Curso de homología

1. Categorías y funtores

Partimos de X un espacio topológico, y calculamos

$\underbrace{H_i(X)}_{\mathbb{Z}\text{-módulo}}$ donde $i \in \{0,1,2,\dots\}$

$X \underset{\text{homeomorfo}}{\cong} Y$, entonces $H_i(X) \underset{\text{isomorfo}}{\cong} H_i(Y)$

se puede relajar

$X \underset{\text{homótopo}}{\simeq} Y \quad \Rightarrow \quad H_i(X) \cong H_i(Y)$

$f: \underbrace{X \longrightarrow Y}_{\text{continua}} \quad \rightsquigarrow \quad \underbrace{H_i(f): H_i(X) \longrightarrow H(Y)}_{\text{aplic. } \mathbb{Z}\text{-módulos}}$

Topología $\rightsquigarrow$ Álgebra

funtor

Veremos que la homología es un funtor de la categoría de espacios topológicos módulo homotopía a la de $\mathbb{Z}$-módulos (grupo abeliano) graduados.

Categorías

<u>Definición</u>: Una categoría $\mathcal{C}$ consta de

1) objetos: $X \in ob(\mathcal{C})$
2) Para cada par de objetos X e Y, tenemos $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ { morfismos de X a Y, y se pueden componer

Que cumplen:
a) asociatividad: $\forall$ morfismo $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to T$

se cumple que

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

composición

composición de aplicaciones

b) Para todo objeto X existe un morfismo $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ cumpliendo

identidad $f: X \to Y$ $\qquad f \circ 1_X = f$

$g: Z \to X$ $\qquad 1_X \circ g = g$

<u>Ejemplos</u>:

1) Categoría de conjuntos (Sets)

Objetos: conjuntos
Morfismos: aplicaciones de conjuntos

2) Categoría de los espacios topológicos (Top)
objetos: espacios topológicos
Morfismos: aplicaciones continuas } $1_X := Id: X \to X$

3) R un anillo (por ejemplo $\mathbb{Z}$).

grupos abelianos

Categoría de R-módulos $R=\mathbb{Z}$

Objetos: R-módulos

Morfismos: aplicaciones entre R-módulos

$$f: M \longrightarrow N$$

$r \in R$, $\underset{\in M}{m}$ $f(rm) = r f(m)$

$$f(m+m') = f(m) + f(m')$$

4) Categoría de espacios topológicos módulo homotopía (hTop)

<u>Definición</u>: Sean $f, g: X \longrightarrow Y$ apl. continuas de espacios topológicos. Decimos que f es homótopa a g si $\exists\, H: X \times [0,1] \longrightarrow Y$ continua

$$(x,0) \longmapsto f(x)$$
$$(x,1) \longmapsto g(x)$$

$[0,1]$ con la top. euclídea $=: I$

Escribimos $f \simeq g$

<u>Observación</u>: "ser homótopo a" es una relación de equivalencia

r) $f \simeq f$ $H: X \times I \longrightarrow X$
$$(x,t) \longmapsto f(x)$$

s) $f \simeq g \Leftrightarrow g \simeq f \Leftrightarrow \exists\, \tilde{H}: X \times I \longrightarrow Y$
$$\left.\begin{array}{l}(x,0) \longmapsto g(x)\\ (x,1) \longmapsto f(x)\end{array}\right\}$$

$\Downarrow$

$\exists\, H: X \times \overset{t}{I} \longrightarrow Y$

cont. $(x,0) \longmapsto f(x)$

$(x,1) \longmapsto g(x) \Rightarrow \tilde{H}(x,t) := H(x, 1-t)$

t) $f \simeq g \,;\, g \simeq h \Rightarrow f \simeq h \iff \exists\, H'': X \times I \longrightarrow Y$

$$(x,0) \longmapsto f(x)$$
$$(x,1) \longmapsto h(x)$$

$\Updownarrow$ (under $f \simeq g$) and $\Updownarrow$ (under $g \simeq h$)

$\exists\, H: X \times I \longrightarrow Y$

$$(x,0) \longmapsto f(x)$$
$$(x,1) \longmapsto g(x)$$

$\exists\, H': X \times I \longrightarrow Y$

$$(x,0) \longmapsto g(x)$$
$$(x,1) \longmapsto h(x)$$

Podemos definir

$$H''(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ H'(x,2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

<u>Definición</u>: Decimos que dos espacios X e Y son homótopos si existen aplicaciones

$$f: X \longrightarrow Y \qquad g \circ f \simeq Id_X$$
$$g: Y \longrightarrow X \qquad f \circ g \simeq Id_Y$$

La categoría htop es aquella que tiene como objetos los espacios topológicos módulo homotopía y morfismos las aplicaciones continuas módulo homotopía

<u>Ejemplos</u>: $\Rightarrow$ definición de contráctil

a) $[0,1] \simeq \{pt\}$

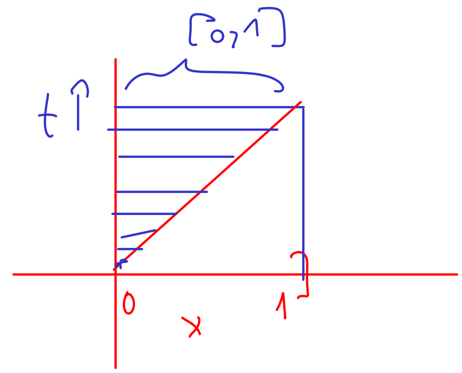
$$[0,1] \xrightarrow{f} \{pt\} \xrightarrow{g} [0,1]$$
$$x \longmapsto pt \longmapsto 0$$

$$\begin{tikzcd} \{pt\} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "Id"'] & {[0,1]} \arrow[d, "f"] \\ & \{pt\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right, "x"'] & \{pt\} \arrow[d] \\ & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

$$H: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \qquad H(x,0) = 0$$
$$\mathbb{R}^n \nearrow \qquad (x,t) \longmapsto t \cdot x \qquad H(x,1) = x$$

b) Ejercicio : $\mathbb{R}^n \simeq \{pt\}$

$[0,1] \simeq \{pt\}$



Trabajaremos con la categoría hTop.

c) $\{0\} \not\simeq \{0,1\}$ discreto

Propiedad : $\left.\begin{array}{l} X \text{ es arcoconexo} \\ Y \simeq X \end{array}\right\} \Rightarrow Y$ es arcoconexo

$\Updownarrow$

$\forall x, x' \in X, \exists \gamma : I \longrightarrow X$ continuo
$0 \longmapsto x$
$1 \longmapsto x'$

Preguntas: si $n \neq m$

$S^n \simeq S^m$?

esferas $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$

Notación : X e Y espacios topológicos, $[X,Y]$ las clases de homotopía de aplicaciones continuas de X a Y. $f : X \longrightarrow Y$; $[f] \in [X,Y]$

Funtores : Suponemos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías.
Un funtor F de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ es una correspondencia que asigna:
para cada objeto $X \in Ob(\mathcal{C})$, $F(X) \in Ob(\mathcal{D})$
para cada morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$

Cumpliendo: $\cdot\ F(\underset{\text{id en } \mathcal{C}}{1_X}) = \underset{\text{id en } \mathcal{D}}{1_{F(X)}}$

$$\cdot\ F(g \underset{\text{en } \mathcal{C}}{\circ} f) = F(g) \overset{\text{en } \mathcal{D}}{\circ} F(f)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "///"] \\ & Z \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \arrow[dl, phantom, "///"] \\ & F(Z) \end{tikzcd}$$

Se define funtor contravariante si se cumple que
$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \rightsquigarrow F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y),F(X))$
$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$

$$F(f\circ g) = F(g)\circ F(f)$$

Ejemplos:

(a) $\mathrm{Top} \xrightarrow{\text{olvido}} \mathrm{Set}$
$X \rightsquigarrow X$
$f \rightsquigarrow f$

Espacios Vectoriales $\longrightarrow$ Set

(b) $\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{hTop}$
$X \rightsquigarrow [X]$
$f \rightsquigarrow [f]$

estamos haciendo un cociente por una relación de equivalencia ($\simeq$)

Observación: se puede considerar la categoría que tiene como objetos las categorías y como morfismos los funtores.

Definición: Decimos que $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ son isomorfos en $\mathcal{C}$ si $\exists\, f : X \to Y$ t.q. $f \circ g = 1_Y$

categoría $\mathcal{C}$ $\quad g : Y \to X \qquad g \circ f = 1_X$

Proposición: $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un funtor, entonces si X e $Y \in Ob(\mathcal{C})$ son isomorfos en $\mathcal{C}$, entonces

$$F(X) \text{ y } F(Y) \text{ son isomorfos en } \mathcal{D}$$

Demostración

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "1_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "1_Y"] & \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \quad \overset{F}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "1_{F(X)}"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \arrow[dr, "1_{F(Y)}"] & \\ & F(X) \arrow[r, "F(f)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

2. Homología simplicial

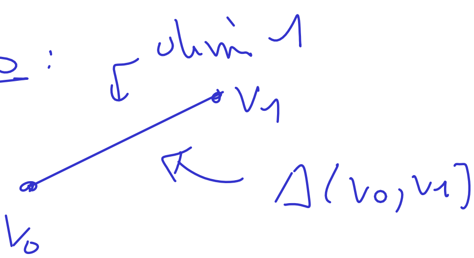
2.1. Símplices, complejos simpliciales y aplicaciones simpliciales.

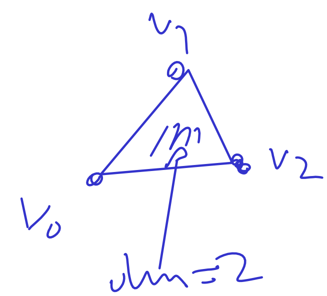
<u>Definición</u>: Fijamos $N > 0$, $v_0, v_1, \dots, v_n$ $(n+1)$-puntos de $\mathbb{R}^N$ t. q. $v_0, v_1, \dots, v_n$ sean afínmente independientes ($\Leftarrow\Rightarrow$ $\{v_n - v_0, v_n - v_1, \dots, v_n - v_{n-1}\}$ son linealmente indep.)

Definimos el n-símplice de vértices $v_0, \dots, v_n$ el subconj:

$$\Delta(v_0, \dots, v_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

<u>Ejemplo</u>:

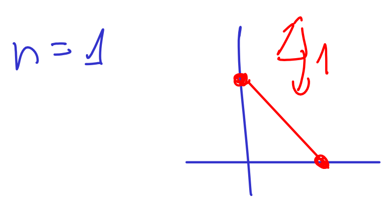


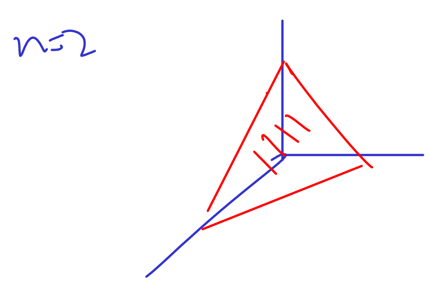


Llamamos dimensión del símplex a la n

Símplice estandar de dim $n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta\big((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,0,1)\big)$$



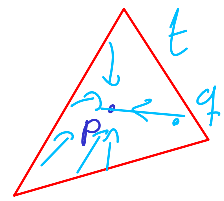


<u>Lema</u>: 1) Todo símplice es compacto, conexo, localmente arco-conexo y <u>contráctil</u>

2) 2 símplices de la misma dimensión son homeomorfos

$\Delta_1 \cong I \cong [0,1]$

Δ_n es contráctil



particularidad de los espacios convexos.

2)

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta[v_0, \ldots, v_n] & & & & x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \\ \downarrow & & & & \downarrow \; \uparrow \cong \\ \Delta[w_0, \ldots, w_n] & & & & f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i w_i \end{array}$$

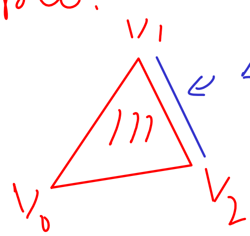
<u>Definición</u>:

Si $\Delta(v_0, \ldots, v_n)$ es un n-símplex, una cara K-dimensional de Δ es el K símplice definido por

$$\Delta(v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_K})$$

$$0 \le i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_K \le n$$

Ejemplo:



$\leftarrow \Delta(v_1, v_2)$

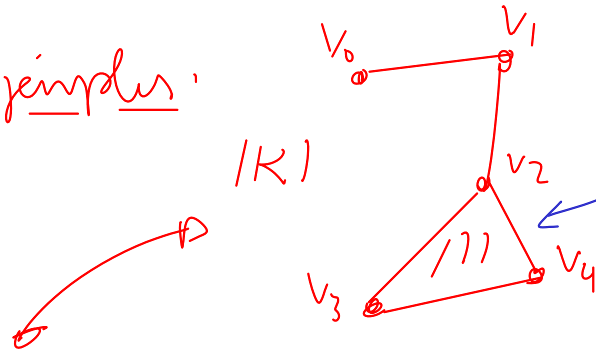
vértices $\leftrightarrow$ caras 0-dimensionales
aristas $\Leftrightarrow$ caras 1-dim.

<u>Definición</u>: un complejo simplicial es un conjunto (finito) de símplices de $\mathbb{R}^N$
$K = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ tales que

(i) $\sigma_i \in K \Rightarrow$ todas las caras de σ_i son de K.

(ii) σ_i, σ_j son símplices $\Rightarrow$ $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$
o bien
$\sigma_i \cap \sigma_j$ es una cara de σ_i y σ_j

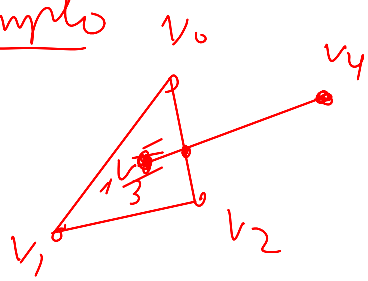
Ejemplos:



dim 2

$K = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, \Delta(v_0, v_1), \Delta(v_1, v_2), \Delta(v_2, v_3),$
$\Delta(v_3, v_4), \Delta(v_2, v_3, v_4), \Delta(v_2, v_4)\}$

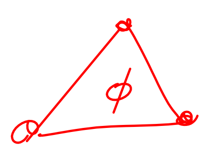
No ejemplo

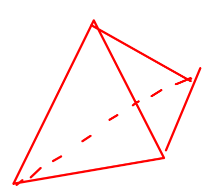


Def: La realización geométrica de K, que llamamos $|K|$ es el subespacio de $\mathbb{R}^N$ formado por los puntos de K, con la top. subespacio

Ejemplos: $\partial\Delta^n$

$\partial\Delta^1$  $\longleftrightarrow S^0$

$\partial\Delta^2$  $\longleftarrow S^1$

$\partial\Delta^3$  $\longleftarrow S^2$

$\partial\Delta^n \cong S^{n-1}$

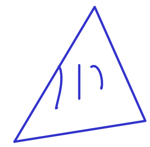
Dimensión del complejo := dimensión de la cara más grande

Definición: Definimos la característica de Euler (o Euler-Poincaré) de K un complejo es:

$$\chi(K) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i c_i$$

\# caras de dimensión i

Cálculo:



$$\chi(v_0) = 1$$

$$\parallel$$

$$\chi(\Delta^n) = 1$$

$v_0, \dots, v_n \to \binom{n+1}{k+1}$ caras de dim k

$$\chi(\Delta^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \cdot (-1)^k = 1$$

$$0 = (1-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k$$