OPERADORES TOPOLÓGICOS DIFUSOS

Carlos Orlando Ochoa Castillo y Joaquín Luna Torres

ENCUENTRO DE TOPOLOGÍA
UNIVERSIDAD DISTRITAL

mayo de 2015

Plan

- Introducción

Plan

- Introducción
- De los fundamentos de la teoría de retículos

Plan

- Introducción
- De los fundamentos de la teoría de retículos
- Operadores de interior

Plan

- Introducción
- De los fundamentos de la teoría de retículos
- Operadores de interior
- Ejemplos de operadores de interior

Plan

- Introducción
- De los fundamentos de la teoría de retículos
- Operadores de interior
- Ejemplos de operadores de interior
- Operadores de exterior

- Operadores de coborde

Plan

- Introducción
- De los fundamentos de la teoría de retículos
- Operadores de interior
- Ejemplos de operadores de interior
- Operadores de exterior
- Operadores de borde
- Operadores de coborde

Part I

Introducción

Part I

Introducción

Operadores clásicos

Existen 16 operadores topológicos conjuntistas:

Operadores clásicos

Existen 16 operadores topológicos conjuntistas:

- los 14 operadores de Kuratowski

Operadores clásicos

Existen 16 operadores topológicos conjuntistas:

- los 14 operadores de Kuratowski
- 2 más estudiados en Colombia en los años 90 del siglo pasado.

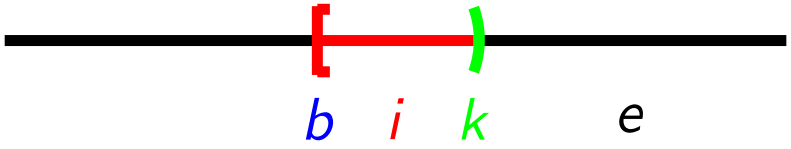
Operadores clásicos

Existen 16 operadores topológicos conjuntistas:

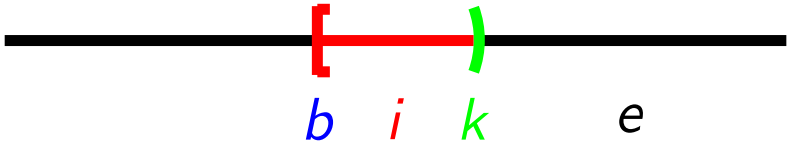
- los 14 operadores de Kuratowski
- 2 más estudiados en Colombia en los años 90 del siglo pasado.

Es interesante notar que estos operadores forman un álgebra de Boole, como se describe a continuación:

$$A = [0, 1)$$

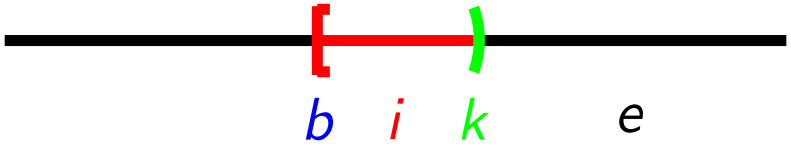


$$A = [0, 1)$$



$$C_{\emptyset}$$

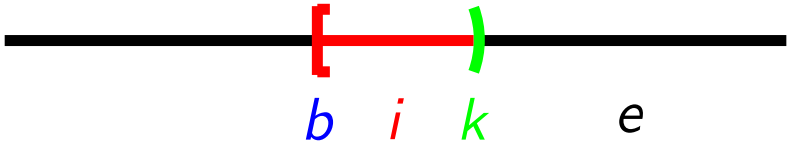
$$A = [0, 1)$$



$b \qquad i \qquad k \qquad e$

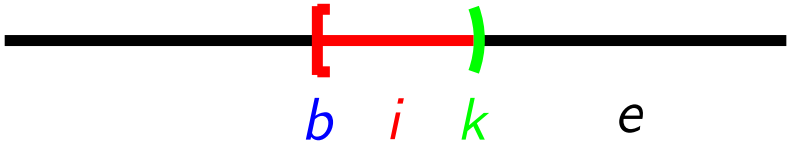
$$C_{\emptyset}$$

$$A = [0, 1)$$



$$\begin{tikzcd}
b & i & k & & e \\
 & & C_\emptyset \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

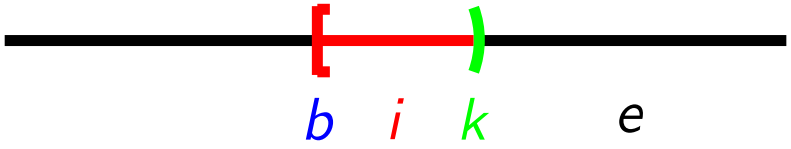
$$A = [0, 1)$$



$$1_X \qquad f \qquad ch \qquad h \qquad cf \qquad c$$

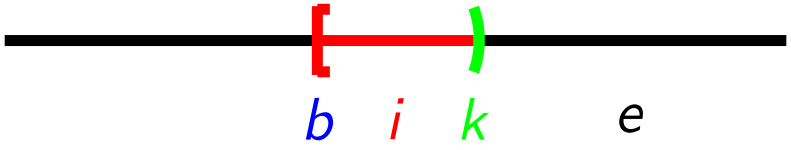
$$\begin{tikzcd}
b & i & k & e \\
 & & C_\emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$A = [0, 1)$$



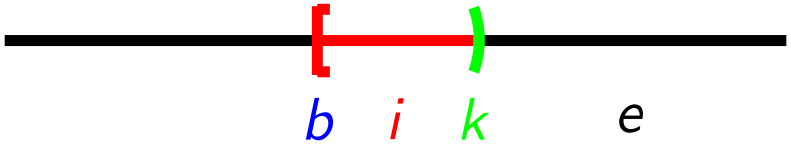
$$\begin{tikzcd}
1_X & f & ch & h & cf & c \\
 & b \arrow[ul] \arrow[ul] & i \arrow[ull] & k & e & \\
 & & C_\emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

$$A = [0, 1)$$



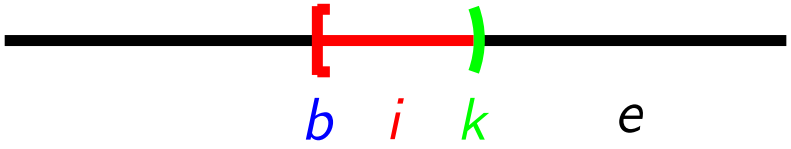
$$\begin{tikzcd}
1_X & f & ch & h & cf & c \\
 & b \arrow[ul, two heads] \arrow[u] & i \arrow[ull] & k \arrow[ull] \arrow[ul] & e & \\
 & & & C_\emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] &
\end{tikzcd}$$

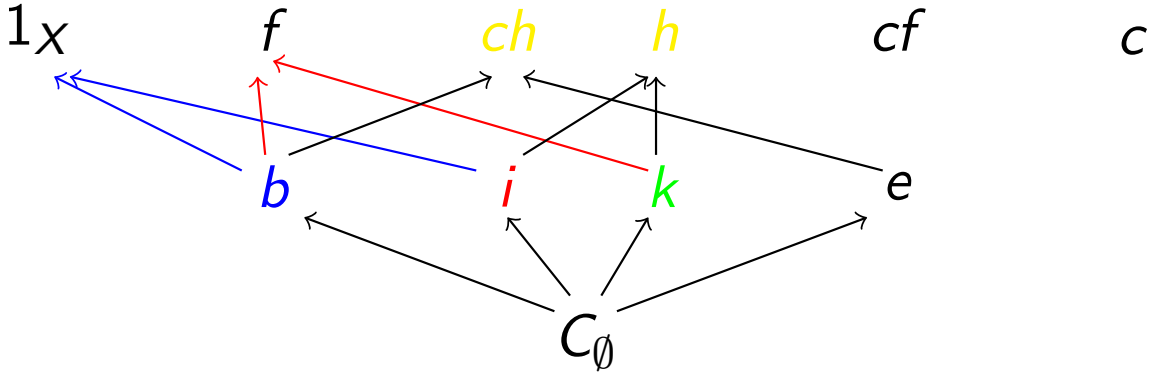
$$A = [0, 1)$$



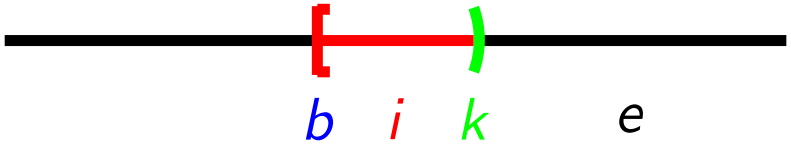
$$\begin{tikzcd}
1_X & f & ch & h & cf & c \\
 & b \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & i \arrow[ull] & k \arrow[ull] \arrow[ul] & e \arrow[ull] \arrow[ul] & \\
 & & C_\emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

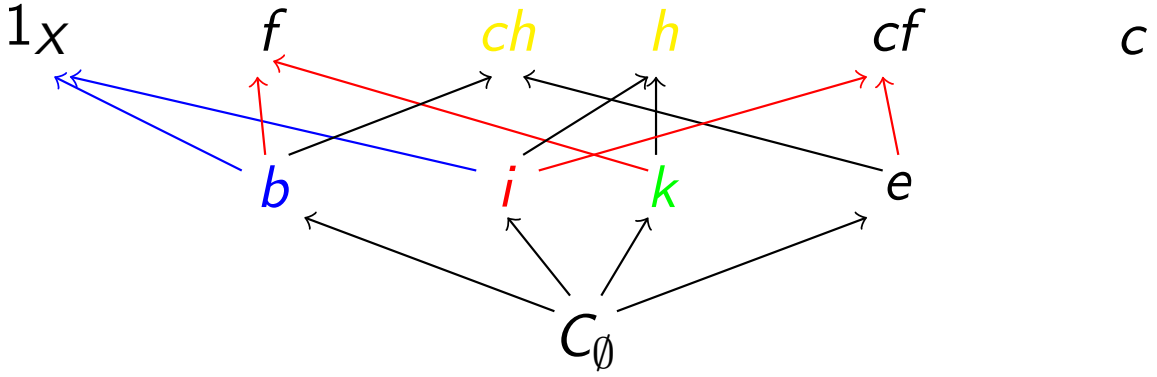
$$A = [0, 1)$$



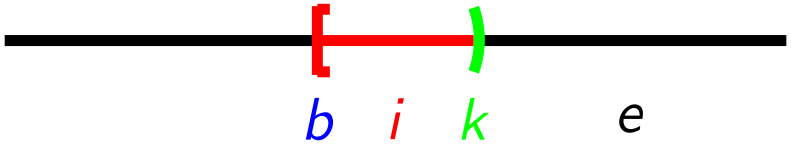


$$A = [0, 1)$$



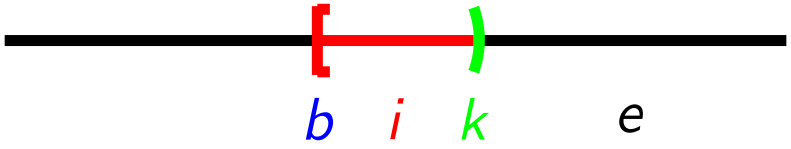


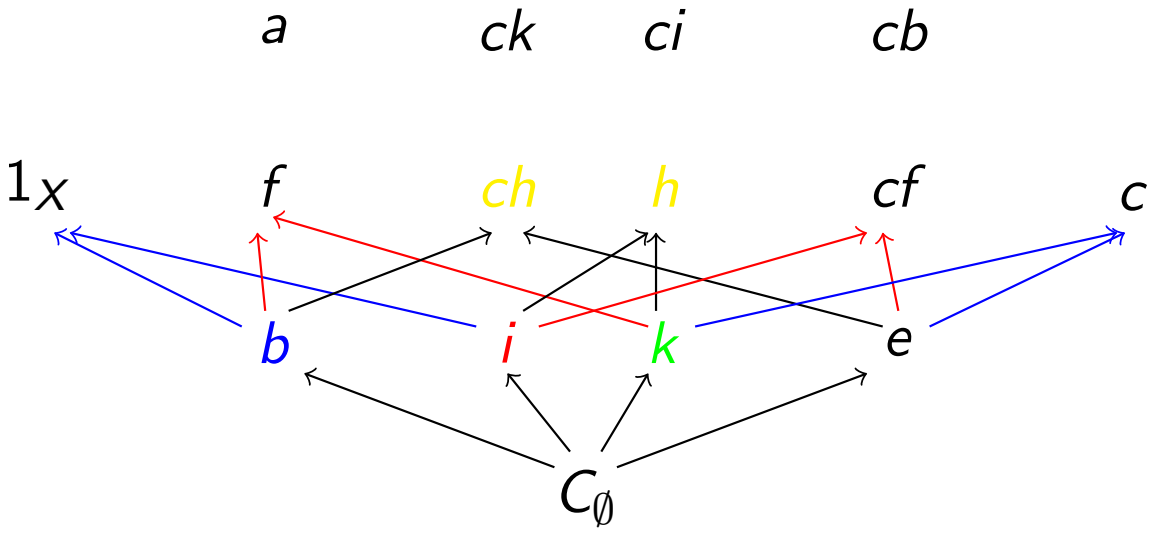
$$A = [0, 1)$$



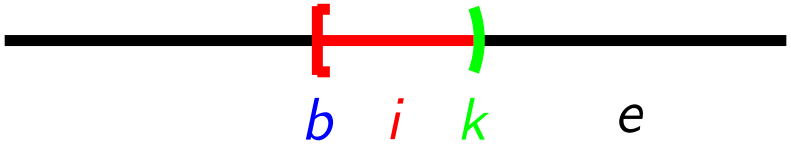
$$\begin{tikzcd}
1_X & f & ch & h & cf & c \\
 & b \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & i \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & k \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & e \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & \\
 & & C_\emptyset \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}$$

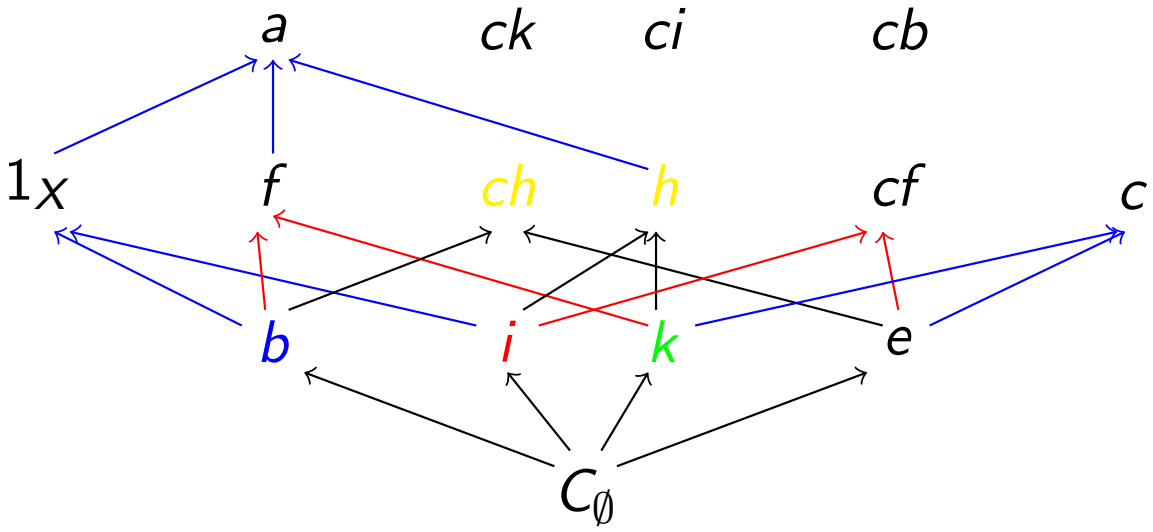
$$A = [0, 1)$$



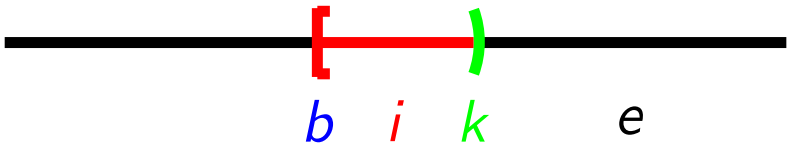


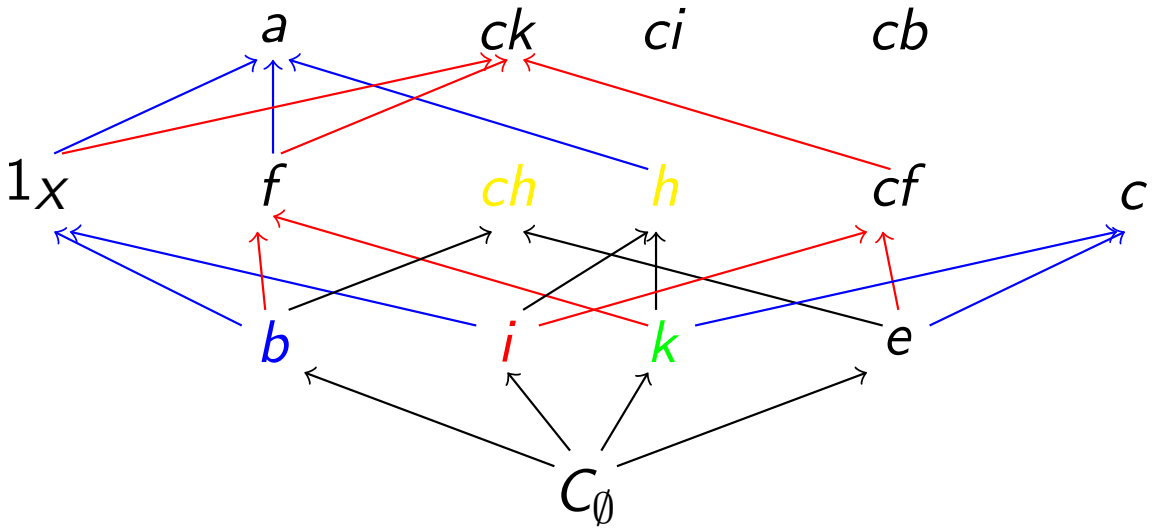
$A = [0, 1)$



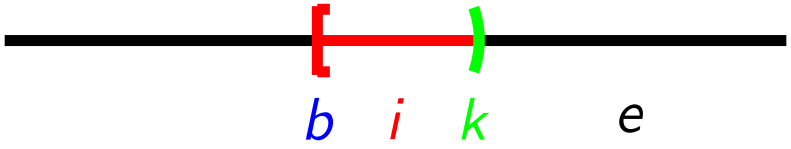


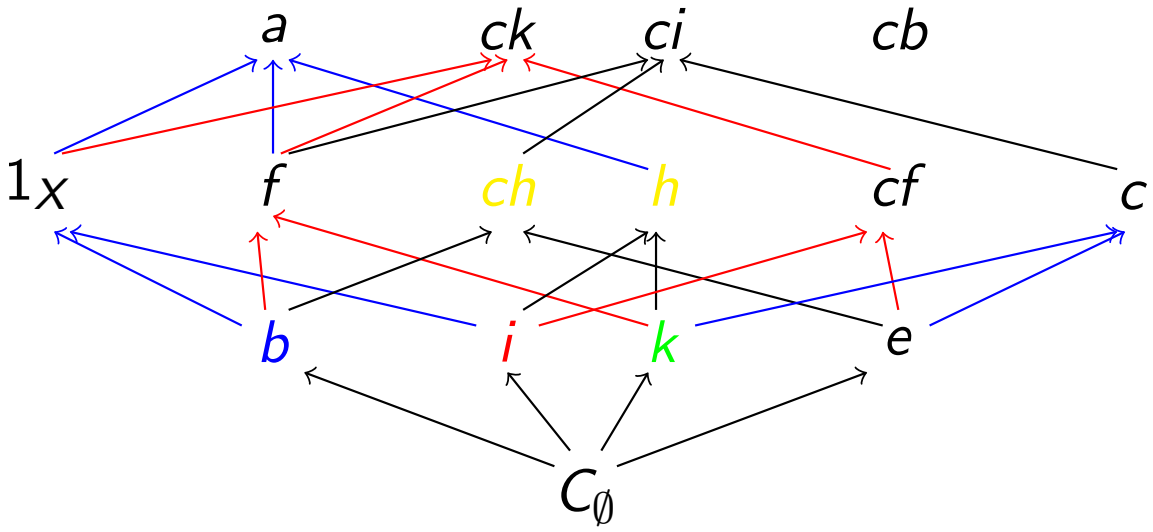
$A = [0, 1)$



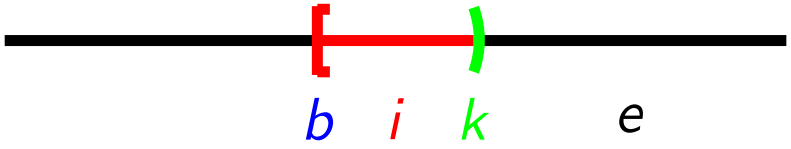


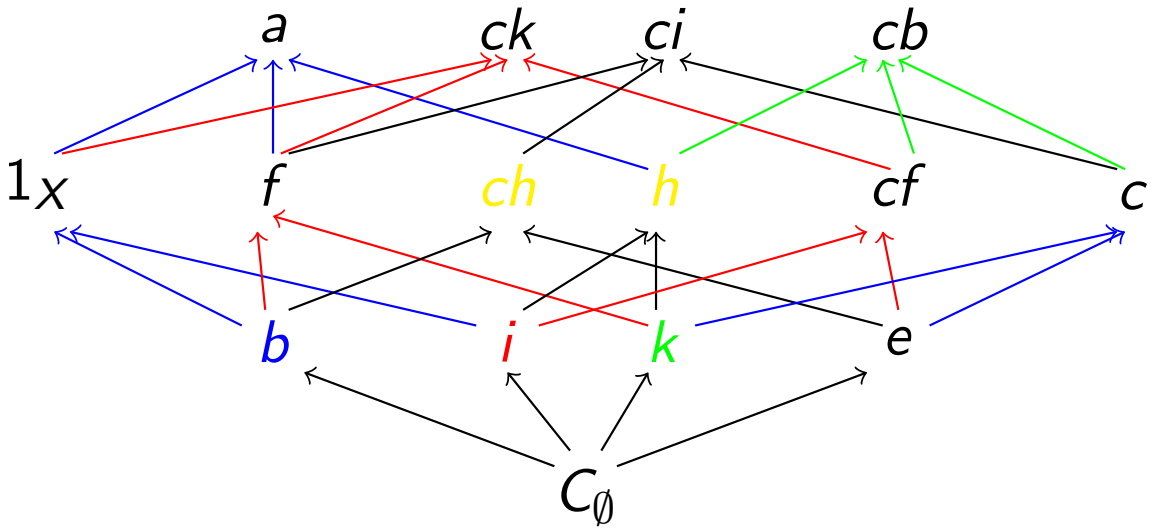
$$A = [0, 1)$$



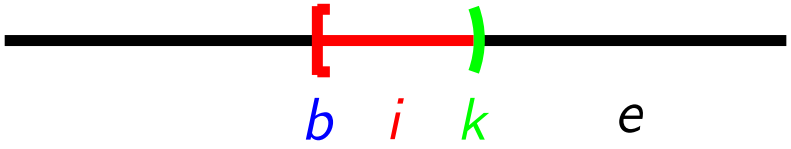


$$A = [0, 1)$$

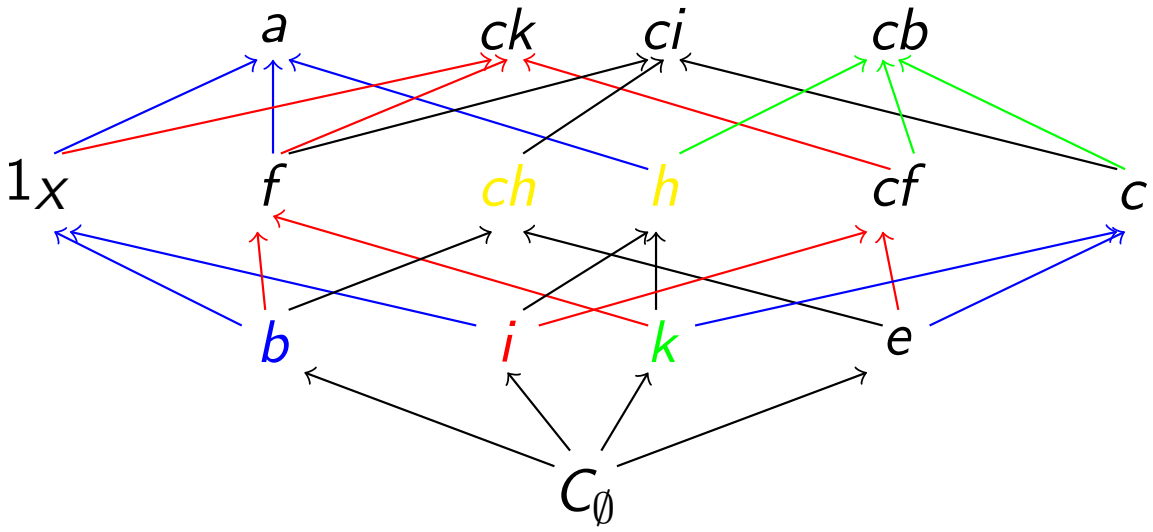




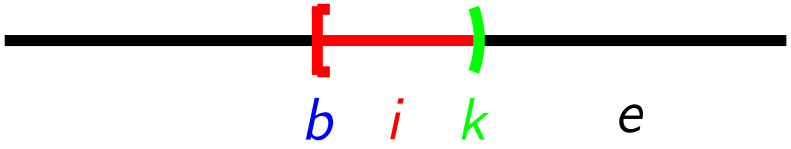
$$A = [0, 1)$$

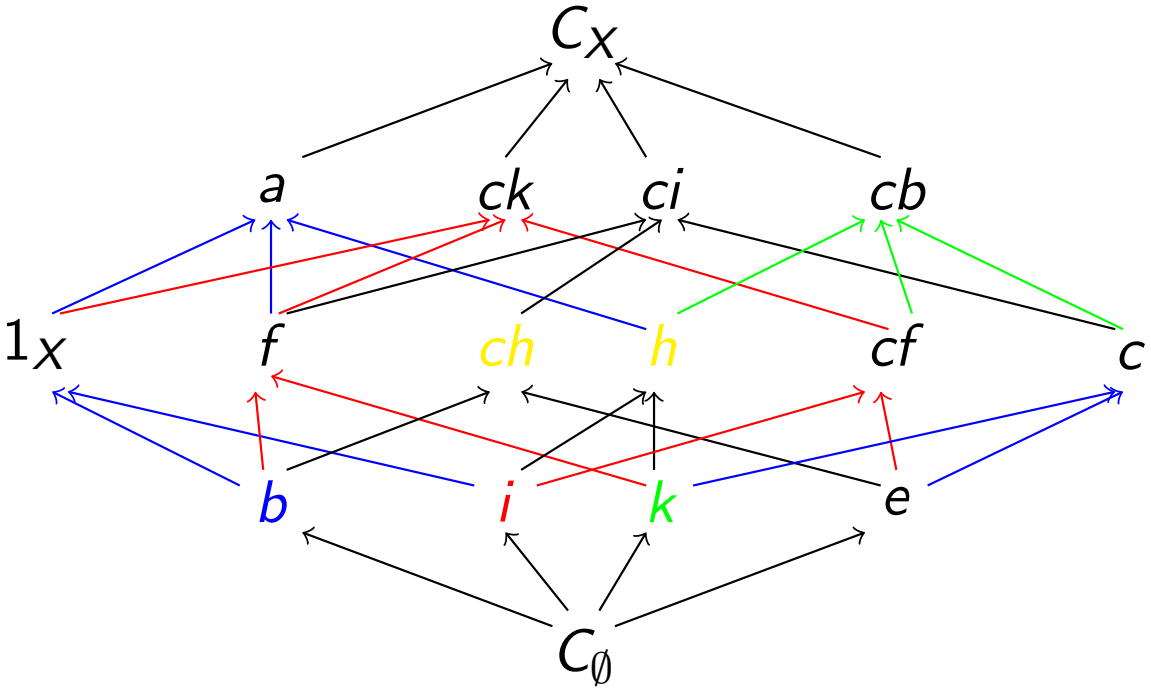


$$C_X$$



$A = [0, 1)$





En esta charla nos proponemos presentar algunas propiedades de los operadores de interior, exterior, borde y coborde en un ambiente de conjuntos difusos (fuzzy) de base variable.

En esta charla nos proponemos presentar algunas propiedades de los operadores de interior, exterior, borde y coborde en un ambiente de conjuntos difusos (fuzzy) de base variable.

La elección de tales operadores se hace teniendo en cuenta que, en topología conjuntista, ellos generan un álgebra de Boole.

En esta charla nos proponemos presentar algunas propiedades de los operadores de interior, exterior, borde y coborde en un ambiente de conjuntos difusos (fuzzy) de base variable.

La elección de tales operadores se hace teniendo en cuenta que, en topología conjuntista, ellos generan un álgebra de Boole.

Esto no sucede en el caso que discutiremos, pues ahora la lógica intrínsica es intuicionista (la doble negación no equivale a una afirmación).

Part II

De los fundamentos de la teoría de retículos

Retículos completos

Sea $(L, \leq)$ un retículo completo e infinitamente distributivo, i.e. $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada subconjunto $A \subset L$ están definidos los extremos superior $\bigvee A$ e inferior $\bigwedge A$, además

Retículos completos

Sea $(L, \leq)$ un retículo completo e infinitamente distributivo, i.e. $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada subconjunto $A \subset L$ están definidos los extremos superior $\bigvee A$ e inferior $\bigwedge A$, además

$$(\bigvee A) \wedge \alpha = \bigvee \{a \wedge \alpha) \mid a \in A\}$$

Retículos completos

Sea $(L, \leq)$ un retículo completo e infinitamente distributivo, i.e. $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada subconjunto $A \subset L$ están definidos los extremos superior $\bigvee A$ e inferior $\bigwedge A$, además

$$(\bigvee A) \wedge \alpha = \bigvee \{a \wedge \alpha) \mid a \in A\}$$

y

$$(\bigwedge A) \vee \alpha = \bigwedge \{a \vee \alpha) \mid a \in A\}$$

Retículos completos

Sea $(L, \leq)$ un retículo completo e infinitamente distributivo, i.e. $(L, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada subconjunto $A \subset L$ están definidos los extremos superior $\bigvee A$ e inferior $\bigwedge A$, además

$$(\bigvee A) \wedge \alpha = \bigvee \{a \wedge \alpha) \mid a \in A\}$$

y

$$(\bigwedge A) \vee \alpha = \bigwedge \{a \vee \alpha) \mid a \in A\}$$

para todo $\alpha \in L$. En particular, $\bigvee L = \top$ y $\bigwedge L = \bot$ son, respectivamente, las cotas universales superior e inferior de L. Asumimos que $\bot \neq \top$, i.e. L tiene al menos dos elementos.

Retículos completos cuasi-monoides

La definición de retículo completo cuasi-monoide introducida por S. E. Rodabaugh en [6] es la siguiente:

Retículos completos cuasi-monoides

La definición de retículo completo cuasi-monoide introducida por S. E. Rodabaugh en [6] es la siguiente: Un $cqm-$lattice (abreviatura de retículo completo cuasi-monoide) es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface las siguientes propiedades

Retículos completos cuasi-monoides

La definición de retículo completo cuasi-monoide introducida por S. E. Rodabaugh en [6] es la siguiente: Un $cqm-$lattice (abreviatura de retículo completo cuasi-monoide) es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface las siguientes propiedades

(1) $(L, \leqslant)$ es un retículo completo con cota superior $\top$ y cota inferior $\perp$.

Retículos completos cuasi-monoides

La definición de retículo completo cuasi-monoide introducida por S. E. Rodabaugh en [6] es la siguiente: Un $cqm-$lattice (abreviatura de retículo completo cuasi-monoide) es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface las siguientes propiedades

(1) $(L, \leqslant)$ es un retículo completo con cota superior $\top$ y cota inferior $\perp$.

(2) $\otimes : L \times L \to L$ es una operación binaria que cumple los siguientes axiomas:

Retículos completos cuasi-monoides

La definición de retículo completo cuasi-monoide introducida por S. E. Rodabaugh en [6] es la siguiente: Un $cqm-$lattice (abreviatura de retículo completo cuasi-monoide) es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface las siguientes propiedades

(1) $(L, \leqslant)$ es un retículo completo con cota superior $\top$ y cota inferior $\perp$.

(2) $\otimes : L \times L \to L$ es una operación binaria que cumple los siguientes axiomas:

(2.1) $\otimes$ es monótona en ambos argumentos, i.e. $\alpha_1 \leqslant \alpha_2, \ \beta_1 \leqslant \beta_2$ implica $\alpha_1 \otimes \beta_1 \leqslant \alpha_2 \otimes \beta_2$;

Retículos completos cuasi-monoides

La definición de retículo completo cuasi-monoide introducida por S. E. Rodabaugh en [6] es la siguiente: Un $cqm-$lattice (abreviatura de retículo completo cuasi-monoide) es una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ que satisface las siguientes propiedades

(1) $(L, \leqslant)$ es un retículo completo con cota superior $\top$ y cota inferior $\perp$.

(2) $\otimes : L \times L \to L$ es una operación binaria que cumple los siguientes axiomas:

(2.1) $\otimes$ es monótona en ambos argumentos, i.e. $\alpha_1 \leqslant \alpha_2, \ \beta_1 \leqslant \beta_2$ implica $\alpha_1 \otimes \beta_1 \leqslant \alpha_2 \otimes \beta_2$;

(2.2) $\top$ es idempotente, i.e. $\top \otimes \top = \top$.

La categoría *CQML*

La categoría *CQML* se compone de los siguientes datos:

La categoría *CQML*

La categoría *CQML* se compone de los siguientes datos:

(a) **Objetos**: $cqm-$lattices.

La categoría *CQML*

La categoría *CQML* se compone de los siguientes datos:

(a) **Objetos**: *cqm*−lattices.

(b) **Morfismos**: Todos los morfismos conjuntisitas entre dichos objetos, que conserven $\otimes$, $\top$ y $\bigvee$ arbitrarios.

La categoría *CQML*

La categoría *CQML* se compone de los siguientes datos:

(a) **Objetos**: *cqm*−lattices.

(b) **Morfismos**: Todos los morfismos conjuntisitas entre dichos objetos, que conserven $\otimes$, $\top$ y $\bigvee$ arbitrarios.

(c) La composición y las identidades de *SET*.

La categoría *CQML*

La categoría *CQML* se compone de los siguientes datos:

(a) **Objetos**: $cqm-$lattices.

(b) **Morfismos**: Todos los morfismos conjuntisitas entre dichos objetos, que conserven $\otimes$, $\top$ y $\bigvee$ arbitrarios.

(c) La composición y las identidades de *SET*.

La categoría *LOQML* es la categoría dual de *CQML*, i.e. $LOQML = CQML^{op}$.

GL-monoides

Un $GL-$monoide (ver [3]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria adicional $\otimes$, i.e. es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ tal que:

GL-monoides

Un $GL-$monoide (ver [3]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria adicional $\otimes$, i.e. es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, conmutativa y asociativa;

GL-monoides

Un $GL-$monoide (ver [3]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria adicional $\otimes$, i.e. es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, conmutativa y asociativa;

(2) $(L, \leq, \otimes)$ es esencial, i.e. $\top$ actúa como la unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

GL-monoides

Un $GL-$monoide (ver [3]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria adicional $\otimes$, i.e. es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, conmutativa y asociativa;

(2) $(L, \leq, \otimes)$ es esencial, i.e. $\top$ actúa como la unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

(3) $\perp$ actúa como elemento cero in $(L, \leq, \otimes)$, i.e. $\alpha \otimes \perp = \perp$, $\forall \alpha \in L$;

GL-monoides

Un $GL-$monoide (ver [3]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria adicional $\otimes$, i.e. es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, conmutativa y asociativa;

(2) $(L, \leq, \otimes)$ es esencial, i.e. $\top$ actúa como la unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

(3) $\perp$ actúa como elemento cero in $(L, \leq, \otimes)$, i.e. $\alpha \otimes \perp = \perp$, $\forall \alpha \in L$;

(4) $\otimes$ es distributiva respecto a extremos superiores arbitrarios, i.e. $\alpha \otimes (\bigvee_\lambda \beta_\lambda) = \bigvee_\lambda (\alpha \otimes \beta_\lambda)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_\lambda : \lambda \in I\} \subset L$;

GL-monoides

Un $GL-$monoide (ver [3]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria adicional $\otimes$, i.e. es una tripleta $(L, \leq, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, conmutativa y asociativa;

(2) $(L, \leq, \otimes)$ es esencial, i.e. $\top$ actúa como la unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

(3) $\perp$ actúa como elemento cero in $(L, \leq, \otimes)$, i.e. $\alpha \otimes \perp = \perp$, $\forall \alpha \in L$;

(4) $\otimes$ es distributiva respecto a extremos superiores arbitrarios, i.e. $\alpha \otimes (\bigvee_\lambda \beta_\lambda) = \bigvee_\lambda (\alpha \otimes \beta_\lambda)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_\lambda : \lambda \in I\} \subset L$;

(5) $(L, \leq, \otimes)$ es divisible, i.e. $\alpha \leq \beta$ implica la existencia de $\gamma \in L$ de manera que $\alpha = \beta \otimes \gamma$.

Todo $GL-$monoide es exponencial, i.e. existe otra operación binaria "$\longmapsto$" (implicación) en L que satisface la condición:

Todo $GL-$monoide es exponencial, i.e. existe otra operación binaria "$\longmapsto$" (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leq \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leq (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

Todo $GL-$monoide es exponencial, i.e. existe otra operación binaria "$\longmapsto$" (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leq \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leq (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

Explícitamente, la implicación o exponencial está dada por

Todo $GL-$monoide es exponencial, i.e. existe otra operación binaria "$\longmapsto$" (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leq \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leq (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

Explícitamente, la implicación o exponencial está dada por

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee \{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda \leq \beta\}.$$

Todo $GL-$monoide es exponencial, i.e. existe otra operación binaria "$\longmapsto$" (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leq \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leq (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

Explícitamente, la implicación o exponencial está dada por

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee \{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda \leq \beta\}.$$

Si X es un conjunto y L es un GL-monoide, entonces el conjunto potencia difuso L^X queda provisto, de manera puntual, de una estructura de GL-monoide. En particular los L-conjuntos 1_X y 0_X definidos por $1_X(x) = \top$ y $0_X(x) = \bot$ $\forall x \in X$ son, respectivamente, las cotas universales superior e inferior en L^X.

En todo $GL-$monoide existe una seudonegación:

$$\neg\alpha = \alpha \longmapsto \bot = \bigvee\{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda = \bot\}.$$

En todo $GL-$monoide existe una seudonegación:

$$\neg\alpha = \alpha \longmapsto \bot = \bigvee\{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda = \bot\}.$$

Una propiedad importante de esta seudonegación es que

$$\alpha \leq \neg\neg\alpha \quad \text{para todo} \quad \alpha \in L.$$

Hechos sobre operadores potencia

Presentamos los operadores potencia, desarrollados y justificados en detalle por S.E. Rodabaugh en [6] y en [7].

Hechos sobre operadores potencia

Presentamos los operadores potencia, desarrollados y justificados en detalle por S.E. Rodabaugh en [6] y en [7]. Sean $f \in SET(X, Y)$, $L, M \in |CQML|$, $\phi \in LOQML(L, M)$, y $\wp(X)$, $\wp(Y)$, L^X, M^Y los operadores potencia clásicos de X y de Y, la L-potencia de X y la M-potencia de Y, respectivamente. Se definen los siguiente operadores:

Hechos sobre operadores potencia

Presentamos los operadores potencia, desarrollados y justificados en detalle por S.E. Rodabaugh en [6] y en [7]. Sean $f \in SET(X, Y)$, $L, M \in |CQML|$, $\phi \in LOQML(L, M)$, y $\wp(X)$, $\wp(Y)$, L^X, M^Y los operadores potencia clásicos de X y de Y, la L-potencia de X y la M-potencia de Y, respectivamente. Se definen los siguiente operadores:

1. $f^{\rightarrow} : \wp(X) \rightarrow \wp(Y)$ por $f^{\rightarrow}(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

Hechos sobre operadores potencia

Presentamos los operadores potencia, desarrollados y justificados en detalle por S.E. Rodabaugh en [6] y en [7]. Sean $f \in SET(X, Y)$, $L, M \in |CQML|$, $\phi \in LOQML(L, M)$, y $\wp(X)$, $\wp(Y)$, L^X, M^Y los operadores potencia clásicos de X y de Y, la L-potencia de X y la M-potencia de Y, respectivamente. Se definen los siguiente operadores:

1. $f^{\rightarrow} : \wp(X) \rightarrow \wp(Y)$ por $f^{\rightarrow}(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
2. $f^{\leftarrow} : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$ por $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

Hechos sobre operadores potencia

Presentamos los operadores potencia, desarrollados y justificados en detalle por S.E. Rodabaugh en [6] y en [7]. Sean $f \in SET(X, Y)$, $L, M \in |CQML|$, $\phi \in LOQML(L, M)$, y $\wp(X)$, $\wp(Y)$, L^X, M^Y los operadores potencia clásicos de X y de Y, la L-potencia de X y la M-potencia de Y, respectivamente. Se definen los siguiente operadores:

1. $f^{\rightarrow} : \wp(X) \rightarrow \wp(Y)$ por $f^{\rightarrow}(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
2. $f^{\leftarrow} : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$ por $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$
3. $f_L^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ por $f_L^{\rightarrow}(a)(y) = \bigvee_{f(x)=y} a(x)$

Hechos sobre operadores potencia

Presentamos los operadores potencia, desarrollados y justificados en detalle por S.E. Rodabaugh en [6] y en [7]. Sean $f \in SET(X, Y)$, $L, M \in |CQML|$, $\phi \in LOQML(L, M)$, y $\wp(X)$, $\wp(Y)$, L^X, M^Y los operadores potencia clásicos de X y de Y, la L-potencia de X y la M-potencia de Y, respectivamente. Se definen los siguiente operadores:

1. $f^{\rightarrow} : \wp(X) \rightarrow \wp(Y)$ por $f^{\rightarrow}(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$
2. $f^{\leftarrow} : \wp(Y) \rightarrow \wp(X)$ por $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$
3. $f_L^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ por $f_L^{\rightarrow}(a)(y) = \bigvee_{f(x)=y} a(x)$
4. $f_L^{\leftarrow} : L^Y \rightarrow L^X$ por $f_L^{\leftarrow}(b) = b \circ f$

5. ${}^*\phi : L \to M$ por ${}^*\phi(\alpha) = \bigwedge\{\beta \in M \mid \alpha \leqslant \phi^{op}(\beta)\}$

5. ${}^*\phi : L \to M$ por ${}^*\phi(\alpha) = \bigwedge\{\beta \in M \mid \alpha \leqslant \phi^{op}(\beta)\}$
6. $\langle {}^*\phi \rangle : L^X \to M^X$ por $\langle {}^*\phi \rangle(a) = {}^*\phi \circ a$

5. ${}^*\phi : L \to M$ por ${}^*\phi(\alpha) = \bigwedge\{\beta \in M \mid \alpha \leqslant \phi^{op}(\beta)\}$
6. $\langle {}^*\phi \rangle : L^X \to M^X$ por $\langle {}^*\phi \rangle(a) = {}^*\phi \circ a$
7. $\langle \phi^{op} \rangle : M^X \to L^X$ por $\langle \phi^{op} \rangle(b) = \phi^{op} \circ b$

5. ${}^*\phi : L \to M$ por ${}^*\phi(\alpha) = \bigwedge\{\beta \in M \mid \alpha \leqslant \phi^{op}(\beta)\}$
6. $\langle {}^*\phi \rangle : L^X \to M^X$ por $\langle {}^*\phi \rangle(a) = {}^*\phi \circ a$
7. $\langle \phi^{op} \rangle : M^X \to L^X$ por $\langle \phi^{op} \rangle(b) = \phi^{op} \circ b$
8. $(f, \Phi)^{\to} : L^X \to M^Y$ por
$(f, \Phi)^{\to}(a) = \bigwedge\{b \mid f_L^{\to}(a) \leqslant (\Phi^{op})(b)\}$,

5. ${}^*\phi : L \to M$ por ${}^*\phi(\alpha) = \bigwedge\{\beta \in M \mid \alpha \leqslant \phi^{op}(\beta)\}$
6. $\langle {}^*\phi \rangle : L^X \to M^X$ por $\langle {}^*\phi \rangle(a) = {}^*\phi \circ a$
7. $\langle \phi^{op} \rangle : M^X \to L^X$ por $\langle \phi^{op} \rangle(b) = \phi^{op} \circ b$
8. $(f, \Phi)^{\to} : L^X \to M^Y$ por $(f, \Phi)^{\to}(a) = \bigwedge\{b \mid f_L^{\to}(a) \leqslant (\Phi^{op})(b)\}$,
9. $(f, \Phi)^{\leftarrow} : M^Y \to L^X$ por $(f, \Phi)^{\leftarrow}(b) = \Phi^{op} \circ b \circ f$, en otras palabras, el diagrama

5. ${}^*\phi : L \to M$ por ${}^*\phi(\alpha) = \bigwedge\{\beta \in M \mid \alpha \leqslant \phi^{op}(\beta)\}$
6. $\langle {}^*\phi \rangle : L^X \to M^X$ por $\langle {}^*\phi \rangle(a) = {}^*\phi \circ a$
7. $\langle \phi^{op} \rangle : M^X \to L^X$ por $\langle \phi^{op} \rangle(b) = \phi^{op} \circ b$
8. $(f, \Phi)^{\to} : L^X \to M^Y$ por $(f, \Phi)^{\to}(a) = \bigwedge\{b \mid f_L^{\to}(a) \leqslant (\Phi^{op})(b)\}$,
9. $(f, \Phi)^{\leftarrow} : M^Y \to L^X$ por $(f, \Phi)^{\leftarrow}(b) = \Phi^{op} \circ b \circ f$, en otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(f,\Phi)^{\leftarrow}(b)"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ L \arrow[r, "\Phi^{op}"'] & M \end{tikzcd} \tag{1}$$

5. ${}^*\phi : L \to M$ por ${}^*\phi(\alpha) = \bigwedge\{\beta \in M \mid \alpha \leqslant \phi^{op}(\beta)\}$
6. $\langle {}^*\phi \rangle : L^X \to M^X$ por $\langle {}^*\phi \rangle(a) = {}^*\phi \circ a$
7. $\langle \phi^{op} \rangle : M^X \to L^X$ por $\langle \phi^{op} \rangle(b) = \phi^{op} \circ b$
8. $(f, \Phi)^{\to} : L^X \to M^Y$ por $(f, \Phi)^{\to}(a) = \bigwedge\{b \mid f_L^{\to}(a) \leqslant (\Phi^{op})(b)\}$,
9. $(f, \Phi)^{\leftarrow} : M^Y \to L^X$ por $(f, \Phi)^{\leftarrow}(b) = \Phi^{op} \circ b \circ f$, en otras palabras, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "(f,\Phi)^{\leftarrow}(b)"'] & Y \arrow[d, "b"] \\ L \arrow[r, "\Phi^{op}"'] & M \end{tikzcd} \tag{1}$$

es conmutativo.

Part III

Algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos con base variable

En lo que sigue utilizaremos una subcategoría $\mathcal{D}$ de $CQML$ con el fin de construir algunos operadores topológicos difusos con base variable en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son las parejas (X, L), donde X es un conjunto y L es un objeto de $\mathcal{D}$, los morfismos de (X, L) a (Y, M) son los pares de aplicaciones (f, ϕ) con $f \in SET(X, Y)$ y $\phi \in CQML(L, M)$,las identidades son $id_{(X,\,L)} = (id_X, id_L)$, y la composición se define por

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos con base variable

En lo que sigue utilizaremos una subcategoría $\mathcal{D}$ de $CQML$ con el fin de construir algunos operadores topológicos difusos con base variable en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son las parejas (X, L), donde X es un conjunto y L es un objeto de $\mathcal{D}$, los morfismos de (X, L) a (Y, M) son los pares de aplicaciones (f, ϕ) con $f \in SET(X, Y)$ y $\phi \in CQML(L, M)$,las identidades son $id_{(X,L)} = (id_X, id_L)$, y la composición se define por

$$(f, \phi) \circ (g, \psi) = (f \circ g, \phi \circ \psi).$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de interior

Definición (1)

Un operador difuso de interior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ está formado por una familia

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores difusos de interior

Definición (1)

Un operador difuso de interior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está formado por una familia* $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $i_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen:*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de interior

Definición (1)

Un operador difuso de interior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está formado por una familia* $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $i_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen:*

(I_1) *(Contracción)* $i_{XL}(u) \leqslant u \quad$ *para todo* $\quad u \in L^X$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de interior

Definición (1)

Un operador difuso de interior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está formado por una familia* $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $i_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen:*

(I_1) *(Contracción)* $i_{XL}(u) \leqslant u$ *para todo* $u \in L^X$;

(I_2) *(Monotonía) si* $u \leqslant v$ *in* L^X, *entonces* $i_{XL}(u) \leqslant i_{XL}(v)$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de interior

Definición (1)

Un operador difuso de interior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está formado por una familia* $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $i_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen:*

(I_1) *(Contracción)* $i_{XL}(u) \leqslant u$ *para todo* $u \in L^X$;

(I_2) *(Monotonía) si* $u \leqslant v$ *in* L^X, *entonces* $i_{XL}(u) \leqslant i_{XL}(v)$;

(I_3) *(Cota superior)* $i_{XL}(1_X) = 1_X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de interior

Definición (1)

Un operador difuso de interior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está formado por una familia* $I = (i_{XL})_{(X,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $i_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen:*

(I_1) *(Contracción)* $i_{XL}(u) \leqslant u$ *para todo* $u \in L^X$;

(I_2) *(Monotonía) si* $u \leqslant v$ *in* L^X, *entonces* $i_{XL}(u) \leqslant i_{XL}(v)$;

(I_3) *(Cota superior)* $i_{XL}(1_X) = 1_X$.

Definición (2)

Un I*-espacio difuso de base variable es una tripleta* (X, L, i_{XL}), *donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *y* i_{XL} *es una función de interior en* (X, L).

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de interior

Definición (1)

Un operador difuso de interior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está formado por una familia* $I = (i_{XL})_{(X,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $i_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen:*

(I_1) *(Contracción)* $i_{XL}(u) \leqslant u$ *para todo* $u \in L^X$;

(I_2) *(Monotonía) si* $u \leqslant v$ *in* L^X, *entonces* $i_{XL}(u) \leqslant i_{XL}(v)$;

(I_3) *(Cota superior)* $i_{XL}(1_X) = 1_X$.

Definición (2)

Un I*-espacio difuso de base variable es una tripleta* (X, L, i_{XL}), *donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *y* i_{XL} *es una función de interior en* (X, L).

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (3)

Un morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ *en* $SET \times \mathcal{D}$ *es* I*-continuo difuso si*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Definición (3)

Un morfismo $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *en* $SET\times\mathcal{D}$ *es* I*-continuo difuso si*

$$(f,\phi)^{\leftarrow}\big(i_{YM}(v)\big)\leqslant i_{XL}\Big((f,\phi)^{\leftarrow}(v)\Big)\ \textit{para todo}\ v\in L^{Y}. \quad (2)$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (3)

Un morfismo $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *en* $SET\times\mathcal{D}$ *es* I*-continuo difuso si*

$$(f,\phi)^{\leftarrow}\big(i_{YM}(v)\big)\leqslant i_{XL}\Big((f,\phi)^{\leftarrow}(v)\Big)\ \textit{para todo}\ v\in L^{Y}. \quad (2)$$

Proposición (4)

Considere dos morfismos I*-continuos difusos* $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *y* $(g,\psi):(Y,M)\longrightarrow(Z,N)$, *entonces el morfismo* $(g,\psi)\circ(f,\phi)$ *es* I*-continuo difuso.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (3)

Un morfismo $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *en* $SET\times\mathcal{D}$ *es* I*-continuo difuso si*

$$(f,\phi)^{\leftarrow}\big(i_{YM}(v)\big)\leqslant i_{XL}\Big((f,\phi)^{\leftarrow}(v)\Big)\ \textit{para todo}\ v\in L^{Y}. \quad (2)$$

Proposición (4)

Considere dos morfismos I*-continuos difusos* $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *y* $(g,\psi):(Y,M)\longrightarrow(Z,N)$, *entonces el morfismo* $(g,\psi)\circ(f,\phi)$ *es* I*-continuo difuso.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

En consecuencia obtenemos

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

En consecuencia obtenemos

Definición (5)

La categoría VBIO-SET cuyos objetos son las tripletas (X, L, i_{XL})*, donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *e* $i_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *es una función de interior difusa; cuyos morfismos de* (X, L, i_{XL}) *a* (Y, M, i_{YM}) *son parejas de funciones* I*-continuas difusas* $(f, \phi) : (X, L, i_{XL}) \longrightarrow (Y, M, i_{YM})$ *y cuyas identidades y composición son las de* $SET \times D$*.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de interior.

Consideremos la colección

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de interior.

Consideremos la colección

$$I\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de interior.

Consideremos la colección

$$I\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de interior en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de interior.

Consideremos la colección

$$I\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de interior en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$I \leqslant J \leftrightarrow i_X(u) \leqslant j_X(u), \text{ para todo conjunto} X$$

y para todo $u \in L^X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de interior.

Consideremos la colección

$$I\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de interior en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$I \leqslant J \leftrightarrow i_X(u) \leqslant j_X(u), \text{ para todo conjunto} X$$

y para todo $u \in L^X$. Con este orden, $I\big(SET, L\big)$ hereda la estructura de retículo de L:

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (6)

Toda familia $\left(I_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $I\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *en* $I\left(SET, L\right)$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (6)

Toda familia $\left(I_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $I\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *en* $I\left(SET, L\right)$*.El operador de interior discreto*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (6)

Toda familia $\left(I_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $I\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *en* $I\left(SET, L\right)$*.El operador de interior discreto*

$$I_D = \left(i_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \text{ con } i_{D_X}(u) = u \text{ para todo } u \in L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (6)

Toda familia $\left(I_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $I\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *en* $I\left(SET, L\right)$*.El operador de interior discreto*

$$I_D = \left(i_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \text{ con } i_{D_X}(u) = u \text{ para todo } u \in L^X$$

es el elemento máximo en $I\left(SET, L\right)$*, y el operador de interior trivial*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (6)

Toda familia $\left(I_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $I\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ *en* $I\left(SET, L\right)$*.El operador de interior discreto*

$$I_D = \left(i_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \text{ con } i_{D_X}(u) = u \text{ para todo } u \in L^X$$

es el elemento máximo en $I\left(SET, L\right)$*, y el operador de interior trivial*

$$I_T = \left(i_{T_X}\right)_{X\in|SET|} \quad \text{con} \quad \left(i_{T_X}\right)(u) = \begin{cases} 0_X \text{ para todo } u \neq 1_X \\ 1_X \text{ si } u = 1_X \end{cases}$$

es el mínimo.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

En consecuencia,

Corolario (7)

Para todo conjunto X

$$I(X) = \{i_X \mid i_X \text{ es una función de interior en } X\}$$

es un retículo completo.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores de interior iniciales con base variable

Sea (Y, M, i_{YM}) un objeto de la categoría VBIO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores de interior iniciales con base variable

Sea (Y, M, i_{YM}) un objeto de la categoría VBIO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores de interior iniciales con base variable

Sea (Y, M, i_{YM}) un objeto de la categoría VBIO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{i}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores de interior iniciales con base variable

Sea (Y, M, i_{YM}) un objeto de la categoría VBIO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{i}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{i}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ i_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{3}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores de interior iniciales con base variable

Sea (Y, M, i_{YM}) un objeto de la categoría VBIO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{i}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{i}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ i_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{3}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores de interior iniciales con base variable

Sea (Y, M, i_{YM}) un objeto de la categoría VBIO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{i}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{i}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ i_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{3}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L^X \arrow[r, "(f,\phi)_*"] \arrow[d, "\hat{i}_{XL}"'] & M^Y \arrow[d, "i_{YM}"] \\
L^X \arrow[r, "(f,\phi)^{\leftarrow}"'] & M^Y
\end{tikzcd}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (8)

$\hat{i}_{XL}$ es una función de interior difusa.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (8)

$\hat{i}_{XL}$ es una función de interior difusa.

Proposición (9)

Sea (X, L) un objeto de la categoría SET $\times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, i_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de I-espacios difusos de base variable,

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (8)

$\hat{i}_{XL}$ es una función de interior difusa.

Proposición (9)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, i_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de I-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una fmilia de morfismos en $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (8)

$\hat{i}_{XL}$ es una función de interior difusa.

Proposición (9)

Sea (X, L) un objeto de la categoría SET $\times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, i_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de I-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una fmilia de morfismos en SET $\times \mathcal{D}$. Entonces la fuente estructurada $\left[(X, L), \left((f_\lambda, \phi_\lambda), (Y_\lambda, M_\lambda)\right)\right]_{\lambda \in \Lambda}$ con respecto al functor de olvido U de VBIO-SET a SET $\times \mathcal{D}$ tiene un levantamiento inicial único $\left((X, L, \tilde{i}_{XL}) \to (Y_\lambda, M_\lambda, i_{Y_\lambda M_\lambda})\right)$, donde $\tilde{i}_{XL}$ es el extremo inferior $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\hat{i}_{XL}$ de todas las funciones de interior iniciales ${}^{\lambda}\hat{i}_{XL}$ respecto a $(f_\lambda, \phi_\lambda)$, donde $\lambda \in \Lambda$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{VBIO\text{-}SET} \arrow[d, "U"] \\ SET \times \mathcal{D} \arrow[u, dashed, no head, bend left=60] \end{tikzcd}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
 & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \\
(X, L, \quad) \arrow[ur, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & \vdots & \mathrm{VBIO\text{-}SET} \arrow[dd, "U"] \\
 & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \\
 & & SET \times \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
 & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \\
(X, L, \quad) \arrow[ur, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & \vdots & \mathrm{VBIO\text{-}SET} \arrow[dd, "U"] \\
 & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \\
 & & \\
 & (Y_\alpha, M_\alpha) & \\
(X, L) \arrow[ur, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & \vdots & SET \times \mathcal{D} \\
 & (Y_\beta, M_\beta) &
\end{tikzcd}
$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
(Z, N, i_{ZN}) & (X, L, \quad) \arrow[r, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \\
 & & \vdots & \mathrm{VBIO\text{-}SET} \arrow[dd, "U"] \\
 & & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \\
 & (X, L) \arrow[r, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha) & \\
 & & \vdots & SET \times \mathcal{D} \\
 & & (Y_\beta, M_\beta) &
\end{tikzcd}
$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
(Z, N, i_{ZN}) & (X, L, \quad) \arrow[r, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[rr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) \quad \vdots \quad (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \mathrm{VBIO\text{-}SET} \arrow[d, "U"] \\
(Z, N) & (X, L) \arrow[r, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[rr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha) \quad \vdots \quad (Y_\beta, M_\beta) & SET \times \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
(Z, N, i_{ZN}) & (X, L, \quad) \arrow[r, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[rr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & & \text{VBIO-SET} \arrow[dd, "U"] \\
 & & \vdots & & \\
 & & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & & \\
 & & & & \\
(Z, N) \arrow[r, "(g, \psi)"] \arrow[rrr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L) \arrow[r, "(f_\alpha, \phi_\alpha)"] \arrow[rr, "(f_\beta, \phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha) & & SET \times \mathcal{D} \\
 & & \vdots & & \\
 & & (Y_\beta, M_\beta) & &
\end{tikzcd}
$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
(Z, N, i_{ZN}) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[rr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L, \quad) \arrow[r, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[rr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \vdots & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \text{VBIO-SET} \arrow[d, "U"] \\
 & & & & & SET \times \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(Z, N) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[rr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L) \arrow[r, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[rr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & (Y_\alpha, M_\alpha) & \vdots & (Y_\beta, M_\beta) & SET \times \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
 & & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \\
(Z, N, i_{ZN}) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L, \tilde{i}_{XL}) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"] & \vdots & \mathrm{VBIO\text{-}SET} \arrow[d, "U"] \\
 & & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & SET \times \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (Y_\alpha, M_\alpha) & \\
(Z, N) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"] & \vdots & \\
 & & (Y_\beta, M_\beta) &
\end{tikzcd}
$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
 & & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \\
(Z, N, i_{ZN}) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L, \tilde{i}_{XL}) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & \vdots & \\
 & & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \\
 & & & \\
 & & (Y_\alpha, M_\alpha) & \\
(Z, N) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & \vdots & \\
 & & (Y_\beta, M_\beta) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
VBIO\text{-}SET \arrow[d, "U"] \\
SET \times \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$\tilde{i}_{XL} = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} {}^{\alpha}\hat{i}_{XL};$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

$$
\begin{tikzcd}
 & & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \\
(Z, N, i_{ZN}) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L, \tilde{i}_{XL}) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & \vdots & \\
 & & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \\
 & & & \\
 & & (Y_\alpha, M_\alpha) & \\
(Z, N) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & \vdots & \\
 & & (Y_\beta, M_\beta) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
VBIO\text{-}SET \arrow[d, "U"] \\
SET \times \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

$$\tilde{i}_{XL} = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} {}^{\alpha}\hat{i}_{XL};$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (7), la proposición (8) y la proposición (9), obtenemos que

Teorema (10)

La categoría concreta $(VBIO\text{-}SET, U)$ sobre $SET \times \mathcal{D}$ es una categoría topológica.

$$
\begin{tikzcd}
 & & (Y_\alpha, M_\alpha, i_{Y_\alpha M_\alpha}) & \\
(Z, N, i_{ZN}) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L, \tilde{i}_{XL}) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & \vdots & \mathrm{VBIO\text{-}SET} \arrow[dd, "U"] \\
 & & (Y_\beta, M_\beta, i_{Y_\beta M_\beta}) & \\
 & & & \\
 & & (Y_\alpha, M_\alpha) & \\
(Z, N) \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[drr, bend right, "h_\beta"'] & (X, L) \arrow[ur, "(f_\alpha,\phi_\alpha)"] \arrow[dr, "(f_\beta,\phi_\beta)"'] & \vdots & SET \times \mathcal{D} \\
 & & (Y_\beta, M_\beta) &
\end{tikzcd}
$$

$$\tilde{i}_{XL} = \bigwedge_{\alpha \in \Lambda} {}^{\alpha}\hat{i}_{XL}; \qquad {}^{\alpha}\hat{i}_{XL} = (f_\alpha, \phi_\alpha)^{\leftarrow} \circ i_{Y_\alpha M_\alpha} \circ (Y_\alpha, M_\alpha)_*$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Definición (11)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$ *de la definición (2) es idempotente si se cumple que*

$$i_{XL}\big(i_{XL}(u)\big) = i_{XL}(u) \quad \textit{para todo} \quad u \in L^X$$

y para toda pareja $(X, L) \in |SET \times \mathcal{D}|$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Definición (11)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$ *de la definición (2) es idempotente si se cumple que*

$$i_{XL}\big(i_{XL}(u)\big) = i_{XL}(u) \quad \textit{para todo} \quad u \in L^X$$

y para toda pareja $(X, L) \in |SET \times \mathcal{D}|$.

Proposición (12)

Sea $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$ *un operador de interior idempotente. Entonces el operador de interior inicial* $\hat{I} = (\hat{i}_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$, *definido por*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Definición (11)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$ *de la definición (2) es idempotente si se cumple que*

$$i_{XL}\big(i_{XL}(u)\big) = i_{XL}(u) \quad \textit{para todo} \quad u \in L^X$$

y para toda pareja $(X, L) \in |SET \times \mathcal{D}|$.

Proposición (12)

Sea $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$ *un operador de interior idempotente. Entonces el operador de interior inicial* $\hat{I} = (\hat{i}_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$, *definido por*

$$\hat{i}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ i_{YM} \circ (f, \phi)_{*},$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Definición (11)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$ *de la definición (2) es idempotente si se cumple que*

$$i_{XL}\big(i_{XL}(u)\big) = i_{XL}(u) \quad \textit{para todo} \quad u \in L^X$$

y para toda pareja $(X, L) \in |SET \times \mathcal{D}|$.

Proposición (12)

Sea $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$ *un operador de interior idempotente. Entonces el operador de interior inicial* $\hat{I} = (\hat{i}_{XL})_{(X,\,L)\,\in\,|SET\,\times\,\mathcal{D}|}$, *definido por*

$$\hat{i}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ i_{YM} \circ (f, \phi)_{*},$$

para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ *in* $SET \times \mathcal{D}$, *también es idempotente.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (13)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de la definición (1) se denomina*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Definición (13)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de la definición (1) se denomina*

1. *productivo si se cumple la condición*

$$i_{XL}(u \wedge v) = i_{XL}(u) \wedge i_{XL}(v) \quad \textit{para todo } u, v \in L^X$$

y para todo conjunto X.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (13)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de la definición (1) se denomina*

1. *productivo si se cumple la condición*

$$i_{XL}(u \wedge v) = i_{XL}(u) \wedge i_{XL}(v) \quad \textit{para todo } u, v \in L^X$$

   y para todo conjunto X.

2. *Totalmente productivo, si se cumple que*

$$i_{XL}\Big(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda\Big) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} i_{XL}(u_\lambda)$$

   para todo $\{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq L^X$ *y para todo conjunto* X.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (13)

El operador de interior $I = (i_{XL})_{(X,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de la definición (1) se denomina*

1. *productivo si se cumple la condición*

$$i_{XL}(u \wedge v) = i_{XL}(u) \wedge i_{XL}(v) \quad \textit{para todo } u, v \in L^X$$

   y para todo conjunto X.

2. *Totalmente productivo, si se cumple que*

$$i_{XL}\Big(\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda\Big) = \bigwedge_{\lambda\in\Lambda} i_{XL}(u_\lambda)$$

   para todo $\{u_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq L^X$ *y para todo conjunto* X.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (14)

Sea $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *un operador deinterior totalmente productivo. Entonces el operador de interiro inicial* $\hat{I} = (\hat{i}_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *definido por*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (14)

Sea $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *un operador deinterior totalmente productivo. Entonces el operador de interiro inicial* $\hat{I} = (\hat{i}_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *definido por*

$$\hat{i}_{XL} = (f,\phi)^{\leftarrow} \circ i_{YM} \circ (f,\phi)_{*}$$

para cada morfismo $(f,\phi) : (X,L) \to (Y,M)$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (14)

Sea $I = (i_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *un operador deinterior totalmente productivo. Entonces el operador de interiro inicial* $\hat{I} = (\hat{i}_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *definido por*

$$\hat{i}_{XL} = (f,\phi)^{\leftarrow} \circ i_{YM} \circ (f,\phi)_{*}$$

para cada morfismo $(f,\phi) : (X,L) \to (Y,M)$ *también es totalmente productivo.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Conjuntos abiertos difusos

Definición (15)

Un subconjunto L-difuso u de X es I-abierto en (X, L) si es igual a su interior, i.e, $i_{XL}(u) = u$. La condición de I-continuidad difusa (9) implica que la propiedad de ser I-abierto se preserva por imagenes inversas.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Conjuntos abiertos difusos

Definición (15)

Un subconjunto L-difuso u de X es I-abierto en (X, L) si es igual a su interior, i.e, $i_{XL}(u) = u$. La condición de I-continuidad difusa (9) implica que la propiedad de ser I-abierto se preserva por imagenes inversas.

Proposición (16)

Sea $(f, \phi) : (X, L, c_{XL}) \longrightarrow (Y, M, c_{YM})$ un morfismo en en VBIO-SET. Si $v \in M^Y$ es I-abierto entonces $(f, \phi)^{\leftarrow}(v)$ es i-abierto en (X, L).

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Conjuntos abiertos difusos

Definición (15)

Un subconjunto L-difuso u de X es I-abierto en (X, L) si es igual a su interior, i.e, $i_{XL}(u) = u$. La condición de I-continuidad difusa (9) implica que la propiedad de ser I-abierto se preserva por imagenes inversas.

Proposición (16)

Sea $(f, \phi) : (X, L, c_{XL}) \longrightarrow (Y, M, c_{YM})$ un morfismo en en VBIO-SET. Si $v \in M^Y$ es I-abierto entonces $(f, \phi)^{\leftarrow}(v)$ es i-abierto en (X, L).

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Morfismos I-abiertos

Definición (17)

Un morfismo $(f, \phi) : (X, L, i_{XL}) \longrightarrow (Y, M, i_{YM})$ *entre* I*-espacios difusos de base variable es* I*-abierto si*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Morfismos I-abiertos

Definición (17)

Un morfismo $(f,\phi):(X,L,i_{XL})\longrightarrow(Y,M,i_{YM})$ *entre* I*-espacios difusos de base variable es* I*-abierto si*

$$i_{XL}\Big((f,\phi)^{\leftarrow}(v)\Big)\leq(f,\phi)^{\leftarrow}\big(i_{YM}(v)\big)\ \textit{para todo}\ v\in L^{Y}. \quad (4)$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Morfismos I-abiertos

Definición (17)

Un morfismo $(f,\phi):(X,L,i_{XL})\longrightarrow(Y,M,i_{YM})$ *entre* I*-espacios difusos de base variable es* I*-abierto si*

$$i_{XL}\Big((f,\phi)^{\leftarrow}(v)\Big)\leq(f,\phi)^{\leftarrow}\big(i_{YM}(v)\big)\ \textit{para todo}\ v\in L^{Y}. \quad (4)$$

Proposición (18)

Sean $(f,\phi):(X,L,i_{XL})\longrightarrow(Y,M,i_{YM})$ *y* $(g,\psi):(Y,M,i_{YM})\longrightarrow(Z,N,i_{ZN})$ *dos morfismos* I*-abiertos, entonces el morfismo* $(f,\phi)\circ(g,\psi)$ *es* I*-abierto.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Si reemplazamos en la categoría VBIO-SET los morfismos I-continuos difusos por morfismos I-abiertos, obtenemos otra categoría topológica.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Si reemplazamos en la categoría VBIO-SET los morfismos I-continuos difusos por morfismos I-abiertos, obtenemos otra categoría topológica. Los morfismos $(f, \phi) : (X, L, i_{XL}) \longrightarrow (Y, M, i_{YM})$ entre I-espacios difusos de base variable que son biyectivos, I-continuos difusos e I-abiertos, forman un grupo. Podemos afirmar que una manera de abordar la topología difusa de base variable es estudiando los invariantes bajo la acción de estos grupos sobre la categoría $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Sea $L = [0, 1]$ el intervalo unitario considerado como subconjunto ordenado de los números reales $\mathbb{R}$, así como un retículo completo (no complementado).

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Sea $L = [0, 1]$ el intervalo unitario considerado como subconjunto ordenado de los números reales $\mathbb{R}$, así como un retículo completo (no complementado).

(i) Para cada espacio topológico X, definimos $i_X : L^X \to L^X$ por

$$i_X(u) = \bigvee \{v \in L^X \mid v \leqslant u \quad \text{es semicontinua inferior}\}.$$

Es claro que la familia $I = (i_X)_{X \in |TOP|}$ es un operador de interior difuso en la categoría TOP. Puesto que los puntos fijos de la restricción de i_X a 2^X produce los subconjuntos abiertos de X, este operador es una extensión del interior usual en TOP.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

(ii) para cada espacio topológico compacto Y, definimos $j_Y : L^Y \to L^Y$ por $j_Y(v) = m_v$, donde m_v es la función constante en L^Y cuyo valor es $m_v = \min\{v(y) \mid y \in Y\}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

(ii) para cada espacio topológico compacto Y, definimos $j_Y : L^Y \to L^Y$ por $j_Y(v) = m_v$, donde m_v es la función constante en L^Y cuyo valor es
$m_v = \min\{v(y) \mid y \in Y\}$.
Indudablemente, la familia $J = (j_Y)_{Y \in |COMP|}$ es un operador de interior difuso de la categoría $COMP$ (de espacios topológicos compactos).

(iii) Toda función $f : X \to Y$ de un espacio topológico X en un espacio compacto Y es IJ-continua difusa puesto que toda función constante es semicontinua inferior.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

(ii) para cada espacio topológico compacto Y, definimos $j_Y : L^Y \to L^Y$ por $j_Y(v) = m_v$, donde m_v es la función constante en L^Y cuyo valor es
$m_v = \min\{v(y) \mid y \in Y\}$.
Indudablemente, la familia $J = (j_Y)_{Y \in |COMP|}$ es un operador de interior difuso de la categoría $COMP$ (de espacios topológicos compactos).

(iii) Toda función $f : X \to Y$ de un espacio topológico X en un espacio compacto Y es IJ-continua difusa puesto que toda función constante es semicontinua inferior.

(iv) Por otra parte, las únicas funciones JI-continuas difusas entre espacios compactos y espacios topológicos son las constantes.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Sea $X = \{x\}$ un conjunto puntual y $L = [0,1]$. Las funciones $i_n : L^X \to L^X$ definidas por $i_n(t) = t^n$, para $n = 1, 2, \cdots$ son funciones de interior, de las cuales justamente i_1 e $i_\infty = \lim_{n\to\infty} t^n$ son idempotentes.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Sea $X = \{x\}$ un conjunto puntual y $L = [0,1]$. Las funciones $i_n : L^X \to L^X$ definidas por $i_n(t) = t^n$, para $n = 1, 2, \cdots$ son funciones de interior, de las cuales justamente i_1 e $i_\infty = \lim_{n\to\infty} t^n$ son idempotentes.

Para un $GL-$monoide L y para una L-topología $\tau \subseteq L^X$, definimos

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Sea $X = \{x\}$ un conjunto puntual y $L = [0,1]$. Las funciones $i_n : L^X \to L^X$ definidas por $i_n(t) = t^n$, para $n = 1, 2, \cdots$ son funciones de interior, de las cuales justamente i_1 e $i_\infty = \lim_{n\to\infty} t^n$ son idempotentes.

Para un $GL-$monoide L y para una L-topología $\tau \subseteq L^X$, definimos

$$i_X(u) = \bigvee\{v \in \tau \mid v \leqslant u\}.$$

Estas funciones producen un operador de interior en la categoría L-TOP cuyo operador de clausura asociado es

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Sea $X = \{x\}$ un conjunto puntual y $L = [0,1]$. Las funciones $i_n : L^X \to L^X$ definidas por $i_n(t) = t^n$, para $n = 1, 2, \cdots$ son funciones de interior, de las cuales justamente i_1 e $i_\infty = \lim_{n\to\infty} t^n$ son idempotentes.

Para un $GL-$monoide L y para una L-topología $\tau \subseteq L^X$, definimos

$$i_X(u) = \bigvee \{v \in \tau \mid v \leqslant u\}.$$

Estas funciones producen un operador de interior en la categoría L-TOP cuyo operador de clausura asociado es

$$c_X(u) = \bigwedge_{v\in\tau} \{v \longmapsto 0_X \mid u \leqslant v\}.$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de exterior

Definición (19)

Un operador difuso de exterior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $E = (e_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $e_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de exterior

Definición (19)

Un operador difuso de exterior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $E = (e_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $e_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(E_1) $e_{XL}(u) \leqslant \neg u$ *para todo* $u \in L^X$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de exterior

Definición (19)

Un operador difuso de exterior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $E = (e_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $e_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(E_1) $e_{XL}(u) \leqslant \neg u$ *para todo* $u \in L^X$;

(E_2) *Si* $u \leqslant v$ *in* L^X, *entonces* $e_{XL}(v) \leqslant e_{XL}(u)$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores difusos de exterior

Definición (19)

Un operador difuso de exterior en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $E = (e_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $e_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(E_1) $e_{XL}(u) \leqslant \neg u$ *para todo* $u \in L^X$;

(E_2) *Si* $u \leqslant v$ *in* L^X, *entonces* $e_{XL}(v) \leqslant e_{XL}(u)$;

(E_3) $e_{XL}(0_X) = 0_X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (20)

Un E-espacio difuso de base variable es una tripleta (X, L, e_{XL}), donde (X, L) es un objeto de $SET \times \mathcal{D}$ y e_{XL} es una función de exterior en (X, L).

Definición (21)

Un morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$ es E-continuo difuso si

$$(f, \phi)^{\leftarrow}\big(e_{YM}(v)\big) \leqslant e_{XL}\Big((f, \phi)^{\leftarrow}(v)\Big) \text{ para todo } v \in M^Y. \tag{5}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (22)

Si $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *y* $(g,\psi):(Y,M)\longrightarrow(Z,N)$ *son dos morfismos difusos E-continuos , entonces el morfismo difuso* $(g,\psi)\circ(f,\phi)$ *es E-continuo.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Como consecuencia de lo anterior obtenemos

Definición (23)

La categoría VBEO-SET tiene como objetos las tripletas (X, L, e_{XL}) *donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *y* $e_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *es una función difusa de exterior, como morfismos de* (X, L, i_{XL}) *a* (Y, M, i_{YM}) *las parejas de funciones difusas* E*-continuas* $(f, \phi) : (X, L, i_{XL}) \longrightarrow (Y, M, i_{YM})$*; las identidades y la composición son la de* $SET \times D$*.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de exterior.

Consideremos la colección

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de exterior.

Consideremos la colección

$$E\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de exterior.

Consideremos la colección

$$E\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de exterior en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de exterior.

Consideremos la colección

$$E\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de exterior en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$E \leqslant F \leftrightarrow e_X(u) \leqslant f_X(u), \text{ para todo conjunto } X$$

y para todo $u \in L^X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de exterior.

Consideremos la colección

$$E\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de exterior en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$E \leqslant F \leftrightarrow e_X(u) \leqslant f_X(u), \text{ para todo conjunto } X$$

y para todo $u \in L^X$. Con este orden, $E\big(SET, L\big)$ hereda la estructura de retículo de L:

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (24)

Toda familia $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *en* $E(SET, L)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ *in* $E(SET, L)$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (24)

Toda familia $\left(E_\lambda\right)_{\lambda \in \Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ *in* $E\left(SET, L\right)$.

El operador de exterior discreto

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (24)

Toda familia $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *en* $E(SET, L)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ *in* $E(SET, L)$.
El operador de exterior discreto

$$E_D = (e_{D_X})_{X \in |SET|} \text{ con } e_{D_X}(u) = \neg u \text{ para todo } u \in L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (24)

Toda familia $\left(E_\lambda\right)_{\lambda\,\in\,\Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ *in* $E\left(SET, L\right)$.
El operador de exterior discreto

$$E_D = \left(e_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \;\; con \;\; e_{D_X(u)} = \neg u \;\; para\ todo \;\; u \in L^X$$

es el elemento máximo en $E\left(SET, L\right)$, *y el operador de exterior trivial*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (24)

Toda familia $\left(E_\lambda\right)_{\lambda\,\in\,\Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ *in* $E\left(SET, L\right)$.
El operador de exterior discreto

$$E_D = \left(e_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \;\; con \;\; e_{D_X(u)} = \neg u \;\; para\ todo \;\; u \in L^X$$

es el elemento máximo en $E\left(SET, L\right)$, *y el operador de exterior trivial*

$$E_T = \left(e_{T_X}\right)_{X\in|SET|} \quad con \quad \left(e_{T_X}\right)(u) = 0_X \;\; para\ todo \;\; u \in L^X$$

es el mínimo.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

En consecuencia,

Corolario (25)

Para todo conjunto X

$$E(X) = \{e_X \mid e_X \text{ es una función de exterior en } X\}$$

es un retículo completo.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de exterior con base variable

Sea (Y, M, e_{YM}) un objeto de la categoría VBEO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de exterior con base variable

Sea (Y, M, e_{YM}) un objeto de la categoría VBEO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de exterior con base variable

Sea (Y, M, e_{YM}) un objeto de la categoría VBEO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{e}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de exterior con base variable

Sea (Y, M, e_{YM}) un objeto de la categoría VBEO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{e}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{e}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ e_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{6}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de exterior con base variable

Sea (Y, M, e_{YM}) un objeto de la categoría VBEO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{e}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{e}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ e_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{6}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de exterior con base variable

Sea (Y, M, e_{YM}) un objeto de la categoría VBEO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{e}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{e}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ e_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{6}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L^X \arrow[r, "(f,\phi)_*"] \arrow[d, "\hat{e}_{XL}"'] & M^Y \arrow[d, "e_{YM}"] \\
L^X \arrow[r, "(f,\phi)^{\leftarrow}"'] & M^Y
\end{tikzcd}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (26)

$\hat{e}_{XL}$ es una función de exterior difusa.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (26)

$\hat{e}_{XL}$ es una función de exterior difusa.

Proposición (27)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, e_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de E-espacios difusos de base variable,

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (26)

$\hat{e}_{XL}$ es una función de exterior difusa.

Proposición (27)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, e_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de E-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una familia de morfismos en $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (26)

$\hat{e}_{XL}$ es una función de exterior difusa.

Proposición (27)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, e_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de E-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una familia de morfismos en $SET \times \mathcal{D}$. Entonces la fuente estructurada $\left[(X, L), \left((f_\lambda, \phi_\lambda), (Y_\lambda, M_\lambda)\right)\right]_{\lambda \in \Lambda}$ con respecto al functor de olvido U de VBEO-SET a $SET \times \mathcal{D}$ tiene un levantamiento inicial único $\left((X, L, \tilde{e}_{XL}) \to (Y_\lambda, M_\lambda, e_{Y_\lambda M_\lambda})\right)$, donde $\tilde{e}_{XL}$ es el extremo inferior $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\hat{e}_{XL}$ de todas las funciones de exterior iniciales ${}^{\lambda}\hat{e}_{XL}$ respecto a $(f_\lambda, \phi_\lambda)$, donde $\lambda \in \Lambda$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (25), la proposición (26) y la proposición 27), obtenemos que

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (25), la proposición (26) y la proposición 27), obtenemos que

Teorema (28)

La categoría concreta $(VBEO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de borde

Definición (29)

Un operador difuso de borde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $B = (b_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $b_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de borde

Definición (29)

Un operador difuso de borde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $B = (b_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $b_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(B_1) $b_{XL}(u) \leqslant u \quad$ *para todo* $\quad u \in L^X$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de borde

Definición (29)

Un operador difuso de borde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $B = (b_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $b_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(B_1) $b_{XL}(u) \leqslant u \quad$ *para todo* $\quad u \in L^X$;

(B_2) $b_{XL}(1_X) = 0_X$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de borde

Definición (29)

Un operador difuso de borde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $B = (b_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $b_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(B_1) $b_{XL}(u) \leqslant u$ *para todo* $u \in L^X$;

(B_2) $b_{XL}(1_X) = 0_X$;

(B_3) $b_{XL}(u) \wedge b_{XL}(v) \leqslant b_{XL}(u \wedge v)$ *para todo* $u, v \in L^X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (30)

Un B-espacio difuso de base variable es una tripleta (X, L, b_{XL})*, donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *y* b_{XL} *es una función de borde en* (X, L)*.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Definición (30)

Un B-espacio difuso de base variable es una tripleta (X, L, b_{XL})*, donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *y* b_{XL} *es una función de borde en* (X, L)*.*

Definición (31)

Un morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ *en* $SET \times \mathcal{D}$ *es B-continuo difuso si*

$$b_{XL}\Big((f, \phi)^{\leftarrow}(v)\Big) \leqslant (f, \phi)^{\leftarrow}\big(b_{YM}(v)\big); \textit{para todo } v \in M^Y. \tag{7}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (32)

Si $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *y* $(g,\psi):(Y,M)\longrightarrow(Z,N)$ *son dos morfismos difusos B-continuos , entonces el morfismo difuso* $(g,\psi)\circ(f,\phi)$ *es B-continuo.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Como consecuencia de lo anterior obtenemos

Definición (33)

La categoría VBBO-SET tiene como objetos las tripletas (X, L, b_{XL}) *donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *y* $b_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *es una función difusa de borde, como morfismos de* (X, L, b_{XL}) *a* (Y, M, i_{YM}) *las parejas de funciones difusas B-continuas* $(f, \phi) : (X, L, i_{XL}) \longrightarrow (Y, M, i_{YM})$*; las identidades y la composición son la de* $SET \times D$*.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de borde.

Consideremos la colección

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de borde.

Consideremos la colección

$$B\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de borde.

Consideremos la colección

$$B\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de borde en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de borde.

Consideremos la colección

$$B\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de borde en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$B \leqslant W \leftrightarrow b_X(u) \leqslant w_X(u), \text{ para todo conjunto } X$$

y para todo $u \in L^X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de borde.

Consideremos la colección

$$B\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de borde en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$B \leqslant W \leftrightarrow b_X(u) \leqslant w_X(u), \text{ para todo conjunto } X$$

y para todo $u \in L^X$. Con este orden, $B\big(SET, L\big)$ hereda la estructura de retículo de L.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (34)

Toda familia $\left(B_\lambda\right)_{\lambda \in \Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *en* $E\left(SET, L\right)$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (34)

Toda familia $\left(B_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *en* $E\left(SET, L\right)$.

El operador de borde trivial

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (34)

Toda familia $\left(B_\lambda\right)_{\lambda\,\in\,\Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *en* $E\left(SET, L\right)$.
El operador de borde trivial

$$B_D = \left(b_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \;\; con \;\; b_{D_X(u)} = 0_X \;\; para\ todo \;\; u \in L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (34)

Toda familia $\left(B_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *en* $E\left(SET, L\right)$.
El operador de borde trivial

$$B_D = \left(b_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \text{ con } b_{D_X(u)} = 0_X \text{ para todo } u \in L^X$$

es el elemento mínimo en $B\left(SET, L\right)$, *y el operador de borde discreto*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (34)

Toda familia $\left(B_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $E\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ *en* $E\left(SET, L\right)$.
El operador de borde trivial

$$B_D = \left(b_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \text{ con } b_{D_X(u)} = 0_X \text{ para todo } u \in L^X$$

es el elemento mínimo en $B\left(SET, L\right)$, *y el operador de borde discreto*

$$B_T = \left(b_{T_X}\right)_{X\in|SET|}, \text{ con } \left(b_{T_X}\right)(u) = \begin{cases} u; \text{para todo } u \neq 1_X \\ 0_X \text{ si } u = 1_X, \end{cases}$$

es el máximo.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

En consecuencia,

Corolario (35)

Para todo conjunto X

$$B(X) = \{b_X \mid b_X \text{ es una función de borde en } X\}$$

es un retículo completo.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de borde con base variable

Sea (Y, M, b_{YM}) un objeto de la categoría VBBO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de borde con base variable

Sea (Y, M, b_{YM}) un objeto de la categoría VBBO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de borde con base variable

Sea (Y, M, b_{YM}) un objeto de la categoría VBBO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{b}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de borde con base variable

Sea (Y, M, b_{YM}) un objeto de la categoría VBBO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{b}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{b}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ b_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{8}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de borde con base variable

Sea (Y, M, b_{YM}) un objeto de la categoría VBBO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{b}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{b}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ b_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{8}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de borde con base variable

Sea (Y, M, b_{YM}) un objeto de la categoría VBBO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{b}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{b}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ b_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{8}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L^X \arrow[r, "(f,\phi)_*"] \arrow[d, "\hat{b}_{XL}"'] & M^Y \arrow[d, "b_{YM}"] \\
L^X \arrow[r, "(f,\phi)^{\leftarrow}"'] & M^Y
\end{tikzcd}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (36)

$\hat{b}_{XL}$ es una función de borde difusa.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (36)

$\hat{b}_{XL}$ es una función de borde difusa.

Proposición (37)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, b_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de B-espacios difusos de base variable,

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (36)

$\hat{b}_{XL}$ es una función de borde difusa.

Proposición (37)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, b_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de B-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una familia de morfismos en $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (36)

$\hat{b}_{XL}$ es una función de borde difusa.

Proposición (37)

Sea (X, L) un objeto de la categoría SET $\times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, b_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de B-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una familia de morfismos en SET $\times \mathcal{D}$. Entonces la fuente estructurada $\left[(X, L), \left((f_\lambda, \phi_\lambda), (Y_\lambda, M_\lambda)\right)\right]_{\lambda \in \Lambda}$ con respecto al functor de olvido U de VBBO-SET a SET $\times \mathcal{D}$ tiene un levantamiento inicial único $\left((X, L, \tilde{b}_{XL}) \to (Y_\lambda, M_\lambda, b_{Y_\lambda M_\lambda})\right)$, donde $\tilde{b}_{XL}$ es el extremo inferior $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\hat{b}_{XL}$ de todas las funciones de borde iniciales ${}^{\lambda}\hat{e}_{XL}$ respecto a $(f_\lambda, \phi_\lambda)$, donde $\lambda \in \Lambda$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (35), la proposición (36) y la proposición (37), obtenemos que

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (35), la proposición (36) y la proposición (37), obtenemos que

Teorema (38)

La categoría concreta $(VBBO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de coborde

Definición (39)

Un operador difuso de coborde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $K = (k_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $k_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores difusos de coborde

Definición (39)

Un operador difuso de coborde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $K = (k_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $k_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(K_1) $k_{XL}(u) \leqslant \neg u$ *para todo* $u \in L^X$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de coborde

Definición (39)

Un operador difuso de coborde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $K = (k_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $k_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(K_1) $k_{XL}(u) \leqslant \neg u$ *para todo* $u \in L^X$;

(K_2) $k_{XL}(0_X) = 0_X$;

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores difusos de coborde

Definición (39)

Un operador difuso de coborde en la categoría $SET \times \mathcal{D}$ *está constituido por una familia* $K = (k_{XL})_{(X,\,L)\in|SET\times\mathcal{D}|}$ *de funciones* $k_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *que satisfacen las propiedades siguientes:*

(K_1) $k_{XL}(u) \leqslant \neg u$ *para todo* $u \in L^X$;

(K_2) $k_{XL}(0_X) = 0_X$;

(K_3) $k_{XL}(u) \wedge k_{XL}(v) \leqslant k_{XL}(u \wedge v)$ *para todo* $u, v \in L^X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Definición (40)

Un K-espacio difuso de base variable es una tripleta (X, L, k_{XL}), donde (X, L) es un objeto de $SET \times \mathcal{D}$ y k_{XL} es una función de coborde en (X, L).

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Definición (40)

Un K-espacio difuso de base variable es una tripleta (X, L, k_{XL}), donde (X, L) es un objeto de $SET \times \mathcal{D}$ y k_{XL} es una función de coborde en (X, L).

Definición (41)

Un morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$ es K-continuo difuso si

$$k_{XL}\Big((f, \phi)^{\leftarrow}(v)\Big) \leqslant (f, \phi)^{\leftarrow}\big(k_{YM}(v)\big); \textit{para todo } v \in M^Y. \tag{9}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (42)

Si $(f,\phi):(X,L)\longrightarrow(Y,M)$ *y* $(g,\psi):(Y,M)\longrightarrow(Z,N)$ *son dos morfismos difusos* K*-continuos , entonces el morfismo difuso* $(g,\psi)\circ(f,\phi)$ *es* K*-continuo.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Como consecuencia de lo anterior obtenemos

Definición (43)

La categoría VBKO-SET tiene como objetos las tripletas (X, L, k_{XL}) *donde* (X, L) *es un objeto de* $SET \times \mathcal{D}$ *y* $k_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$ *es una función difusa de coborde, como morfismos de* (X, L, k_{XL}) *a* (Y, M, k_{YM}) *las parejas de funciones difusas* K*-continuas* $(f, \phi) : (X, L, i_{XL}) \longrightarrow (Y, M, k_{YM})$*; las identidades y la composición son la de* $SET \times D$*.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de coborde.

Consideremos la colección

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de coborde.

Consideremos la colección

$$K\left(SET, L\right) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de coborde.

Consideremos la colección

$$K\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de coborde en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de coborde.

Consideremos la colección

$$K\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de coborde en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$K \leqslant Z \leftrightarrow k_X(u) \leqslant z_X(u), \text{ para todo conjunto } X$$

y para todo $u \in L^X$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

La estructura reticular de la colección de operadores de coborde.

Consideremos la colección

$$K\big(SET, L\big) \text{ para todo } L \in \mathcal{D}$$

de todos los operadores de coborde en $SET \times \{L\}$, la cual está ordenada por

$$K \leqslant Z \leftrightarrow k_X(u) \leqslant z_X(u), \text{ para todo conjunto } X$$

y para todo $u \in L^X$. Con este orden, $K\big(SET, L\big)$ hereda la estructura de retículo de L.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (44)

Toda familia $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *en* $K(SET, L)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ *in* $K(SET, L)$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (44)

Toda familia $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *en* $K(SET, L)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ *in* $K(SET, L)$.

El operador de coborde discreto

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (44)

Toda familia $\left(K_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $K\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *in* $K\left(SET, L\right)$.
El operador de coborde discreto

$$K_D = \left(k_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \text{ con } k_{D_X}(u) = 0_X \text{ para todo } u \in L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (44)

Toda familia $\left(K_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda}$ *en* $K\left(SET, L\right)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *in* $K\left(SET, L\right)$.
El operador de coborde discreto

$$K_D = \left(k_{D_X}\right)_{X\in|SET|} \text{ con } k_{D_X}(u) = 0_X \text{ para todo } u \in L^X$$

es el elemento mínimo en $B\left(SET, L\right)$, *y el operador de borde caótico*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (44)

Toda familia $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *en* $K(SET, L)$ *tiene un extremo superior* $\bigvee_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *y un extremo inferior* $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *in* $K(SET, L)$.
El operador de coborde discreto

$$K_D = (k_{D_X})_{X\in|SET|} \ \ con \ \ k_{D_X(u)} = 0_X \ \ para\ todo \ \ u \in L^X$$

es el elemento mínimo en $B(SET, L)$, *y el operador de borde caótico*

$$K_C = (b_{C_X})_{X\in|SET|}, \ \ con \ \ (k_{C_X})(u) = \begin{cases} \neg u; para\ todo \ \ u \neq 0_X \\ 0_X \ si \ \ u = 0_X, \end{cases}$$

es el máximo.

[45]

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

En consecuencia,

Corolario (46)

Para todo conjunto X

$$K(X) = \{k_X \mid k_X \text{ es una función de coborde en } X\}$$

es un retículo completo.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de coborde con base variable

Sea (Y, M, k_{YM}) un objeto de la categoría VBKO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de coborde con base variable

Sea (Y, M, k_{YM}) un objeto de la categoría VBKO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de coborde con base variable

Sea (Y, M, k_{YM}) un objeto de la categoría VBKO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{k}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de coborde con base variable

Sea (Y, M, k_{YM}) un objeto de la categoría VBKO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{k}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{k}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ k_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{10}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de coborde con base variable

Sea (Y, M, k_{YM}) un objeto de la categoría VBKO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{k}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{k}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ k_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{10}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Operadores iniciales de coborde con base variable

Sea (Y, M, k_{YM}) un objeto de la categoría VBKO-SET y sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$.
Para cada morfismo $(f, \phi) : (X, L) \longrightarrow (Y, M)$ en $SET \times \mathcal{D}$, definimos en (X, L) la aplicación

$$\hat{k}_{XL} : L^X \longrightarrow L^X$$

mediante

$$\hat{k}_{XL} = (f, \phi)^{\leftarrow} \circ k_{YM} \circ (f, \phi)_*, \tag{10}$$

donde $(f, \phi)_*$ es el adjunto derecho de $(f, \phi)^{\leftarrow}$. En otras palabras, el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L^X \arrow[r, "(f,\phi)_*"] \arrow[d, "\hat{k}_{XL}"'] & M^Y \arrow[d, "k_{YM}"] \\
L^X \arrow[r, "(f,\phi)^{\leftarrow}"'] & M^Y
\end{tikzcd}$$

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Proposición (47)

$\hat{k}_{XL}$ es una función de coborde difusa.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (47)

$\hat{k}_{XL}$ es una función de coborde difusa.

Proposición (48)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, k_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de K-espacios difusos de base variable,

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (47)

$\hat{k}_{XL}$ es una función de coborde difusa.

Proposición (48)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, k_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de K-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una familia de morfismos en $SET \times \mathcal{D}$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Proposición (47)

$\hat{k}_{XL}$ es una función de coborde difusa.

Proposición (48)

Sea (X, L) un objeto de la categoría $SET \times \mathcal{D}$, sea $(Y_\lambda, M_\lambda, k_{Y_\lambda M_\lambda})$ una familia de K-espacios difusos de base variable, donde $\lambda \in \Lambda$ para cierto conjunto de índices Λ, y sea $(f_\lambda, \phi_\lambda) : (X, L) \to (Y_\lambda, M_\lambda)$ una familia de morfismos en $SET \times \mathcal{D}$. Entonces la fuente estructurada $\left[(X, L), \left((f_\lambda, \phi_\lambda), (Y_\lambda, M_\lambda)\right)\right]_{\lambda \in \Lambda}$ con respecto al functor de olvido U de VBEO-SET a $SET \times \mathcal{D}$ tiene un levantamiento inicial único $\left((X, L, \tilde{k}_{XL}) \to (Y_\lambda, M_\lambda, k_{Y_\lambda M_\lambda})\right)$, donde $\tilde{k}_{XL}$ es el extremo inferior $\bigwedge_{\lambda \in \Lambda} {}^{\lambda}\hat{k}_{XL}$ de todas las funciones de coborde iniciales ${}^{\lambda}\hat{k}_{XL}$ respecto a $(f_\lambda, \phi_\lambda)$, donde $\lambda \in \Lambda$.

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
- Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
- Operadores de interior iniciales con base variable
- Propiedades adicionales de los operadores de interior
- Conjuntos abiertos difusos
- Morfismos I-abiertos
- Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
- Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (45), la proposición (46) y la proposición (47), obtenemos que

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable

Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable

Operadores de interior iniciales con base variable

Propiedades adicionales de los operadores de interior

Conjuntos abiertos difusos

Morfismos I-abiertos

Algunos ejemplos de operadores difusos de interior

Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable

Operadores iniciales de exterior con base variable

Propiedades básicas de los

Reuniendo el corolario (45), la proposición (46) y la proposición (47), obtenemos que

Teorema (49)

La categoría concreta $(VBKO\text{-}SET, U)$ *sobre* $SET \times \mathcal{D}$ *es una categoría topológica.*

Propiedades básicas de algunos operadores topológicos difusos con base variable
Propiedades básicas de los operadores de interior con base variable
Operadores de interior iniciales con base variable
Propiedades adicionales de los operadores de interior
Conjuntos abiertos difusos
Morfismos I-abiertos
Algunos ejemplos de operadores difusos de interior
Propiedades básicas de los operadores de exterior con base variable
Operadores iniciales de exterior con base variable
Propiedades básicas de los

Part IV

References

Jiri Adamek, Horst Herrlich, George Strecker, 1990, "Abstract and Concrete Categories", John Wiley & Sons, New York.

M. Diker, S. Dost and A. Uğur, 2009, "Interior and closure operators on texture spacesI: Basic concepts and Čech closure operators", Fuzzy Sets and Systems 161 pp. 935953.

U. Höhle, A. Šostak, 1999, "Fixed-basis fuzzy topologies", In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston.

Joaquín Luna-Torres and Carlos Orlando Ochoa C, *Interior Operators and Topological Categories*, Advances and Applications in Mathematical Sciences, vol. 10, Issue 2, 2011, pages 189-206, Mili Publications, Allahabad, India, 2011.

- S. MacLane, I. Moerdijk, 1992, "Sheaves in Geometry and Logic, A first introduction to Topos theory", Springer-Verlag, New York / Heidelberg / Berlin.
- S. E. Rodabaugh, 1999 "Powerset operator foundations for poslat fuzzy set theories and topologies", In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston.
- S. E. Rodabaugh, 1999, "Categorical foundations of variable-basis fuzzy topology", In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher, Boston.
- F. G. Shi, 2009, "L-fuzzy interiors and L-fuzzy closures", Fuzzy Sets and Systems 160, pp. 1218-1232.

W. Shi, K. Liu, 2007, "A fuzzy topology for computing the interior, boundary, and exterior of spatial objects quantitatively in GIS", Computers & Geosciences 33, pp. 898915.