Una conjetura en Geometría no conmutativa

Mario Andrés Velásquez M.

Pontificia Universidad Javeriana

20 de mayo de 2015

Introducción

Dado un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff X, consideremos el álgebra $C(X)$ de funciones continuas $f : X \to \mathbb{C}$ que se anulan en el infinito , con la suma y el producto usual. Ésta álgebra tiene una operación adicional, dada por tomar el conjugado. Este tipo de estructura recibe el nombre de C^*-álgebra.

Definición

Un álgebra de Banach $(A, +, \cdot, |\ \ |)$ con una operación $* : A \to A$ se llama una C^*-álgebra si satisface las siguientes condiciones:

1. La operación $*$ es una involución en A.
2. Para todo $x, y \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$
   - 2.1 $(x + y)^* = x^* + y^*$
   - 2.2 $(xy)^* = y^* x^*$
   - 2.3 $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
3. $|xx^*| = |x|^2$

Ejemplo

1. $C(X)$
2. El álgebra de matrices cuadradas *nxn* sobre $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{C})$.
3. Mas generalmente, dado un espacio de Banach H, el álgebra de operadores acotados $B(H)$ y el álgebra de operadores compactos $K(H)$.

Una pregunta que se puede plantear es la siguiente: si conocemos el álgebra $C(X)$ que tanto podemos saber del espacio X. La respuesta nos la dá el teorema de Gelfand-Naimark.
Dada una C^*-álgebra conmutativa A, consideremos el espacio de *caractéres* de A

$$\Phi_A = \mathrm{Hom}^*(A, \mathbb{C}),$$

Este es el espacio de homomorfismos de álgebras que además conmutan con los respectivos adjuntos con la topología de la convergencia puntual.

Teorema (Gelfand-Naimark)

Si A es conmutativa, existe un isomorfismo isométrico entre A y $C(\Phi_A)$. Si $A = C(X)$ existe un homeomorfismo entre X y Φ_A.

De hecho este teorema nos dá una equivalencia entre la categoría de espacios topológicos de Hausdorff y la categoría (opuesta) de C^*-algebras conmutativas.

Se tiene un 'diccionario' entre propiedades e invariantes entre una categoría y la otra. Por ejemplo

Espacios topológicos	C^*-álgebras
Compacto	Unitaria
Conexo	No existencia de proyecciones propias
Subconjunto abierto	Ideal
Subconjunto cerrado	Cociente
...	...

Veamos como *traducir* un invariante definido en espacios topológicos a la categoría de C^*-algebras

Definición

Un fibrado vectorial $p : E \to X$ es una función continua sobreyectiva tal que

1. Para cada $x \in X$, $p^{-1}(x)$ es un espacio vectorial complejo finito dimensional
2. Para todo $x \in X$ existe una vecindad U de x, con un homeomorfismo $\phi : U \times \mathbb{C}^n \to p^{-1}(U)$, tal que $p(\phi(x, v)) = x$ y $\phi|(y, -)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos para todo $y \in U$.

Podemos definir una operación de suma directa entre fibrados vectoriales, denotada por $\oplus$.

Podemos definir una operación de suma directa entre fibrados vectoriales, denotada por $\oplus$.
También hay una noción de isomorfismo: $p : E \to X$ es isomorfo a $q : F \to X$ si existe un homeomorfismo

$$\mu : E \to F$$

tal que

1. $\mu \mid_{p^{-1}(x)}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales complejos.
2. $q(\mu(e) = p(e)$ para todo $e \in E$.

Definición

El grupo de Grothendieck asociado al monoide formado por el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre X, con la operación de suma directa se llama el grupo de *K-teoría* de X y se denota $K(X)$.

Ejemplo

Consideremos el espacio $X = \mathbb{C}P^1 = S^2$, podemos definir dos fibrados vectoriales

1. El fibrado trivial de dimensión 1, $E = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}$.
2. El fribrado canónico $E = \{(V, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in V\}$

Definición

El grupo de Grothendieck asociado al monoide formado por el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre X, con la operación de suma directa se llama el grupo de *K-teoría* de X y se denota $K(X)$.

Ejemplo

Consideremos el espacio $X = \mathbb{C}P^1 = S^2$, podemos definir dos fibrados vectoriales

1. El fibrado trivial de dimensión 1, $E = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}$.
2. El fribrado canónico $E = \{(V, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in V\}$

se puede demostrar que todo fibrado vectorial sobre $\mathbb{C}P^1$ se puede descomponer como una suma directa de fibrados triviales y fibrados canónicos. Entonces tenemos un isomorfismo de grupos $K(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

El concepto correspondiente a fibrado vectorial en C^*-álgebras es el de módulos proyectivos finitamente generado.

Definición

Dada A una C^*-álgebra, un *módulo proyectivo finitamente generado* E sobre A es un espacio de Hilbert (el producto interno toma valores en A) con una estructura de módulo $A \times E \to E$, tal que existe otro módulo F sobre A tal que $E \oplus F \cong A^{\oplus n}$.

Definición

El grupo de Grothendieck asociado al conjunto de clases de isomorfismo de modulos proyectivos f.g sobre A, con la operación de suma directa se llama el grupo de *K-teoría* de A y se denota $K_*(A)$.

K-teoría es posiblemente el invariante mas sencillo de definir en la categoría de C^*-algebras, pero es altamente no trivial calcularlo si el álgebra es no conmutativa. Por el contrario en espacios topológicos la posibilidad de descomponer el espacio en subespacios nos permite tener buenos métodos de cálculo. Una forma de intentar calcular estos grupos de K-teoría para C^*-álgebras es relacionarlos con invariantes de espacios topológicos.

Dado un grupo discreto G, consideremos el álgebra $\mathbb{C}_c(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid f \text{ tiene soporte finito}\} \subseteq L^2(G)$ con el producto de convolución

$$(f * g)(t) = \sum_{s \in G} f(s) g(s^{-1} t)$$

El álgebra reducida de grupo $C_r^*(G)$ es la completación de $C_c(G)$ respecto a la norma

$$|f|_{C_r^*} = sup\{|f * g|_2 : |g|_2 = 1\},$$

donde $|g|_2 = \sqrt{\sum_{s \in G} |f(s)|^2}$

Existe una conjetura que nos permite entender de una mejor forma la K-teoría de $C_r^*(G)$ en términos de espacios topológicos.

Dado un grupo G con M una variedad en donde el grupo G actua (propiamente). Consideremos un operador pseudo diferencial elíptico $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ definido entre las secciones de ciertos fibrados vectoriales $E \to M$ y $F \to M$.
Este operador se puede extender a

$$D_{C_r^*(G)} : \Gamma(E \times_G C_r^*(G)) \to \Gamma(F \times_G C_r^*(G))$$

El *índice* de este operador es una diferencia formal entre dos módulos proyectivos f.g

$$Index(D_{C_r^*(G)}) = [Ker(D_{C_r^*(G)})] - [Coker(D_{C_r^*(G)})].$$

La clase de isomorfismo de este índice es un elemento de $K(C_r^*(G))$.
La conjetura predice que todos los elementos en $K(C_r^*(G))$ se pueden construir de esta manera.

Esta conjetura nos dice entonces que todos los módulos proyectivos finitamente generados sobre el álgebra $C_r^*(G)$ se pueden construir geométricamente como índices de operadores elípticos.

Por resultados de Lafforgue y otros la conjetura se sabe cierta para algunas familias de grupos pero permanece abierta en general.

Para $G = \mathbb{Z}$ la conjetura se sabe cierta. Podemos calcular $K(C_r^*(\mathbb{Z}))$ usando un espacio topológico que contenga toda la información referente a las variedades en donde $\mathbb{Z}$ actua propiamente, esto es un espacio clasificante. En este caso este espacio es $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$.

Usando herramientas de topología algebraica se puede demostrar que sobre S^1 el conjunto de operadores elípticos pseudo-diferenciales (hasta equivalencia homotópica) como grupo es isomorfo a $\mathbb{Z}$. Esto tiene que ver con el hecho de que S^1 es un grupo de Lie. Esto implica que todo módulo proyectivo finitamente generado sobre $C_r^*(\mathbb{Z})$ es libre.

Resultados parciales

Teorema (V.)

Para $G = SL(3, \mathbb{Z})$, usando una sucesión espectral se demuestra que el conjunto de operadores elipticos pseudo-diferenciales es isomorfo como grupo a $\mathbb{Z}^8$.

Aún no se sabe si la conjetura es cierta para este grupo.

Agradecimientos

GRACIAS!