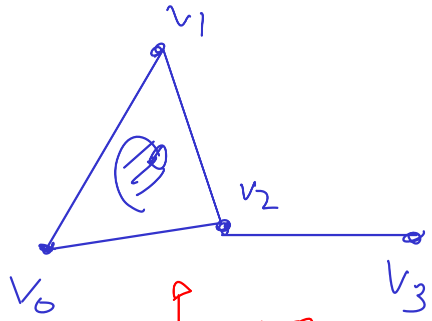
Curso de homología (II)



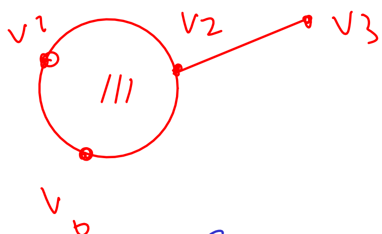
$\Longleftrightarrow$ $\{v_0, v_1, v_2, v_3, [v_0,v_1], [v_1,v_2], [v_0,v_2], [v_2,v_3], [v_0,v_1,v_2]\}$

información combinatoria

considerar una triangulación

poliedro

$\cong$

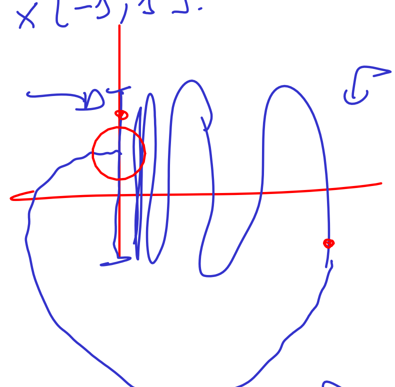


espacio topológico

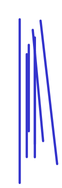
Propiedad: Si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es triangulable entonces $\forall x \in X$, $\exists\, U$ entorno contráctil de $x \in X$. (localmente contráctil).

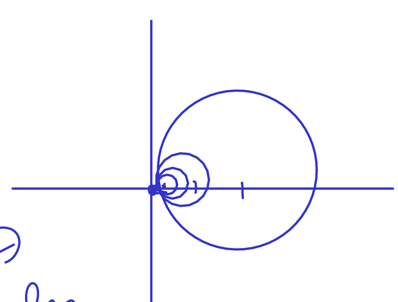
Contraejemplo: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\{0\} \times [-1,1]$.



$\cup\ (x, \sin(\frac{1}{x}))$





$\bigcup_{n \geq 1} \partial B((0,\frac{1}{n}), \frac{1}{n})$

No triangulables

Supondremos que todos los espacios de este curso son triangulables.

2.3 Cadenas de un poliedro

K un complejo simplicial, con los vértices ordenados, por lo que los símplices serán de la forma

$$\Delta[v_{i_0},\dots,v_{i_k}] \qquad \underbrace{i_0<i_1<\dots<i_k}_{\text{es una orientación}}$$

Definición: K comp. simplicial ordenado y $n \geq 0$. Llamamos el grupo de cadenas n-dimensionales de K, y lo denotamos por $C_n(K)$ el grupo abeliano libre generado por los n-símplices.

$$C_n(K) = \bigoplus_{\substack{\sigma \text{ una} \\ \text{cara } n \\ \text{dimensional}}} \mathbb{Z}[\sigma]$$

Si $n > \dim(K)$, $C_n(K) = 0$

Ejemplo: Δ el 2-símplice $[v_0, v_1, v_2]$

$$C_0(\Delta) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_3] \cong \mathbb{Z}^3$$

$$C_1(\Delta) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \oplus \mathbb{Z}\underbrace{[v_0, v_2]}_{\text{ordenado}} \cong \mathbb{Z}^3$$

$$C_2(\Delta) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2] \cong \mathbb{Z}$$

Definición: Si K es un complejo simplicial ordenado, para cada $n \geq 1$, definimos el operador borde:

$$\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$$

$$\partial_n [v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{[v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, \cancel{v_{i_k}}, \ldots, v_{i_n}]}_{n-1 \text{ símplice}}$$

⇓
define unívocamente
un morfismo de grupos
abelianos $\partial_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$

Para simplificar, escribimos ∂ en lugar de ∂_n.

Ejemplo:

$$\partial_1 [v_0, v_1] = [v_1] - [v_0]$$

$$\partial_2 [v_0, v_1, v_2] = \underbrace{[v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]}$$

$$\partial_1 \circ \partial_2 [v_0, v_1, v_2] = \partial_1 (\quad) = \cancel{[v_2]} - \cancel{[v_1]} - (\cancel{[v_2]} - \cancel{[v_0]}) + \cancel{[v_1]} - \cancel{[v_0]}$$

$$= 0$$

Proposición: $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \quad \forall n \geq 1 \iff \partial^2 = 0$

Dem: se demuestra para $[v_0, \ldots, v_n]$, no hacerse un lío con los signos.

Definición general: un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}$-módulos es una sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos C_n juntamente con morfismos $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ tq. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

<u>Definición</u>: (C_n, ∂_n) un complejo, definimos:

- Los ciclos de dimensión n son $Z_n(C) = \ker(\partial_n)$ $= \{\sigma \in C_n \text{ tq } \partial_n(\sigma) = 0\}$

- Los bordes de dimensión n son
$B_n(C) = \operatorname{Im}(\partial_{n+1}) \leq C_n$

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \tau & \longmapsto & \sigma & \longmapsto & 0 \\ & & \uparrow & & \\ & & \text{borde} & & \end{array} \Bigg\} \quad B_n(C) \subseteq Z_n(C)$$

- El n-ésimo grupo de homología del complejo es el módulo $H_n(C) = Z_n(C) / B_n(C)$

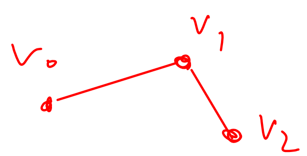
<u>Ejemplos</u>:

(1) $X = \bullet\, v_0$ $\qquad C_0(X) = \mathbb{Z}[v_0]$ $\qquad Z_0(X) = \mathbb{Z}$

$C_i(X) = 0 \quad i \geq 1$ $\qquad H_0(X) = \mathbb{Z}/_0 \cong \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccc} C_2(X) & \longrightarrow & C_1(X) & \longrightarrow & C_0(X) \\ \| & & \| & & \| \\ 0 & & 0 & \longmapsto & \mathbb{Z} \end{array}$$

$H_i(X) = 0 \quad i \geq 1.$

(2) 

$C_0(K) = \mathbb{Z}[v_0] \oplus \mathbb{Z}[v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2] \cong \mathbb{Z}^3$

$C_1(K) = \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_1, v_2] \cong \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3$

$C_i(K) = 0 \quad \forall i \geq 2$

$\partial_1 [v_0, v_1] = v_1 - v_0$

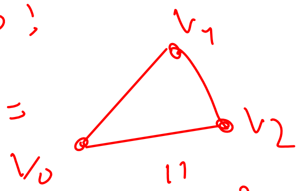
$\partial [v_1, v_2] = v_2 - v_1$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\mathbb{Z}(v_0, v_1, v_2)}{\substack{v_0 \sim v_1 \\ v_1 \sim v_2}} = \mathbb{Z}[v_0] \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \frac{\overset{\cong 0}{\mathrm{Ker}(\partial_1)}}{\underset{=0}{\mathrm{Im}(\partial_2)}} = 0$$

Ejercicio:

- $K :=$  $\cong \partial \Delta^2$

$$H_i(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0,\ i=1 \\ 0 & i>1 \end{cases}$$

- $$H_i(\partial \Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i=0,\ n-1 \\ 0 & i\neq 0,\ i\neq n-1 \end{cases}$$

3: Sucesiones exactas

Def: (C_n, ∂_n) un complejo de cadenas es exacto si tiene homología $=0$.

Ejemplos:

a) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial} B$ es exacto $\iff \mathrm{Ker}(\partial)=0 \iff \partial$ inyectiva

b) $A \xrightarrow{\partial} B \longrightarrow 0$ es exacto $\iff \mathrm{Im}(\partial) = B \iff \partial$ suprayectiva

c) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial} B \longrightarrow 0$ exacto $\iff \partial$ isomorfismo

d) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\partial} B \xrightarrow{\partial'} C \longrightarrow 0$

sucesión exacta corta: ∂ inyectiva, ∂' suprayectiva

e) Si (C_n, ∂_n) es suc. exacta | $\mathrm{Ker}(\partial') = \mathrm{Im}(\partial)$

$$\begin{tikzcd}
C_{n+2} \arrow[r, "\partial_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[dr] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dr] & C_{n-2} \\
\mathrm{Ker}(\partial_{n+2}) \arrow[u] & & \mathrm{Ker}(\partial_n) \arrow[u] \arrow[dr] & & \mathrm{Coker}(\partial_n) \arrow[d] \\
? & 0 \arrow[ur] & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

$f: A \longrightarrow B$ módulos

$\mathrm{Koker}(f) = B/\mathrm{Im}(f)$

Definición: Una aplicación entre sucesiones exactas (C_n, ∂_n) y (C'_n, ∂'_n)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "///"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots & C'_{n+1} \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"'] & C'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$f_n : C_n \to C'_n \quad \text{tq} \quad \partial'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial_n$$

Lema (de los 5)

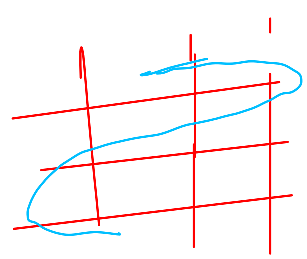
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
A \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "f"] & D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] & \{\text{exacto} \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] \arrow[d] & E' & \{\text{exacto} \\
0 & 0 & & 0 & \text{exacto} &
\end{tikzcd}$$

$\partial = 0$

Entonces f es un isomorfismo

Ejercicio: ver que f es sobreyectiva

· Buscar y demostrar el lema de la serpiente.



4. Homología singular:

Definición: Un n-símplice singular de un espacio topológico X es una aplicación continua:

$$\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$$

$\uparrow$ n-símplex estándar

σ no tiene porqué ser inyectiva

Una cadena singular $\overset{\text{dim } n}{}$ es una suma

$$\bigoplus \mathbb{Z}\sigma$$

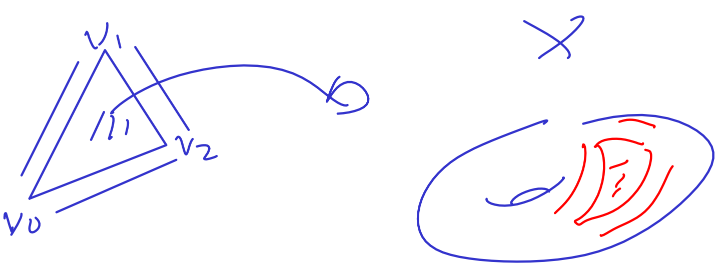
σ símplex singular de dim n

$C_n(X) =$ sumas de símplices singulares como $\mathbb{Z}$-módulo libre

Definimos el operador borde:

$$\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$$

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma\Big|_{[v_0, v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots, v_n]}$$



Proposición: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \quad \forall n \geq 1.$

Definición: La homología singular de un espacio X es la homología del complejo de cadenas singulares en X: $C_*(X)$:

$$H_n(X) = \ker(\partial_n) \big/ \operatorname{Im}(\partial_{n+1})$$

Ejemplo: la homología de un punto

$$\Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n \xrightarrow{\sigma_n} \{pt\}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & C_3 & \to & C_2 & \to & C_1 & \to & C_0 & \to 0 \\
 & \cong & & \cong & & \cong & & \cong & \\
\xrightarrow{\pm Id} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{Id} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} &
\end{array}$$

$H_2(pt) = 0$, $H_1(pt) = 0$

$$\boxed{H_0(pt) = \mathbb{Z}}$$

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n \sigma_{n-1} \quad \begin{array}{|l} n \text{ par}: 1 \\ n \text{ impar}: 0 \end{array}$$

H_0 y arco-conexión:

Teorema: Si X esp. top. y $X = \coprod_\alpha X_\alpha$, ($X_\alpha$ componentes arco-conexas)

entonces:

(a) $H_0(X) = \bigoplus_\alpha \mathbb{Z}$ } siempre es libre

(b) $H_i(X) = \bigoplus_\alpha H_i(X_\alpha)$

Invariancia homotópica:

Teorema: $f, g: X \to Y$ son aplicaciones homótopas

$(f \simeq g) \Rightarrow f_n : H_n(X) \to H_n(Y)$ ¿qué es f_n?

$f_n = g_n$

Se construye a partir de la comp.

$$\begin{array}{ccc}
\Delta^n & \to & X \\
& \searrow^{f_n} & \downarrow f \\
& & Y \\
& \searrow^{g_n} & \downarrow g \\
& & Z
\end{array}$$

$(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$

tenemos que + Invariancia la homología es un funtor

Corolario: $X \simeq Y \Rightarrow H_n(X) \cong H_n(Y) \quad \forall n.$

Dem:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "Id_X \simeq g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "f\circ g \simeq Id_Y"] & \\ & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow H_n$

$$\begin{tikzcd} H_n(X) \arrow[r, "f_n"] \arrow[dr, "Id"'] & H_n(Y) \arrow[d, "g_n"] \arrow[dr, "Id"] & \\ & H_n(X) \arrow[r, "f_n"] & H_n(Y) \end{tikzcd}$$

$\Downarrow$

f_n y g_n son isomorfismos. #

· Sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris:

Teorema (M-V): Sea X un espacio topológico y U, V abiertos tales que $U \cup V = X$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "f"] & \\ U\cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & V \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$$\cdots \to H_n(U\cap V) \xrightarrow{(i_n, j_n)} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{f_n - g_n} H_n(X) \xrightarrow{\partial_n}$$

$$\to H_{n-1}(U\cap V) \to H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) \to H_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

$\Uparrow$

es una sucesión exacta larga $\cdots H_0(X) \to 0$

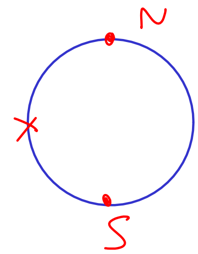
Ejemplo: $n \geq 1$

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0, n \\ 0 & \text{si } i \neq 0, i \neq n \end{cases}$$

Cálculo por inducción:

n = 1

S^1



$U = S^1 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R} \simeq *$

$V = S^1 \setminus \{S\} \simeq *$

$U \cap V = S^1 \setminus \{S, N\} \simeq \{*, *\} = S^0$

$$H_2(U\cap V) \to \underset{0}{H_2(U)} \oplus \underset{0}{H_2(V)} \to H_2(S^1) \to \quad \{H_i(S^1) = 0 \quad i > 1.$$

$$\to \underset{0}{H_1(U\cap V)} \to \underset{0}{H_1(U)} \oplus \underset{0}{H_1(V)} \xrightarrow{\text{iny.}} H_1(S^1) \to$$

$$\to H_0(U\cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{f-g} H_0(S^1) \to 0$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$\ker \cong \mathbb{Z}$

$(1,0) \longmapsto (1,1) \qquad (1,0) \longmapsto 1$

$(0,1) \longmapsto (1,1) \qquad (0,1) \longmapsto -1$

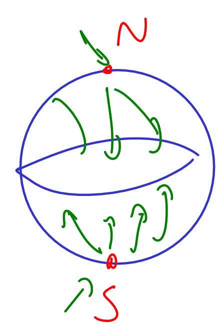
$1 - 1 = 0$

$H_1(S^1) \cong \ker \cong \mathbb{Z}$

Cierto para $n-1$: $\quad H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$

$H_0(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$

$H_i(S^{n-1}) = 0 \quad (i \neq 0, i \neq n-1)$



$U = S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n \simeq \{*\}$

$V = S^n \setminus \{S\} \cong \mathbb{R}^n \simeq \{*\}$

$U \cap V = S^n \setminus \{S, N\} \simeq S^{n-1}$

Mayer-Vietoris:

$$\overset{0}{H_i(M)} \oplus \overset{0}{H_i(V)} \longrightarrow H_i(S^n) \xrightarrow{\cong}$$

$$\longrightarrow H_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \underset{0}{H_{i-1}(M)} \oplus \underset{0}{H_{i-1}(V)} \longrightarrow$$

$i>1$

Si $i>1$

$$\underset{\mathbb{Z}}{H_{i-1}(S^{n-1})} \cong H_i(S^n)$$

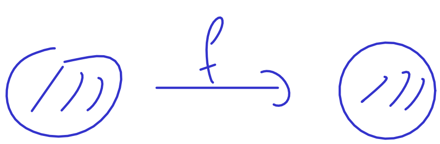
$\iff i-1=n-1 \iff i=n$

Teorema del punto fijo de Brower:

$f: \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$ continua $\Rightarrow$ f tiene un punto fijo

$\mathbb{D}^n = \{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|\le 1\} \supseteq S^{n-1}$

$\exists\, x\in\mathbb{D}^n$ tq $f(x)=x$

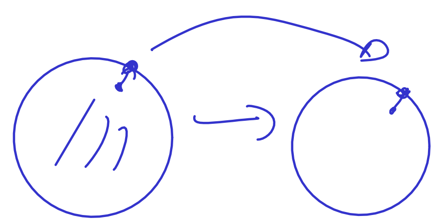


Dem:

(a) no hay $f:\mathbb{D}^n \longrightarrow S^{n-1}$ continua

$x \longmapsto x$

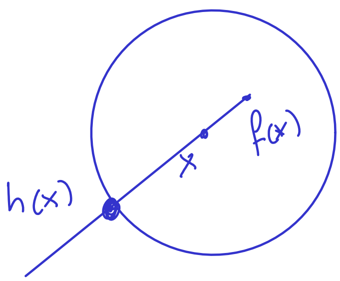
t.q. $|x|=1$



$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "i_n"] \arrow[dr, "Id"'] & \mathbb{D}^n \arrow[d, "f"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd} \xRightarrow{H_{n-1}} \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[dr, "Id"'] & 0 \arrow[d] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd} \quad \#$$

(b) Si tenemos una $f:\mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}^n$ sin puntos fijos

$f(x)\neq x \quad \forall x$

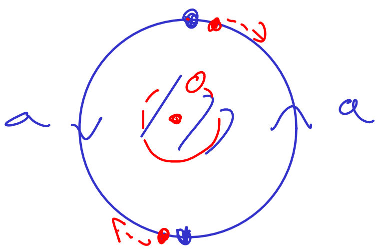


podemos construir el diagrama

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "Id"'] & D^n \arrow[d, "h"] \\ & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

#

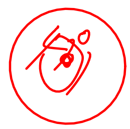
Plano proyectivo:

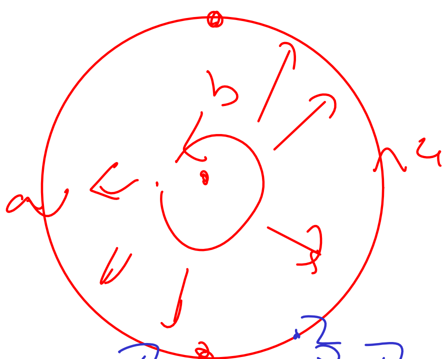


Calculemos la homología

$U = \mathbb{R}P^2 \setminus \{0\} \simeq$ 

$V = B(0,\varepsilon) \simeq *$

$U \cap V =$  b



$b \longmapsto 2a$

$$H_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{H_1(U\cap V)} \xrightarrow{2} \underset{\mathbb{Z}}{H_1(U)} \oplus \underset{0}{H_1(V)} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{H_1(\mathbb{R}P^2)} \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow H_0(U\cap V) \xrightarrow{\text{iny}} H_0 \; \dots$$

$0 \nearrow$