

# Teoría de Homotopía y Sistemas de Fusión (Programa del cursillo)

**Resumen.** Fijado un número primo  $p$ , el sistema de fusión de un grupo finito  $G$  se compone de un  $p$ -subgrupo de Sylow  $S$  y los homomorfismos entre los diferentes subgrupos de  $S$  inducidos por conjugación en  $G$ , estos datos se formalizan como una categoría  $\mathcal{F}_S(G)$ . Esta noción aparece ya en la tesis de L. Puig, junto a diferentes variantes, por su relación con la teoría de representaciones modulares de grupos finitos. Paralelamente, aparecen nociones similares en trabajos de Quillen en teoría de homotopía y cohomología de grupos, los puntos de vista algebraico y homotópico convergen finalmente en el trabajo de Martino y Priddy y posteriormente con la solución positiva de la conjetura de los mismos.

En este cursillo revisaremos la nociones mencionadas insistiendo en la interacción entre teoría de grupos finitos y teoría de homotopía. Además introduciremos los sistemas de fusión abstractos, definidos por Puig en ausencia de un grupo ambiente, como generalizaciones axiomáticas de los sistemas de fusión de los grupos finitos.

## Contenido

- 1) Espacios, homotopía e invariantes algebraicos. Grupo fundamental, cálculos, espacios recubridores.
- 2) Teoría de homología. Homología singular y celular. Homología con coeficientes. Cohomología. Métodos de cálculo.
- 3) Conjuntos simpliciales. Realización geométrica.
- 4) Categorías y funtores. Transformaciones naturales, funtores adjuntos. Nervio de una categoría.
- 5) Grupos finitos. Descripción combinatoria de espacios clasificadores. Cohomología de grupos finitos. Teorema de elementos estables de Cartan-Eilenberg.
- 6) Métodos locales en teoría de homotopía. Compleción de Bousfield-Kan.
- 7) Espacios de aplicaciones. La conjetura de Sullivan. Espacios clasificadores  $p$ -completados.
- 8) Sistemas de fusión de grupos finitos. La conjetura de Martino-Priddy.

- 9) Sistemas de fusión abstractos, sistemas de enlace y espacios clasificadores. Los sistemas de Benson-Solomon. Centralizadores y normalizadores. Cohomología de sistemas de fusión y teorema de los elementos estables. Grupos parciales. Teorema de Chermak: existencia y unicidad de sistemas de enlace.

Bibliografía:

## Referencias

- [AKO] M. Aschbacher, R. Kessar, & B. Oliver, Fusion systems in algebra and topology, Cambridge Univ. Press (2011)
- [BLO1] C. Broto, R. Levi, & B. Oliver, Homotopy equivalences of  $p$ -completed classifying spaces of finite groups, *Invent. math.* 151 (2003), 611–664
- [BLO2] C. Broto, R. Levi, & B. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, *J. Amer. Math. Soc.* 16 (2003), 779–856
- [BMO] C. Broto, J. Møller, & B. Oliver, Equivalences between fusion systems of finite groups of Lie type, *Jour. Amer. Math. Soc.* 25 (2012), 1–20
- [CE] H. Cartan & S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton Univ. Press (1956)
- [LO] R. Levi & B. Oliver, Construction of 2-local finite groups of a type studied by Solomon and Benson, *Geom. Topol.* 6 (2002), 917–990.

## Sistemas de fusión de grupos finitos simples de tipo Lie (Resumen de la charla)

En topología algebraica se investigan los espacios clasificadores y sus análogos  $p$ -locales. En el caso de grupos finitos este estudio está íntimamente relacionado con la estructura local de los grupos finitos. Dicha estructura se concreta en los sistemas de fusión introducidos por Puig en el ámbito de la teoría de grupos finitos y representaciones modulares. En esta charla trataremos la interacción de los puntos de vista topológico y algebraico y expondremos algunas aplicaciones al caso de grupos finitos simples de tipo Lie, obtenidas conjuntamente con Jesper Møller y Bob Oliver.