Sobre un Anillo Topológico Parcialmente Ordenado (Los Números Irreales)

Julián Camilo Cano

Universidad Nacional de Colombia

Universidad Pedagógica Nacional

TOP2-UD: Segundo Encuentro de Jóvenes Topólogos

Mayo de 2016

Índice

1 Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales
6. Epílogo

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales
6. Epílogo

El Campo $\mathbb{C}$ de los Números Complejos

Un número complejo $z \in \mathbb{C}$ es un elemento de la forma

$$z = a + bi \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad i^2 = -1$$

Si $z, w \in \mathbb{C}$ son los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, se definen:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$$

$$zw = (a + bi)\,(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

El Anillo $\mathbb{M}$ de los Números Dobles

Un número doble $z \in \mathbb{M}$ es un elemento de la forma

$$z = a + b\sigma \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sigma^2 = 1 \quad \text{con} \quad \sigma \neq \pm 1$$

Si $z, w \in \mathbb{M}$ son los números dobles $z = a + b\sigma$ y $w = c + d\sigma$, se definen:

$$z + w = (a + b\sigma) + (c + d\sigma) = (a + c) + (b + d)\,\sigma$$

$$zw = (a + b\sigma)\,(c + d\sigma) = (ac + bd) + (ad + bc)\,\sigma$$

El Anillo $\mathbb{D}$ de los Números Duales

Un número dual $z \in \mathbb{D}$ es un elemento de la forma

$$z = a + bn \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad n^2 = 0 \quad \text{con} \quad n \neq 0$$

Si $z, w \in \mathbb{D}$ son los números duales $z = a + bn$ y $w = c + dn$, se definen:

$$z + w = (a + bn) + (c + dn) = (a + c) + (b + d)\, n$$

$$zw = (a + bn)\,(c + dn) = (ac) + (ad + bc)\, n$$

Extensiones Cuadráticas de los Números Reales

Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales

- Números Complejos
- Números Dobles
- Números Duales

Referencias

- Luque, C. J. & et al. (2006). *Estructuras Análogas a los Números Reales*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Yaglom, I. M. (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis*. New York: Springer-Verlag.

El Conjunto $\mathbb{J}$ de los Números Irreales

Un número irreal $w \in \mathbb{J}$ es un elemento de la forma

$$w = a + bj \quad \text{donde} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad j^2 = j \quad \text{con} \quad j \neq 0 \quad \text{y} \quad j \neq 1$$

Si $w, z \in \mathbb{J}$ son los números irreales $w = a + bj$ y $z = c + dj$, se definen:

$$w + z = (a + bj) + (c + dj) = (a + c) + (b + d)\, j$$

$$wz = (a + bj)\,(c + dj) = (ac) + (ad + bc + bd)\, j$$

$$\mathbb{J} = \mathbb{R}\,[j] = \left\{ a + bj \ : \ a, b \in \mathbb{R} \ \wedge \ j^2 = j \ ; \ 0 \neq j \neq 1 \right\}$$

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales
6. Epílogo

Definición 2.1

Un *número irreal* es una pareja ordenada de números reales, es decir que si $w \in \mathbb{J}$ entonces $w = (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Además, definimos la *unidad irreal* como el número irreal $j = (0, 1)$.

Estructura Algebraica de los Números Irreales

Definición 2.2 (Adición de números irreales)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$ tales que $w = (a, b)$ y $z = (c, d)$. Se define la operación suma $\oplus$ en $\mathbb{J}$ como sigue:

$$w \oplus z = (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

Definición 2.3 (Producto de números irreales)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$ tales que $w = (a, b)$ y $z = (c, d)$. Se define la operación multiplicación $\odot$ en $\mathbb{J}$ como sigue:

$$w \odot z = (a, b) \odot (c, d) = (ac, ad + bc + bd)$$

Definición 2.4 (Producto escalar)

Sea $w \in \mathbb{J}$ tal que $w = (a, b)$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se define la operación producto escalar $\cdot$ en $\mathbb{J}$ como sigue:

$$\lambda \cdot w = \lambda \cdot (a, b) = (\lambda, 0) \odot (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Estructura Algebraica de los Números Irreales

Proposición 2.1 (El Anillo de los Números Irreales)

La estructura algebraica $(\mathbb{J}, \oplus, \odot)$ del conjunto de los números irreales con la suma y la multiplicación es un *Anillo Conmutativo con Identidad.*

- $0 = (0, 0)$
- Si $w = (a, b)$ entonces $-w = (-a, -b)$
- $1 = (1, 0)$
- Si $w = (a, b)$ es tal que $a \neq 0$ y $a + b \neq 0$ entonces $w^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a(a+b)}\right)$

Estructura Algebraica de los Números Irreales

Proposición 2.2

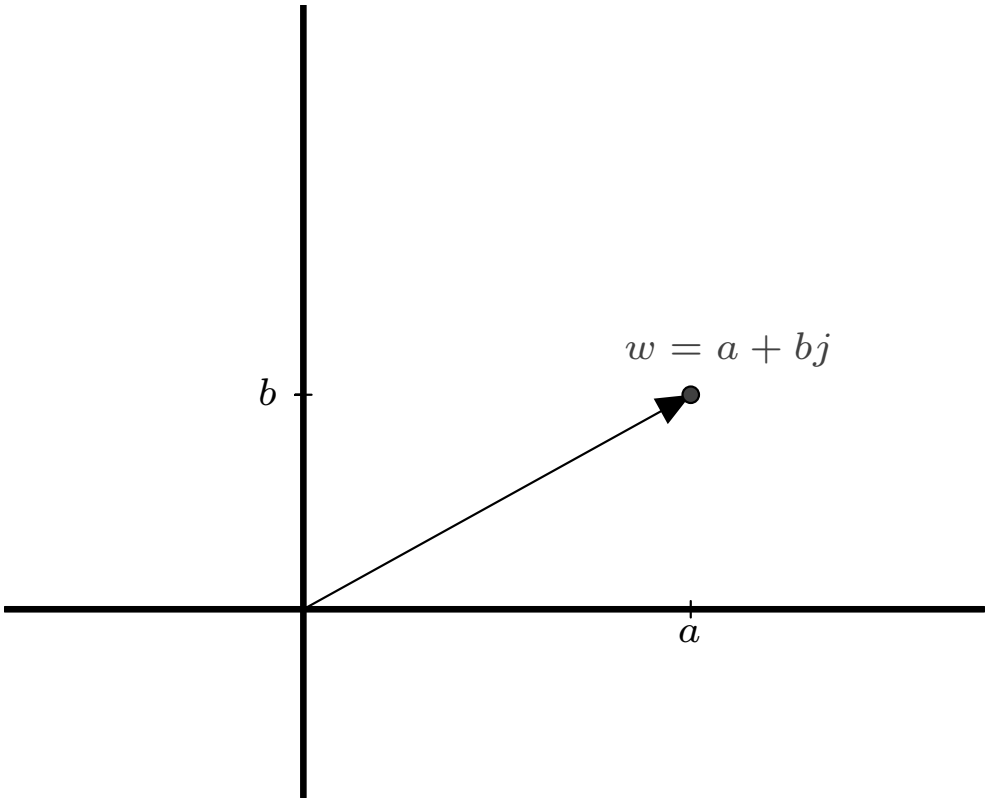
La estructura $(\mathbb{J}, \oplus, \cdot)$ del conjunto de los números irreales con la suma y el producto escalar es un *Espacio Vectorial Real*.

Proposición 2.3

La estructura $(\mathbb{J}, \oplus, \odot, \cdot)$ del conjunto de los números irreales con la suma, la multiplicación y el producto escalar es un *Álgebra Lineal Real Conmutativa con Identidad*.

Proposición 2.4

- Los espacios vectoriales $\mathbb{J}$ y $\mathbb{R}^2$ son isomorfos.
- El espacio vectorial real $\mathbb{J}$ es de dimensión dos.
- El conjunto $\mathcal{B} = \{1, j\} \subset \mathbb{J}$ es una base para el espacio vectorial real $\mathbb{J}$.



Proposición 2.5 (Característica de los Números Irreales)

El anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales tiene característica $\operatorname{char}(\mathbb{J}) = 0$

Proposición 2.6 (Unidades de los Números Irreales)

El conjunto $\mathcal{U}(\mathbb{J})$ de las unidades del anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales es:

$$\mathcal{U}(\mathbb{J}) = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} \ : \ a \neq 0 \ \wedge \ a + b \neq 0\}$$

Proposición 2.7 (Divisores de Cero de los Números Irreales)

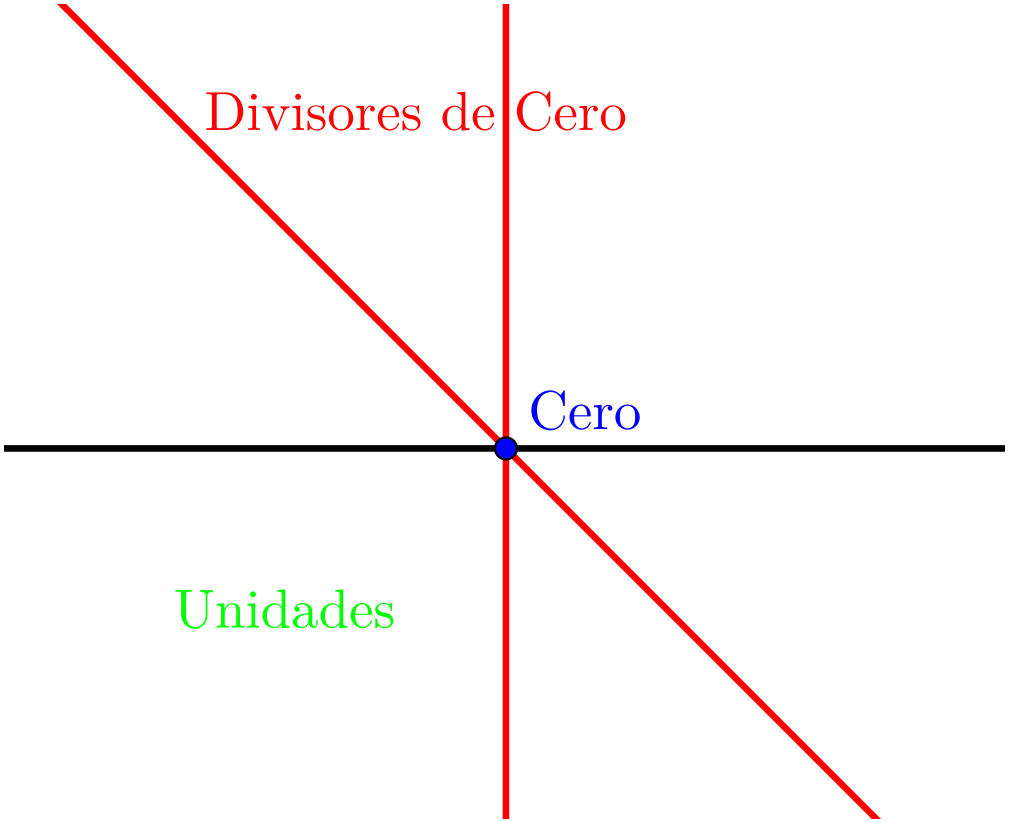
El conjunto $\mathcal{D}$ de los elementos divisores de cero del anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales es:

$$\mathcal{D} = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} - \{0\} \ : \ a = 0 \ \vee \ a + b = 0\}$$

Proposición 2.8

Para cada número irreal w se tiene uno y sólo uno de los siguientes casos:

$$w = 0 \quad \veebar \quad w \in \mathcal{U}(\mathbb{J}) \quad \veebar \quad w \in \mathcal{D}$$



Proposición 2.9 (Elementos Idempotentes en $\mathbb{J}$)

El conjunto $\mathcal{I}$ de los elementos idempotentes del anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales es el conjunto finito

$$\mathcal{I} = \left\{0, 1, j, \overline{j}\right\}$$

- Idempotentes Reales: $\begin{cases} w = 0 \\ w = 1 \end{cases}$
- Idempotentes No Reales: $\begin{cases} w = j = (0, 1) \\ w = \overline{j} = 1 - j = (1, -1) \end{cases}$

Proposición 2.10 (Ideales del Anillo de los Números Irreales)

La colección $\mathcal{I}$ de los ideales del anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales es

$$\mathcal{I} = \{\{0\}, I, J, \mathbb{J}\}$$

donde I y J son los ideales propios no triviales dados por

$$I = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} \,:\, a = 0\} \qquad J = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} \,:\, a + b = 0\}$$

Proposición 2.11 (Ideales Principales del Anillo $\mathbb{J}$)

El anillo conmutativo con identidad $\mathbb{J}$ de los números irreales es un anillo de ideales principales.

Más aún, cada ideal de $\mathbb{J}$ es generado por un elemento que resulta ser idempotente.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{J} = \langle 1 \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
I = \langle j \rangle \arrow[dr, dash] & & J = \langle \bar{j} \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & \{0\} = \langle 0 \rangle &
\end{tikzcd}$$

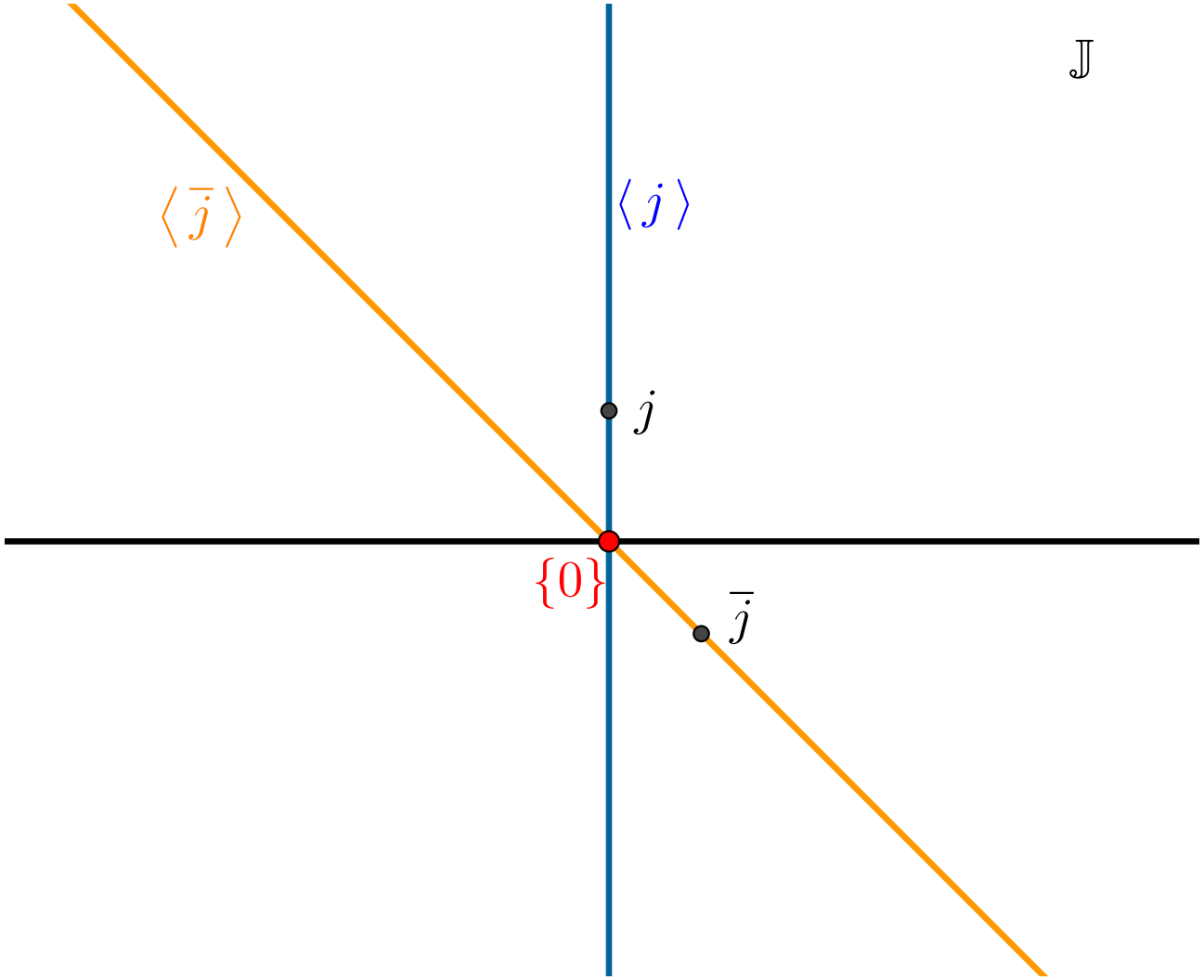
Proposición 2.12 (Ideales Primos del Anillo $\mathbb{J}$)

Los ideales propios no triviales $\langle j \rangle$ y $\langle \overline{j} \rangle$ del anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales son ideales primos.

Proposición 2.13 (Ideales Maximales del Anillo $\mathbb{J}$)

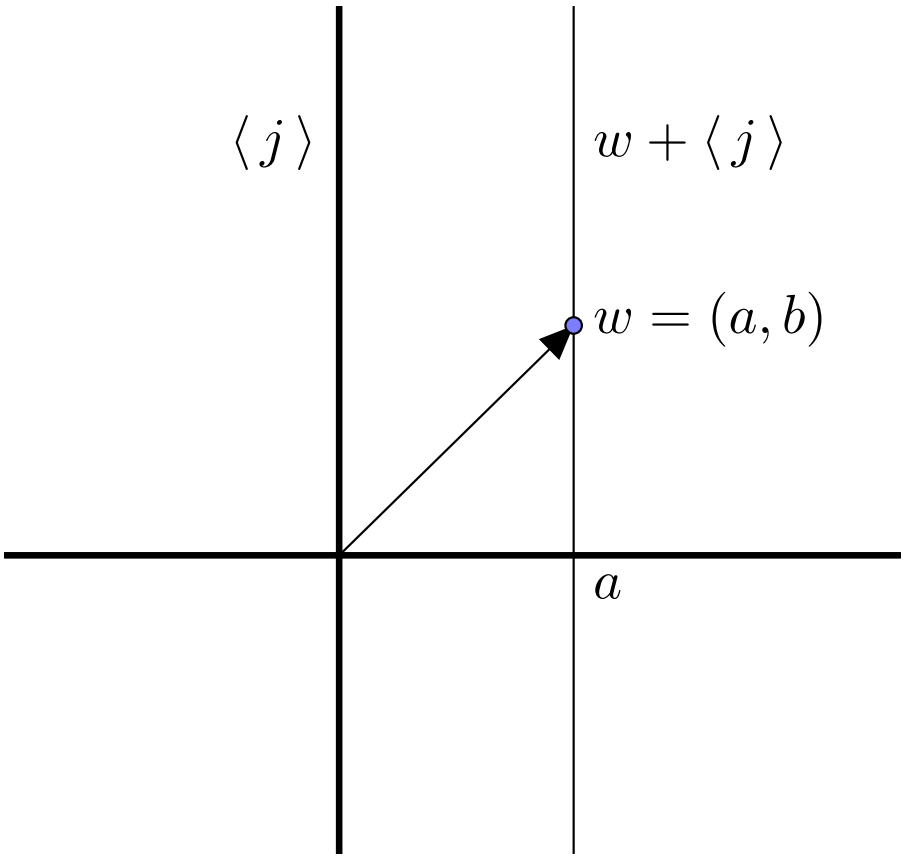
Los ideales propios no triviales $\langle j \rangle$ y $\langle \overline{j} \rangle$ del anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales son ideales maximales.

Estructura Algebraica de los Números Irreales



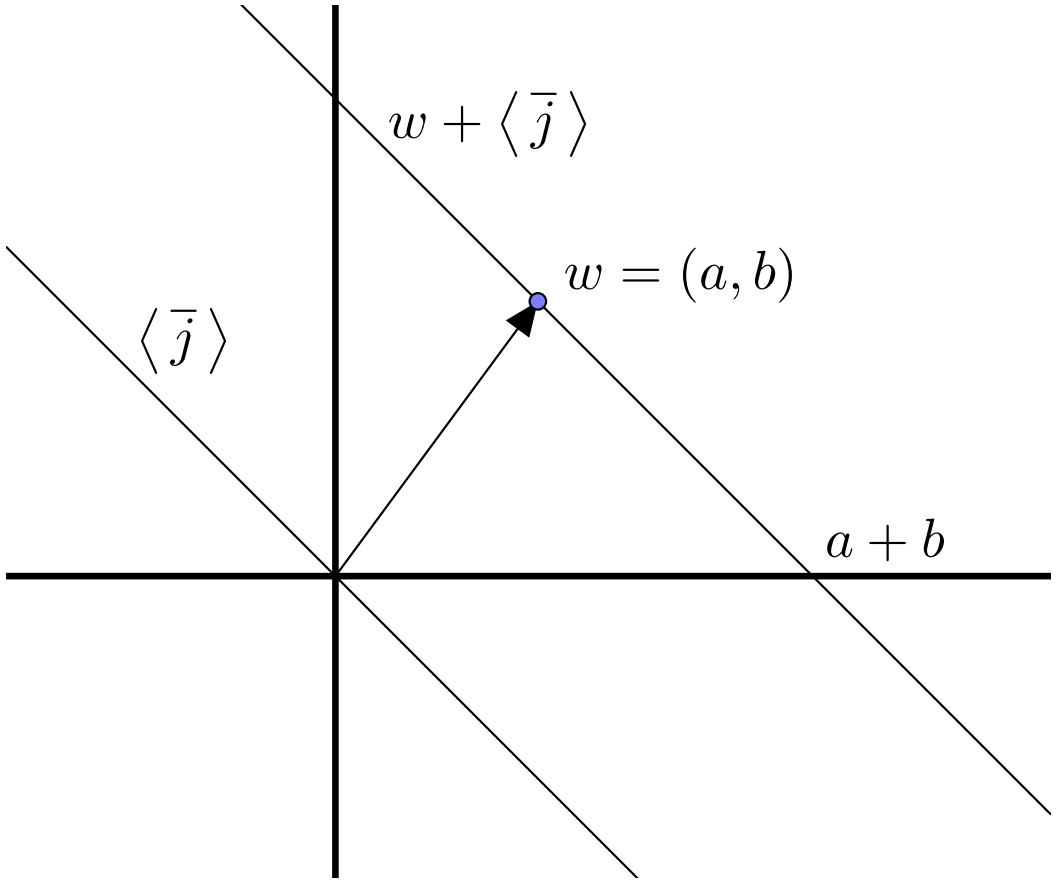
Proposición 2.14 (Anillo Cociente)

El anillo cociente $\mathbb{J}/\langle j \rangle$ es un campo isomorfo al campo $\mathbb{R}$ de los números reales.



Proposición 2.15 (Anillo Cociente)

El anillo cociente $\mathbb{J}/\langle \bar{j} \rangle$ es un campo isomorfo al campo $\mathbb{R}$ de los números reales.



Proposición 2.16

El anillo $\mathbb{R}$ de los números reales es una *imagen homomorfa* del anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{J} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f \circ \varphi"'] & \mathbb{J}/\langle j \rangle \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{J} \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "g \circ \phi"'] & \mathbb{J}/\langle \overline{j} \rangle \arrow[d, "g"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales
6. Epílogo

Estructura Ordenada de los Números Irreales

- ¿Existe un orden (total o parcial) en los números irreales compatible con las operaciones de anillo?
- ¿Existe en los números irreales alguna relación de orden total que cumpla la monotonía de la suma y la monotonía de la multiplicación?
- ¿Existe en el anillo de los números irreales un conjunto de números positivos?

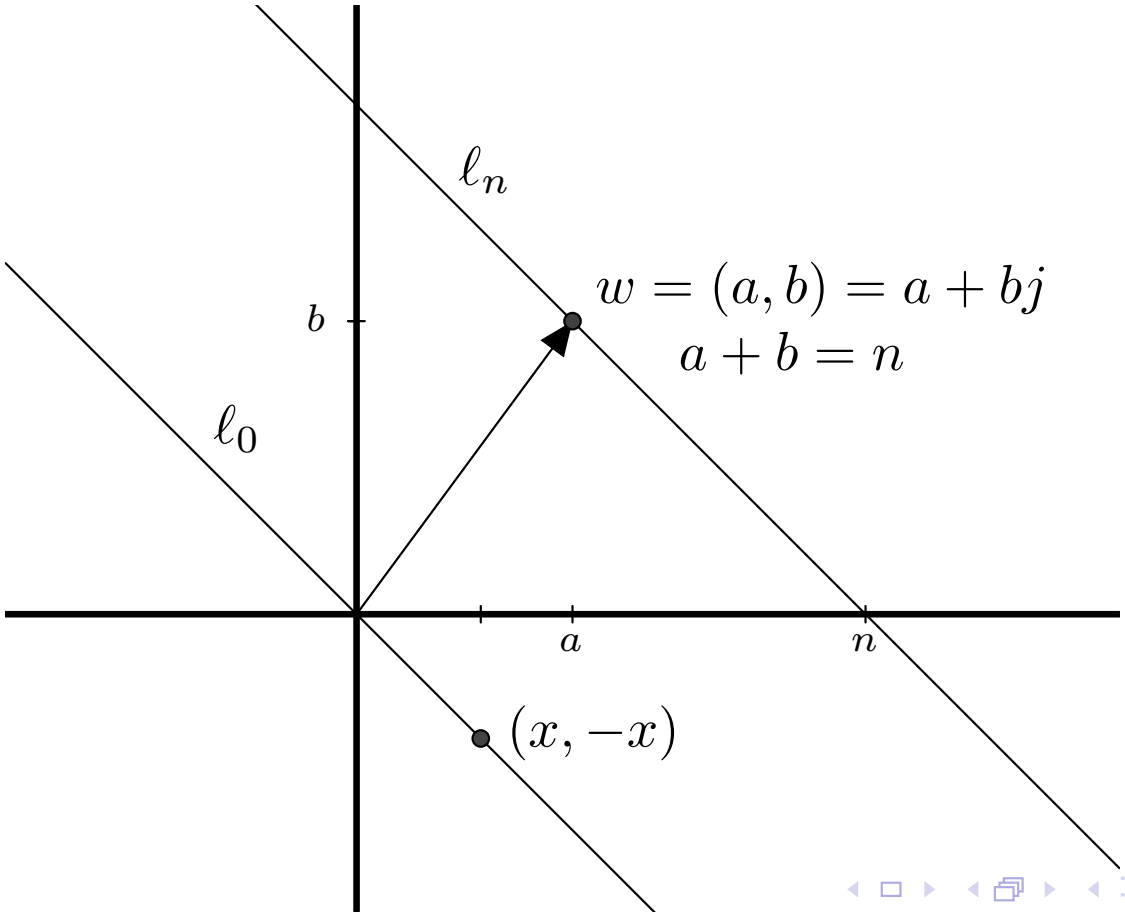
Proposición 3.1

En los números irreales no existe un conjunto de números positivos.

Definición 3.1

Para cada $n \in \mathbb{R}$, denotamos por ℓ_n al subconjunto de $\mathbb{J}$ definido por:

$$\ell_n = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} \,:\, a + b = n\}$$



Definición 3.2 (Conjunto de Números J-positivos)

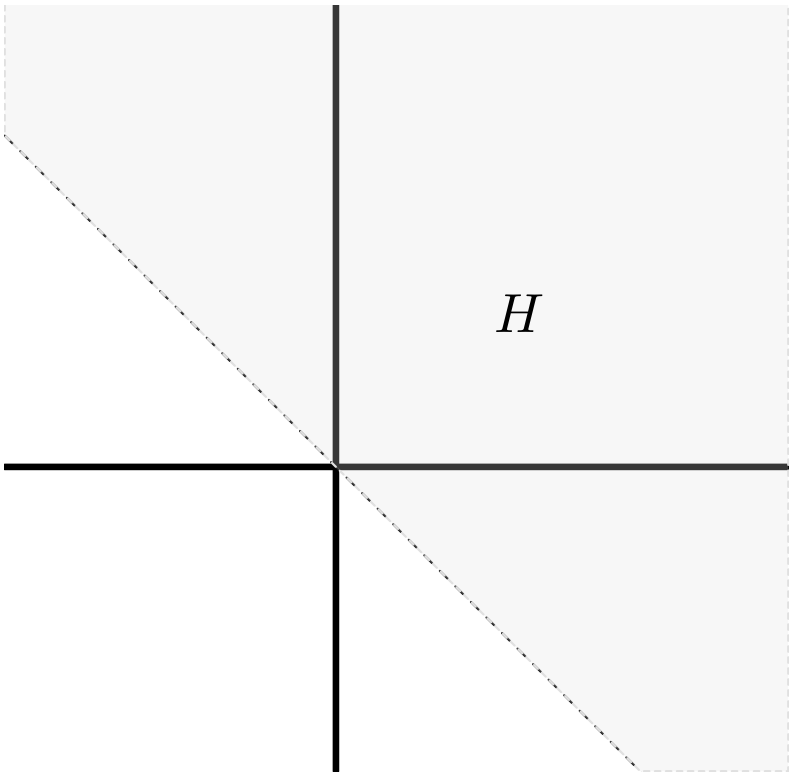
Un conjunto $H \subset \mathbb{J}$ se dice que es un conjunto de números J-positivos en los números irreales si y sólo si H satisface las siguientes condiciones:

1. Si w y z son números irreales tales que $w, z \in H$, entonces $w + z \in H$ y $wz \in H$.
2. Para cada número irreal w se tiene uno y sólo uno de los siguientes casos:

$$w \in \ell_0 \quad \veebar \quad w \in H \quad \veebar \quad -w \in H$$

Proposición 3.2

El conjunto $H = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} \,:\, a + b > 0\} \subset \mathbb{J}$ es un conjunto de números J-positivos en los números irreales.



Estructura Ordenada de los Números Irreales

Definición 3.3

En los números irreales definimos la relación $\prec$ así: Sean $w, z \in \mathbb{J}$, entonces $w \prec z$ si y sólo si $z - w \in H$.

Proposición 3.3

La relación $\prec$ anteriormente definida es una relación de orden estricto en $\mathbb{J}$.

Definición 3.4

En los números irreales definimos la relación $\preceq$ así: Sean $w, z \in \mathbb{J}$, entonces $w \preceq z$ si y sólo si $w \prec z$ ó $w = z$.

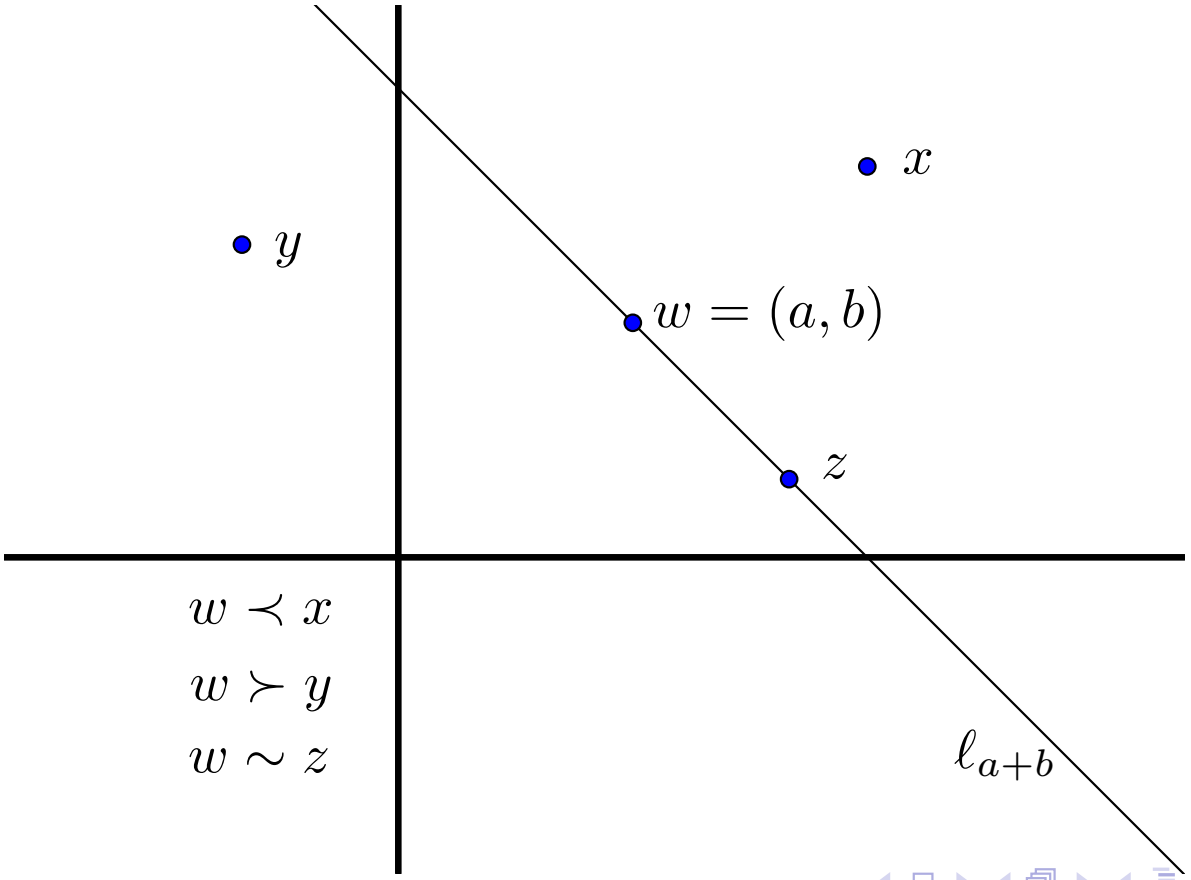
Proposición 3.4 (Primera Relación de Orden en $\mathbb{J}$)

La relación $\preceq$ anteriormente definida es una relación de orden parcial en $\mathbb{J}$. Diremos que dicha relación en $\mathbb{J}$ es el *orden inducido por* H.

Proposición 3.5 (Ley ley de la tricotomía de $\mathbb{J}$)

Si $w, z \in \mathbb{J}$, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:

$$w \prec z \quad \veebar \quad w \succ z \quad \veebar \quad w \sim z$$



Proposición 3.6 (Anticadenas y Cadenas de $\mathbb{J}$)

- Las anticadenas del poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ son los subconjuntos A de $\mathbb{J}$ tales que $A \subseteq \ell_n$ para algún $n \in \mathbb{R}$.
- Las cadenas del poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ son los subconjuntos C de $\mathbb{J}$ tales que para cada $n \in \mathbb{R}$ el conjunto $C \cap \ell_n$ contiene a lo más un punto.

Estructura Ordenada de los Números Irreales

Proposición 3.7 (Monotonía de la suma en $\mathbb{J}$)

Para todo $w, z, x \in \mathbb{J}$, si $w \preceq z$ entonces $w + x \preceq z + x$.

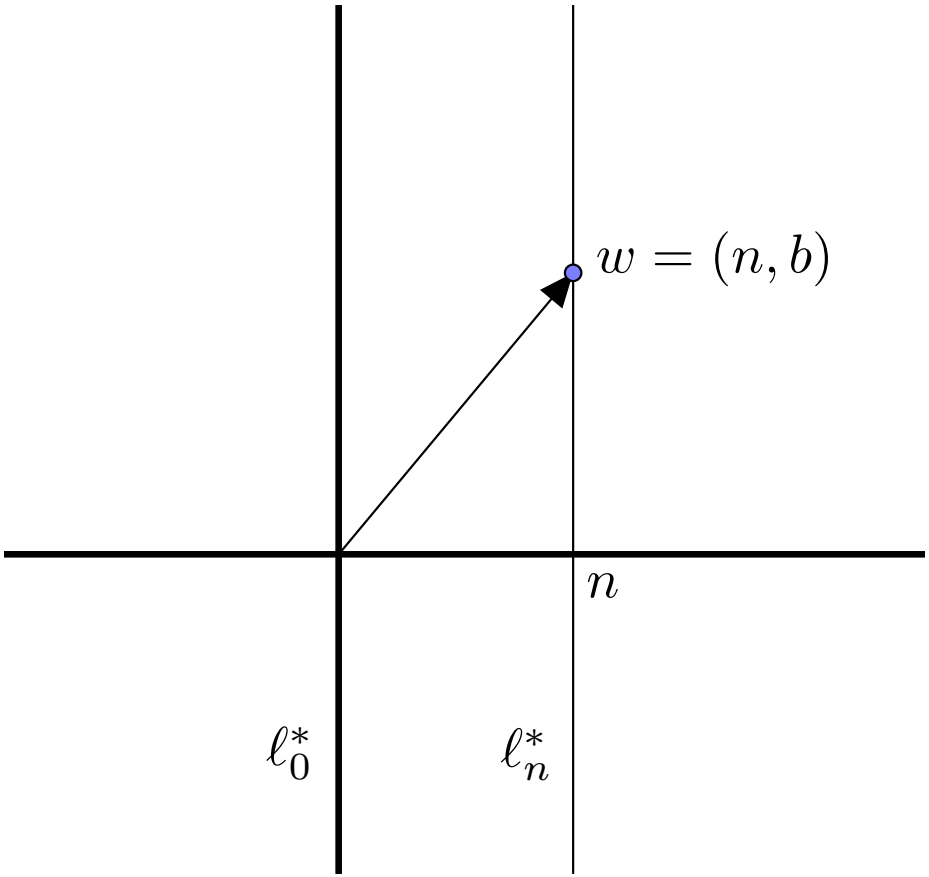
Proposición 3.8 (Monotonía de la multiplicación en $\mathbb{J}$)

Para todo $w, z, x \in \mathbb{J}$, si $w \preceq z$ y $x \succ 0$ entonces $wx \preceq zx$.

Definición 3.5

Para cada $n \in \mathbb{R}$, denotamos por ℓ_n^* al subconjunto de $\mathbb{J}$ definido por:

$$\ell_n^* = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} \ : \ a = 0\}$$



Definición 3.6 (Conjunto de Números J*-positivos)

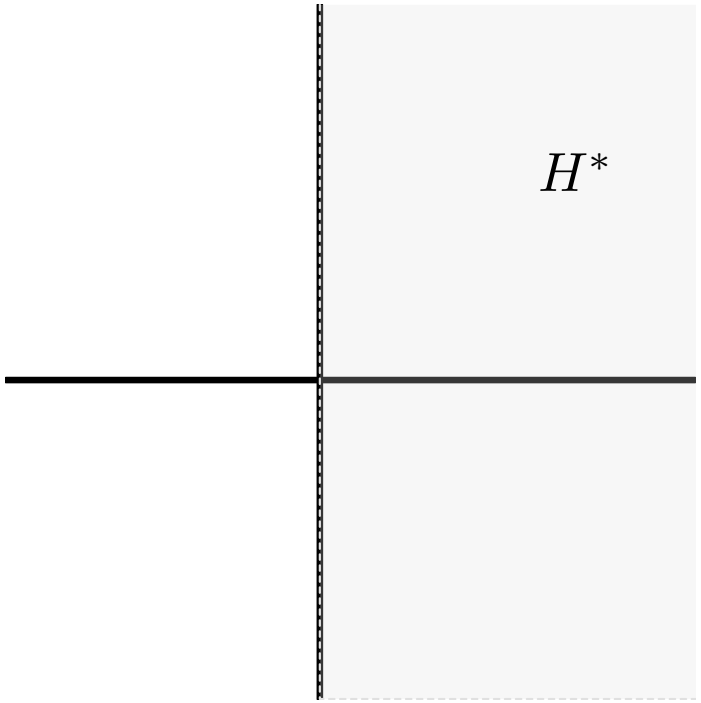
Un conjunto $H^* \subset \mathbb{J}$ se dice que es un conjunto de números J*-positivos en los números irreales si y sólo si H^* satisface las siguientes condiciones:

1. Si w y z son números irreales tales que $w, z \in H^*$, entonces $w + z \in H^*$ y $wz \in H^*$.
2. Para cada número irreal w se tiene uno y sólo uno de los siguientes casos:

$$w \in \ell_0^* \quad \veebar \quad w \in H^* \quad \veebar \quad -w \in H^*$$

Proposición 3.9

El conjunto $H^* = \{w = (a, b) \in \mathbb{J} : a > 0\} \subset \mathbb{J}$ es un conjunto de números J*-positivos en los números irreales.



Estructura Ordenada de los Números Irreales

Definición 3.7

En los números irreales definimos la relación $\prec^*$ así: Sean $w, z \in \mathbb{J}$, entonces $w \prec^* z$ si y sólo si $z - w \in H^*$.

Proposición 3.10

La relación $\prec^*$ anteriormente definida es una relación de orden estricto en $\mathbb{J}$.

Definición 3.8

En los números irreales definimos la relación $\preceq^*$ así: Sean $w, z \in \mathbb{J}$, entonces $w \preceq^* z$ si y sólo si $w \prec^* z$ ó $w = z$.

Proposición 3.11 (Segunda Relación de Orden en $\mathbb{J}$)

La relación $\preceq^*$ anteriormente definida es una relación de orden parcial en $\mathbb{J}$. Diremos que dicha relación en $\mathbb{J}$ es el *orden inducido por* H.

Proposición 3.12

El poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ es isomorfo al poset $(\mathbb{J}, \preceq^*)$.

La función f es un isomorfismo entre las estructuras ordenadas $(\mathbb{J}, \preceq)$ y $(\mathbb{J}, \preceq^*)$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{J} \\ & (a,b) & \longmapsto & (a+b,-b) \end{array}$$

Observación

Algunas características que relacionan la estructura algebraica de $\mathbb{J}$ con su estructura ordenada:

- Propiedad de la monotonía de la suma en $\mathbb{J}$ respecto a $\preceq$ y $\preceq^*$.
- Propiedad de la monotonía de la multiplicación en $\mathbb{J}$ respecto a $\preceq$ y $\preceq^*$.
- $\langle \bar{j} \rangle = \ell_0$ y $\langle j \rangle = \ell_0^*$
- $(a,b) + \langle \bar{j} \rangle = \ell_{a+b}$ y $(a,b) + \langle j \rangle = \ell_a^*$
- $\mathbb{J} / \langle \bar{j} \rangle = \{\ell_n\}_{n\in\mathbb{R}} = \mathbb{J} / \sim$ y $\mathbb{J} / \langle j \rangle = \{\ell_n^*\}_{n\in\mathbb{R}} = \mathbb{J} / \overset{*}{\sim}$

Proposición 3.13

El conjunto $\mathbb{J}$ –la estructura $(\mathbb{J}, \oplus, \odot, \preceq)$– de los números irreales es un *Anillo Parcialmente Ordenado*.

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales
6. Epílogo

Conjugado en los Números Irreales

- ¿Es posible construir y definir el *conjugado* de un número irreal?
- ¿En caso de existir una función que asigna a cada número irreal su respectivo conjugado, es posible inducir y definir una *seminorma* a partir del conjugado?

$$\begin{array}{rccc} {}^{*}: & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{J} \\ & w & \longmapsto & w^{*} \end{array}$$

I. $ww^{*} \in \mathbb{R}$, para todo $w \in \mathbb{J}$.

II. $w = w^{*}$ si y sólo si $w \in \mathbb{R}$.

III. $(w^{*})^{*} = w$, para todo $w \in \mathbb{J}$.

IV. $(\alpha w)^{*} = \alpha w^{*}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $w \in \mathbb{J}$.

V. $(w + z)^{*} = w^{*} + z^{*}$, para todo $w, z \in \mathbb{J}$.

VI. $(wz)^{*} = w^{*}z^{*}$, para todo $w, z \in \mathbb{J}$.

Conjugado en los Números Irreales

¿Existe una *involución* $^* : \mathbb{J} \to \mathbb{J}$ en el álgebra real $\mathbb{J}$ de los números irreales tal que los únicos elementos *autoadjuntos* de $\mathbb{J}$ con respecto a * sean los números reales?

Definición 4.1 (Conjugado de un Número Irreal)

Sea $w \in \mathbb{J}$ tal que $w = (a, b)$. Se define el conjugado $\overline{w}$ del número irreal w como el número irreal $\overline{w} = (a + b, -b)$.

Conjugado en los Números Irreales

$$\begin{array}{rccc} {}^{-}: & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{J} \\ & (a, b) & \longmapsto & (a + b, -b) \end{array}$$

Proposición 4.1

La función ${}^{-} : \mathbb{J} \to \mathbb{J}$ que asigna a cada número irreal $w = (a, b)$ su respectivo conjugado $\overline{w} = (a + b, -b)$, es la única involución en el álgebra real $\mathbb{J}$ de los números irreales, tal que los elementos autoadjuntos de $\mathbb{J}$ con respecto a ${}^{-}$ son los números reales.

Observación

- La función $^{-}$ es biyectiva y además es su propia inversa.
- La función $^{-}$ es un automorfismo del anillo conmutativo con identidad $\mathbb{J}$ en sí mismo.
- La función $^{-}$ es un automorfismo del espacio vectorial real $\mathbb{J}$ en sí mismo.
- La función $^{-}$ es un automorfismo del álgebra real $\mathbb{J}$ en sí misma.
- La función $^{-}$ es un isomorfismo de orden entre el poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ y el poset $(\mathbb{J}, \preceq^{*})$.

Estructura Topológica de los Números Irreales

¿Es posible construir y determinar una seminorma en los números irreales inducida por el conjugado?

Sea $w \in \mathbb{J}$ y consideremos la aplicación $\mathcal{N}(w) = \sqrt{|w\,\overline{w}|}$

¿Es la aplicación $\mathcal{N}$ una seminorma en el espacio vectorial $\mathbb{J}$?

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{N}: & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & \sqrt{|a\,(a+b)|} \end{array}$$

Estructura Topológica de los Números Irreales

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{N}: & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \longmapsto & \sqrt{|w\,\overline{w}|} \end{array}$$

Sean $w = j = (0,1)$ y $z = \overline{j} = (1,-1)$.

Obsérvese que $\overline{j}$ es el conjugado de j, por consiguiente j es el conjugado de $\overline{j}$.

Dado que $j + \overline{j} = 1$ y $j\,\overline{j} = 0$, entonces:

- $\mathcal{N}(w) = \mathcal{N}(j) = 0.$
- $\mathcal{N}(z) = \mathcal{N}\left(\overline{j}\right) = 0.$
- $\mathcal{N}(w+z) = \mathcal{N}\left(j + \overline{j}\right) = 1.$

Por lo tanto, en este caso tenemos que: $\mathcal{N}(w+z) \nleq \mathcal{N}(w) + \mathcal{N}(z)$.

Proposición 4.2

El conjunto $\mathbb{J}$ de los números irreales (junto con la involución $^{-}$) tiene estructura de *-álgebra (estrella álgebra) no seminormada.

Estructura Topológica de los Números Irreales

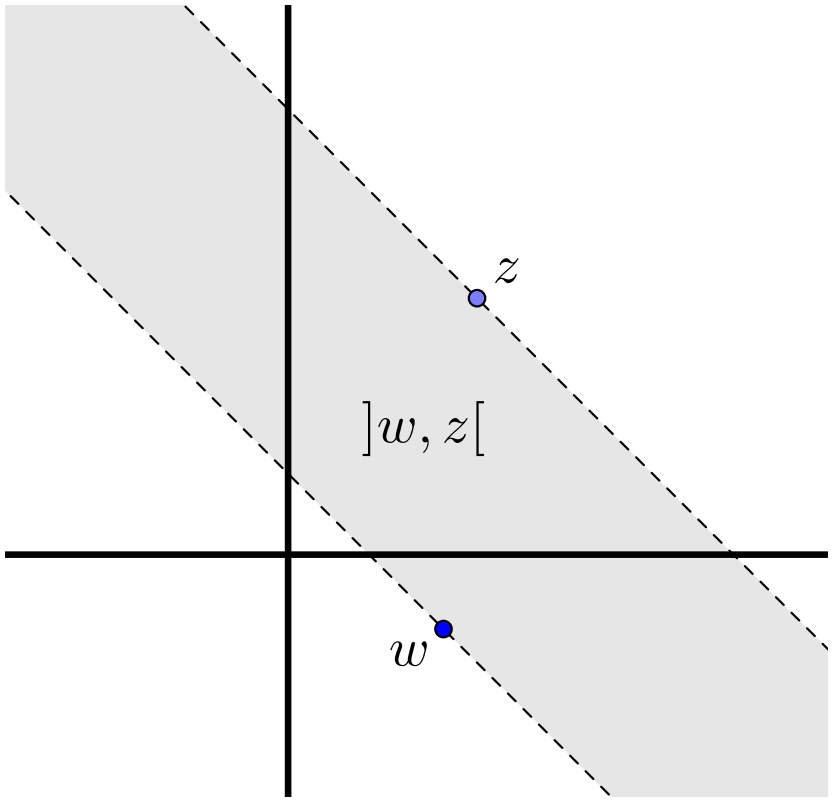
- ¿Es posible construir y encontrar un camino natural para definir "distancias" sobre el conjunto $\mathbb{J}$ de los números irreales?
- ¿Es posible definir alguna seminorma en el espacio vectorial real $\mathbb{J}$, de manera tal que dicha seminorma sea inherente e intrínseca a las cualidades estructurales del anillo parcialmente ordenado de los números irreales?

Primera Topología del Orden en los Números Irreales generada por el poset $(\mathbb{J}, \preceq)$

Definición 4.2 (Intervalo Abierto)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$ tales que $w \prec z$, entonces se define el intervalo abierto $]w, z[$ como el conjunto

$$]w, z[= \{x \in \mathbb{J} \,:\, w \prec x \wedge x \prec z\}$$



Proposición 4.3

La colección $\mathcal{B}$ de todos los intervalos abiertos del poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ es una base para una topología sobre el conjunto $\mathbb{J}$ de los números irreales.

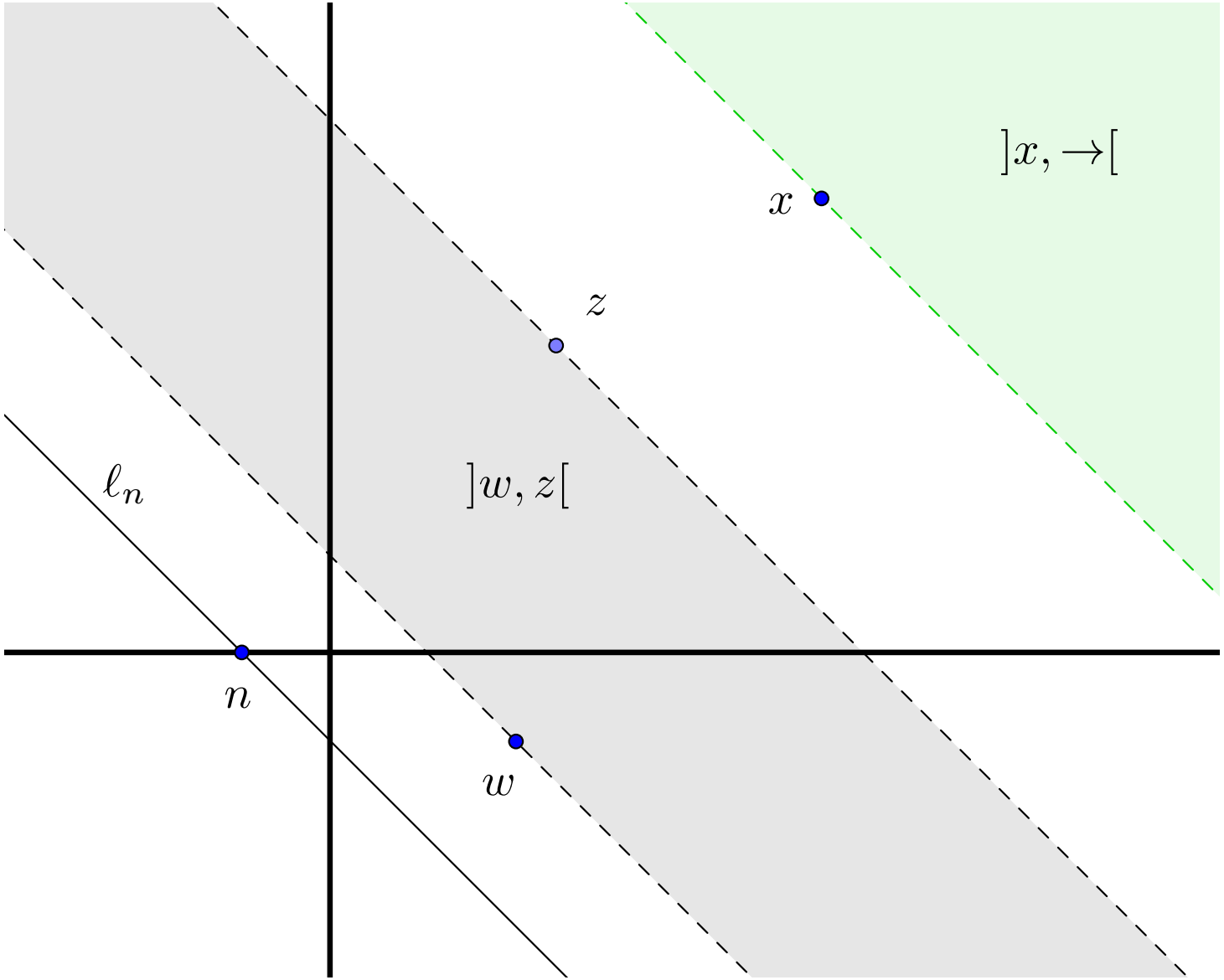
Definición 4.3 (Topología Usual –o del orden– de $\mathbb{J}$)

La topología $\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$ sobre los números irreales generada por la base $\mathcal{B}$, es la topología definida como sigue:

Un subconjunto U de $\mathbb{J}$ es un abierto de la topología $\mathcal{T}$, es decir $U \in \mathcal{T}$, si y sólo si para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup]w, z[\ : \ ]w, z[\in \mathcal{B}' \ \wedge \ \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \right\}$$

Estructura Topológica de los Números Irreales



Proposición 4.4

La colección $\mathcal{S} = \left\{]\leftarrow, z[\ : \ z \in \mathbb{J} \right\} \cup \left\{]w, \rightarrow[\ : \ w \in \mathbb{J} \right\}$ es una subbase para la topología del orden $\mathcal{T}$ de $\mathbb{J}$.

$$\mathcal{S} \xrightarrow[finitas]{Intersecciones} \mathcal{B} \xrightarrow[arbitrarias]{Uniones} \mathcal{T}$$

Estructura Topológica de los Números Irreales

- ¿El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es seudometrizable?
- ¿Existe una seminorma $\| \, \|$ que induzca una seudométrica d en $\mathbb{J}$ que genera a la topología $\mathcal{T}$ y que además las bolas abiertas descritas por la seudométrica d coincidan con los intervalos abiertos descritos por el orden parcial $\preceq$?

Solución intuitiva del problema

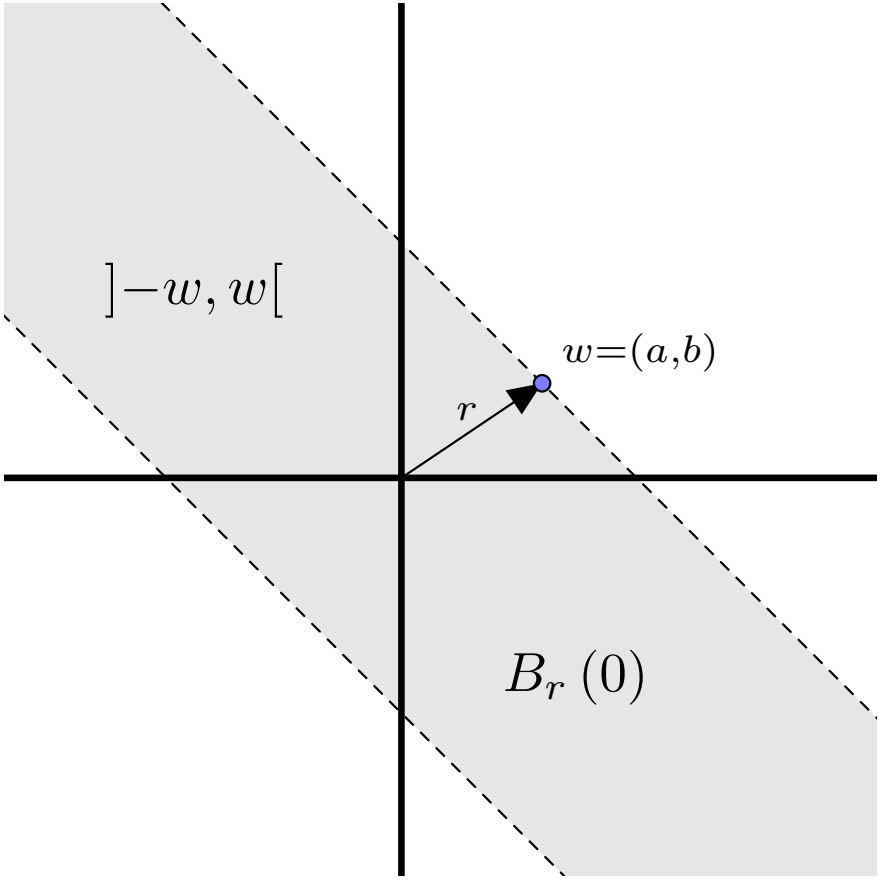
Supongamos que el conjunto $\mathbb{J}$ es un espacio vectorial real seminormado, cuya seminorma $\| \ \|$ induce una seudométrica d.

- Sea $\mathcal{B}$ la colección de intervalos abiertos, la cual forma una base para el espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$.
- Sea $\mathcal{B}_d$ la colección de bolas abiertas, la cual forma una base para el espacio seudométrico $(\mathbb{J}, d)$.

Sea $w = (a, b)$ un número irreal fijo pero arbitrario (sin pérdida de generalidad, consideremos $a + b > 0$), entonces:

¿Cuál debe ser el valor $\|w\|$ de la "magnitud" del vector w para que efectivamente se cumpla la igualdad $\mathcal{B} = \mathcal{B}_d$?

Estructura Topológica de los Números Irreales



Solución intuitiva del problema

El intervalo abierto $]-w, w[$ debe coincidir con la bola abierta $B_r(0)$, donde necesariamente $\|w\| = d(w, 0)$ y $r = \|w\|$.

$$]-w, w[= B_r(0)$$

- Si $z = (x, y)$ es tal que $z \in]-w, w[$, entonces $-(a+b) < x + y < a + b$. En consecuencia:
$$|x + y| < |a + b|$$
- Si $z = (x, y)$ es tal que $z \in B_r(0)$, entonces $d(z, 0) < r$. En consecuencia:
$$\|z\| < \|w\|$$

Definición 4.4 (Magnitud de un Número Irreal)

Sea $w \in \mathbb{J}$ tal que $w = (a, b)$. Se define la magnitud $\|w\|$ del número irreal w como el número real no negativo $\|w\| = |a + b|$.

$$\begin{array}{rccc} \| \, \| : & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \longmapsto & |a + b| \end{array}$$

Proposición 4.5

La función $\| \, \| : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número irreal su respectiva magnitud define una seminorma sobre el espacio vectorial real $\mathbb{J}$.

Para cada $w, z \in \mathbb{J}$ y para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se satisfacen las siguientes propiedades:

- $\|w\| \geq 0$ y $\|0\| = 0$.
- $\|\alpha\, w\| = |\alpha|\, \|w\|$.
- $\|w + z\| \leq \|w\| + \|z\|$. *(Desigualdad Triangular).*
- $\|wz\| = \|w\|\, \|z\|$

Estructura Topológica de los Números Irreales

Definición 4.5 (Distancia entre Números Irreales)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$. Se define la distancia $d(w, z)$ entre los números irreales w y z como el número real no negativo $d(w, z) = \|w - z\|$.

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{J} \times \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (w, z) & \longmapsto & \|w - z\| \end{array}$$

Proposición 4.6

La función $d : \mathbb{J} \times \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada pareja de números irreales su respectiva distancia define una seudométrica sobre el conjunto $\mathbb{J}$.

Observación

- La seminorma $\| \ \|$ en $\mathbb{J}$ no es una norma porque para cada $w \in \ell_0$ se tiene que $\|w\| = 0$.
- La seudométrica d en $\mathbb{J}$ no es una métrica porque si $w, z \in \mathbb{J}$ son tales que $w, z \in \ell_n$ para algún $n \in \mathbb{R}$ (esto es, si $w = z$ ó $w \parallel z$), entonces $d(w, z) = 0$.

Proposición 4.7

La colección $\mathcal{B}$ conformada por todos los intervalos abiertos del poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ es igual a la colección $\mathcal{B}_d$ conformada por todas las bolas abiertas del espacio seudométrico $(\mathbb{J}, d)$, es decir que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_d$.

Estructura Topológica de los Números Irreales

¿Qué relaciones existen entre el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ de los números reales dotados de su topología usual y el espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ de los números irreales dotados de la topología $\mathcal{T} = \langle d \rangle$?

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

Proposición 4.8

Sea $p : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ la función del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ en el espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ definida por $p(w) = a + b$, para cada número irreal $w = (a, b)$.

La función p es sobreyectiva, continua y abierta, y en consecuencia p es una *aplicación cociente*.

Observación

La topología usual de los números reales es en esencia la topología final inducida por la aplicación cociente p.

Proposición 4.9

Todo conjunto abierto del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es p-saturado.

Si A es abierto de $\mathbb{J}$, entonces para cada $n \in \mathbb{R}$ tal que $p^{-1}(\{n\}) \cap A \neq \emptyset$ se tiene que $p^{-1}(\{n\}) \subseteq A$.

$$A = \bigcup_{n \in p(A)} p^{-1}(\{n\})$$

Proposición 4.10

Sea U un subconjunto de $\mathbb{J}$, entonces U es un abierto del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ si y sólo si existe un abierto V del espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ tal que $U = p^{-1}(V)$.

Observación

La topología $\mathcal{T}$ de $\mathbb{J}$ se caracteriza por ser la topología inicial inducida por la aplicación cociente p.

$$\mathcal{T} = \left\{ p^{-1}(V) \subseteq \mathbb{J} \ : \ V \text{ es abierto del espacio topológico } (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}}) \right\}$$

Proposición 4.11

En el espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ se satisfacen las siguientes afirmaciones respecto a la aplicación cociente $p : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$.

- Todo conjunto cerrado del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es p-saturado.
- La aplicación cociente $p : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ es una aplicación cerrada.
- Sea K un subconjunto de $\mathbb{J}$, entonces K es un cerrado del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ si y sólo si existe un cerrado F del espacio topológico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$ tal que $K = p^{-1}(F)$.

Proposición 4.12

Sea S un subconjunto de $\mathbb{J}$ y sea $f : S \to p(S)$ la función obtenida al restringir p. Si S y $p(S)$ están dotados de la topología de subespacio heredada respectivamente por los espacios topológicos $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, entonces f es una aplicación cociente.

Proposición 4.13

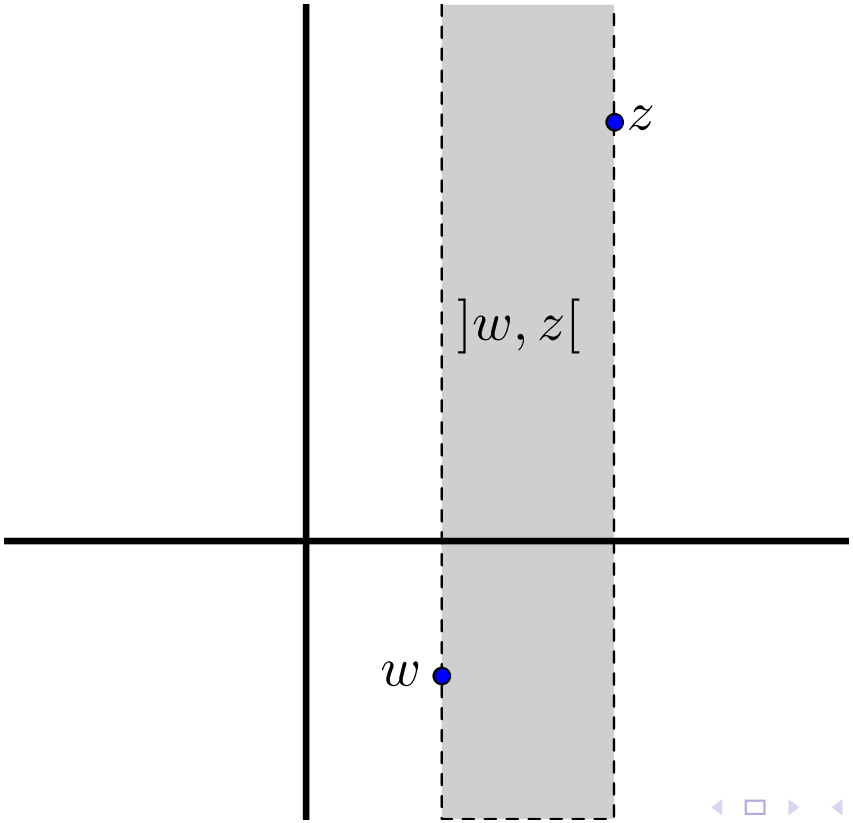
En los números reales, sea $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ la topología de subespacio heredada del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ y sea $\mathcal{T}_{\text{usual}}$ su topología usual, entonces $\mathcal{T}_{\mathbb{R}} = \mathcal{T}_{\text{usual}}$.

Segunda Topología del Orden en los Números Irreales generada por el poset $(\mathbb{J}, \preceq^*)$

Definición 4.6 (Intervalo Abierto)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$ tales que $w \prec^* z$, entonces se define el intervalo abierto $]w, z[$ como el conjunto

$$]w, z[= \{x \in \mathbb{J} \,:\, w \prec^* x \wedge x \prec^* z\}$$



Proposición 4.14

La colección $\mathcal{B}^*$ de todos los intervalos abiertos del poset $(\mathbb{J}, \preceq^*)$ es una base para una topología sobre el conjunto $\mathbb{J}$ de los números irreales.

Definición 4.7 (Topología Usual –o del orden– de $\mathbb{J}$)

La topología $\mathcal{T}^* = \langle \mathcal{B}^* \rangle$ sobre los números irreales generada por la base $\mathcal{B}^*$, es la topología definida como sigue:

Un subconjunto U de $\mathbb{J}$ es un abierto de la topología $\mathcal{T}^*$, es decir $U \in \mathcal{T}^*$, si y sólo si para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}^*$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$.

$$\mathcal{T}^* = \left\{ \bigcup]w, z[\ : \ ]w, z[\in \mathcal{B}' \ \wedge \ \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}^* \right\}$$

Estructura Topológica de los Números Irreales

Definición 4.8 (Magnitud de un Número Irreal)

Sea $w \in \mathbb{J}$ tal que $w = (a, b)$. Se define la magnitud $\|w\|_*$ del número irreal w como el número real no negativo $\|w\|_* = |a + b|$.

$$\begin{array}{rccc} \| \ \|_* : & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a, b) & \longmapsto & |a| \end{array}$$

Proposición 4.15

La función $\| \ \|_* : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada número irreal su respectiva magnitud define una seminorma sobre el espacio vectorial real $\mathbb{J}$.

Definición 4.9 (Distancia entre Números Irreales)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$. Se define la distancia $d_*(w, z)$ entre los números irreales w y z como el número real no negativo $d_*(w, z) = \|w - z\|_*$.

Proposición 4.16

La colección $\mathcal{B}^*$ conformada por todos los intervalos abiertos del poset $(\mathbb{J}, \preceq^*)$ es igual a la colección $\mathcal{B}_d^*$ conformada por todas las bolas abiertas del espacio seudométrico $(\mathbb{J}, d_*)$, es decir que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_d^*$.

Estructura Topológica de los Números Irreales

Proposición 4.17

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es *homeomorfo* al espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T}^*)$.

Proposición 4.18

El espacio seudométrico $(\mathbb{J}, d)$ es *isométrico* al espacio seudométrico $(\mathbb{J}, d_*)$.

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales
6. Epílogo

Proposición 5.1

En el anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales dotado de la topología del orden $\mathcal{T}$ inducida por $\preceq$, se satisfacen las siguientes propiedades:

I. La aplicación $(w, z) \longmapsto w + z$ de $\mathbb{J} \times \mathbb{J}$ en $\mathbb{J}$ es una *aplicación continua.*
II. La aplicación $w \longmapsto -w$ de $\mathbb{J}$ en $\mathbb{J}$ es una *aplicación continua.*
III. La aplicación $(w, z) \longmapsto wz$ de $\mathbb{J} \times \mathbb{J}$ en $\mathbb{J}$ es una *aplicación continua.*
IV. La aplicación $(\lambda, w) \longmapsto \lambda \cdot w$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{J}$ en $\mathbb{J}$ es una *aplicación continua.*

Proposición 5.2

- El anillo $\mathbb{J}$ de los números irreales junto con la topología $\mathcal{T}$ es un *anillo topológico*.
- El espacio vectorial real $\mathbb{J}$ de los números irreales junto con la topología $\mathcal{T}$ es un *espacio vectorial topológico*.
- El álgebra real $\mathbb{J}$ de los números irreales junto con la topología $\mathcal{T}$ es un *álgebra topológica*.

Proposición 5.3

Sea A un subconjunto no vacío de números irreales, entonces con respecto a la topología $\mathcal{T} = \langle d \rangle$ de $\mathbb{J}$ se satisface lo siguiente:

I. $\overline{A} = \{w \in \mathbb{J} \,:\, d(w, A) = 0\}$

II. $\overset{\circ}{A} = \left\{w \in \mathbb{J} \,:\, d\left(w, A^{\complement}\right) > 0\right\}$

III. $A' = \{w \in \mathbb{J} \,:\, d(w, A - \{w\}) = 0\}$

IV. $\partial A = \left\{w \in \mathbb{J} \,:\, d(w, A) = 0 \wedge d\left(w, A^{\complement}\right) = 0\right\}$

V. $\overset{\bullet}{A} = \{w \in \mathbb{J} \,:\, d(w, A) > 0\}$

Características Topológicas de los Números Irreales

Proposición 5.4

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad.

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}} = \left\{]w, z[\in \mathcal{B} \ : \ \text{Si } \ w = (a, b) \ \text{ y } \ z = (c, d) \ \text{ entonces } \ a + b, c + d \in \mathbb{Q} \right\}$$

Proposición 5.5

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ satisface el primer axioma de numerabilidad.

$$\mathcal{B}_{\mathbb{Q}}(w) = \left\{]z_1, z_2[\in \mathcal{B}_{\mathbb{Q}} \ : \ w \in]z_1, z_2[\right\}$$

Características Topológicas de los Números Irreales

Proposición 5.6

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es un espacio separable.

El conjunto numerable $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{J}$, esto es, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{J}$.

Proposición 5.7

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es un espacio de Lindelöff.

Definición 5.1 (Sucesión Convergente)

Una sucesión de números irreales $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un número irreal w (no es necesariamente único), si y sólo si para todo abierto $U_w \in \mathcal{T}$ con $w \in U_w$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $w_n \in U_w$ para todo $n > N$.

Definición 5.2 (Sucesión Convergente)

Una sucesión de números irreales $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un número irreal w (no es necesariamente único), si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(w_n, w) < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Proposición 5.8

Si $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números irreales que converge al número irreal w, entonces para cada $w' \in \mathbb{J}$ tal que $d(w, w') = 0$, la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a w'.

Aplicación Cociente

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{J} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

Proposición 5.9

Una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números irreales es convergente en $\mathbb{J}$ si y sólo si la sucesión $\{p(w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbb{R}$. Más aún, $w_n \to w$ si y sólo si $p(w_n) \to p(w)$.

Observación

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ no satisface los axiomas de separación T_k, donde $k = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4$.

Proposición 5.10

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es un espacio regular.

Proposición 5.11

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es un espacio completamente regular.

Proposición 5.12

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es un espacio normal.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{J} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "\psi"] \\
& {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

Definición 5.3

Un espacio topológico X se dice que es *conexo* si y sólo si los únicos subconjuntos de X que son simultáneamente abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X.

Proposición 5.13

Sean X y Y espacios topológicos con Y conexo. Si $q : X \to Y$ es una aplicación cociente tal que los conjuntos de la forma $q^{-1}(\{y\})$ son conexos para todo $y \in Y$, entonces X es también un espacio conexo.

Proposición 5.14

Las anticadenas no vacías del poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ son subespacios conexos del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$.

Proposición 5.15

Sea $S \subseteq \mathbb{J}$, entonces S es un subespacio conexo de $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ si y sólo si $p(S)$ es un subespacio conexo de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$.

Proposición 5.16

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es localmente conexo.

Definición 5.4

Un espacio topológico X se dice que es *compacto* si y sólo si todo cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de X admite un subcubrimiento finito.

Proposición 5.17

Sean X y Y espacios topológicos con Y compacto. Si $q : X \to Y$ es una aplicación cociente tal que los conjuntos de la forma $q^{-1}(\{y\})$ son compactos para todo $y \in Y$, entonces X es también un espacio compacto.

Características Topológicas de los Números Irreales

Proposición 5.18

Las anticadenas no vacías del poset $(\mathbb{J}, \preceq)$ son subespacios compactos del espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$.

Proposición 5.19

Sea $S \subseteq \mathbb{J}$, entonces S es un subespacio compacto de $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ si y sólo si $p(S)$ es un subespacio compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$.

Proposición 5.20

El espacio topológico $(\mathbb{J}, \mathcal{T})$ es localmente compacto.

Índice

1. Algunas Extensiones Cuadráticas de los Números Reales
2. Estructura Algebraica de los Números Irreales
3. Estructura Ordenada de los Números Irreales
4. Estructura Topológica de los Números Irreales
5. Características Topológicas de los Números Irreales
6. Epílogo

Epílogo

Definición 6.1 (El conjunto $\mathbb{J}$ de los Números Irreales)

Números de la forma $a + bj$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $j^2 = j$, con $j \neq 0$ y $j \neq 1$

Definición 6.2 (Adición de números irreales)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$ tales que $w = (a, b)$ y $z = (c, d)$. Se define la operación suma $\oplus$ en $\mathbb{J}$ como sigue:

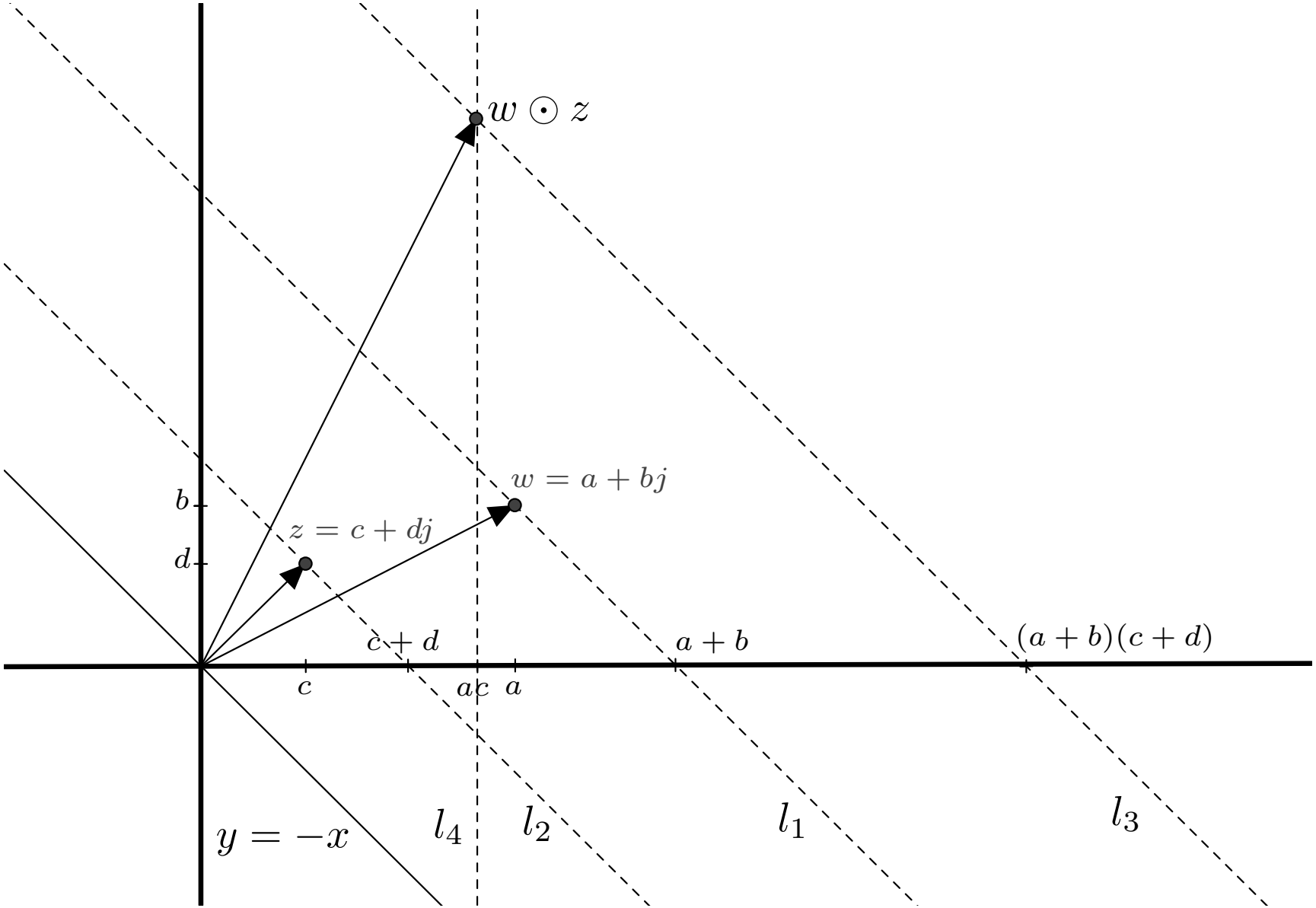
$$w \oplus z = (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

Definición 6.3 (Producto de números irreales)

Sean $w, z \in \mathbb{J}$ tales que $w = (a, b)$ y $z = (c, d)$. Se define la operación multiplicación $\odot$ en $\mathbb{J}$ como sigue:

$$w \odot z = (a, b) \odot (c, d) = (ac, ad + bc + bd)$$

Epílogo



Epílogo

¿Qué sucede si se realiza la misma construcción geométrica trazando ahora rectas paralelas a la recta $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$?

Familia de Anillos Topológicos $\mathbb{J}_m$

El conjunto $\mathbb{J}_m$ está conformado por números de la forma $a + bj$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $j^2 = -\dfrac{1}{m}j$, con $j \neq 0$ y $j \neq -\dfrac{1}{m}$.

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b)(c, d) = \left(ac, ad + bc - \frac{bd}{m}\right)$

Proposición 6.1

- $\mathbb{J} = \mathbb{J}_{-1}$ (Los Números Irreales).
- $\mathbb{J}_m$ es isomorfo a $\mathbb{J}$, para cada $m \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$.
- $\mathbb{J}_\infty = \mathbb{D}$ (Los Números Duales).

Epílogo

Definición 6.4 (El conjunto $\mathbb{M}$ de los Números Dobles)

Números de la forma $a + b\sigma$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 = 1$, con $\sigma \neq \pm 1$

Definición 6.5 (Adición de números dobles)

Sean $w, z \in \mathbb{M}$ tales que $w = (a, b)$ y $z = (c, d)$. Se define la operación suma $\oplus$ en $\mathbb{M}$ como sigue:

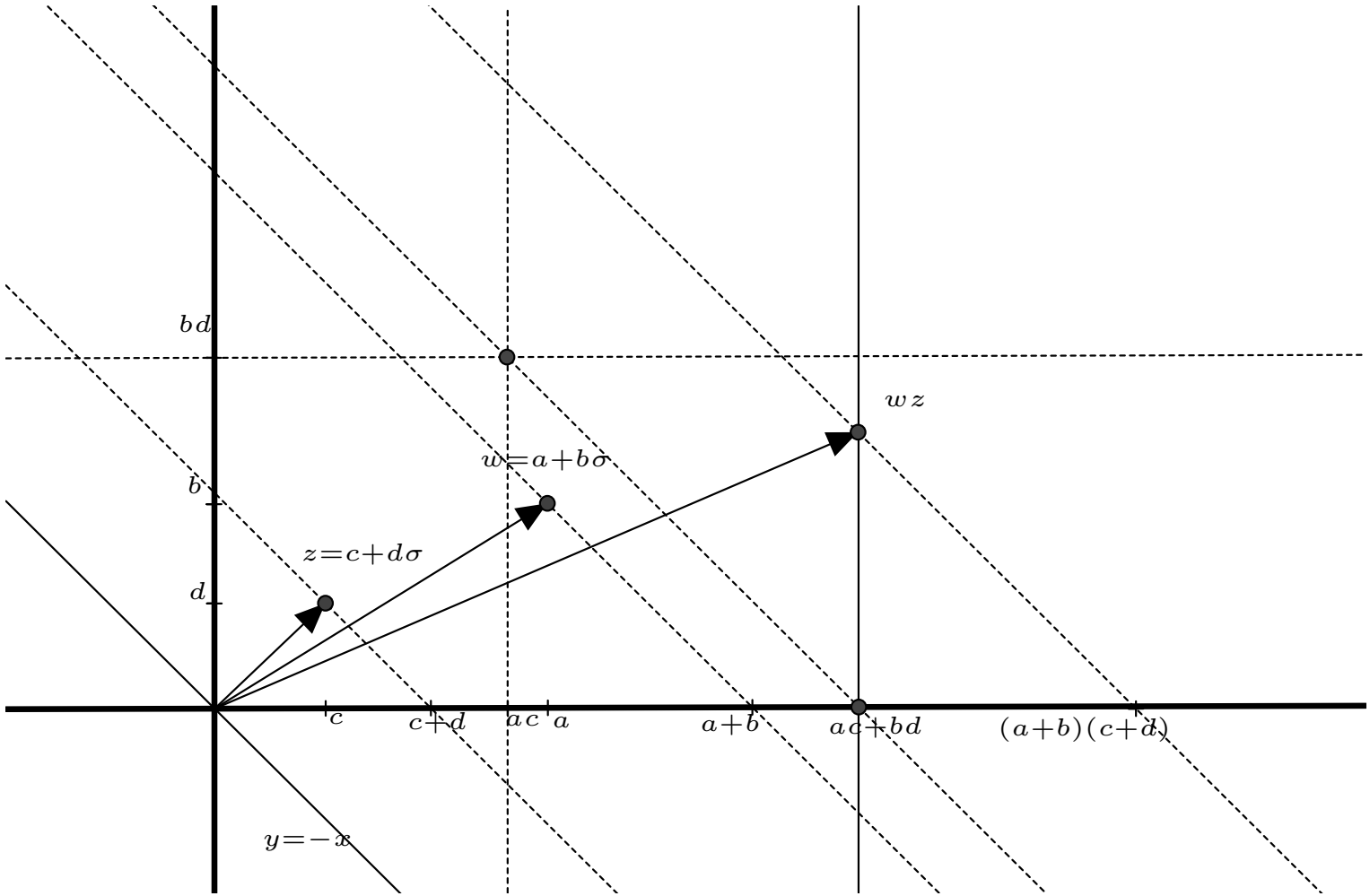
$$w \oplus z = (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

Definición 6.6 (Producto de números dobles)

Sean $w, z \in \mathbb{M}$ tales que $w = (a, b)$ y $z = (c, d)$. Se define la operación multiplicación $\odot$ en $\mathbb{M}$ como sigue:

$$w \odot z = (a, b) \odot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

Epílogo



Epílogo

¿Qué sucede si se realiza la misma construcción geométrica trazando ahora rectas paralelas a la recta $y = mx$ con $m \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$?

Familia de Anillos Topológicos $\mathbb{M}_m$

El conjunto $\mathbb{M}_m$ está conformado por números de la forma $a+b\sigma$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 = -\dfrac{1}{m} - \left(1 + \dfrac{1}{m}\right)\sigma$, con $\sigma \neq -1$ y $\sigma \neq -\dfrac{1}{m}$.

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- $(a, b)(c, d) = \left(ac - \frac{bd}{m}, ad + bc - bd\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)$

Proposición 6.2

- $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{-1}$ (Los Números Dobles).
- $\mathbb{M}_m$ es isomorfo a $\mathbb{M}$, para cada $m \in \mathbb{R}$ con $m \neq 0$.
- $\mathbb{M}_\infty = \mathbb{J}_1 \simeq \mathbb{J}$ (Los Números Irreales).

Bibliografía

Cano, J. C. (2015). *Números de la forma $a + bj$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $j^2 = j$, con $j \neq 0$ y $j \neq 1$. (Números Irreales)*. Tesis de Pregrado de Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C. J. & et al. (2006). *Estructuras Análogas a los Números Reales*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Yaglom, I. M. (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis*. New York: Springer-Verlag.