PARTICIONES DE LA UNIDAD, UNA APLICACIÓN A VARIEDADES.

TOP-UD 2015

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Eddison Andrés Gil Pinilla
eagilp@correo.udistrital.edu.co

1. Conceptos previos.
   - Espacio de Hausdorff.
   - Espacio Normal
   - Embebimiento Topológico.
   - Función Soporte
   - M-variedad.
2. Definición de particiones de la unidad
   - Primera definición
3. Teorema de existencia de las particiones de la unidad
4. Teorema de Inmersión de variedades a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
5. Definición generalizada de particiones de la unidad
6. Bibliografía

Conceptos previos.

Espacio de Hausdorff

Definición

Un espacio topológico X es un espacio de Hausdorff si para cada x y cada y, con $x \neq y$, existen V y W vecindades de x y y respectivamente, de tal manera que $V \cap W = \emptyset$.

Conceptos previos.

Espacio Normal

Definición

Un espacio topológico X es un espacio normal si dados F y K subconjuntos de X cerrados y disyuntos, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $F \subset U, K \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Conceptos previos.

Embebimiento Topológico

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función continua inyectiva, donde X e Y son espacion topológicos. Sea Z el conjunto imagen $f(X)$, considerado como un subespacio de Y; entonces, la función $f' : X \to Z$ obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si ocurre que f' es un homeomorfismo de X con Z, decimos que la función $f : X \to Y$ es un ***embebimiento topológico****, o X está* ***embebido*** *en Y.*

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *definida por*

$$f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$$

y sea $f' : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{0,0,1\}$, *note que está es la proyección estereográfica, es decir* f' *es un homeomorfismo, así* $\mathbb{R}^2$ *esta embebido en* $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *definida por*

$$f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \right)$$

y sea $f' : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{0,0,1\}$, *note que está es la proyección estereográfica, es decir* f' *es un homeomorfismo, así* $\mathbb{R}^2$ *esta embebido en* $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo

Sea $f : [0,1) \to \mathbb{R}^2$, *definido por*

$$f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t),$$

con $t \in [0,1)$, *y sea* $f' : [0,1) \to S^1$ *y esta función es biyectiva y continua, pero note que este es no es un embebimiento, pues la función* f'^{-1} *no es continua, tomemos a* $U = [0, \frac{1}{4})$ *observemos que no existe un conjunto abierto* V *de* $\mathbb{R}^2$ *tal que* $V \cap S^1 \subseteq f(U)$.

Conceptos previos.

Función Soporte

Definición

Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$, *entonces el* **soporte** *de* ϕ *se define como*

$$sop\ \phi : \overline{\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}.$$

Conceptos previos.

Función Soporte

Definición

Sea $\phi : X \to \mathbb{R}$, *entonces el* **soporte** *de* ϕ *se define como*

$$sop\ \phi : \overline{\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}.$$

Observación:

Si x está fuera del soporte de ϕ, existe algún entorno de x sobre el que ϕ es nula.

Ejemplo

Ejemplo: Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función definida por*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

entonces el sop $\phi = [-1, 1]$*, ya que se hace no cero en el intervalo (-1,1), aplicando la adherencia, se tiene* $[-1, 1]$

Conceptos previos.

M-variedad

Definición

Una ***m-variedad*** *es un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto x de X tiene un entorno que es homeomorfo con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.*

Conceptos previos.

M-variedad

Definición

*Una **m-variedad** es un espacio de Hausdorff X con una base numerable tal que cada punto x de X tiene un entorno que es homeomorfo con un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$.*

Observación:

Una 1-variedad se denomina **curva** y una 2-variedad se denomina **superficie**.

Definición de particiones de la unidad

Particiones de la unidad

Definición

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *un recubrimiento abierto finito e indexado del espacio* X*. Una familia indexada de funciones continuas*

$$\phi_i : X \to [0,1] \text{ para } i = 1, \cdots, n,$$

se dice que es una ***partición de la unidad*** *dominada por* $\{U_i\}$ *si*

1. $\phi_i(x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $i = 1, \cdots, n$.

Definición de particiones de la unidad

Particiones de la unidad

Definición

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *un recubrimiento abierto finito e indexado del espacio* X*. Una familia indexada de funciones continuas*

$$\phi_i : X \to [0,1] \text{ para } i = 1, \cdots, n,$$

se dice que es una ***partición de la unidad*** *dominada por* $\{U_i\}$ *si*

1. $\phi_i(x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $i = 1, \cdots, n$.
2. $sop\ \phi_i \subset U_i$ *para cada* i.

Definición de particiones de la unidad

Particiones de la unidad

Definición

Sea $\{U_1, \ldots, U_n\}$ *un recubrimiento abierto finito e indexado del espacio* X*. Una familia indexada de funciones continuas*

$$\phi_i : X \to [0,1] \text{ para } i = 1, \cdots, n,$$

se dice que es una ***partición de la unidad*** *dominada por* $\{U_i\}$ *si*

1. $\phi_i(x) \geq 0$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $i = 1, \cdots, n$.
2. $\operatorname{sop} \phi_i \subset U_i$ *para cada* i.
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ *para cada* x.

Teorema de existencia de las particiones de la unidad

Lema de Urysohn

Lema

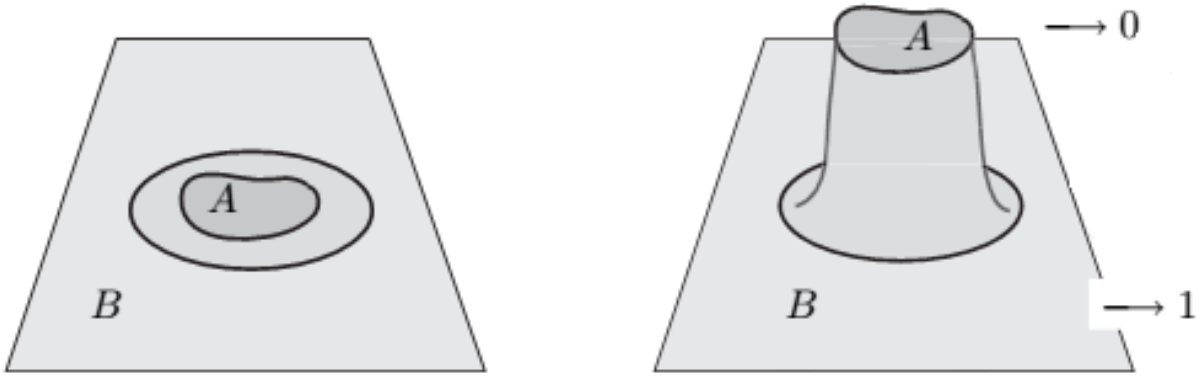
Un espacio (X, τ) *es normal si y solo si dado un par de subconjuntos* A,B *cerrados, disyuntos y no vacíos de* X, *exite* $u : X \to [0, 1]$ *continua y tal que* $u(A) = 0, u(B) = 1$.

Teorema de existencia de las particiones de la unidad

Lema de Urysohn

Lema

Un espacio (X, τ) *es normal si y solo si dado un par de subconjuntos* A,B *cerrados, disyuntos y no vacíos de* X, *exite* $u : X \to [0, 1]$ *continua y tal que* $u(A) = 0, u(B) = 1$.

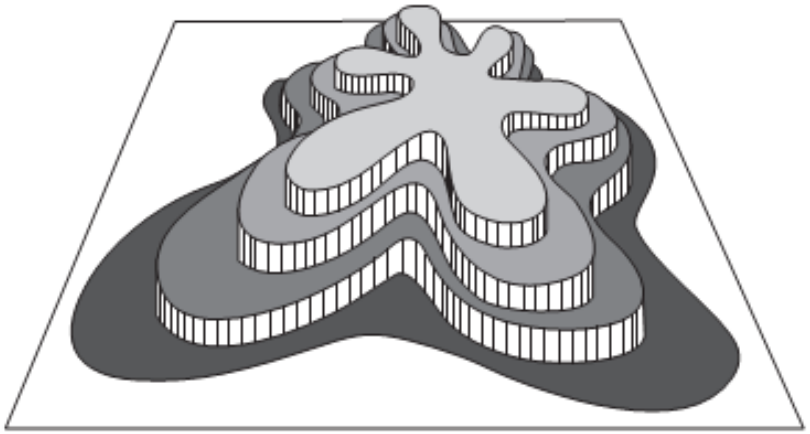


Teorema de existencia de las particiones de la unidad

Lema de Urysohn

Lema

Un espacio (X, τ) *es normal si y solo si dado un par de subconjuntos* A,B *cerrados, disyuntos y no vacíos de* X, *exite* $u : X \to [0, 1]$ *continua y tal que* $u(A) = 0, u(B) = 1$.



Teorema de existencia de las particiones de la unidad

Existencia de particones finitas de la unidad

Teorema

Sea $\{U_1, \cdots, U_n\}$ *un recubrimiento abierto finito del espacio normal* X*. Entonces exite una partición de la unidad dominada por* $\{U_i\}$*.*

Demostración

Paso 1: *En primer lugar, vamos a probar que se puede reducir el recubrimiento* $\{U_i\}$ *a un recubrimiento abierto* $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ *de* X *tal que* $\overline{V_i} \subset U_i$ *para cada* i.
Se hará por inducción. Observesé que

$$A = X - (U_2 \cup \cdots \cup U_n)$$

es un subconjunto cerrado de X. *Puesto que* $\{U_1, \cdots, U_n\}$ *recubre a* X, *el conjunto* A *está contenido en el conjunto abierto* U_1. *Usando la normalidad, elegimos un conjunto abierto* V_1 *que contenga a* A *y tal que*

$$\overline{V_1} \subset U_1.$$

Entonces la colección $\{V_1, U_2, \cdots, U_n\}$ *recubre a* X.
En general, dados conjuntos abiertos $V_1, \cdots, V_{k-1}$ *tales que la colección*

$$\{V_1, \cdots, V_{k-1}, U_k, \cdots, U_n\}$$

recubre a X, *pongamos*

Demostración

$$A = X - (V_1 \cap \cdots \cap V_{k-1}) - (U_{k+1} \cap \cdots \cap U_n).$$

Entonces A es un subconunto cerrado de X que está contenido contanido en el abierto U_k. Elegimos V_k como un conjunto abierto que contiene a A tal que $\overline{V_k} \subset U_k$. Entonces $\{V_1, \cdots, V_{k-1}, V_k, U_{k+1}, \cdots, U_n\}$ recubre a X.

Paso 2: *Ahora probemos el teorema. Dado un cubrimiento abierto $\{U_1, \cdots, U_n\}$ de X, elijamos un recubrimiento abierto $\{V_1, \cdots, V_n\}$ de X tal que $\overline{V_i} \subset U_i$ para cada i. Después elijamos un recubrimiento un recubrimiento abierto $\{W_1, \cdots, W_n\}$ de X tal que $\overline{W_i} \subset V_i$ para cada i. Utilizando el lema de Urysohn, elijamos para cada i una función continua*

$$\psi_i : X \to [0, 1]$$

tal que $\psi_i(\overline{W_i} = \{1\})$ y $\psi(X - V_i) = \{0\}$. Puesto que $\psi_i^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ está contenido en V_i, tenemos

Demostración.

$$\text{sop } \psi_i \subset \overline{V_i} \subset U_1.$$

Como la colección $\{W_i\}$ recubre a X., la suma $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ es positiva para cada x. . Por tanto, podemos definir, para cada j,

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}.$$

Es fácil comprobar que $\phi_1, \cdots, \phi_n$ es la partición de la unidad deseada. $\square$

Teorema de Inmersión de variedades a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Teorema de relación entre espacios compacto y T_2.

Teorema

Sea $f : X \to Y$ una función continua biyectiva. Si X es compacto e Y es de Hausdorff, entonces f es un homemorfismo.

Teorema de Inmersión de variedades a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Teorema de Inmersión de variedades a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Teorema

Si X es una m-variedad compacta, entonces X se puede embeber en $\mathbb{R}^N$ para algún entero positivo N.

Demostración

Recubramos a X por un número finito de conjuntos abiertos $\{U_1 \cdots, U_n\}$ (X es compacto), cada uno de los cuales puede embeberse en $\mathbb{R}^m$. Elijamos embebimientos

$$g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$$

para cada i. Como X es de Hausdorff y compacto, tambien es normal. Entonces existe $\phi_1, \cdots, \phi_n$ una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$, llamemos a $A_i = sop\ \phi_i$; para cada $i = 1, \cdots, n$, definamos una función $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi(x) g_i(x) & \text{para } x \in U_i \\ \boldsymbol{0} = (0, \cdots, 0) & \text{para } x \in X - A_i. \end{cases}$$

Demostración

Recubramos a X por un número finito de conjuntos abiertos $\{U_1 \cdots, U_n\}$ (X es compacto), cada uno de los cuales puede embeberse en $\mathbb{R}^m$. Elijamos embebimientos

$$g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$$

para cada i. Como X es de Hausdorff y compacto, tambien es normal. Entonces existe $\phi_1, \cdots, \phi_n$ una partición de la unidad dominada por $\{U_i\}$, llamemos a $A_i = sop\ \phi_i$; para cada $i = 1, \cdots, n$, definamos una función $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi(x) g_i(x) & \text{para } x \in U_i \\ \boldsymbol{0} = (0, \cdots, 0) & \text{para } x \in X - A_i. \end{cases}$$

Observación

Nota: Aquí $\phi_i(x)$ es un número real $c \in [0, 1]$ y g_i es un punto $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^m$; el producto $c\mathbf{y}$ denota el punto $(cy_1, \cdots, cy_m)$ de $\mathbb{R}^m$.

Demostración

La función h_i está bien definida porque las dos definiciones de h_i coinciden en la intersección de sus dominios, y h_i es continua porque sus restricciones a los conjuntos abiertos U_i y $X - A_i$ son continuas. Ahora definamos

$$F : X \to \underbrace{\mathbb{R} x \cdots x \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} x \underbrace{\mathbb{R}^m x \cdots x \mathbb{R}^m}_{n \text{ veces}} \cong \mathbb{R}^{n(m+1)}$$

mediante la regla

$$F(x) = (\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x), h_1(x), \cdots, h_n(x)).$$

Por inspección se tiene que F es continua. Como X es compacto y $\mathbb{R}^N$ es de Hausdorff entonces por el teorema anterior, F es un homemorfismo, por lo tanto para tener un embebimiento de X en $\mathbb{R}^n$ solo falta comprobar que F es inyectiva.

Demostración.

Supongamos que $F(x) = F(y)$. Entonces $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ y $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i. Si tenemos que $\phi_i(x) > 0$ para algún i, tambien lo será $\phi_i(y)$, por lo que $x, y \in U_i$. Entonces

$$\begin{aligned} h_i(x) &= h_i(y) \\ \phi_i(x)g_i(x) &= \phi_i(y)g_i(y) \\ g_i(x) &= g_i(y) \end{aligned}$$

Pero como g_i es un embebimiento, entonces g_i es inyectiva, por lo que x=y, como deseamos demostrar. $\square$

Definición generalizada de particiones de la unidad

Definición generalizada de particiones de la unidad

Definición

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *un cubrimiento abierto indexado de* X*, Una familia indexada de funciones continuas*

$$\phi_\alpha : X \to [0,1]$$

se dice que es una ***particion de la unidad*** *sobre* X*, subordinada a* $\{U_\alpha\}$*, si*

1. *sop* $\phi_\alpha \subset U_\alpha$*, para cada* α*.*

Definición generalizada de particiones de la unidad

Definición generalizada de particiones de la unidad

Definición

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *un cubrimiento abierto indexado de* X*, Una familia indexada de funciones continuas*

$$\phi_\alpha : X \to [0,1]$$

se dice que es una ***particion de la unidad*** *sobre* X*, subordinada a* $\{U_\alpha\}$*, si*

1. *sop* $\phi_\alpha \subset U_\alpha$*, para cada* α*.*
2. *La familia indexada* $\{sop\ \phi_\alpha\}$ *es localmente finita.*

Definición generalizada de particiones de la unidad

Definición generalizada de particiones de la unidad

Definición

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ *un cubrimiento abierto indexado de* X*, Una familia indexada de funciones continuas*

$$\phi_\alpha : X \to [0,1]$$

se dice que es una ***particion de la unidad*** *sobre* X*, subordinada a* $\{U_\alpha\}$*, si*

1. *sop* $\phi_\alpha \subset U_\alpha$*, para cada* α*.*
2. *La familia indexada* $\{sop\ \phi_\alpha\}$ *es localmente finita.*
3. $\sum \phi_\alpha(x) = 1$*, para cada* $x \in X$*.*

Bibliografía

Bibliografía

- Neira, C. Topológia General. Primera edición. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2005.
- Munkres, J. Topológia. Segunda edición. Pearson Educación, S.A, 2007.
- Plazas, S. Análisis en varias variables. Primera edición. 2010.
- Rubiano, G. Topológia General. Tercera edición. Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, 2010.