclica es indescomponible.

Demostración

Sea P una A-acción cíclica. Así, $P = Ax$ para algún x en P. Supongamos $P = P_1 \cup P_2$, con P_1, P_2 subacciones. Si x está en P_1, por ser P cíclica se tiene $P_1 = Ax$, y así $P_1 = P$. Del mismo modo si x está en P_2.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Proposición (c.f. [1] 1.1)

Para dos monoides A y B sea el funtor S : **A-Act** $\rightarrow$ **B-Act** una equivalencia. Entonces existe un generador proyectivo indescomponible P, objeto de **A-Act** tal que $SP \cong B$

Lema

Una A-acción proyectiva P es indescomponible si y sólo si P es cíclica.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Teorema

P es una A-acción indescomponible proyectiva si y sólo si $P \cong Aa$, donde $a^2 = a \in A$.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Demostración

Por ser P una A-acción indescomponible proyectiva, P es cíclica. Así, $P \cong Az$, para algún z en P. Si $a^2 = a \in A$, entonces Aa es proyectivo. En efecto, si $f : M \to Aa$ es un epimorfismo, tomamos $g : Aa \to M$ definiendo $g(wa) = wam$, donde wa está en Aa y m pertenece a $f^{-1}(a)$. De esto, $fg = 1_{Aa}$.
Sea Az proyectivo y se considera el epimorfismo $f : A \to Az$ para el cual $f(e) = z$. Así, f es una retracción (c.f [1], 3.2). Por lo tanto, existe $g : Az \to A$ tal que $fg = 1_{Az}$.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Sea $g(z) = a$. Así $f(a) = af(e) = az$ y $f(a) = f(g(z)) = 1_{Az}(z) = z$, por tanto $az = z$, de donde $a = a^2$. Ahora, g es inyectivo. Con esto basta ver que $g(Az) = Aa$ para que g sea isomorfismo. En efecto, sea $ba \in Aa$, entonces $g(bz) = bg(z) = ba$, con lo cual $Aa \subseteq g(Az)$, y como $g(Az) \subseteq Aa$, entonces $AAa = g(Az)$.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Proposición ([1], c.f. 5.1)

Sean ${}_AM \in$ **A-Act**, ${}_BQ_A \in$ **B-act-A**, ${}_BP \in$ **B-Act**, con A, B monoides. Entonces existe un isomorfismo natural entre los conjuntos $Hom_A({}_AM, Hom_B({}_BQ_A, {}_BP))$ y $Hom_B({}_BQ_A \otimes_A {}_AM, {}_BP)$.

Proposición ([1], c.f. 5.5)

Sean A y B dos monoides y T : **A-Act** $\to$ **B-Act** un funtor. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- T tiene un funtor adjunto a derecha S : **B-Act** $\to$ **A-Act**.
- T y $(T(A) \otimes -)$ son funtores naturalmente equivalentes.

Definición

Dos monoides A y B se dicen **Morita equivalentes** ($A \sim B$) si la categoría **A-Act** es equivalente a la categoría **B-Act**

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Proposición

Si los monoides A y B son Morita equivalentes entonces $B \cong aAa$, donde $a^2 = a \in A$

Demostración

Sean $A \sim B$, esto es, existen dos funtores $S : \mathbf{A\text{-}Act} \to \mathbf{B\text{-}Act}$ y $T : \mathbf{B\text{-}Act} \to \mathbf{A\text{-}Act}$, tales que $ST \cong 1_{\mathbf{B\text{-}Act}}$ y $TS \cong 1_{\mathbf{A\text{-}Act}}$ (es decir, son una equivalencia). Ya que S es una equivalencia, existe un generador proyectivo indescomponible P en $\mathbf{A\text{-}Act}$ $(P \cong Aa, a^2 = a \in P)$ tal que $B \cong S(P)$ (c.f. [1], 1.1).

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Ahora, por ser S adjunto a derecha de T, los funtores T y $T(B)\otimes_B$ son naturalmente equivalentes (c.f. [1] 5.5). Además, como los funtores $Hom_A({}_AP_B, -)$ y ${}_AP_B \otimes -$ son adjuntos (c.f. [1], 5.1), los funtores $Hom_A({}_AP_B, -)$ y S son naturalmente equivalentes (c.f. [2], 16.4.4). De este modo, como S es una equivalencia, entonces $S(P) \cong Hom_A(P, P)$, y como $S(P) \cong B$, entonces $S(P) \cong Hom_A(P, P) \cong aAa$ (c.f. [1], 5.2). Por tanto, $B \cong aAa$.

En el caso que A y B sean grupos, como el único elemento $a \in A$ tal que $a^2 = a$ es la identidad de A, entonces $A \cong B$.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Teorema principal

Teorema

Dos Grupos G y H son isomorfos si y sólo si **G-Act** y **H-Act** son equivalentes.

Demostración

Supóngase que G y H son isomorfos. Sea $\varphi : G \to H$ el isomorfismo.
Sea F : **G-Act** $\to$ **H-Act** un funtor tal que que para cada objeto X en **G-Act**, $F(x) = x, x \in X$ que satisface que si $\varphi(g) = h$ entonces $gx = \varphi(g)x = hx$ y para $f \in Hom_G(X, H)$, $(F(f))(x) = y$, es decir, para cada $g \in G$, $(F(f))(\varphi(g)(x)) = f(hy) = f(gx)$, con $g \in G, h \in H, y \in Y$. Se verá que F es pleno, fiel y representativo.

F es pleno. En efecto, sea $f \in Hom_{\mathbf{H\text{-}Act}}(F(X), F(Y))$, entonces para $x \in X$ y para $h \in H$,

$$f(hx) = hf(x) = hy, f(x) = y$$

Como $G \cong H$,

$$f(hx) = \varphi^{-1}(h)f(x) = g(f(x)); (g) = h$$

Por tanto $f : X \to Y$ es un homomorfismo en $Hom_{\mathbf{G\text{-}Act}}(X, Y)$. Así, F es pleno.

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

F es fiel. En efecto, sean $f, f' \in Hom_{\mathbf{H\text{-}Act}}(F(X), F(Y))$ tales que $f = f'$. Así,

$$\begin{aligned} f(hx) &= hf(x) \\ &= hf'(x) \\ &= f'(hx) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(hx) &= \varphi^{-1}(h)f(x) \\ &= gf(x) \\ &= gf'(x) = f'(gx) \end{aligned}$$

Así, $f = f'$ en $Hom_{\mathbf{G\text{-}Act}}(X, Y)$. Por tanto F es fiel.

F es representativo. En efecto, sea Y en **H-Act**. Así, para algún $y \in Y$, $hy = \varphi(g)y = gy$ con $\varphi(g) = y$. Así, Y está en **G-Act**. Por tanto, $Ob(\textbf{H-Act}) \subseteq Ob(\textbf{G-Act})$.
Sea $X \in Ob(\textbf{G-Act})$, entonces para todo x en X, $gx \in X$. Así, $gx = \varphi^{-1}(h)x = hx$, con $\varphi(g) = h$. Con lo cual $X \in Ob(\textbf{H-Act})$. Así, $Ob(\textbf{G-Act}) \subseteq Ob(\textbf{H-Act})$. Por tanto, F es representativo.
Como F es pleno, fiel y representativo, entonces las categorías **G-Act** y **H-Act** son equivalentes.
Ahora, Si **G-Act** y **H-Act** son equivalentes, por proposición anterior, $H \cong gGg$, con $g^2 = g \in G$. Como G es grupo, $g = e$ con e la identidad de G. Así, $H \cong G$.

Bibliografía

[1] U. Knauer. Projectivity of Acs and Morita Equivalence Monoids. Springer Verlag. Semigroup Forum, Vol. 3 (1972). ISSN 1432-2137.

[2] H. Schubert. Kategorien II. Berlin und Heildelberg (1970).

[3] J. Adamek, H. Herrlich, G. Strecker. Abstract and Concrete Categories. A Wiley- Interscience Publication (1990). ISBN 0-471-60992-6.

[4] J. B. Fraleigh. Álgebra Abstracta, primer curso. Versión en español de Manuel López Mateos. Addison-Wesley Iberoaméricana. Wilmington, E.U.A. (1987). ISBN 0-201-64052-X.

Gracias