ENCUENTRO DE JÓVENES TOPÓLOGOS
MÉTRICA DE HAUSDORFF

Laura Victoria Forero Vega

21 de mayo de 2015

CONTENIDO

1 Introducción

2 El espacio a trabajar

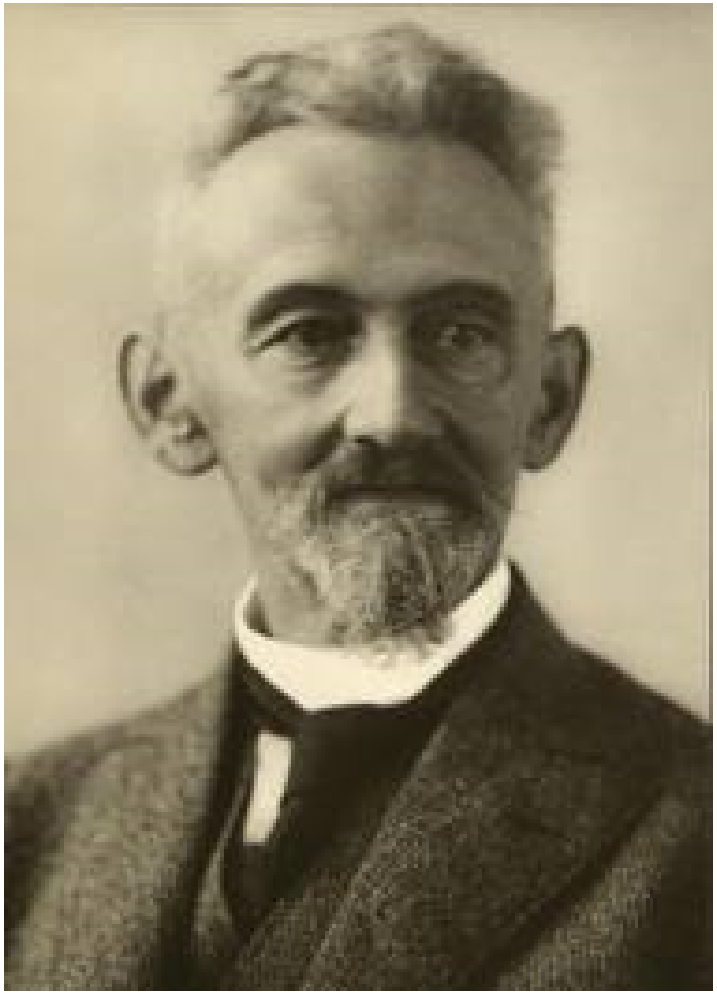
3 Separación de Hausdorff

4 Distancia de Hausdorff

5 Ejemplo difuso

6 Ejemplo fractal

Los espacios métricos son considerados fuente de estudio para el análisis matemático, con ello se desprenden diferentes tematicas, entre ellas, la distancia de Hausdorff que corresponde, extiende y ajusta la noción de distancia entre subconjuntos no vacíos compactos en el ambiente de los espacios métricos.



Felix Hausdorff fue un matemático alemán que está considerado como uno de los fundadores de la Topología moderna y que ha contribuido significativamente a la teoría de conjuntos, la teoría descriptiva de conjuntos, la teoría de la medida, el análisis funcional y la teoría de funciones.

CONTENIDO

1 Introducción

2 El espacio a trabajar

3 Separación de Hausdorff

4 Distancia de Hausdorff

5 Ejemplo difuso

6 Ejemplo fractal

Se considera en el posterior desarrollo, un espacio métrico cualquiera (X, d),

Definición 2.1

Si toda sucesión de X tiene una subsucesión convergente, entonces (X, d) es compacto. Un subconjunto M de X, se dice compacto si toda sucesión en M tiene una subsucesión convergente.

Ejemplo 1

Sea X cualquier conjunto y d_{dis} la métrica discreta, entonces todo subconjunto finito de puntos de X es compacto.

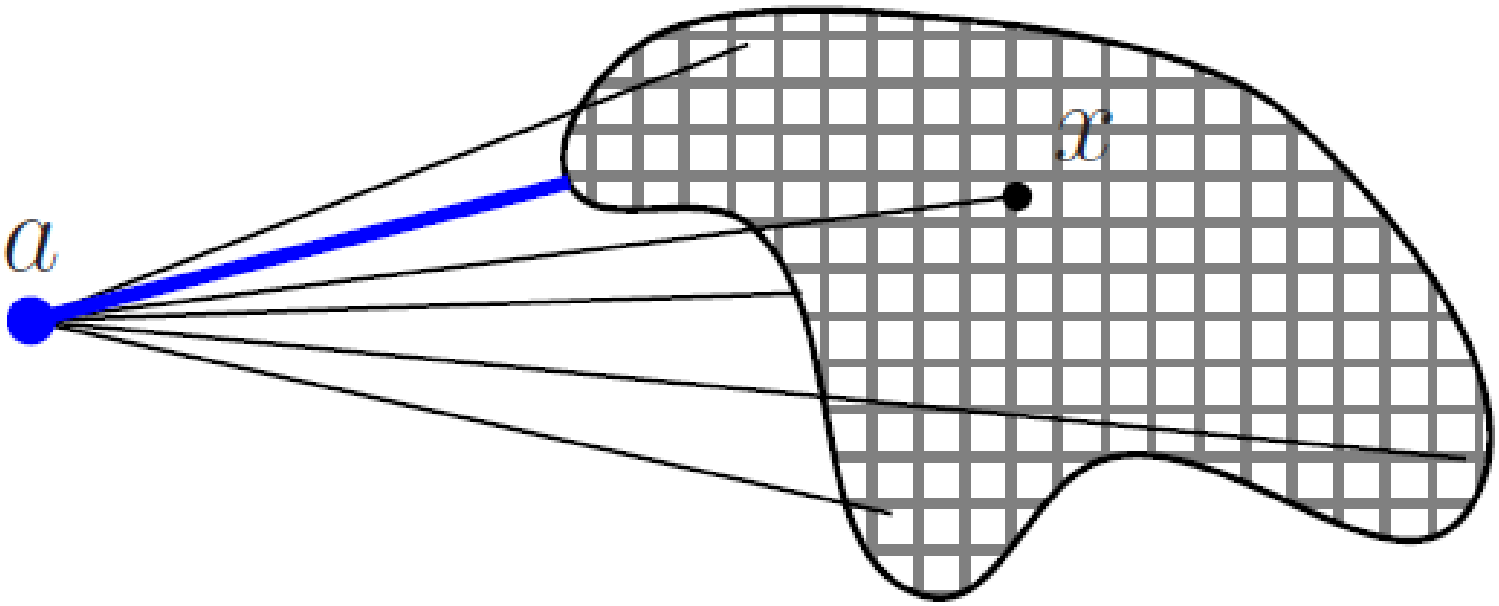
Ejemplo 2

Sea $\mathbb{R}^n$ y d_u la distancia usual, entonces todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es compacto.

Definición 2.2

Sea a un punto de X y A un subconjunto no vacío de X, la distancia $d(a, A)$ del punto a a A es

$$d(a, A) = \inf \{d(a, x) : x \in A\},$$


a
x

En los espacios métricos, se tienen diferentes tipos de colecciones de sus elementos de acuerdo a unas condiciones, estos son, entre otros, los conceptos de vecindad, bola abierta, bola cerrada y adherencia, que son como aparecen en [1].

Proposición 2.1

Sea x un punto en X y A un subconjunto no vacío de X entonces:

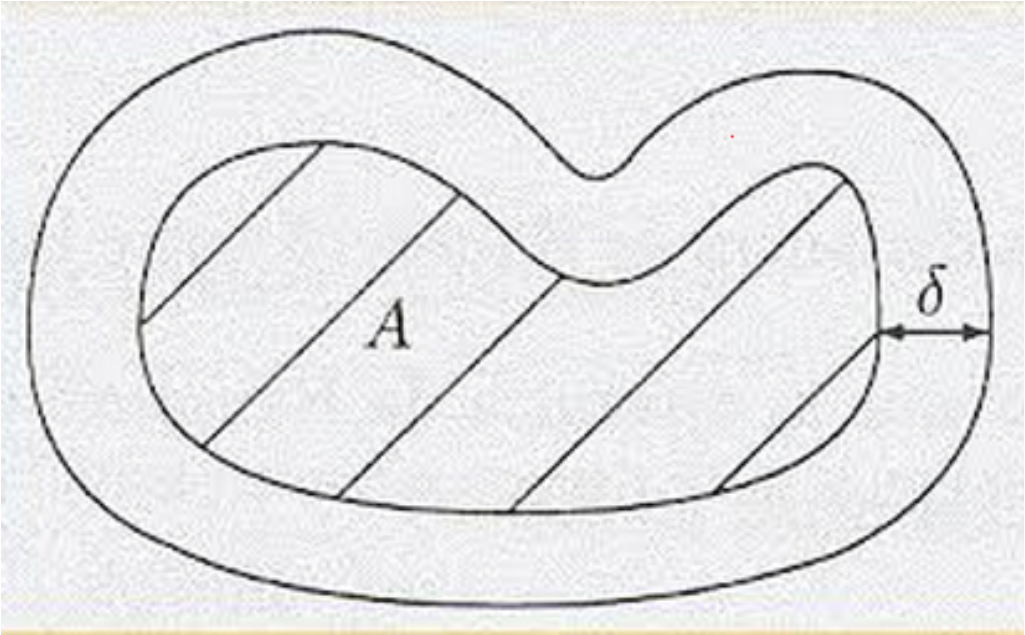
1. $d(x, A) \geq 0$
2. $d(x, A) = 0$ *si y solo si* $x \in \overline{A}$

Definición 2.3

Sea A un subconjunto no vacío de X y $\delta > 0$, la δ-vecindad de A es

$$\mathfrak{V}_\delta(A) = \{x \in X : d(x, A) < \delta\}$$

La adherencia de $\mathfrak{V}_\delta(A)$ es $\overline{\mathfrak{V}}_\delta(A) = \{x \in X : d(x, A) \leq \delta\}$.


A
δ

CONTENIDO

1 Introducción

2 El espacio a trabajar

3 Separación de Hausdorff

4 Distancia de Hausdorff

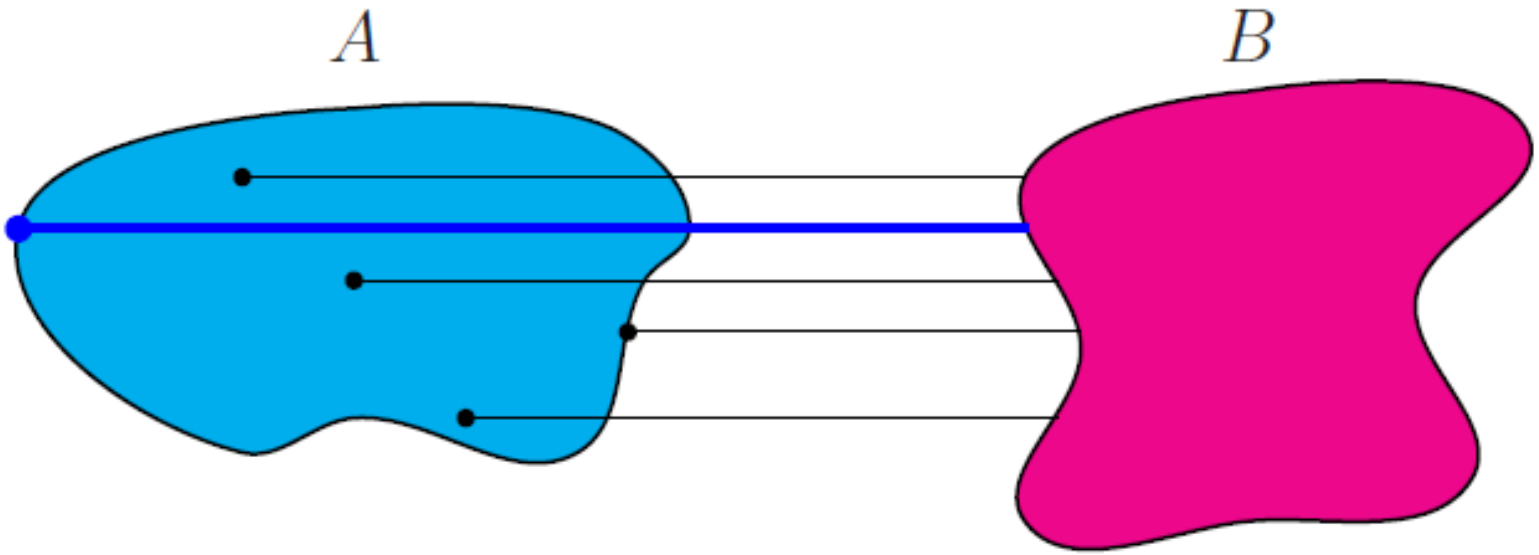
5 Ejemplo difuso

6 Ejemplo fractal

Definición 3.1

Sean A y B dos subconjuntos acotados y no vacíos de X, la separación de Hausdorff de B a A es

$$d_H^*(B, A) = \sup \{d(b, A) : b \in B\}.$$


A
B

Teorema 3.1

Sean A y B dos subconjuntos acotados y no vacíos de $\mathbb{R}^n$, la separación de Hausdorff de B a A es

$$d_H^*(B, A) = \text{ínf}\left\{\epsilon > 0 : B \subseteq \overline{\mathfrak{V}}_\epsilon(A)\right\}.$$

Proposición 3.1

Sean $A, B, C \subseteq X$ *no vacíos y acotados, entonces*

1. $d_H^*(B, A) \geq 0$
2. $d_H^*(B, A) = 0$ *si y solo si* $B \subseteq \overline{A}$
3. $d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$

La sepación de Hausdorff no satisface la propiedad simetrica,

Ejemplo 3

En el espacio métrico $\mathbb{R}^2$, sean

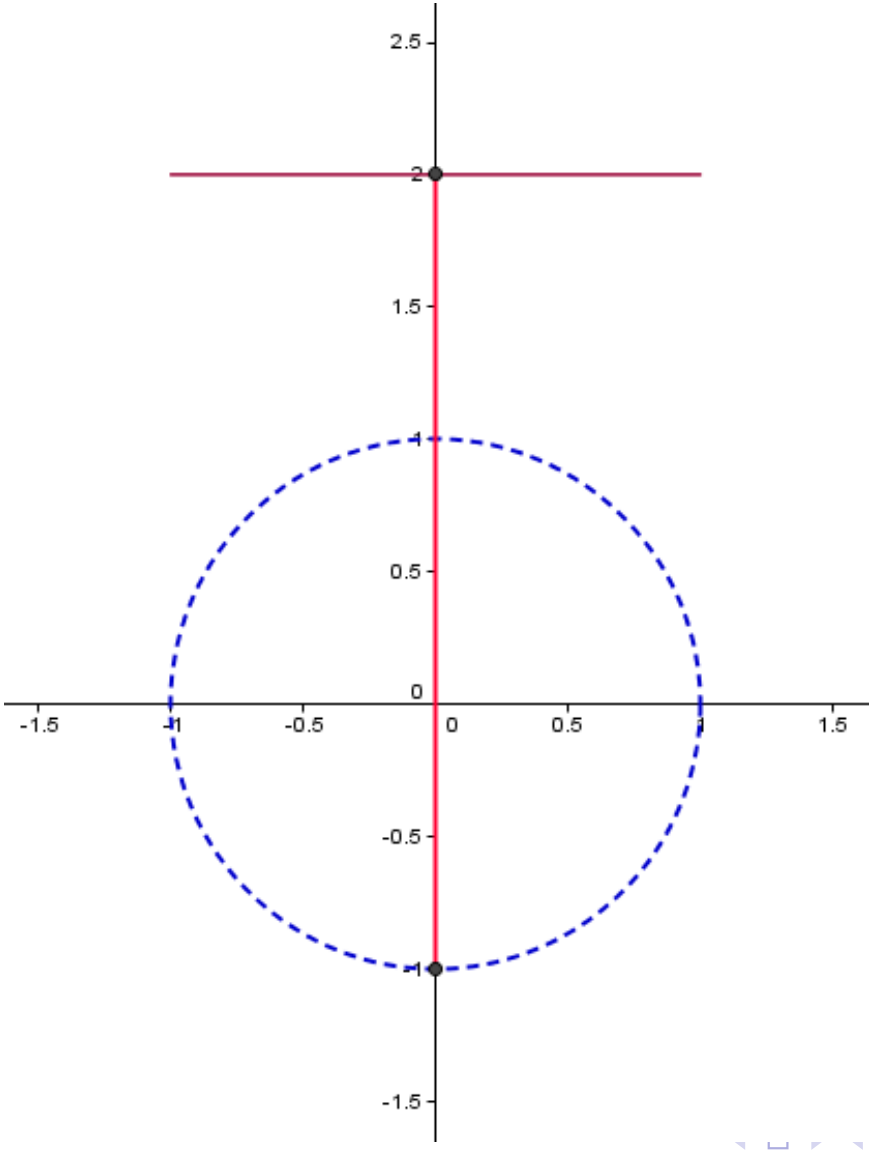
$$A = \{(a_1, 2) : -1 \leq a_1 \leq 1\}$$

y

$$B = \{(b_1, b_2) : b_1^2 + b_2^2 < 1\},$$

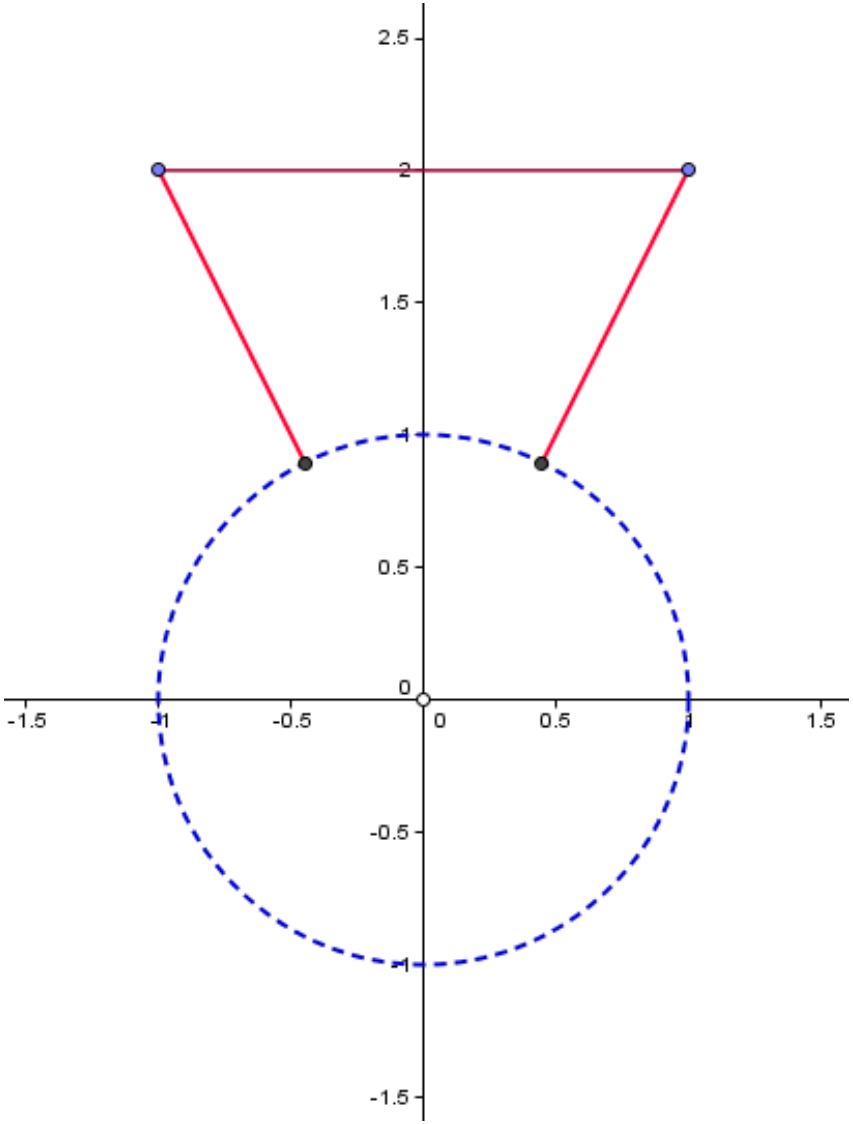
entonces:

$$\begin{aligned} d_H^*(B, A) &= \sup\{d((b_1, b_2), A) : (b_1, b_2) \in B\} \\ &= \sup\{|b_2 - 2| : (b_1, b_2) \in B\} \\ &= 3, \end{aligned}$$


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

$$
\begin{aligned}
d_H^*(A,B) &= \sup\{d(a,B) : a \in A\} \\
&= \sup\left\{\left\|(x,y) - \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}, 2\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}\right)\right\| : (x,y) \in A\right\} \\
&\approx 1{,}236,
\end{aligned}
$$

con lo cual $d_H^*(B,A) \neq d_H^*(A,B)$.


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

La separación de Hausdorff se constituye en un instrumento eficaz en la consecución de una métrica, claro está con algunas propiedades adicionales en el contexto.

CONTENIDO

1 Introducción

2 El espacio a trabajar

3 Separación de Hausdorff

4 Distancia de Hausdorff

5 Ejemplo difuso

6 Ejemplo fractal

Definición 4.1

Sean A y B dos subconjuntos acotados y no vacíos de X, la distancia de Hausdorff de B a A es

$$d_H(A,B) = \text{máx}\,\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\}.$$

Con esta definición, la distancia Hausdorff satisface la simetría, pero aún falta poner condiciones adicionales al ambiente para obtener la estructura de espacio métrico; así, se restringe, aun más, la naturaleza de los subconjuntos de X en consideración. El resultado que sigue, se aplica a un universo específico con alguna incidencia en los demás.

Proposición 4.1

$(H(X), d_H)$, la colección de subconjuntos compactos de X con la distancia de Hausdorff, es un espacio métrico.

De modo que del ejemplo 1 expuesto, resulta ser espacio métrico, es decir,

$(H(\mathbb{R}^n), d_H)$, la colección de los conjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}^n$ y

$$d_H(A,B) = \text{máx}\left\{\sup_{b\in B} \text{ínf}_{a\in A} \|a-b\|, \sup_{a\in A} \text{ínf}_{b\in B} \|a-b\|\right\}$$

De modo que la distancia de Hausdorff mide cuan lejos están uno de otro dos subconjuntos compactos de X.

Proposición 4.2

Sean A, B *subconjuntos no vacios de* $H(X)$*, si* $d_H(A, B) \leq \epsilon$ *y* $b \in B$*, existe* $a \in A$ *tal que* $d(a, b) \leq \epsilon$

La prueba del siguiente teorema aparece en [2].

Teorema 4.1

Si (X, d) es un espacio métrico completo[1], entonces $(H(X), d_H)$ tambié lo es, además si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en K^n, su límite es

$$A = \{a \in X : \text{existe } \{a_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}},\ a_{n_i} \in A_{n_i} \text{ y } \lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a\}.$$

[1] Sea (X, d) un espacio métrico, si toda sucesión de Cauchy en X converge, se dice que (X, d) es un espacio métrico completo.

Teorema 4.2

$K_C(X)$, la colección de todos los conjuntos convexos compactos de X, es un subconjunto cerrado del espacio métrico (K^n, d_H).

CONTENIDO

1 Introducción

2 El espacio a trabajar

3 Separación de Hausdorff

4 Distancia de Hausdorff

5 Ejemplo difuso

6 Ejemplo fractal

Un subconjunto difuso u de un espacio X, es una función

$$u : X \to [0, 1],$$

que indica el nivel de pertenencia de un elemento x en el conjunto u, (ver en [2]); se requiere conocer una colección particular de subconjuntos difusos de $\mathbb{R}^n$.

Sea E^n la colección de todos los subconjuntos difusos u de $\mathbb{R}^n$ que satisfacen:

1. El soporte [2] y los α-cortes[3] de u son conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, para todo $\alpha \in [0,1]$,
2. u es convexo difuso, esto es,

$$u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \text{mín}\,\{u(x), u(y)\}$$

para todo $\lambda \in [0,1]$.

[2] Para un conjunto difuso u de $\mathbb{R}^n$, el soporte de u es $[u]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha\in(0,1]} [u]^\alpha}$.

[3] Para un conjunto difuso u de $\mathbb{R}^n$, el α-corte es $[u]^\alpha = \{x \in X : u(x) \geq \alpha\}$ para $\alpha \in (0,1]$

Proposición 5.1

El par (E^n, d), de la métrica del supremo d en E^n definida como

$$d(u,v) = \sup\{d_H([u]^\alpha, [v]^\alpha) : \alpha \in I\}$$

para elementos $u, v \in E^n$ es un espacio métrico.

CONTENIDO

1 Introducción

2 El espacio a trabajar

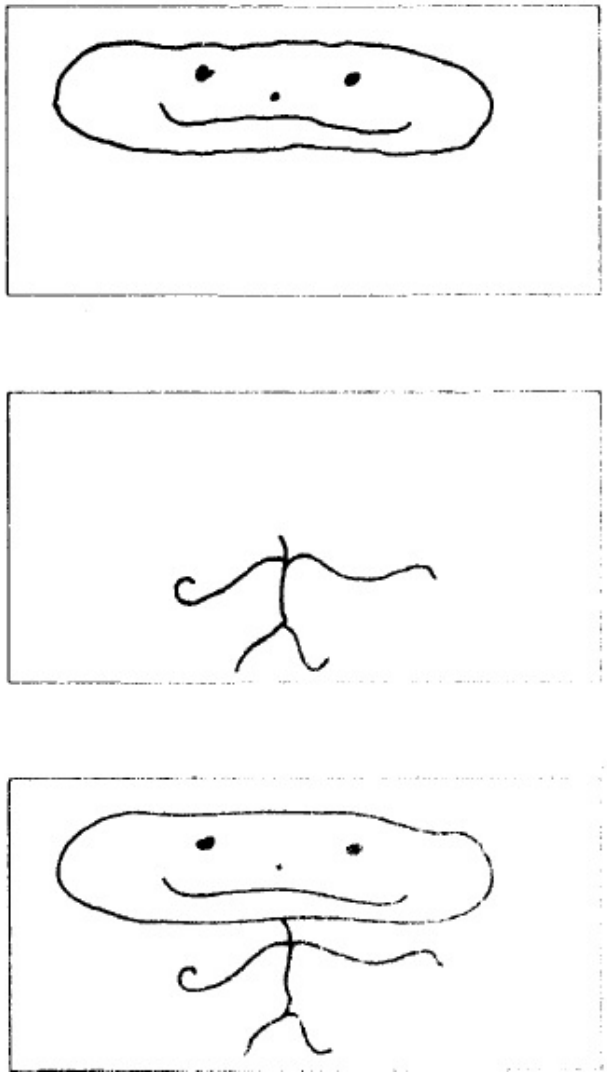
3 Separación de Hausdorff

4 Distancia de Hausdorff

5 Ejemplo difuso

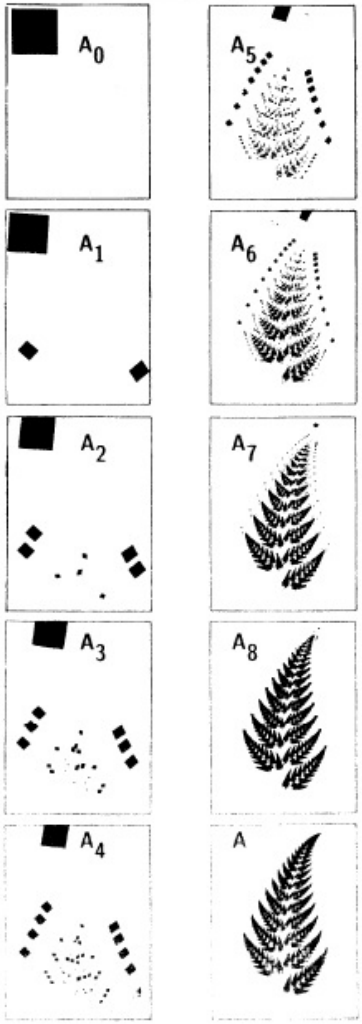
6 Ejemplo fractal

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. Para estudiar la geometría fractal, se debe hablar de imágenes, dibujos en blanco y negro, estos son subconjuntos compactos del espacio $(\mathbb{R}^2, d_u)$ y la métrica de Hausdorff provee su eficaz estudio.



[4]

[4] Imagen tomada de [2].



[5]

[5] Imagen tomada de [2].

CONCLUSIÓN

La construcción de la métrica de Hausdorff es una edificación desde la definición de distancia entre un punto y un conjunto acotado no vacío, con ella se produce un nuevo espacio métrico completo (K^n, d_H) con los conjuntos compactos de X, que además K^n_C, el conjunto de compactos y convexos X, es un conjunto cerrado para este espacio métrico.

REFERENCIAS

- T. M. Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company. Massachusetts. 1981.
- M. Barnsley. *Fractals Everywhere*. Academic Press. San Diego. 1988.
- C. Castaing y M. Valadier. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*. Springer-Verlag. 1932.
- E. Kreyszig *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. Canada 1978.

REFERENCIAS

- V. Lakshmikanthan y R.N. Mohapatra. *Theory of Fuzzy Differential Equantions and Inclusions*.Taylor y FRancis. London. 2003.
- L. A. Zadeh. *Fuzzy Sets*. Inf. Control 8. 1965.