Conceptos Basicos

Construcción Grupo Fundamental

Grupo Fundamental

El Functor

Bibliografía

EL GRUPO FUNDAMENTAL: UNA INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

María Angélica Umbarila Martin

Maumbarilam@correo.udistrital.edu.co
Matemáticas
Universidad Distrital

7 Mayo 2016

Indice

1. Conceptos Basicos
2. Construcción Grupo Fundamental
3. Grupo Fundamental
4. El Functor
5. Bibliografía

Conceptos Basicos

Definición 1

Si f y f' son aplicaciones continuas del espacio X en el espacio Y, decimos que f es homotópica a f' (y se notará $f \simeq f'$) si existe una aplicación continua

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

tal que $F(x,0) = f(x)$ y $F(x,1) = f'(x)$, $\forall x \in X$.

Conceptos Basicos

Definición 2

Si $f : [0,1] \to x$ es una aplicación continua tal que $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$, decimos que f es un camino de X desde x_0 hasta x_1.

Definición 3

Dos caminos f y f' que aplican el intervalo $[0,1]$ en X,se dice que son homotopicos por caminos (lo cual se notara por $f \simeq_p f'$) si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 y existe una aplicación

$$F : I \times I \to X$$

tal que $F(s,0) = f(s)$, $F(s,1) = f'(s)$, $F(0,t) = x_0$ y $F(1,t) = x_1$ $\forall s,t \in I$.

Construcción Grupo Fundamental

Lema I.

Las relaciones $\simeq$ y $\simeq_p$ son de equivalencia.

Ejemplo A

Sean f y g dos aplicaciones continuas de un espacio X en R^2. Podemos ver de manera sencilla que f y g son homotópicas; la aplicación

$$F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

es una homotopia entre ellas, conocida como homotopía por rectas. (Si f y g son caminos de x_0 a x_1, entonces F será una homotopía de caminos).

Construcción Grupo Fundamental

Definición 4

Si f es un camino en X de x_0 a x_1, y g es un camino en X de x_1 a x_2, definimos el producto $f * g$ de f y g como el camino h dado por las ecuaciones

$$h(s)=\begin{cases} f(2s) \ para \ s\in [0,\frac{1}{2}] \\ \\ g(2s-1) \ para \ s\in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

Nota

La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación

$$[f]*[g]=[f*g]$$

.

Construcción Grupo Fundamental

Definición 5

Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X. Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se llama lazo basado en x_0. El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en x_0, con la operaciíon $*$, se denomina GRUPO FUNDAMENTAL de X relativo al punto base x_0. Se denota por $\pi_1(X, x_0)$.

Construcción Grupo Fundamental

Teorema 1.

el GRUPO FUNDAMENTAL es un grupo, es decir, cumple las siguientes propiedades:

(1) (Asociatividad). Sean f, g, h lazos basados en el punto x_0, entonces $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$.

(2) (Neutro). Dado $x \in X$,denotemos por e_{x_0} el camino constante $e_{x_0} : I \to x_0$ que lleva todo $y \in I$ al punto x_0. así
$[f] * [e_{x_0}] = [f]$
$= [e_{x_0}] * [f] = [f]$.

(3) (Inverso).Dado el lazo f en X basado en x_0, sea $\hat{f}$ el lazo definido por $\hat{f} = f(1-s)$, el cual se conoce como inverso de f. Entonces
$[f] * [\hat{f}] = [e_{x_0}]$ y $[\hat{f}] * [f] = [e_{x_0}]$.

EL GRUPO FUNDAMENTAL: UNA INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

María Angélica Umbarila Martin

Conceptos Basicos

Construcción Grupo Fundamental

Grupo Fundamental

El Functor

Bibliografía

Demostración

(1) (Asociatividad). Sean f, g, h lazos basados en el punto x_0, para demostrar $[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h]$ basta con demostrar que $f * (g * h) \simeq_p (f * g) * h$. Definamos la función

$$F(t,s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}, \\ g(4t-s-1), & \text{si } \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}, \\ h(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

podemos ver que $(f * g) * h \simeq_p f * (g * h)$.

Demostración

(2) (Neutro). Tomando la idea de la prueba anterior, vamos a demostrar que $f * e_{x_0} \simeq f$ y que $e_{x_0} * f \simeq f$. Veamos estas dos funciones:

$$F'(t,s) = \begin{cases} f(4t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ x_0, & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Y

$$F''(t,s) = \begin{cases} f(1 - 2(\frac{1-t}{2-s})), & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq 1, \\ x_0, & \text{si } 0 \leq t \leq s2. \end{cases}$$

EL GRUPO FUNDAMENTAL: UNA INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

María Angélica Umbarila Martin

Conceptos Basicos

Construcción Grupo Fundamental

Grupo Fundamental

El Functor

Bibliografía

Demostración

Podemos ver, que la función F' es una homotopía entre f y $f * e_{x_0}$, luego $f \simeq f * e_{x_0}$ y que la función F'' es una homotopía entre $e_{x_0} * f$ y f, por lo que $e_{x_0} * f \simeq f$.

EL GRUPO FUNDAMENTAL: UNA INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

María Angélica Umbarila Martin

Conceptos Basicos

Construcción Grupo Fundamental

Grupo Fundamental

El Functor

Bibliografía

Demostración

(3) (Inverso). Siguiendo con la idea de la prueba, vamos a demostrar que $f * \hat{f} \simeq e_{x_0}$ y que $\hat{f} * f \simeq e_{x_0}$ con las siguientes funciones:

$$F'(t,s) = \begin{cases} f(2ts), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(2s(1-t)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Y

$$F''(t,s) = \begin{cases} f(2s(1-t)), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(2st), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

EL GRUPO FUNDAMENTAL: UNA INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

María Angélica Umbarila Martin

Conceptos Basicos

Construcción Grupo Fundamental

Grupo Fundamental

El Functor

Bibliografía

Demostración

Podemos ver, que la función F' es una homotopía entre e_{x_0} y $f * \hat{f}$, luego $e_{x_0} \simeq f * \hat{f}$ y que la función F'' es una homotopía entre e_{x_0} y $\hat{f} * f$, por lo que $e_{x_0} \simeq \hat{f} * f$.

Grupo Fundamental

Ejemplo

En R^n, $\pi_1(R^n, x_0)$ es el grupo trivial, ya que si f es un lazo de R^n basado en x_0, la homotopía por rectas es una homotopía de caminos entre f y el camino constantemente x_0.

EL GRUPO FUNDAMENTAL: UNA INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

María Angélica Umbarila Martin

Conceptos Basicos

Construcción Grupo Fundamental

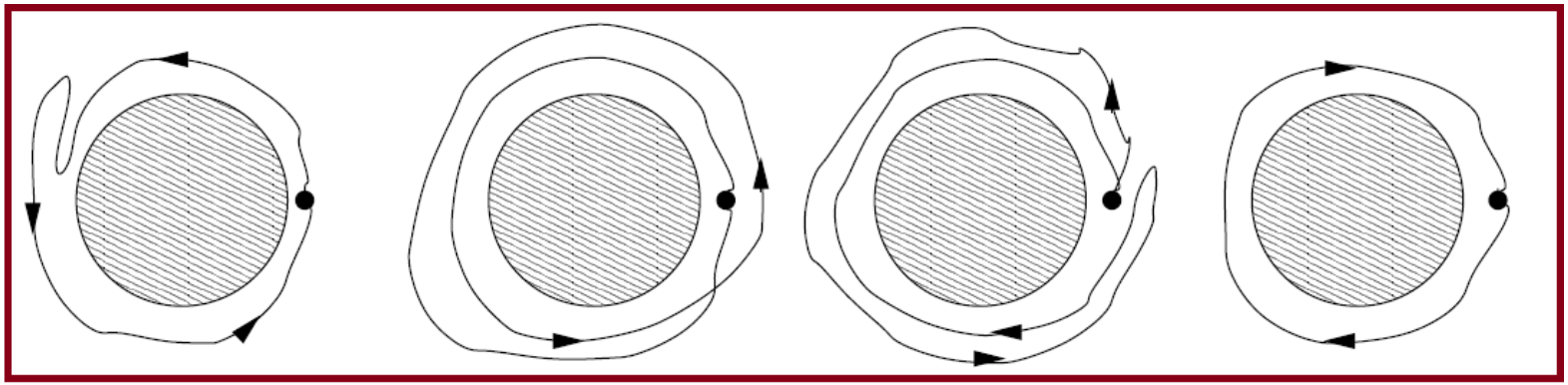
Grupo Fundamental

El Functor

Bibliografía

Ejemplo:La recta real se enrolla.

Pasemos ahora a un grupo fundamental no trivial (de manera mas intuitiva que rigurosa), veamos la circunferencia: Para verlo mejor veamos los lazos en S^1 un poco separados.



Grupo Fundamental

Ejemplo:La recta real se enrolla.

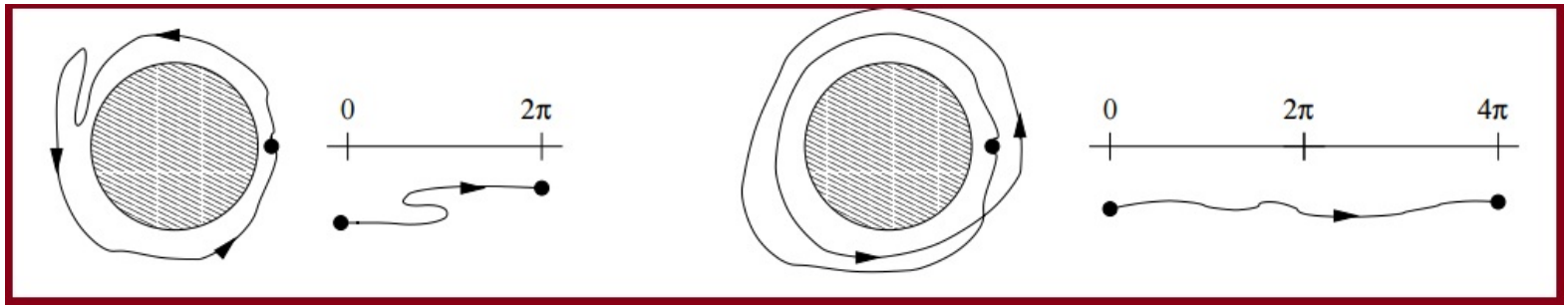
Cada uno de estos lazos parece que no se puede deformar en ningún otro, esto sugiere que los lazos en S^1, salvo homotopías, están caracterizados por el número de vueltas que dan, esto es, tenemos una biyección

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1, x_0) &\to \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\to \text{ número de vueltas.} \end{aligned}$$

Grupo Fundamental

Ejemplo:La recta real se enrolla.

El principal problema para probar que es un isomorfismo es contar las vueltas que da cada lazo. La forma que resulta efectiva es desenrollarla desde el punto base en la recta real, ya que llegariamos al final del camino a $2\pi *$número de vueltas.



Grupo Fundamental

Ejemplo:La recta real se enrolla.

Por lo que intuitivamente podemos ver que $\pi_1(S^1, (1,0)) \approx \mathbb{Z}$.

Nota.

Para definir 'matemáticamente' la idea de desenrollar los caminos en la recta real se necesitan varios lemas que salen del proposito de la charla.

Grupo Fundamental

Proposición

Si X es conexo por caminos y $x_0, y_0 \in X$ entonces

$$\pi_1(X, x_0) \approx \pi_1(X, y_0)$$

.

Demostración

Sea γ un camino cualquiera con $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = y_0$. Se probará que

$$\begin{aligned} \phi : \quad \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(X, y_0) \\ [\alpha] &\to [\hat{\gamma} * \alpha * \gamma] \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

El Functor

Teorema

Para cada función continua $f : X \to Y$ se define $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ como $f_*(\alpha) = [f \circ \alpha]$, entonces

1) f_* es un homomorfismo de grupos y si f es la identidad f_* tambien lo es.
2) Para $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ continuas, $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
3) Si f es un homeomorfismo, f_* es un isomorfismo.

El Functor

Ejemplo.

La corona $C = ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9)$ no es homeomorfa al rectángulo
$Q = ((x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 1 < y < 2)$
Si existiera un homeomorfismo $f : Q \to C$, considerando $r_0 = f^{-1}((2, 0))$ y definiendo $g : C \to S^1$ como $g(x, y) = (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$, se llega a una contradicción.

Bibliografía

Bibliografía

1) CHAMIZO FERNANDO (2004). TOPOLOGÍA (La Topología de segundo no es tan dificil). Recuperado de: www.uam.es.

2) James R. Munkres, Topología, Segunda Edición Pearson, Madrid, 2002, 365-380.