Sistemas de fusión de grupos finitos simples de tipo Lie

Carles Broto

Universitat Autònoma de Barcelona

PRIMER ENCUENTRO DE JÓVENES TOPÓLOGOS (TOP-UD)
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Mayo 2015

Esbozo

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

Sistemas de fusión de grupos finitos de tipo Lie

Sistemas de enlace y autoequivalencias

Sistemas de fusión abstractos

Fijamos un primo p

$\mathcal{F}_S(G)$	$\leftarrow\!\shortmid$	G	$\mapsto$	BG	$\mapsto$	$BG^\wedge_p$
sistema de fusión		grupo finito		espacio clasificador		espacio clasificador p-completado

Fijamos un primo p

$\mathcal{F}_S(G)$	$\leftarrow\!\shortmid$	G	$\mapsto$	BG	$\mapsto$	$BG^\wedge_p$
sistema de fusión		grupo finito		espacio clasificador		espacio clasificador p-completado

Definición

Sea G un grupo finito y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces el sistema de fusión de G, $\mathcal{F}_S(G)$, consta de

- *Objetos: $P \leq S$, los subgrupos de S, y*
- *Morfismos:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) &= \left\{ \varphi\colon P \to Q \;\middle|\; \exists g \in G, \varphi(x) = gxg^{-1} \right\} \\ &\cong N_G(P,Q)/C_G(P)\end{aligned}$$

que se componen como homomorfismos de grupos.

Si H es otro grupo finito, con p-subgrupo de Sylow T, diremos que los sistemas de fusión de G y H son equivalentes:

$$\mathcal{F}_S(G) \simeq \mathcal{F}_T(H)$$

existe un isomorfismo $f\colon S \longrightarrow T$ que preserva fusión:

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) \Longleftrightarrow (f|_Q) \circ \varphi \circ (f|_P)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_T(H)}(f(P), f(Q))$$

Definición

Sea G un grupo finito y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, entonces el sistema de fusión de G, $\mathcal{F}_S(G)$, consta de

- *Objetos: $P \leq S$, los subgrupos de S, y*
- *Morfismos:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) &= \left\{ \varphi\colon P \to Q \;\middle|\; \exists g \in G, \varphi(x) = gxg^{-1} \right\} \\ &\cong N_G(P,Q)/C_G(P)\end{aligned}$$

que se componen como homomorfismos de grupos.

Si H es otro grupo finito, con p-subgrupo de Sylow T, diremos que los sistemas de fusión de G y H son equivalentes:

$$\mathcal{F}_S(G) \simeq \mathcal{F}_T(H)$$

existe un isomorfismo $f\colon S \longrightarrow T$ que preserva fusión:

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) \Longleftrightarrow (f|_Q) \circ \varphi \circ (f|_P)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_T(H)}(f(P), f(Q))$$

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

- Sea G un grupo finito. El espacio clasificador de G es el espacio de órbitas

$$BG = EG/G$$

donde EG es un espacio contráctil dotado de una acción libre de G.

  - *Ejemplo* $G = \mathbb{Z}$: $\quad E\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}$ y $B\mathbb{Z} \simeq S^1$.
    $G = \mathbb{Z}/2$: $\quad E\mathbb{Z}/2 \simeq S^\infty$ y $B\mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{R}P^\infty$.

BG queda determinado salvo homotopía y se caracteriza por:

$$\begin{cases} \pi_1(BG) \cong G \\ \pi_i(BG) = 0\,, \quad i \neq 1\,. \end{cases}$$

en otras palabras, $BG \simeq K(G,1)$ es un espacio de Eilenberg-McLane.

Hay diversas construcciones. Por ejemplo, podemos empezar con un *wedge* de circunferencias, una por cada elemento en un sistema de generadores de G. Luego pegamos 2-celdas correspondiendo a las relaciones entre los generadores, de manera que el grupo fundamental del espacio obtenido es isomorfo a G. Finalmente pegamos celdas de dimensión superior para anular los grupos de homotopía superiores.

- Milnor, Milgram-Steenrod, Segal: construcción funtorial de BG: construcción de barras. (Un homomofismo $\varphi\colon G \to H$ induce una aplicación continua map $B\varphi\colon BG \to BH$).

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

- Sea G un grupo finito. El espacio clasificador de G es el espacio de órbitas

$$BG = EG/G$$

donde EG es un espacio contráctil dotado de una acción libre de G.

  - *Ejemplo* $G = \mathbb{Z}$: $\quad E\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}$ y $B\mathbb{Z} \simeq S^1$.
    $G = \mathbb{Z}/2$: $\quad E\mathbb{Z}/2 \simeq S^\infty$ y $B\mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{R}P^\infty$.

BG queda determinado salvo homotopía y se caracteriza por:

$$\begin{cases} \pi_1(BG) \cong G \\ \pi_i(BG) = 0\,, \quad i \neq 1\,. \end{cases}$$

en otras palabras, $BG \simeq K(G,1)$ es un espacio de Eilenberg-McLane.

Hay diversas construcciones. Por ejemplo, podemos empezar con un *wedge* de circunferencias, una por cada elemento en un sistema de generadores de G. Luego pegamos 2-celdas correspondiendo a las relaciones entre los generadores, de manera que el grupo fundamental del espacio obtenido es isomorfo a G. Finalmente pegamos celdas de dimensión superior para anular los grupos de homotopía superiores.

- Milnor, Milgram-Steenrod, Segal: construcción funtorial de BG: construcción de barras. (Un homomofismo $\varphi\colon G \to H$ induce una aplicación continua map $B\varphi\colon BG \to BH$).

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

- Sea G un grupo finito. El espacio clasificador de G es el espacio de órbitas

$$BG = EG/G$$

donde EG es un espacio contráctil dotado de una acción libre de G.

  - *Ejemplo* $G = \mathbb{Z}$: $\quad E\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}$ y $B\mathbb{Z} \simeq S^1$.
    $G = \mathbb{Z}/2$: $\quad E\mathbb{Z}/2 \simeq S^\infty$ y $B\mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{R}P^\infty$.

BG queda determinado salvo homotopía y se caracteriza por:

$$\begin{cases} \pi_1(BG) \cong G \\ \pi_i(BG) = 0\,, \quad i \neq 1\,. \end{cases}$$

en otras palabras, $BG \simeq K(G,1)$ es un espacio de Eilenberg-McLane.

Hay diversas construcciones. Por ejemplo, podemos empezar con un *wedge* de circunferencias, una por cada elemento en un sistema de generadores de G. Luego pegamos 2-celdas correspondiendo a las relaciones entre los generadores, de manera que el grupo fundamental del espacio obtenido es isomorfo a G. Finalmente pegamos celdas de dimensión superior para anular los grupos de homotopía superiores.

- Milnor, Milgram-Steenrod, Segal: construcción funtorial de BG: construcción de barras. (Un homomofismo $\varphi\colon G \to H$ induce una aplicación continua map $B\varphi\colon BG \to BH$).

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

Dos espacios X e Y son p-equivalentes si existe un 3r espacio Z y aplicaciones continuas

$$X \longrightarrow Z \longleftarrow Y$$

que inducen isomorfismos en cohomología con coeficientes en $\mathbb{F}_p$.

La p-compleción de Bousfield-Kan es un funtor coaumentado $\ell_X : X \longrightarrow X_p^\wedge$ que convierte p-equivalencias en equivalencias homotópicas.

Es decir, una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ induce un isomorfismo en cohomología mod p

$$f^* : H^*(Y; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(X; \mathbb{F}_p)$$

si y sólo si induce una equivalencia homotópica después de p-compleción:

$$f_p^\wedge : X_p^\wedge \xrightarrow{\simeq} Y_p^\wedge$$

- Para $S^1 \simeq B\mathbb{Z}$, tenemos $(S^1)_p^\wedge \simeq B\mathbb{Z}_p$ y la coaumentación $\ell_{B\mathbb{Z}} : B\mathbb{Z} \longrightarrow B\mathbb{Z}_p$ es dada por la inclusión de los enteros en los enteros p-ádicos.

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

Dos espacios X e Y son p-equivalentes si existe un 3r espacio Z y aplicaciones continuas

$$X \longrightarrow Z \longleftarrow Y$$

que inducen isomorfismos en cohomología con coeficientes en $\mathbb{F}_p$.

La p-compleción de Bousfield-Kan es un funtor coaumentado $\ell_X : X \longrightarrow X_p^\wedge$ que convierte p-equivalencias en equivalencias homotópicas.

Es decir, una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ induce un isomorfismo en cohomología mod p

$$f^* : H^*(Y; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(X; \mathbb{F}_p)$$

si y sólo si induce una equivalencia homotópica después de p-compleción:

$$f_p^\wedge : X_p^\wedge \xrightarrow{\simeq} Y_p^\wedge$$

- Para $S^1 \simeq B\mathbb{Z}$, tenemos $(S^1)_p^\wedge \simeq B\mathbb{Z}_p$ y la coaumentación $\ell_{B\mathbb{Z}} : B\mathbb{Z} \longrightarrow B\mathbb{Z}_p$ es dada por la inclusión de los enteros en los enteros p-ádicos.

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

- Si P es un p-grupo finito, entonces BP es p-completo.
- En general, BG no es p-completo:
  - $\pi_1(BG_p^\wedge) \cong G/O^p(G)$, donde O^pG es el subgrupo p-perfecto normal maximal de G.
  - $BG_p^\wedge$ esconde una rica estructura homotópica, con grupos de homotopía no triviales en dimensiones arbitrariamente elevadas.

◦ *Ejemplo* Sea p un número primo impar. Consideremos el producto semidirecto $\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2$. Los grupos de homotopía

$$\pi_i\big(B(\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2)_p^\wedge\big)$$

están íntimamente relacionados con la parte p-primaria de los grupos de homotopía de S^3.

De hecho, se tiene una equivalencia homotópica

$$\Omega B(\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2)_p^\wedge \simeq S^3\{p^r\}$$

(fibra homotópica de la auto-aplicación de S^3 de grado p^r).

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

- Si P es un p-grupo finito, entonces BP es p-completo.
- En general, BG no es p-completo:
  - $\pi_1(BG_p^\wedge) \cong G/O^p(G)$, donde O^pG es el subgrupo p-perfecto normal maximal de G.
  - $BG_p^\wedge$ esconde una rica estructura homotópica, con grupos de homotopía no triviales en dimensiones arbitrariamente elevadas.

◦ *Ejemplo* Sea p un número primo impar. Consideremos el producto semidirecto $\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2$. Los grupos de homotopía

$$\pi_i\big(B(\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2)_p^\wedge\big)$$

están íntimamente relacionados con la parte p-primaria de los grupos de homotopía de S^3.

De hecho, se tiene una equivalencia homotópica

$$\Omega B(\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2)_p^\wedge \simeq S^3\{p^r\}$$

(fibra homotópica de la auto-aplicación de S^3 de grado p^r).

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

- Si P es un p-grupo finito, entonces BP es p-completo.
- En general, BG no es p-completo:
  - $\pi_1(BG_p^\wedge) \cong G/O^p(G)$, donde O^pG es el subgrupo p-perfecto normal maximal de G.
  - $BG_p^\wedge$ esconde una rica estructura homotópica, con grupos de homotopía no triviales en dimensiones arbitrariamente elevadas.

◦ *Ejemplo* Sea p un número primo impar. Consideremos el producto semidirecto $\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2$. Los grupos de homotopía

$$\pi_i\big(B(\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2)_p^\wedge\big)$$

están íntimamente relacionados con la parte p-primaria de los grupos de homotopía de S^3.

De hecho, se tiene una equivalencia homotópica

$$\Omega B(\mathbb{Z}/p^r \rtimes \mathbb{Z}/2)_p^\wedge \simeq S^3\{p^r\}$$

(fibra homotópica de la auto-aplicación de S^3 de grado p^r).

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

Quillen (1974) Si G és un grupo finito perfecto, entonces BG^+ es simplemente conexo y

$$(BG)^+ \simeq \prod_{\substack{q \text{ primo} \\ q \mid |G|}} X_q \,.$$

Pregunta: puede relacionarse X_q con la estructura algebraica de G ? (p.ej. q-subgrupos of G.)

Mislin (1990) Sea $G \xrightarrow{\rho} H$ un homomorfismo de grupos de Lie compactos. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(A) $H^*(BH;\mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\rho^*} H^*(BG;\mathbb{Z}/p)$ es un isomorfismo.

(B) $\mathrm{Rep}(\pi, G) \xrightarrow{\rho_*} \mathrm{Rep}(\pi, H)$ es una biyección para cada p-grupo finito π.

(C) $\mathcal{F}_p(G) \xrightarrow{\rho_*} \mathcal{F}_p(H)$ es un equivalencia de categorías.

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

Quillen (1974) Si G és un grupo finito perfecto, entonces BG^+ es simplemente conexo y

$$(BG)^+ \simeq \prod_{\substack{q \text{ primo} \\ q \mid |G|}} X_q \,.$$

Pregunta: puede relacionarse X_q con la estructura algebraica de G ? (p.ej. q-subgrupos of G.)

Mislin (1990) Sea $G \xrightarrow{\rho} H$ un homomorfismo de grupos de Lie compactos. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(A) $H^*(BH;\mathbb{Z}/p) \xrightarrow{\rho^*} H^*(BG;\mathbb{Z}/p)$ es un isomorfismo.

(B) $\mathrm{Rep}(\pi, G) \xrightarrow{\rho_*} \mathrm{Rep}(\pi, H)$ es una biyección para cada p-grupo finito π.

(C) $\mathcal{F}_p(G) \xrightarrow{\rho_*} \mathcal{F}_p(H)$ es un equivalencia de categorías.

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

$\mathcal{F}_S(G)$	$\leftarrow\!\shortmid$	G	$\mapsto$	BG	$\mapsto$	$BG_p^\wedge$	$\mapsto$	$\mathcal{F}_S(G)$
sistema de fusión		grupo finito		espacio clasificador		espacio clasificador p-completado		sistema de fusión

Martino-Priddy: El sistema de fusión puede reconstruirse a partir del espacio clasificador p-completado. Dados grupos finitos G y H, si $BG_p^\wedge \simeq BH_p^\wedge$ entonces $\mathcal{F}_p(G) \simeq \mathcal{F}_p(H)$.

Conjetura de M-P (1996):

$$BG_p^\wedge \simeq BH_p^\wedge \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_p(G) \simeq \mathcal{F}_p(H)$$

Oliver (2004, 2006): La conjetura de M-P es cierta. (La demostración depende de la clasificación de los grupos simples finitos).

Grupos, sistemas de fusión y espacios clasificadores

$\mathcal{F}_S(G)$	$\leftarrow\!\shortmid$	G	$\mapsto$	BG	$\mapsto$	$BG_p^\wedge$	$\mapsto$	$\mathcal{F}_S(G)$
sistema de fusión		grupo finito		espacio clasificador		espacio clasificador p-completado		sistema de fusión

Martino-Priddy: El sistema de fusión puede reconstruirse a partir del espacio clasificador p-completado. Dados grupos finitos G y H, si $BG_p^\wedge \simeq BH_p^\wedge$ entonces $\mathcal{F}_p(G) \simeq \mathcal{F}_p(H)$.

Conjetura de M-P (1996):

$$BG_p^\wedge \simeq BH_p^\wedge \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_p(G) \simeq \mathcal{F}_p(H)$$

Oliver (2004, 2006): La conjetura de M-P es cierta. (La demostración depende de la clasificación de los grupos simples finitos).

Sistemas de fusión de grupos finitos de tipo Lie

Teorema (B-Møller-Oliver)

Sea $\mathbb{G}$ un esquema de grupo, conexo y reductivo sobre $\mathbb{Z}$, p un primo. Entonces

(a) $\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q'))$ *si* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$

(b) $\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q'))$ *si* $\mathbb{G} = A_n, D_n, E_6$, τ *automorfismo gráfico, and* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle}$.

(c) *Si el grupo de Weyl de $\mathbb{G}$ contiene un elemento que actúa sobre el toro maximal invirtiendo todos sus elementos, entonces:*

$$\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')), \quad \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q')) \ \ si\ \mathbb{G}\ y\ \tau\ como\ en\ (\mathrm{b}),$$

si $\overline{\langle -1, q \rangle} = \overline{\langle -1, q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$.

(d) *Si $\mathbb{G}$ es tipo A_n, D_n con n impar, o E_6, y τ es automorfismo gráfico de orden 2,*

$$\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')) \quad si \quad \overline{\langle -q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$$

Sistemas de fusión de grupos finitos de tipo Lie

Teorema (B-Møller-Oliver)

Sea $\mathbb{G}$ un esquema de grupo, conexo y reductivo sobre $\mathbb{Z}$, p un primo. Entonces

(a) $\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q'))$ *si* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$

i.e., $\begin{cases} \mathrm{ord}_p(q) = \mathrm{ord}_p(q') = s \text{ y } v_p(q^s - 1) = v_p(q'^s - 1), \text{ si } p \text{ es impar,} \\ q \equiv q' \text{ mód } 8 \text{ y } v_2(q^2 - 1) = v_2(q'^2 - 1), \text{ si } p = 2. \end{cases}$

(b) $\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q'))$ *si* $\mathbb{G} = A_n, D_n, E_6$, τ *automorfismo gráfico, and* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle}$.

(c) *Si el grupo de Weyl de $\mathbb{G}$ contiene un elemento que actúa sobre el toro maximal invirtiendo todos sus elementos, entonces:*

$$\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')), \quad \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q')) \text{ si } \mathbb{G} \text{ y } \tau \text{ como en (b),}$$

si $\overline{\langle -1, q \rangle} = \overline{\langle -1, q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$.

(d) *Si $\mathbb{G}$ es tipo A_n, D_n con n impar, o E_6, y τ es automorfismo gráfico de orden 2,*

$$\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')) \quad \text{si} \quad \overline{\langle -q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$$

Sistemas de fusión de grupos finitos de tipo Lie

Teorema (B-Møller-Oliver)

Sea $\mathbb{G}$ un esquema de grupo, conexo y reductivo sobre $\mathbb{Z}$, p un primo. Entonces

(a) $\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q'))$ *si* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$

(b) $\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q'))$ *si* $\mathbb{G} = A_n, D_n, E_6$, τ *automorfismo gráfico, and* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle}$.

(c) *Si el grupo de Weyl de $\mathbb{G}$ contiene un elemento que actúa sobre el toro maximal invirtiendo todos sus elementos, entonces:*

$$\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')), \quad \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q')) \ \ si\ \mathbb{G}\ y\ \tau\ como\ en\ (\mathrm{b}),$$

si $\overline{\langle -1, q \rangle} = \overline{\langle -1, q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$.

(d) *Si $\mathbb{G}$ es tipo A_n, D_n con n impar, o E_6, y τ es automorfismo gráfico de orden 2,*

$$\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')) \quad si \quad \overline{\langle -q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$$

Sistemas de fusión de grupos finitos de tipo Lie

Teorema (B-Møller-Oliver)

Sea $\mathbb{G}$ un esquema de grupo, conexo y reductivo sobre $\mathbb{Z}$, p un primo. Entonces

(a) $\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q'))$ *si* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$

(b) $\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q'))$ *si* $\mathbb{G} = A_n, D_n, E_6$, τ *automorfismo gráfico, and* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle}$.

(c) *Si el grupo de Weyl de $\mathbb{G}$ contiene un elemento que actúa sobre el toro maximal invirtiendo todos sus elementos, entonces:*

$$\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')), \quad \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q')) \ \ si\ \mathbb{G}\ y\ \tau\ como\ en\ (\mathrm{b}),$$

si $\overline{\langle -1, q \rangle} = \overline{\langle -1, q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$.

(d) *Si $\mathbb{G}$ es tipo A_n, D_n con n impar, o E_6, y τ es automorfismo gráfico de orden 2,*

$$\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')) \quad si \quad \overline{\langle -q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$$

Teorema (B-Møller-Oliver)

Sea $\mathbb{G}$ un esquema de grupo, conexo y reductivo sobre $\mathbb{Z}$, p un primo. Entonces

(a) $\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q'))$ *si* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$

(b) $\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q'))$ *si* $\mathbb{G} = A_n, D_n, E_6$, τ *automorfismo gráfico, and* $\overline{\langle q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle}$.

(c) *Si el grupo de Weyl de $\mathbb{G}$ contiene un elemento que actúa sobre el toro maximal invirtiendo todos sus elementos, entonces:*

$$\mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q'))\,, \quad \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q')) \ \ si\ \mathbb{G}\ y\ \tau\ como\ en\ (\mathrm{b}),$$

si $\overline{\langle -1, q \rangle} = \overline{\langle -1, q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$.

(d) *Si $\mathbb{G}$ es tipo A_n, D_n con n impar, o E_6, y τ es automorfismo gráfico de orden 2,*

$$\mathcal{F}_p({}^\tau\mathbb{G}(q)) \simeq \mathcal{F}_p(\mathbb{G}(q')) \quad si \quad \overline{\langle -q \rangle} = \overline{\langle q' \rangle} \leq \mathbb{Z}_p^\times$$

Algunos casos adicionales:

- Si $q \equiv 1 \bmod p$, entonces

$$\text{para } p \neq 3, \qquad \mathcal{F}_p(G_2(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^3D_4(q)), \text{ y}$$

$$\text{para } p \neq 2, \qquad \mathcal{F}_p(F_4(q)) \simeq \mathcal{F}_p({}^2E_6(q))$$

Skip

Ingredientes de la demostración

(A) Resultados de Friedlander y de Jacksowski-McClure-Oliver:

Si $\mathbb{G}$ es un esquema de grupo conexo y reductivo sobre $\mathbb{Z}$ y $(p,q)=1$, existe un diagrama de pulo-back homotópico

$$\begin{tikzcd} B^{\tau}\mathbb{G}(q)^{\wedge}_{p} \arrow[r] \arrow[d] & B\mathbb{G}(\mathbb{C})^{\wedge}_{p} \arrow[d, "\Delta"] \\ B\mathbb{G}(\mathbb{C})^{\wedge}_{p} \arrow[r, "1\times\tau\psi^{q}"] & B\mathbb{G}(\mathbb{C})^{\wedge}_{p}\times B\mathbb{G}(\mathbb{C})^{\wedge}_{p} \end{tikzcd}$$

donde ψ^q es la operación inestable de Adams de exponente q y τ un automorfismo gráfico.

El caso $\mathbb{G}=GL$ fue antes considerado por Quillen para calcular $H^*(GL_n(q),\mathbb{F}_p)$. (Relacionado a su trabajo sobre teoría K de cuerpos finitos.)

Ingredientes de la demostración

(B) Puntos fijos homotópicos: $B^{\tau}\mathbb{G}(q)^{\wedge}_{p} \simeq (BG^{\wedge}_{p})^{h\langle\tau\psi^{q}\rangle}$.

En el diagram pull-back

$$\begin{tikzcd} X^{h\alpha} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "1\times\alpha"] & X \times X \end{tikzcd}$$

para α una auto-aplicación de X,

podemos interpretar $X^{h\alpha} = \left\{ w\colon I \to X \;\middle|\; w(1) = \alpha(w(0)) \right\}$ como un espacio de puntos fijos homotópicos. Luego, si α es homomorfismo, $X^{h\alpha} = \Gamma(X_{h\alpha} \downarrow S^{1})$ es el espacio de seciones del haz fibrado:

$$X \longrightarrow X_{h\alpha} \longrightarrow S^{1}$$

donde $X_{h\alpha} = X \times I/\sim$, $(0,x) \sim (1,\alpha(x))$.

Podemos llegar a las mismas consideraciones si α es equivalencia homotópica.

Ingredientes de la demostración

Observación clave: En ciertas situaciones $X \longrightarrow X_{h\alpha} \longrightarrow S^1 (\simeq B\mathbb{Z})$ se extiende a una fibración

$$X_p^\wedge \longrightarrow (X_{h\alpha})_p^\wedge \longrightarrow (S^1)_p^\wedge \ (\simeq B\mathbb{Z}_p)$$

dicho de otra manera, la acciónt de $\mathbb{Z}$ generada por α se extiende a una acción de $\mathbb{Z}_p$.

Theorem

Fijamos un primo p y un espacio X conexo y p-completo, que satisface:

- $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ *es álgebra Noetheriana*
- $\mathrm{Out}(X)$ *se detecta en* $\hat{H}^*(X, \mathbb{Z}_p) := \varprojlim H^*(X, \mathbb{Z}/p^k)$.

Sean α, β auto-equivalencias de X con $\overline{\langle \alpha \rangle} = \overline{\langle \beta \rangle}$ en $\mathrm{Out}(X)$, entonces,

$$X^{h\alpha} \simeq X^{h\beta}.$$

$\mathrm{Out}(X)$ se dota de la topología p-adica, determinada por la base de entornos abiertos de la identidad:

$$U_k = \{[f] \in \mathrm{Out}(X) | f^* = \mathrm{id} \text{ on } H^*(X, \mathbb{Z}/p^k\}$$

Ingredientes de la demostración

(C) Clasificación de las auto-equivalencias de $BG_p^\wedge$, G grupo de Lie compacto y conexo (e.g. finito) [Jackowski-McClure-Oliver]

i) $\mathrm{Out}(BG_p^\wedge)$ se detecta en $H^*_{\mathbb{Q}_p}(BG_p^\wedge) := H^*(BG_p^\wedge;\mathbb{Z}_p)\otimes\mathbb{Q}$.

ii) Detección en $BT_p^\wedge$: la acción del grupo de Weyl W sobre el toro maximal T, proporciona $W \leq GL_n(\mathbb{Z}_p)$ y un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Out}(BG_p^\wedge) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \\
1 \arrow[r] & C_{GL_n(\mathbb{Z}_p)}(W)/Z(W) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cup|"] & N_{(\mathbb{Z}_p)}(W)/W \arrow[r] & \mathrm{Out}(W) \\
 & \{\text{unstable Adams maps}\} & &
\end{tikzcd}$$

e.g. Si G simple, W es irreducible y

$$C_{GL_n(\mathbb{Z}_p)}(W) \cong \mathbb{Z}_p^\times \ni q \longleftrightarrow \psi^q \text{ operaciones inestables de Adams}$$

Sistemas de enlace y autoequivalencias

- Sea G un grupo finito y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$

Definición

El sistema céntrico de enlace de G sobre S es una categoría $\mathcal{L}_S^c(G)$ con

- *Objectos:* $P \leq S$ *tal que* $C_G(P) = Z(P) \times C'_G(P)$ *con* $(p, |C'_G(P)|) = 1$
- *Morfismos:* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{L}_S^c(G)}(P, G) = N_G(P, G)/C'_G(P)$

El sistema céntrico de enlace puede verse como una extensión del sistema de fusión. Obsérvese que la inclusión natural $\mathrm{Inn}(P) \leq \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G)}(P) = \mathrm{Aut}_G(P)$, se levanta a un monomorfismo *distinguido*

$$\delta_P \colon P \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_S^c(G)}(P)$$

Sistemas de enlace y autoequivalencias

Definición

Una autoequivalencia del sistema de enlace $\mathcal{L}_S^c(G)$ se denomina isotípica si es compatible con los monomorfismos distinguidos $\delta_P\colon P \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}_S^c(G)}(P)$.

- $\mathrm{Aut}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}_S^c(G))$ es el grupo de autoequivalencias isotópicas de $\mathcal{L}_S^c(G)$.
- $\mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}_S^c(G))$ es el grupo de autoequivalencias isotípicas de $\mathcal{L}_S^c(G)$ módulo equivalencia natural.

Teorema (B-Levi-Oliver, Oliver)

La restricción de una autoequivalencia isotípica a su efecto sobre el p-subgrupo de Sylow S, produce una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \lim^1_{\mathcal{O}_S^c(G)} \mathcal{Z} \xrightarrow{\lambda_G} \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}_S^c(G)) \xrightarrow{\mu_G} \mathrm{Out}(S, \mathcal{F}_S(G)) \longrightarrow 1$$

donde $\mathrm{Out}(S, \mathcal{F}_S(G)) = \mathrm{Aut}(S, \mathcal{F}_S(G)) / \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(G))}(S)$ *(= automorfismos de S que preservan fusión módulo automorfismos inducidos por conjugación en G)*

Sistemas de enlace y autoequivalencias

B-Levi-Oliver (2003): El sistema de enlace permite recuperar el espacio clasificador p-completado y sus autoequivalencias homotópicas:

- El espacio clasificador p-completado es

$$(BG)^\wedge_p \simeq |\mathcal{L}^c_S(G)|^\wedge_p$$

- El grupo de clases de homotopía de autoequivalencias homotópicas de $(BG)^\wedge_p$ es

$$\left[(BG)^\wedge_p\,,\,(BG)^\wedge_p\right]^\times \cong \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_S(G))$$

Obsérvese que estas autoequivalencias pueden relacionarse con los automorfismos del grupo G como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Out}(G) \arrow[d, "\kappa_G"'] \arrow[dr, "\bar{\kappa}_G"] & & \\
1 \arrow[r] & \lim^1_{\mathcal{O}^c_S(G)} \mathcal{Z} \arrow[r, "\lambda_G"] & \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_S(G)) \arrow[r, "\mu_G"] & \mathrm{Out}(S, \mathcal{F}_S(G)) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Sistemas de enlace y autoequivalencias

B-Levi-Oliver (2003): El sistema de enlace permite recuperar el espacio clasificador p-completado y sus autoequivalencias homotópicas:

- El espacio clasificador p-completado es

$$(BG)^\wedge_p \simeq |\mathcal{L}^c_S(G)|^\wedge_p$$

- El grupo de clases de homotopía de autoequivalencias homotópicas de $(BG)^\wedge_p$ es

$$\left[(BG)^\wedge_p\,,\,(BG)^\wedge_p\right]^\times \cong \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_S(G))$$

Obsérvese que estas autoequivalencias pueden relacionarse con los automorfismos del grupo G como sigue:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Out}(G) \arrow[d, "\kappa_G"'] \arrow[dr, "\bar{\kappa}_G"] & & \\
1 \arrow[r] & \lim^1_{\mathcal{O}^c_S(G)} \mathcal{Z} \arrow[r, "\lambda_G"] & \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_S(G)) \arrow[r, "\mu_G"] & \mathrm{Out}(S, \mathcal{F}_S(G)) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Sistemas de enlace y autoequivalencias

Teorema (B-Møller-Oliver, en preparación)

Dado un grupo finito simple de tipo Lie G, podemos encontrar otro grupo, G^*, con idéntico sistema de fusión

$$\mathcal{F}_S(G) \simeq \mathcal{F}_{S^*}(G^*)$$

y tal que

$$\mathrm{Out}(G^*) \xrightarrow{\kappa_{G^*}} \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_{S^*}(G^*))$$

es exhaustivo y escindido.

En particular podemos calcular:

$$\mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_{S^*}(G^*)) \cong \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_S(G)) \cong \left[(BG)^\wedge_p, (BG)^\wedge_p\right]^\times$$

Sistemas de enlace y autoequivalencias

Teorema (B-Møller-Oliver, en preparación)

Dado un grupo finito simple de tipo Lie G, podemos encontrar otro grupo, G^*, con idéntico sistema de fusión

$$\mathcal{F}_S(G) \simeq \mathcal{F}_{S^*}(G^*)$$

y tal que

$$\mathrm{Out}(G^*) \xrightarrow{\kappa_{G^*}} \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_{S^*}(G^*))$$

es exhaustivo y escindido.

En particular podemos calcular:

$$\mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_{S^*}(G^*)) \cong \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}^c_S(G)) \cong \left[(BG)^\wedge_p\,,\,(BG)^\wedge_p\right]^\times$$

Solomon, 1974. Existe una estructura local bien definida para $p = 2$ sobre el 2-subgrupo de Sylow de $\mathrm{Spin}_7(q)$ (q potencia de un primo impar) que contiene una única clase de conjugación de involuciones. Pero no existe ningún grupo finito con tal estructura.

Benson, 1994. Existe un espacio, $B\mathrm{Sol}(q)$, relacionado con el espacio de lazos 2-local finito de Dwyer-Wilkerson, $DI(4)$, en que subyace la estructura 2-local definida por Solomon.

Parece el espacio clasificador 2-completado de un grupo que no existe!

Solomon, 1974. Existe una estructura local bien definida para $p = 2$ sobre el 2-subgrupo de Sylow de $\mathrm{Spin}_7(q)$ (q potencia de un primo impar) que contiene una única clase de conjugación de involuciones. Pero no existe ningún grupo finito con tal estructura.

Benson, 1994. Existe un espacio, $B\mathrm{Sol}(q)$, relacionado con el espacio de lazos 2-local finito de Dwyer-Wilkerson, $DI(4)$, en que subyace la estructura 2-local definida por Solomon.

Parece el espacio clasificador 2-completado de un grupo que no existe!

Sistemas de fusión abstractos

Definición (Puig)

Un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo finito S consiste en un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ para cada par de subgrupos P,Q de S tal que

$$\mathrm{Hom}_S(P,Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q) \subseteq \mathrm{Inj}(P,Q)$$

de manera que

- *la composición de homomorfismos del sistema permanece en el sistema y,*
- *dentro del sistema, cada homomorfismo descompone como un isomorfismo seguido de una inclusión.*

$\mathcal{F}$ es saturado si satisface dos axiomas más diseñados por Puig. Axioms

Si G es un grupo finito y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$ és un sistema de fusión saturado.

Diremos que un sistema de fusión saturado es exótico si no se puede obtener como el sistema de fusión de un grupo finito sobre su p-sugrupo de Sylow.

Sistemas de fusión abstractos

Definición (Puig)

Un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo finito S consiste en un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ para cada par de subgrupos P,Q de S tal que

$$\mathrm{Hom}_S(P,Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q) \subseteq \mathrm{Inj}(P,Q)$$

de manera que

- *la composición de homomorfismos del sistema permanece en el sistema y,*
- *dentro del sistema, cada homomorfismo descompone como un isomorfismo seguido de una inclusión.*

$\mathcal{F}$ es saturado si satisface dos axiomas más diseñados por Puig. Axioms

Si G es un grupo finito y $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$ és un sistema de fusión saturado.

Diremos que un sistema de fusión saturado es exótico si no se puede obtener como el sistema de fusión de un grupo finito sobre su p-sugrupo de Sylow.

Sistemas de fusión abstractos

Sistemas céntricos de enlace (abstractos) : Siguiendo el modelo de los grupos finitos, se definen sistemas céntricos de enlace (abstractos) asociados a sistemas de fusion (abstractos). Axioms

Definición

Un grupo p-local finito es una tripleta

$$(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$$

donde S es un p-grupo finito, $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre S y $\mathcal{L}$ un sistema de enlace asociado a $\mathcal{F}$. Además, se define su espacio clasificador como la p-compleción del nervio de la categoría $\mathcal{L}$: $|\mathcal{L}|_p^\wedge$.

Levi-Oliver (2002): La estructura 2-local de Solomon sobre $\mathrm{Spin}_7(q)$ determina un grupo 2-local finito con espacio clasificador homotópicamente equivalente al espacio definido por Benson, $B\mathrm{Sol}(q)$.

Chermak (2013): Existe un único sistema céntrico de enlace asociado a un sistema de fusión saturado fijado.

La demostración de este resultado depende de la clasificación de los grupos simples finitos.

Sistemas de fusión abstractos

Sistemas céntricos de enlace (abstractos) : Siguiendo el modelo de los grupos finitos, se definen sistemas céntricos de enlace (abstractos) asociados a sistemas de fusion (abstractos). Axioms

Definición

Un grupo p-local finito es una tripleta

$$(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$$

donde S es un p-grupo finito, $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre S y $\mathcal{L}$ un sistema de enlace asociado a $\mathcal{F}$. Además, se define su espacio clasificador como la p-compleción del nervio de la categoría $\mathcal{L}$: $|\mathcal{L}|_p^\wedge$.

Levi-Oliver (2002): La estructura 2-local de Solomon sobre $\mathrm{Spin}_7(q)$ determina un grupo 2-local finito con espacio clasificador homotópicamente equivalente al espacio definido por Benson, $B\mathrm{Sol}(q)$.

Chermak (2013): Existe un único sistema céntrico de enlace asociado a un sistema de fusión saturado fijado.

La demostración de este resultado depende de la clasificación de los grupos simples finitos.

Sistemas de fusión abstractos

Sistemas céntricos de enlace (abstractos) : Siguiendo el modelo de los grupos finitos, se definen sistemas céntricos de enlace (abstractos) asociados a sistemas de fusion (abstractos). Axioms

Definición

Un grupo p-local finito es una tripleta

$$(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$$

donde S es un p-grupo finito, $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre S y $\mathcal{L}$ un sistema de enlace asociado a $\mathcal{F}$. Además, se define su espacio clasificador como la p-compleción del nervio de la categoría $\mathcal{L}$: $|\mathcal{L}|_p^\wedge$.

Levi-Oliver (2002): La estructura 2-local de Solomon sobre $\mathrm{Spin}_7(q)$ determina un grupo 2-local finito con espacio clasificador homotópicamente equivalente al espacio definido por Benson, $B\mathrm{Sol}(q)$.

Chermak (2013): Existe un único sistema céntrico de enlace asociado a un sistema de fusión saturado fijado.

La demostración de este resultado depende de la clasificación de los grupos simples finitos.

Sistemas de fusión abstractos

Sistemas céntricos de enlace (abstractos) : Siguiendo el modelo de los grupos finitos, se definen sistemas céntricos de enlace (abstractos) asociados a sistemas de fusion (abstractos). Axioms

Definición

Un grupo p-local finito es una tripleta

$$(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$$

donde S es un p-grupo finito, $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre S y $\mathcal{L}$ un sistema de enlace asociado a $\mathcal{F}$. Además, se define su espacio clasificador como la p-compleción del nervio de la categoría $\mathcal{L}$: $|\mathcal{L}|_p^\wedge$.

Levi-Oliver (2002): La estructura 2-local de Solomon sobre $\mathrm{Spin}_7(q)$ determina un grupo 2-local finito con espacio clasificador homotópicamente equivalente al espacio definido por Benson, $B\mathrm{Sol}(q)$.

Chermak (2013): Existe un único sistema céntrico de enlace asociado a un sistema de fusión saturado fijado.

La demostración de este resultado depende de la clasificación de los grupos simples finitos.

Sistemas de fusión abstractos

Algunos ejemplos de sistemas de fusión exóticos:

1. Para $p = 2$ la familía de sistemas de fusión de Solomon son los únicos casos (simles) conocidos.
2. [Ruiz-Viruel] Clasificación de sistemas de fusión saturados sobre los grupos extraespeciales de orden p^3 y exponente p, (para primos p impares): Entre estos hay exactamente tres casos exóticos que aparecen para $p = 7$.
3. [Diaz-Ruiz-Viruel] Clasificación de sistemas de fusión saturados sobre p-grupos finitos de rango 2. Aparecen nuevos ejemplos exóticos para $p = 3$.
4. [B-Møller] Construcción de espacios clasificadores de nuevos casos exóticos: $BX(m, r, n)(q)$ $n \geq p$ and $r > 2$, $BX_{29}(q)$ $p = 5$, $q \equiv 1 \text{ mód } p$, and $BX_{34}(q)$, $p = 7$ and $q \equiv 1 \text{ mód } p$.
5. [Ruiz] Construcción de los sistemas exóticos $X(m, r, n)(q)$ como subsistemas de índice primo a p en sistemas de fusión de grupos lineales $GL_{mn}(\mathbb{F}_q)$.

End

Definición

Un sistema de fusión saturado $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo finito S es tame si existe un grupo finito G con $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, tal que

(I) $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_S(G)$.

(II) *el homomorfismo natural*

$$\kappa_G \colon \mathrm{Out}(G) \longrightarrow \mathrm{Out}_{\mathrm{typ}}(\mathcal{L}_S^c(G))$$

es exhaustivo y escindido.

[Andersen-Oliver-Ventura] Si $\mathcal{F}$ no es tame, entonces está relacionado con un sistema exótico, mediante una secuencia de extensiones.

Sistemas de fusión abstractos

Teorema (B-Møller-Oliver, en preparación)

Los sistemas de fusión de grupos simples finitos de tipo Lie son tame.

End

Gracias por su atención

Return

Axiomas de saturación para sistemas de fusión

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo finito S.

1. Un subgrupo $P \leq S$ es *plenamente centralizado en* $\mathcal{F}$ si $|C_S(P)| \geq |C_S(P')|$ para todo $P' \leq S$ que es $\mathcal{F}$-conjugado a P.
2. Un subgrupo $P \leq S$ es *plenamente normalizado en* $\mathcal{F}$ si $|N_S(P)| \geq |N_S(P')|$ para todo $P' \leq S$ que es $\mathcal{F}$-conjugado a P.

Definición

Un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo S es saturado si satisface las condiciones:

(I) Para todo $P \leq S$ que sea plenamente normalizado en $\mathcal{F}$, P es plenamente centralizado en $\mathcal{F}$ y $\mathrm{Aut}_S(P) \in \mathrm{Syl}_p(\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P))$.

(II) Si $P \leq S$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$ son tal que φP es plenamente centralizado, y si escribimos

$$N_\varphi = \{g \in N_S(P) \mid \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(\varphi P)\},$$

entonces existe $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(N_\varphi, S)$ tal que $\bar{\varphi}|_P = \varphi$.

Return

Sistema céntrico de enlace

Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo finito S decimos que:

- P es $\mathcal{F}$-conjugado a P' si existe un isomorfismo $\varphi\colon P \longrightarrow P'$ in $\mathcal{F}$.
- $P \leq S$ es $\mathcal{F}$-céntrico si para todo P' $\mathcal{F}$-conjugado a P se tiene $C_S(P') = Z(P')$.

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo S. Un *sistema céntrico de enlace* asociado a $\mathcal{F}$, es una categoría $\mathcal{L}$ cuyos objetos son los subgrupos $\mathcal{F}$-céntricos de S, junto a un funtor

$$\pi\colon \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F}$$

y monomorfismos "distinguidos" $P \xrightarrow{\delta_P} \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$ para cada subgrupo $\mathcal{F}$-céntrico $P \leq S$, que satisfacen las condiciones:

Sistema céntrico de enlace

(A) π es la identidad en objetos y para cada par de objetos $P, Q \in \mathcal{L}$, $Z(P)$ actúa libremente sobre $\mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(P,Q)$ por composition (después de identificar $Z(P)$ con $\delta_P(Z(P)) \leq \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$), y π induce una biyección

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(P,Q) \,/\, Z(P) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q).$$

(B) Para cada $P \leq S$, $\mathcal{F}$-céntrico y cada $g \in P$, π envía $\delta_P(g) \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$ a $c_g \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$.

(C) Para cada $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{L}}(P,Q)$ y cada $g \in P$, el siguiente en diagrama conmutativo en $\mathcal{L}$:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_P(g)"'] & Q \arrow[d, "\delta_Q(\pi(f)(g))"] \\
P \arrow[r, "f"] & Q
\end{tikzcd}$$

Return