COLCOM 2014
2014 IEEE Colombian Conference on Communications and Computing
Universidad de los Andes
June 4th -- 6th, 2014 | Bogotá, Colombia
www.ieee-colcom.org

Modelado Matemático en ingeniería

De lo simple a lo complejo

Marco Aurelio Alzate Monroy

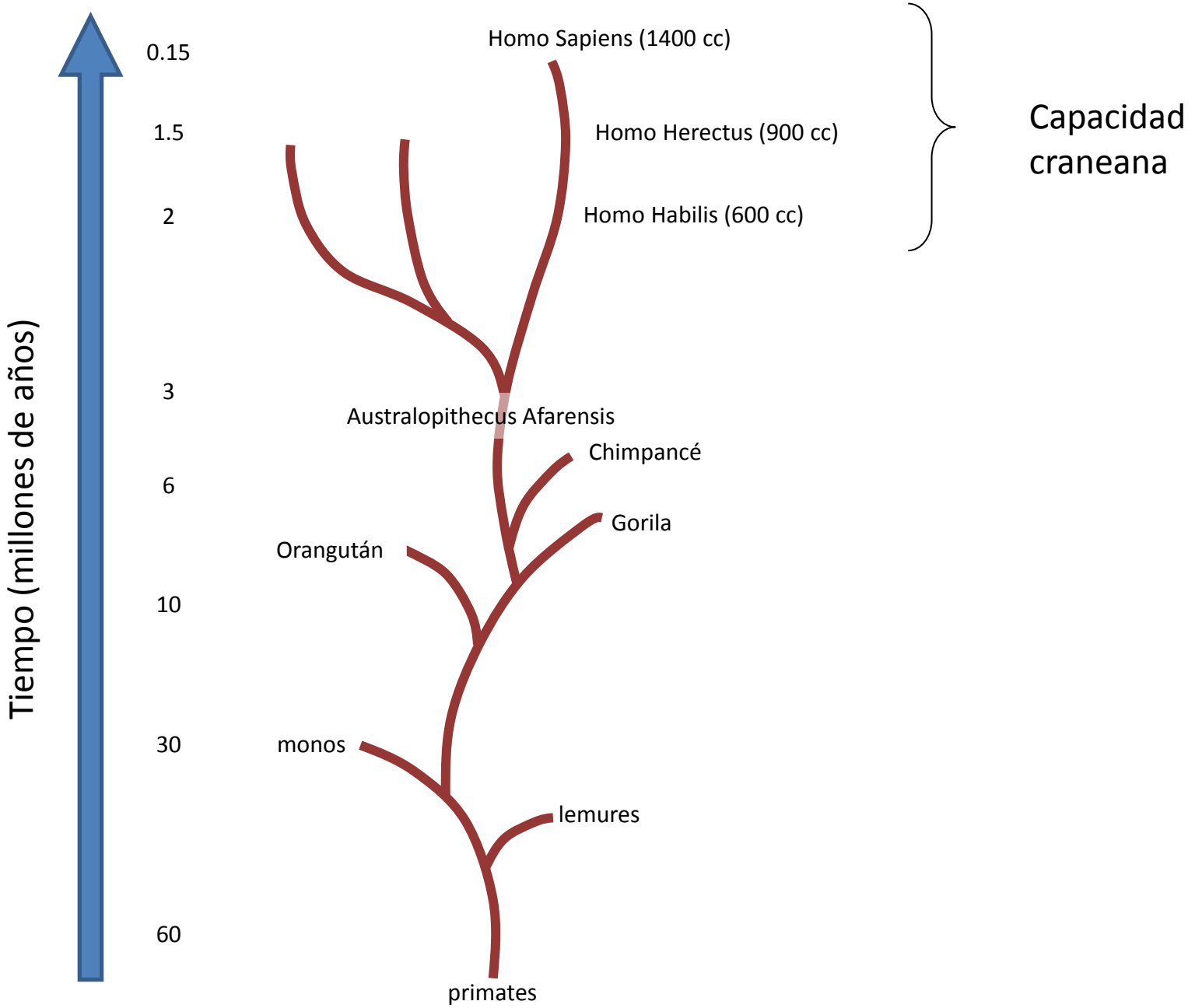
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

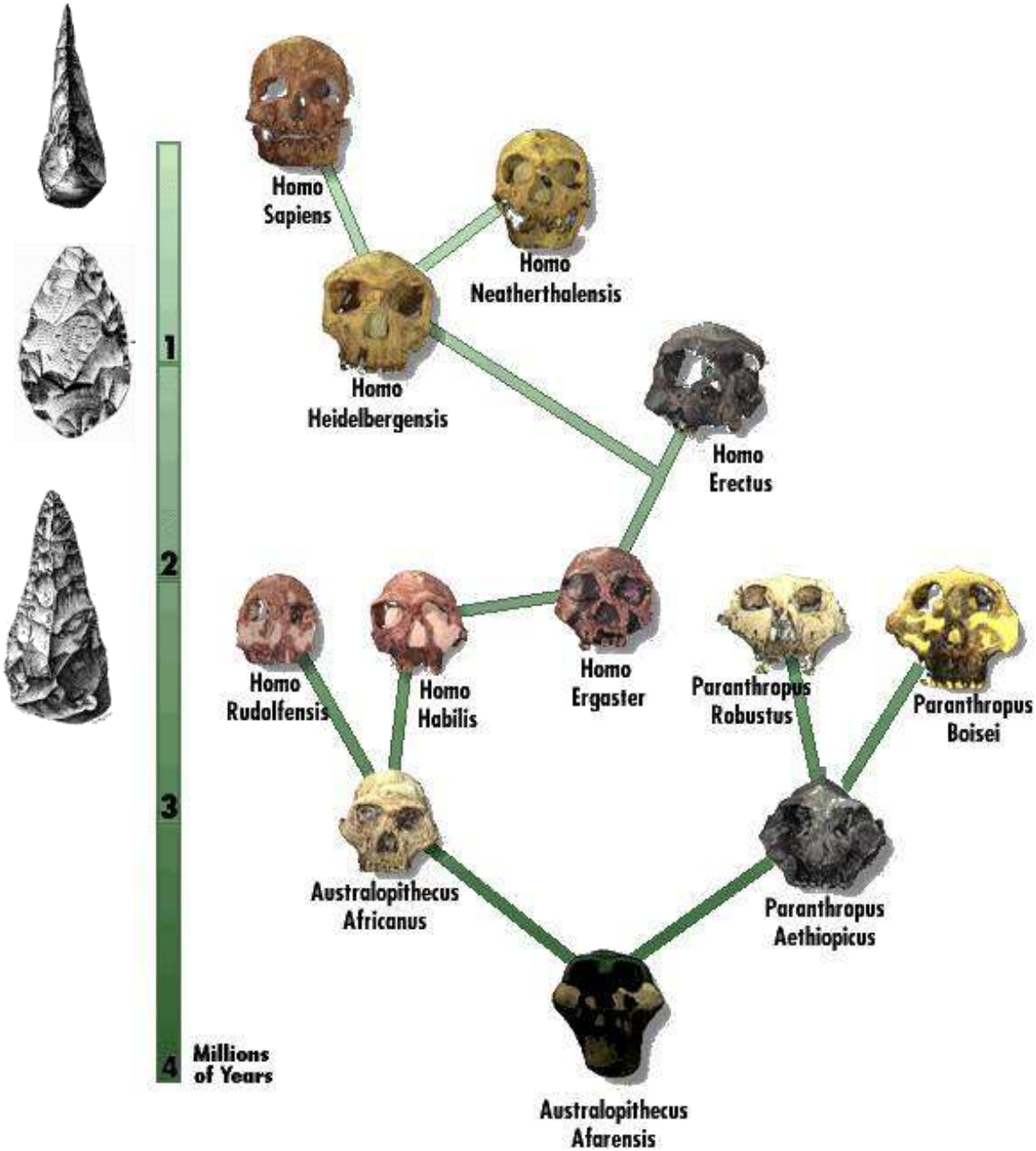
GITUD
Grupo de Investigación en Telecomunicaciones de la Universidad Distrital

Contenido

1. Evolución del modelado matemático en ingeniería
2. Proceso de modelado matemático en ingeniería
3. De lo lineal a lo no-lineal
4. De lo Euclidiano a lo fractal
5. De lo Gaussiano a lo no-Gaussiano
6. De lo simple a lo complejo
7. Ingeniería clásica bio-inspirada
8. Ingeniería de sistemas complejos
9. Conclusiones

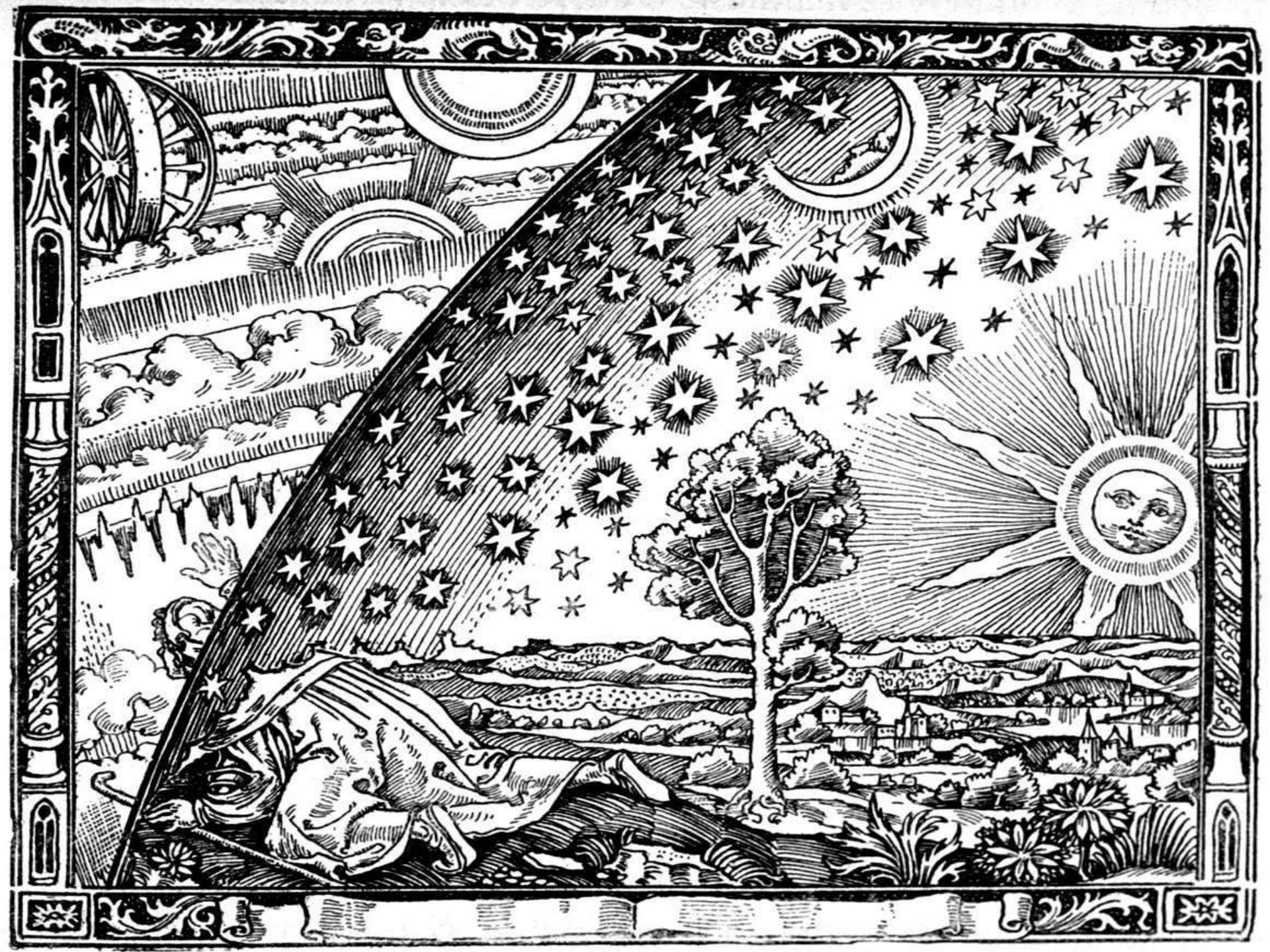
1. Evolución del modelado matemático en ingeniería


Tiempo (millones de años)
0.15
1.5
2
3
6
10
30
60
Homo Sapiens (1400 cc)
Homo Herectus (900 cc)
Homo Habilis (600 cc)
Capacidad craneana
Australopithecus Afarensis
Chimpancé
Gorila
Orangután
monos
lemures
primates

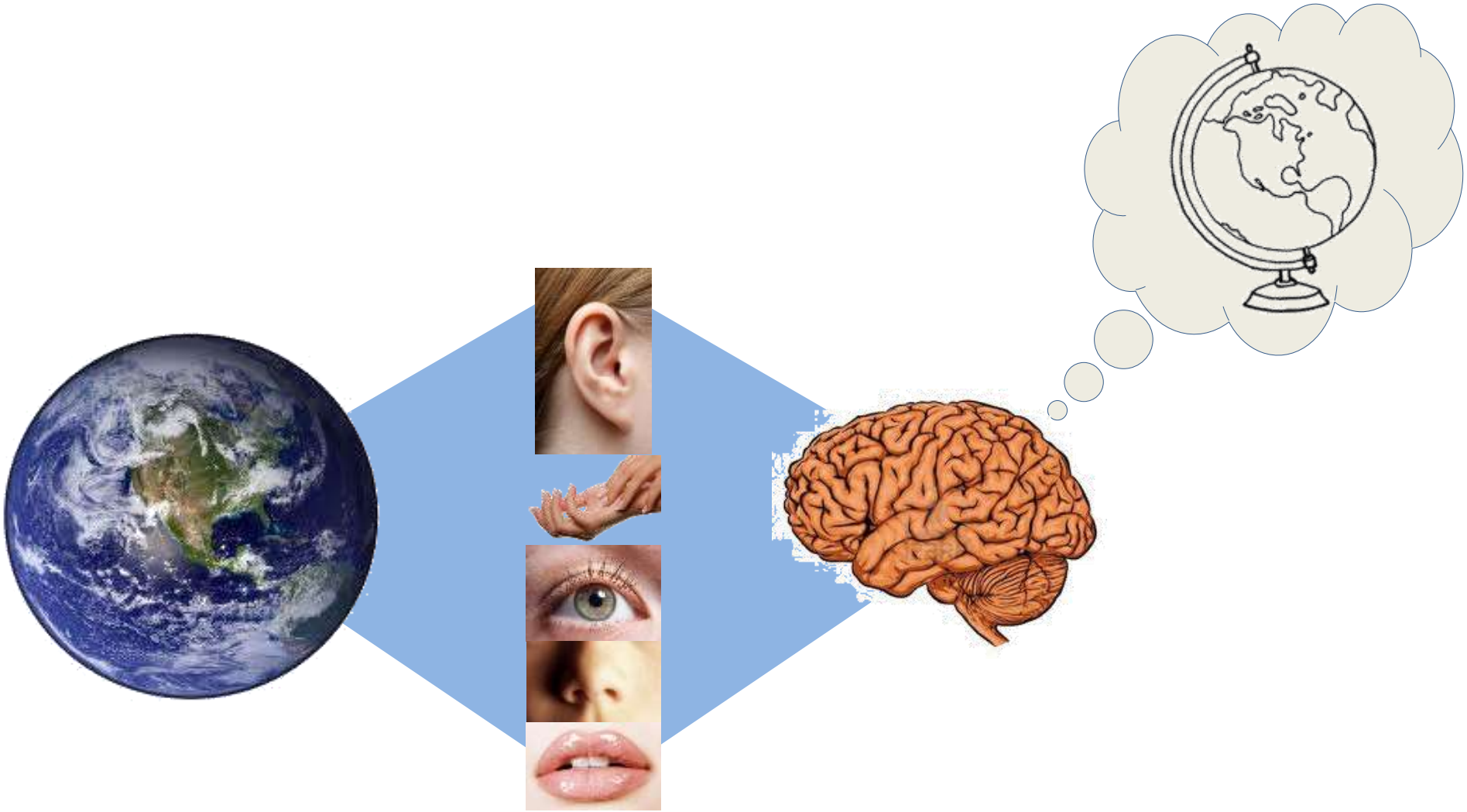

Homo Sapiens
Homo Neatherthalensis
Homo Heidelbergensis
Homo Erectus
Homo Rudolfensis
Homo Habilis
Homo Ergaster
Paranthropus Robustus
Paranthropus Boisei
Australopithecus Africanus
Paranthropus Aethiopicus
Australopithecus Afarensis
1
2
3
4
Millions of Years

Click… Conciencia!

El Infiernito

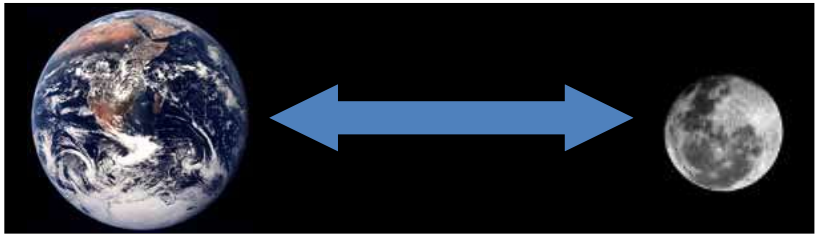


Construimos modelos del mundo



Modelos

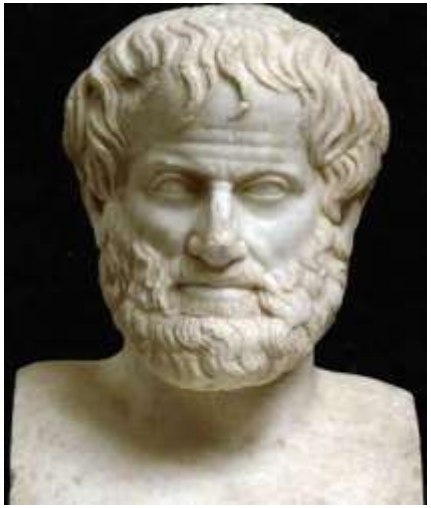
$$F = G\frac{M \cdot m}{r^2}$$



Egipto, Babilonia,…

América

“Principios científicos…”



Aristóteles (384 – 322 BC)

Bacon (1214 – 1294)

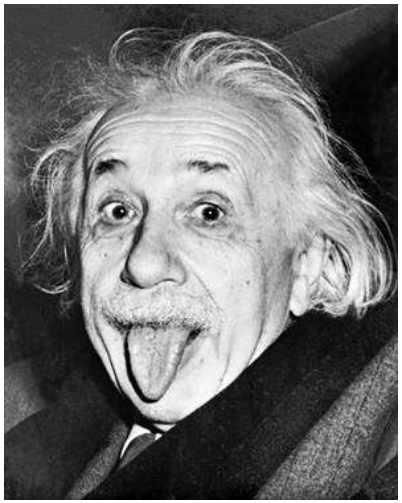
Bacon (1561 – 1626)

Descartes (1596 – 1650)

Kepler (1571 – 1630)

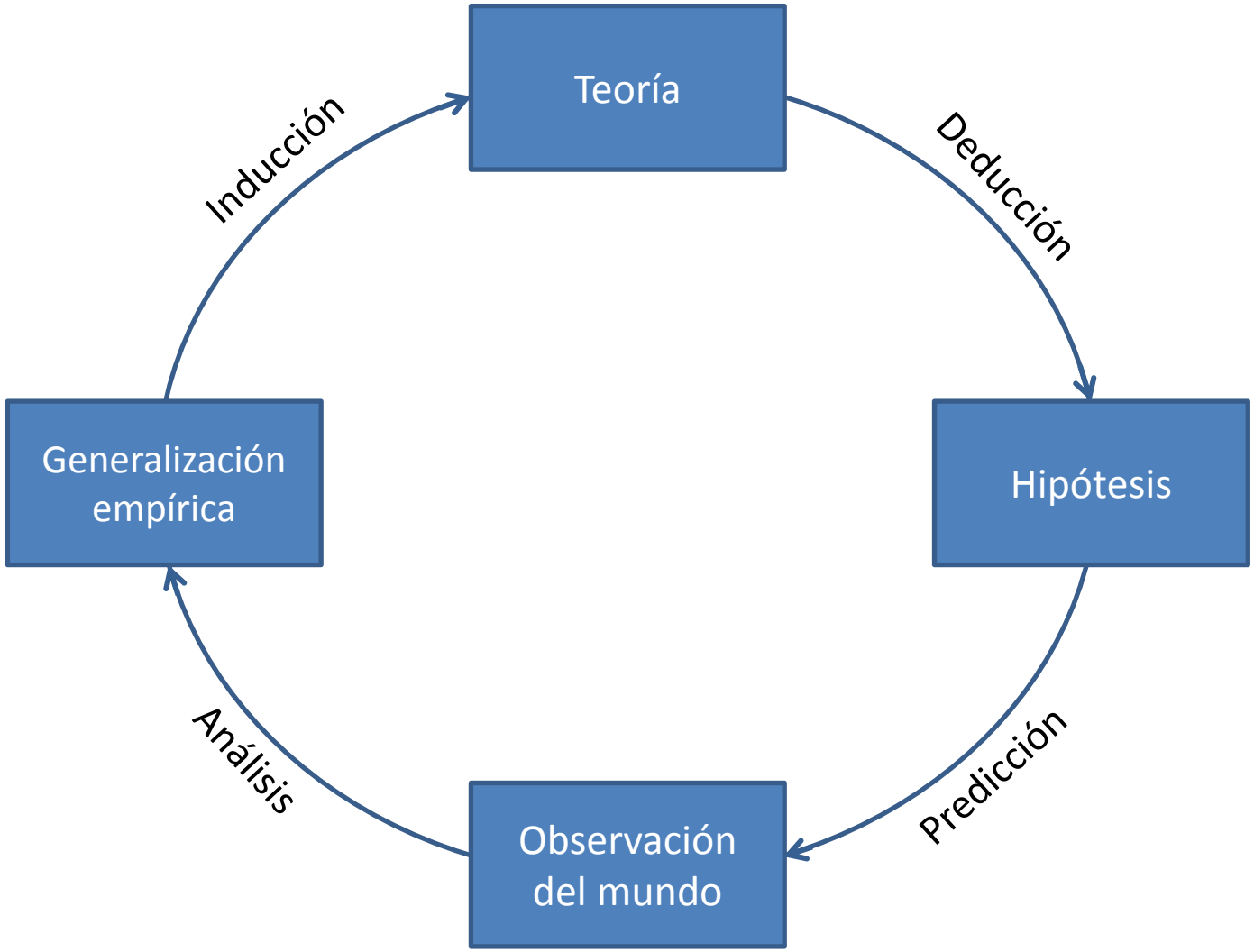
Galileo (1564 – 1642)

Newton (1643 – 1727)

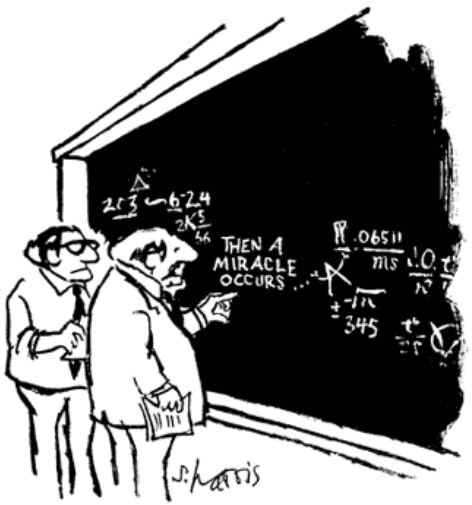


Einstein (1879 – 1955)

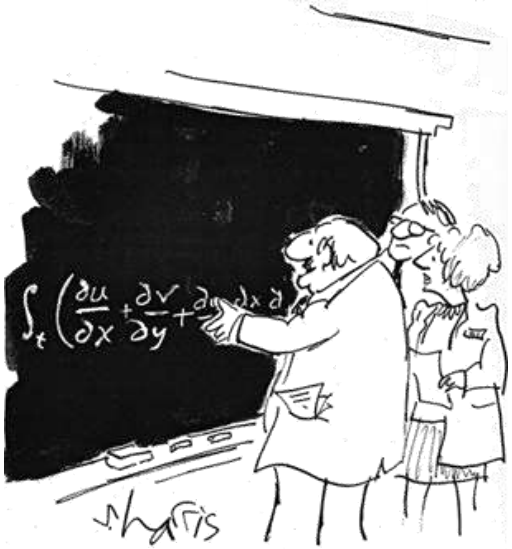
“Principios científicos…”



“Principios científicos…”

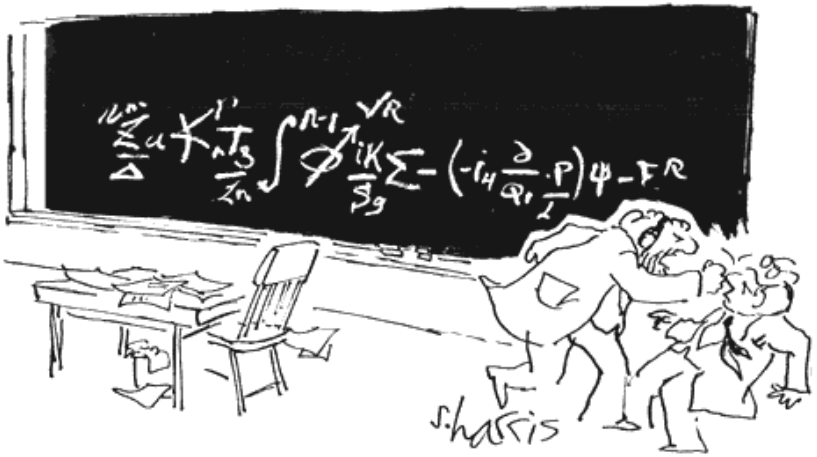


“I think you should be more explicit here in step two.”

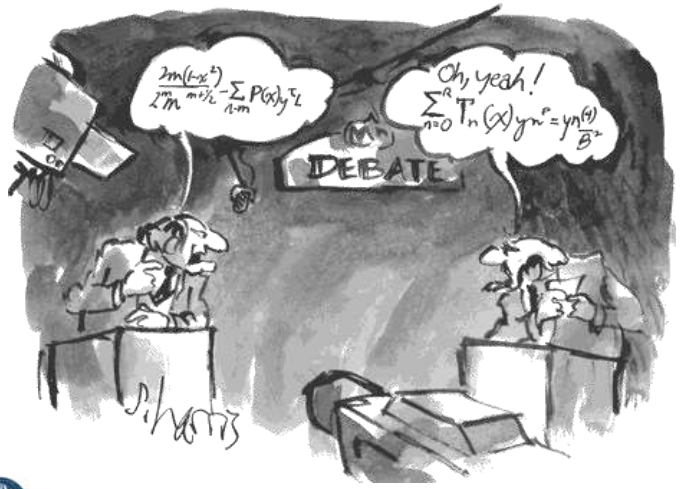


“...AND THAT IS MY PHILOSOPHY.”

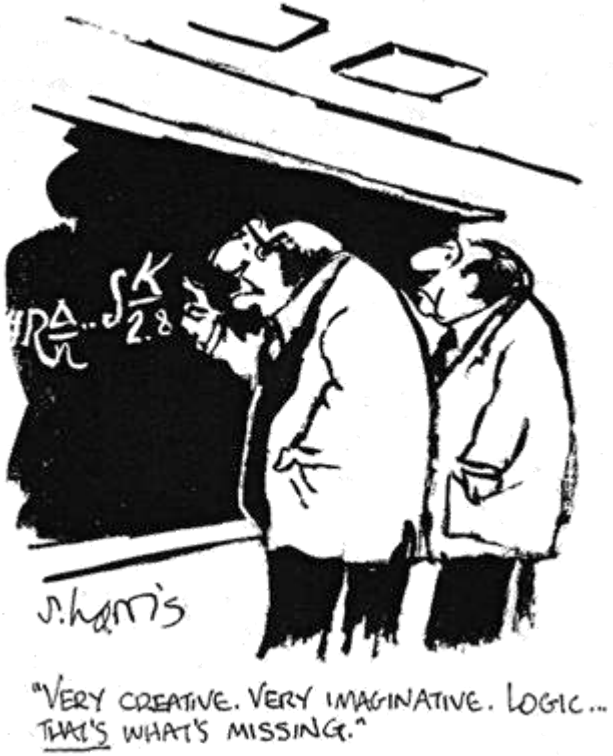
“IT'S AN EXCELLENT PROOF, BUT IT LACKS WARMTH AND FEELING.”



"You want proof? I'll give you proof!"

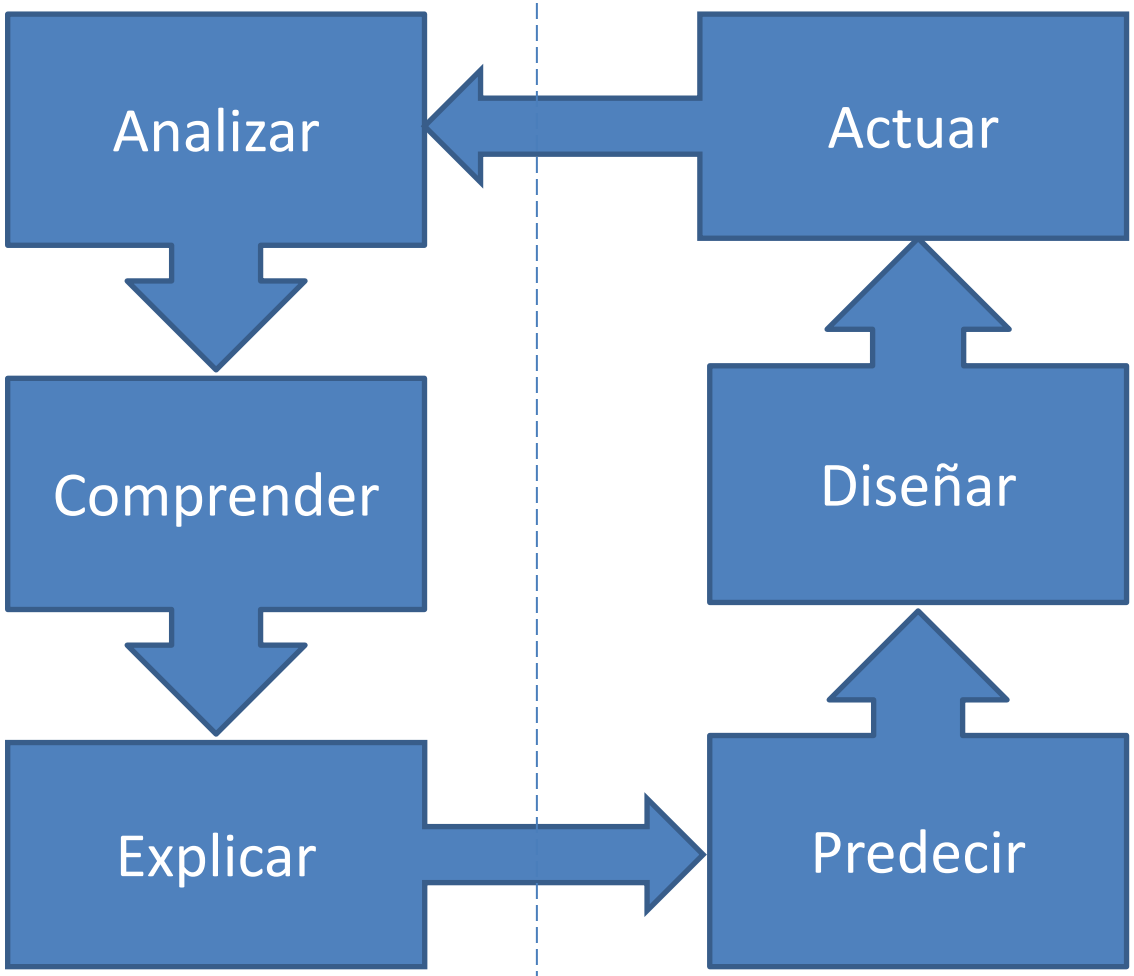


“Principios científicos…”

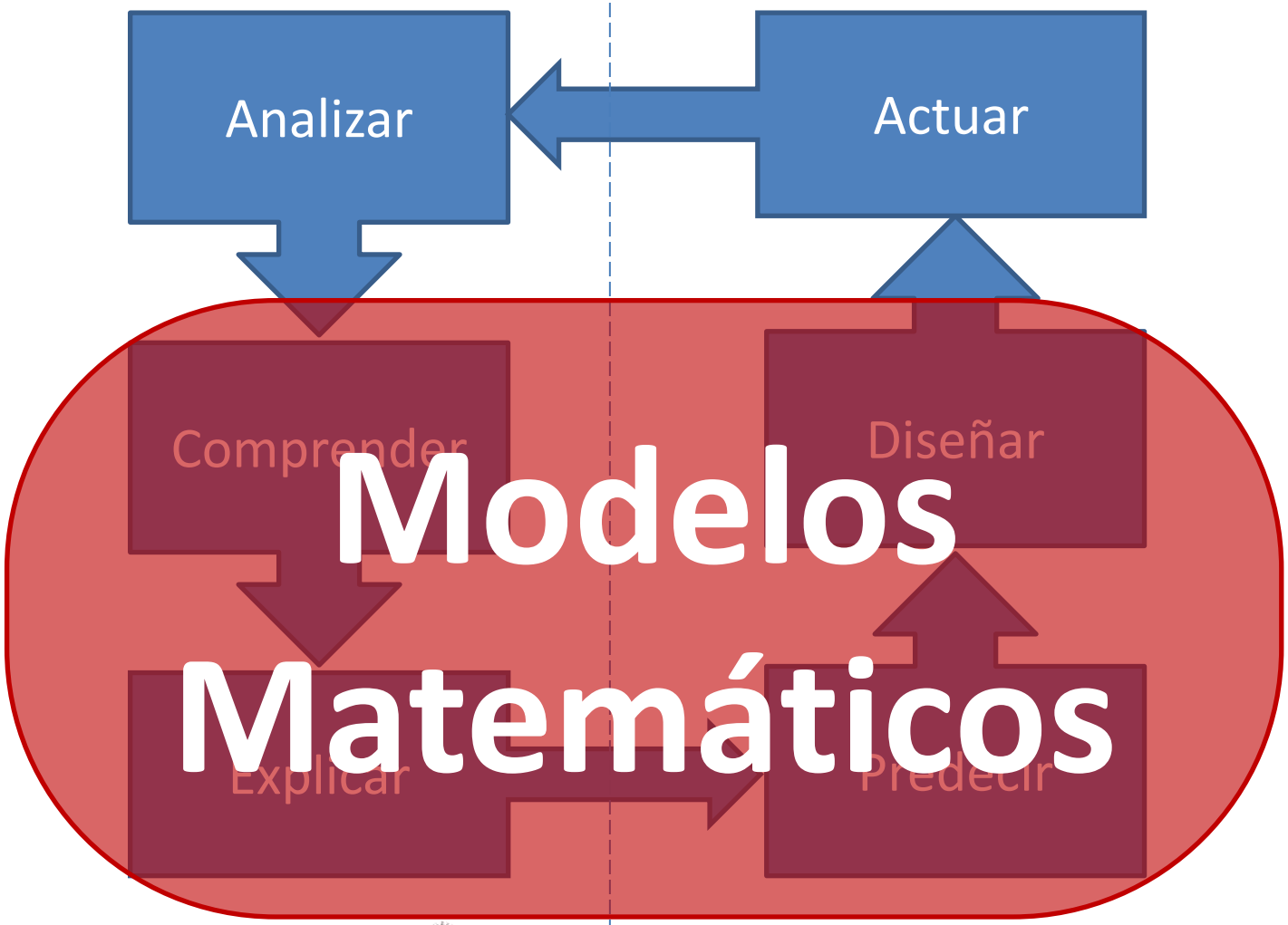


“Principios científicos…”

Ciencia e Ingeniería



Ciencia e Ingeniería



Leyes de la naturaleza

$$\frac{d}{dt} p_i = F_E + \sum_{j \neq i} F_{ji}$$

Newton

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Maxwell

$$-\nabla p + \mu\left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})\right) + \rho \mathbf{u} = \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}\right)$$

Navier-Stokes

Ciencia e Ingeniería

Analizar

Actuar

Comprender

Diseñar

Modelos Matemáticos

Explicar

Predecir

Mundo Físico

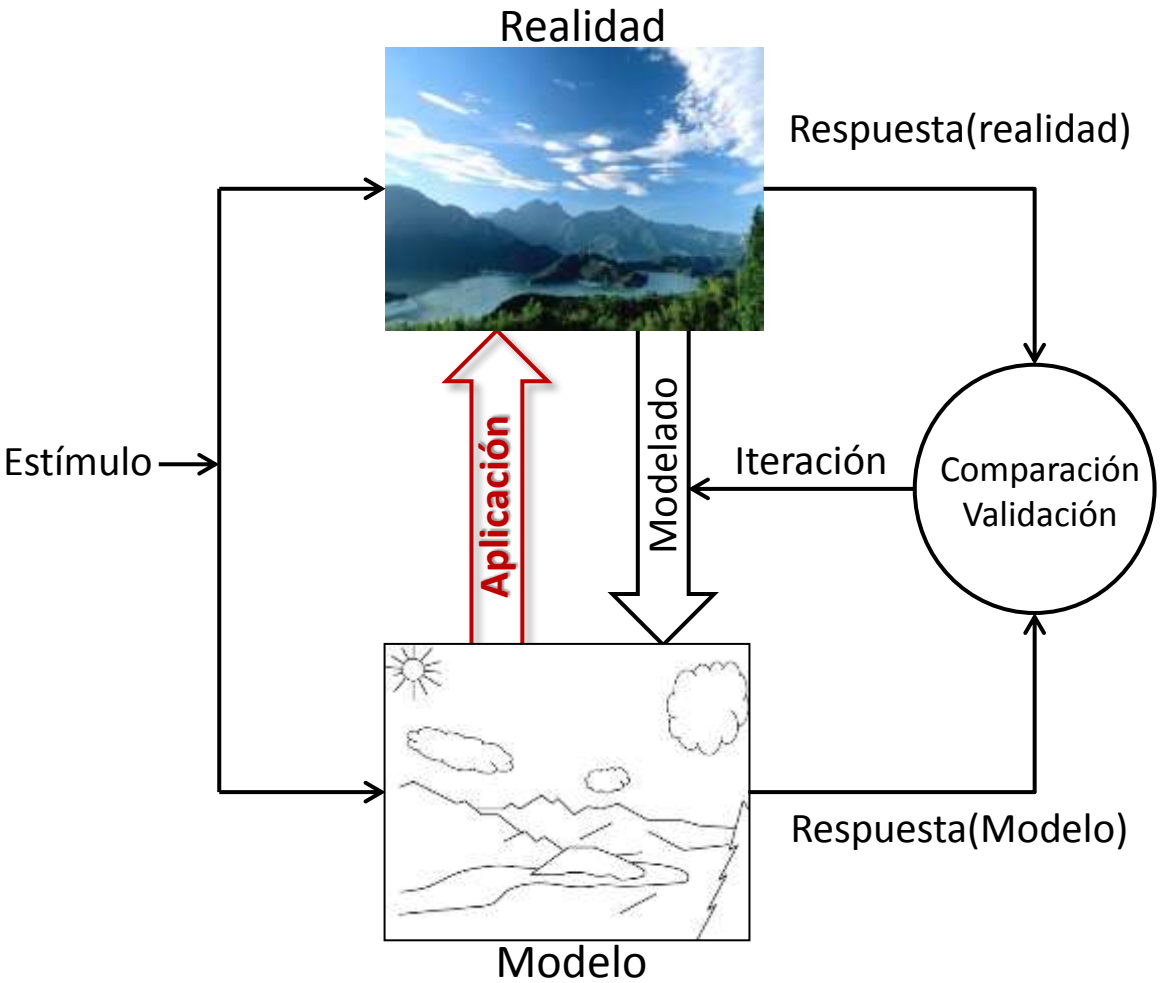
Mundo Mental

Diálogo de dos extranjeros que toman café en un salón de Berkeley. William Ospina

- ¿Es verdad, señor Einstein, que ustedes, los científicos, creen en un mundo fuera de la conciencia humana?
- Hay una realidad más allá de nosotros. Toda verdad humana sólo deriva de ella.
- Ah, no diga usted eso. Yo sólo puedo hablar de lo que he percibido.
- Señor Tagore, escúcheme: la suma de los ángulos interiores de un triángulo sería igual a dos rectos aunque no hubiese humanos.
- ¿Y quién puede probar semejante supuesto?
- La razón, pues sus leyes imperan para todos. Budistas, musulmanes, pielesrojas, albinos... nadie puede evadir los axiomas del mundo.
- Sólo porque aquí hay hombres son verdad esas cosas.
- ¿Afirma usted entonces que si no hubiera humanos, el Apolo de Belvedere dejaría de ser bello?
- Sí señor, eso digo.
- Pues yo pienso otra cosa. **Aunque todos muriéramos, y el sueño de la especie se borrara, fuera de nuestras mentes persistiría el mundo, y el mármol, ya invisible, guardaría su belleza**.
- Entonces, señor Einstein, **usted es mucho más religioso que yo**

2. Proceso de modelado matemático en ingeniería

Modelado matemático en ingeniería

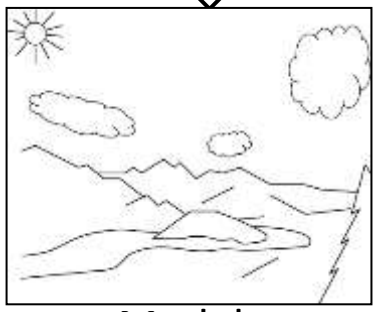


El modelado consiste en abstraer de una realidad compleja los aspectos más relevantes asociados con un objetivo particular de estudio, y formularlos en el contexto formal y riguroso de las matemáticas. Al operar con el modelo así formulado, se obtendrán conclusiones que podrían remitirse directamente al sistema bajo estudio. La utilidad de estas conclusiones para comprender o controlar el sistema bajo estudio determinará la validez del proceso de modelamiento matemático.

Construcción de modelos matemáticos

Realidad

Modelado



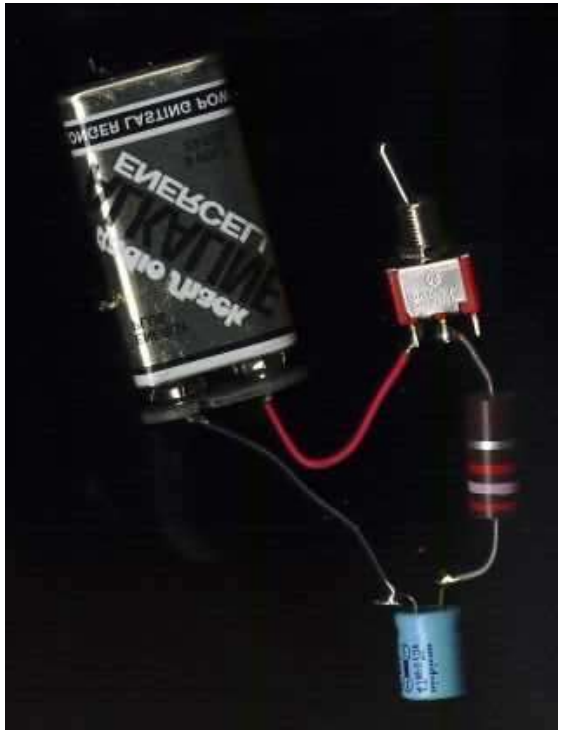
Modelo

- Identificación de componentes
- Determinación de variables descriptivas de esos componentes
- Identificación de reglas de interacción
- Determinación de parámetros descriptivos de esas interacciones

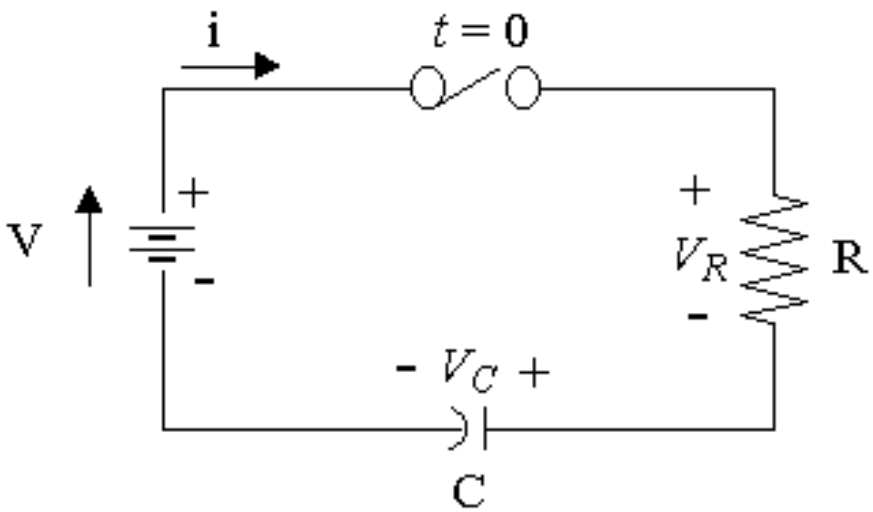
Construcción de modelos matemáticos

- Elementos descritos por su
  - Masa
  - Posición
  - Velocidad
- Interacciones descritas por
  - La fuerza que ejercen los objetos entre ellos (Dos objetos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos)

Construcción de modelos matemáticos



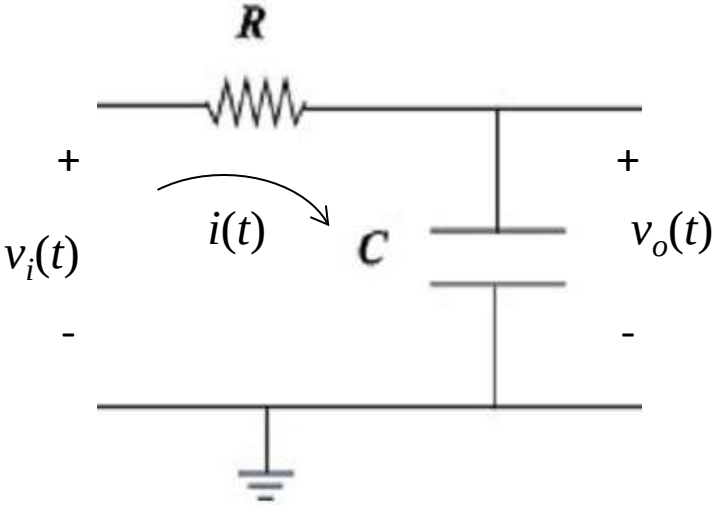
Realidad

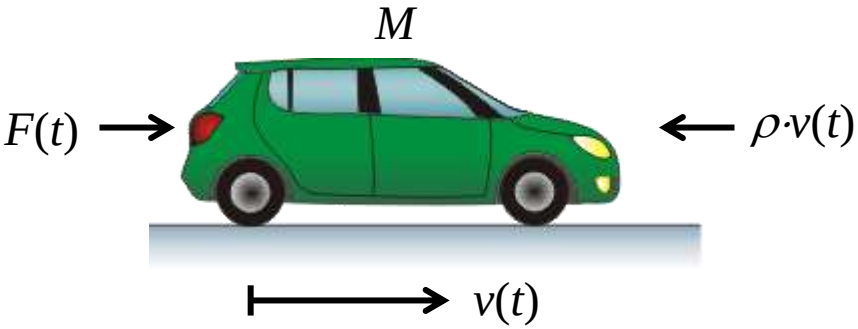


Modelo

- Identificación de componentes
- Determinación de variables descriptivas de esos componentes

Construcción de modelos matemáticos





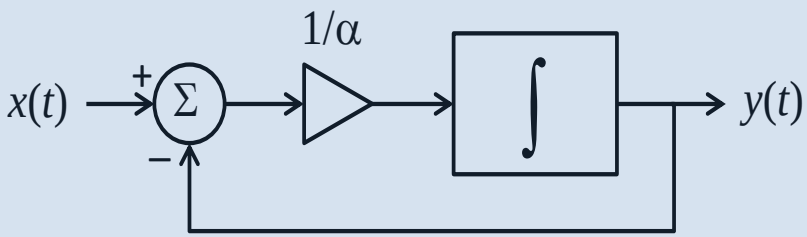
$$v_i(t) = v_0(t) + v_R(t)$$

$$v_i(t) = v_0(t) + R \cdot i(t)$$

$$v_i(t) = v_0(t) + RC\frac{d}{dt}v_o(t)$$

$$F(t) - \rho \cdot v(t) = M\frac{d}{dt}v(t)$$

$$\frac{1}{\rho}F(t) = v(t) + \frac{M}{\rho}\frac{d}{dt}v(t)$$

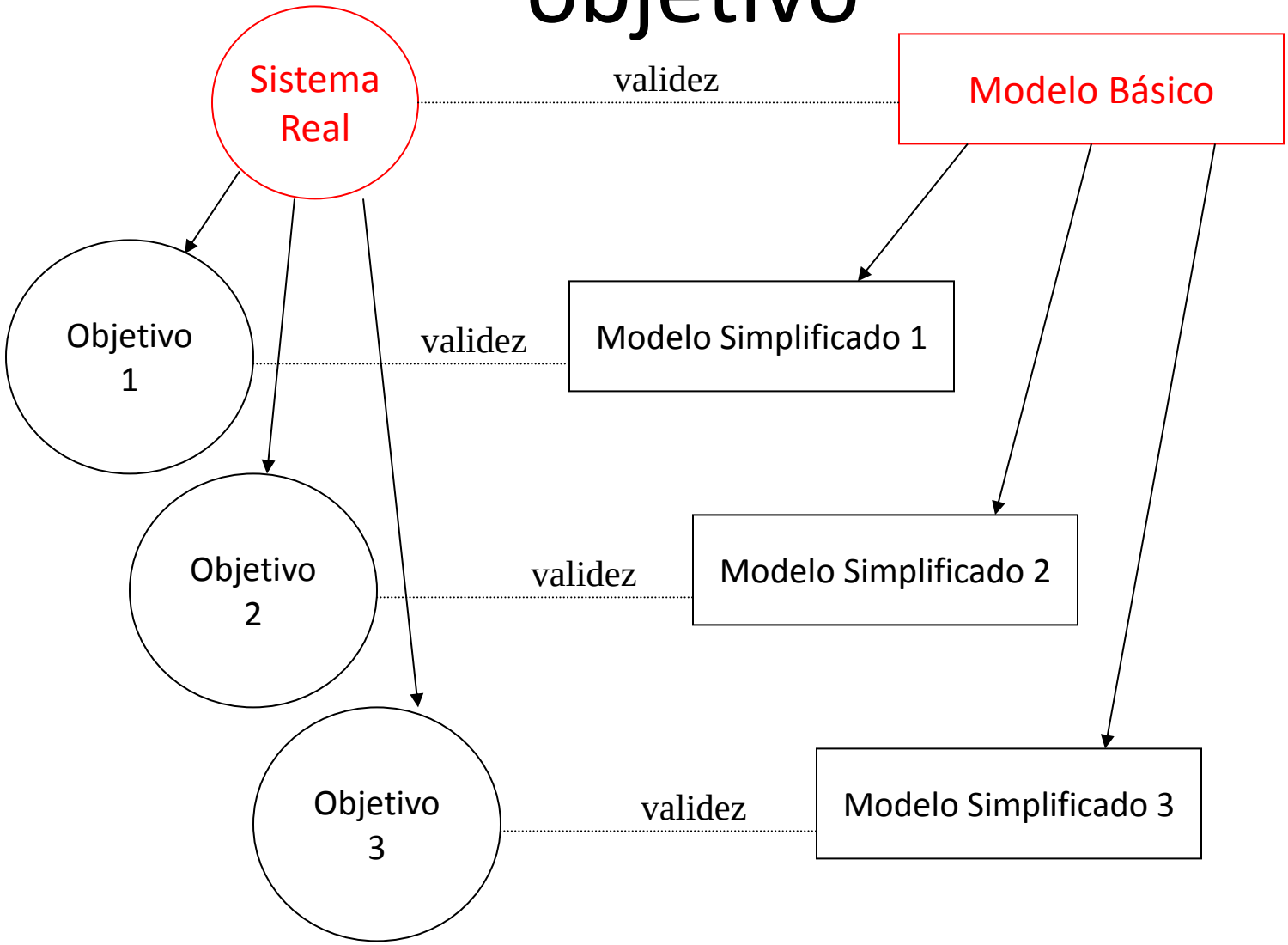


$$\frac{1}{\alpha}\left(x(t) - y(t)\right) = \frac{d}{dt}y(t)$$

$$x(t) = y(t) + \alpha\frac{d}{dt}y(t)$$

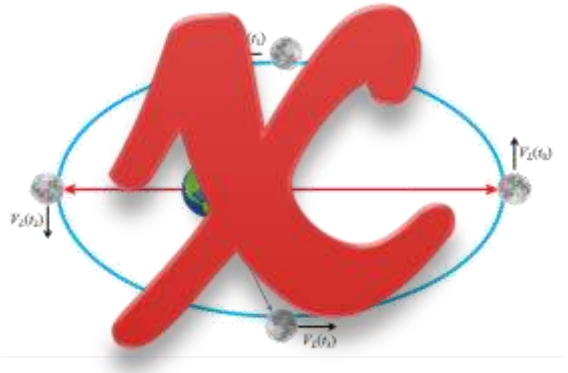
Modelos matemáticos abstractos generales

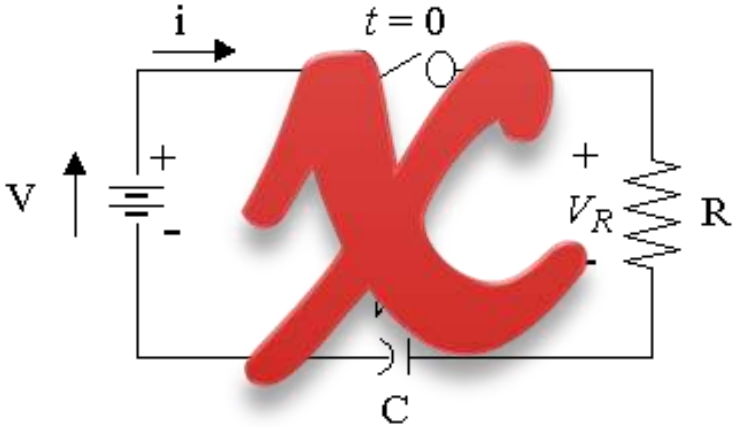
Un modelo distinto por cada objetivo

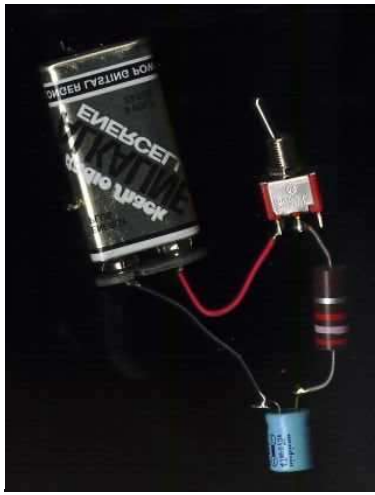


Un modelo distinto por cada objetivo

- ✓ ¿Condensador electrolítico o cerámico?
- ✓ ¿Qué tipo de combustible?
- ✓ ¿Cómo se logra el sincronismo de la rotación lunar?



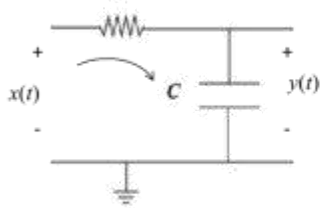




Evaluación del modelo matemático

Realidad

Modelo



Evaluación analítica

$$x(t) = y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1-y}{RC}$$

$$u(t) \triangleq 1 - y(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = -\frac{u}{RC}$$

$$\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{RC}\int dt \quad \Rightarrow \quad u(t) = Ce^{-t/RC}$$

$$y(t) = 1 - Ce^{-t/RC}$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 1 - e^{-t/RC}$$

Evaluación por simulación

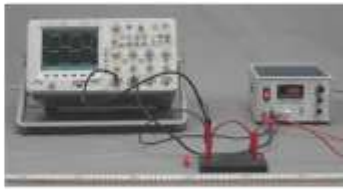
$$x(t) = y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t)$$

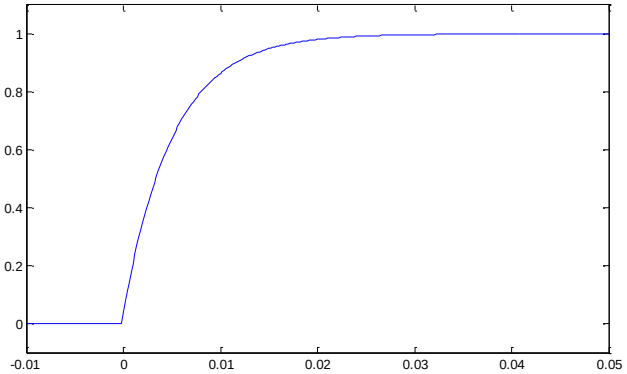
$$x(n\Delta t) \approx y(n\Delta t) + RC\frac{y(n\Delta t) - y((n-1)\Delta t)}{\Delta t}$$

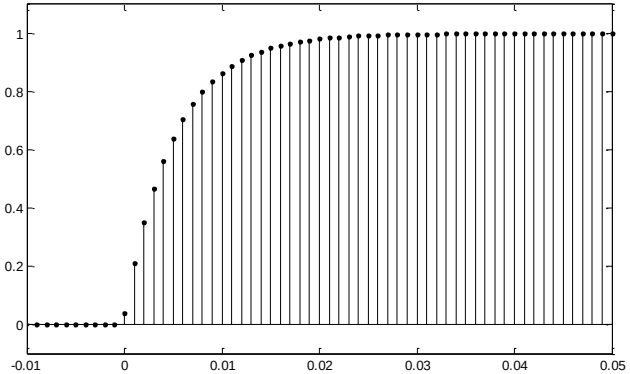
$$x[n] = y[n](1+\beta) - \beta y[n-1], \quad \text{donde } \beta = \frac{RC}{\Delta t}$$

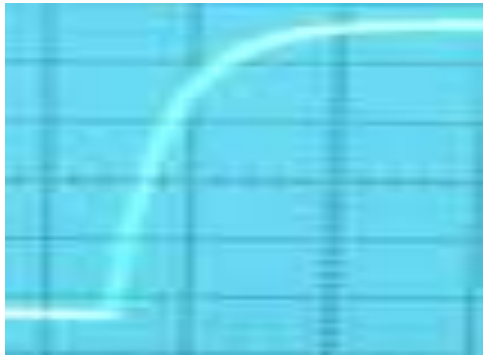
```
        n          ←0
        y[n]       ←0
Lazo:   n          ← n+1
        y[n]       ← (1 + βy[n-1])/(1 + β)
        P_salida   ← y[n]
        volver     a Lazo
```

Evaluación experimental

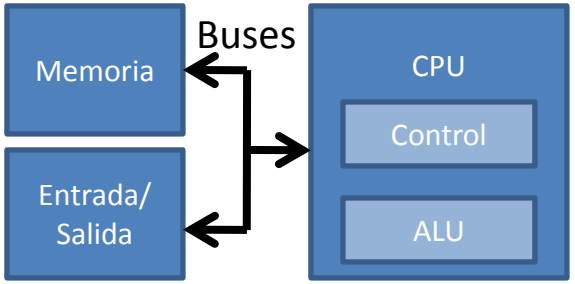


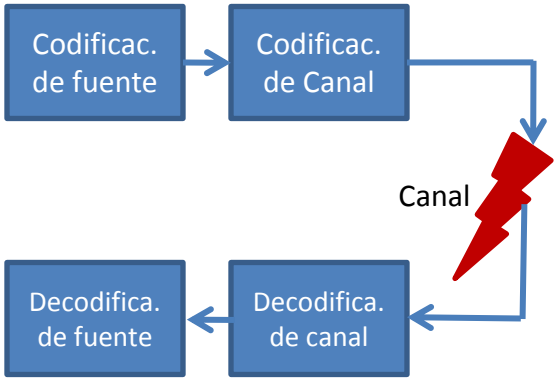


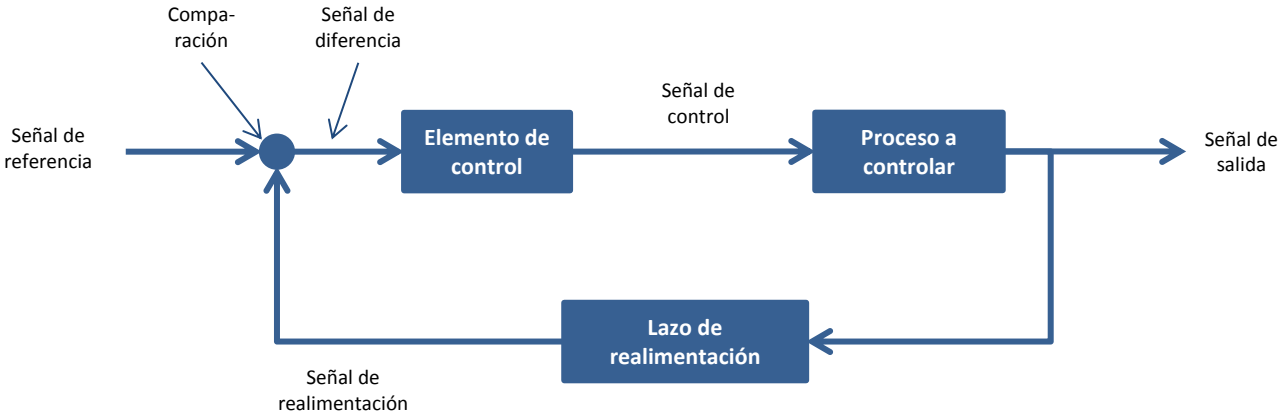




Construcción de modelos matemáticos



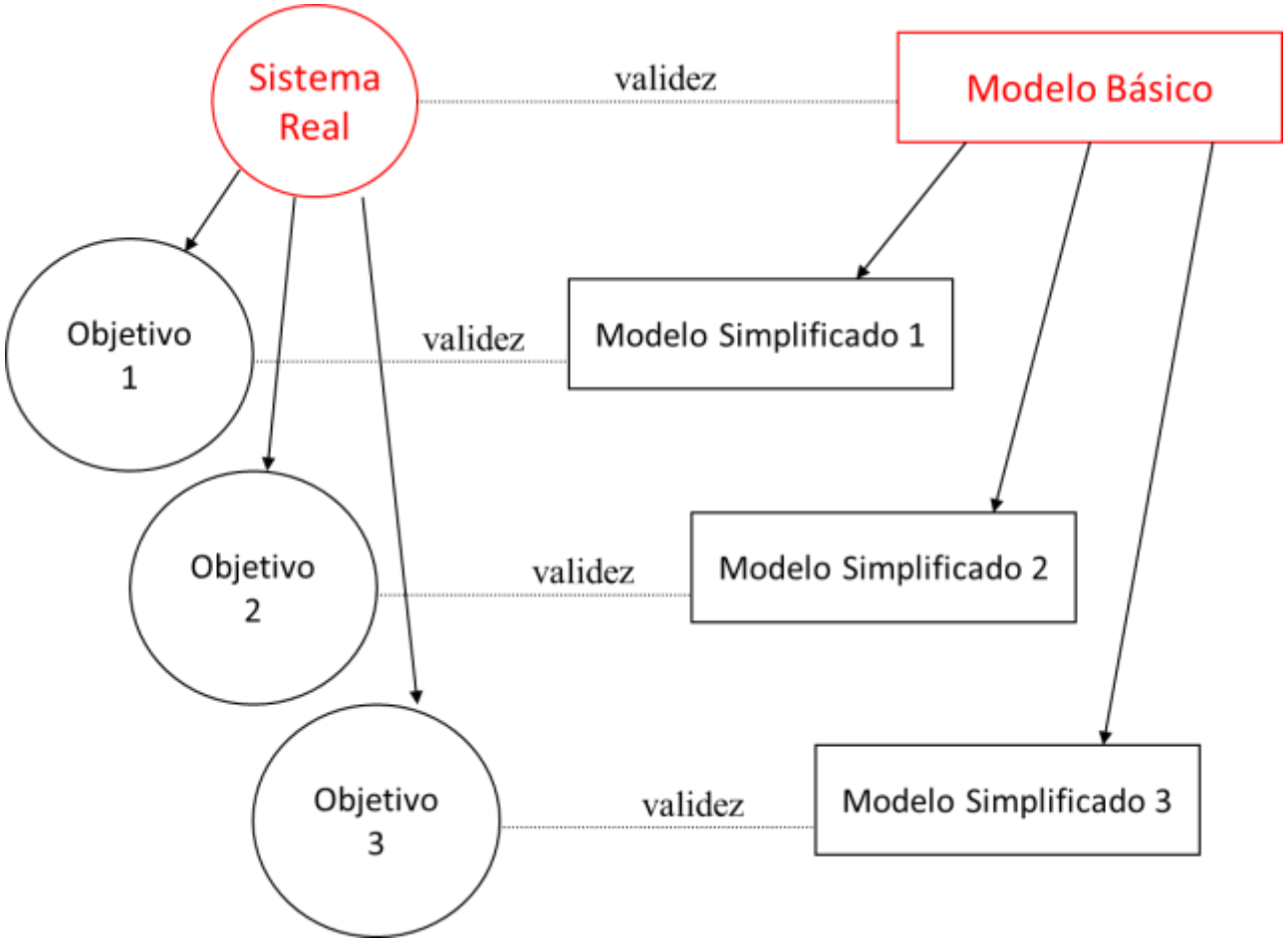


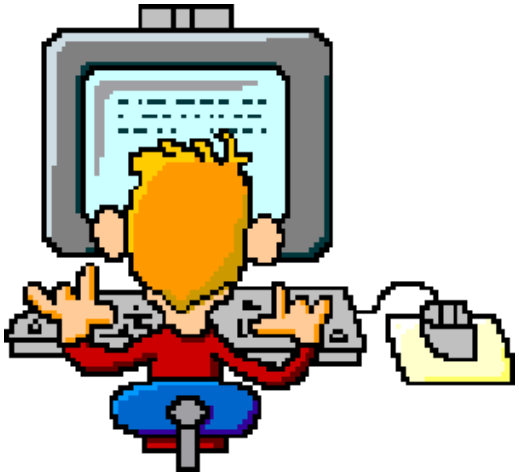


- Identificación de componentes
- Determinación de variables descriptivas de esos componentes
- Identificación de reglas de interacción
- Determinación de parámetros descriptivos de esas interacciones

Otro Ejemplo

¿Cómo se modela un computador?





Otro Ejemplo

Realidad:
Un Computador

Modelo 1:

Pantalla
Ratón
CD-drive

(para mi hijo de cuatro años)

Modelo 2:

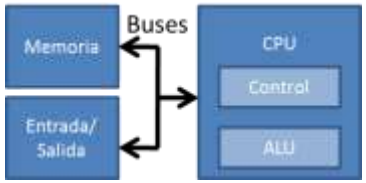
Aplicación
Sistema Operativo
Hardware

(para un ingeniero de software)

Modelo 3:

CPU
Memoria/IO
Buses

(para un ingeniero de hardware)



Para un ingeniero de redes de comunicaciones

En el instante t genera $\lambda(t)$ paquetes/segundo

- Secuencia de instantes de llegada, $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$
- Número de llegadas hasta el instante t, $\{N(t), t \in \mathbb{R}\}$
- Secuencia de tiempo entre llegadas, $\{A_n, n \in \mathbb{Z}\}$

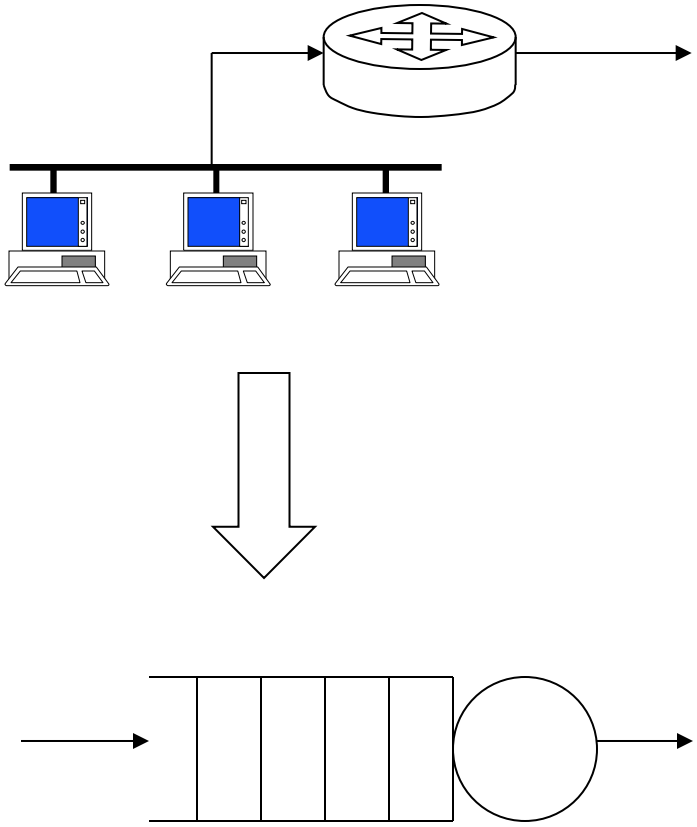
} + Carga impuesta por cada llegada, $\{L_n, n \in \mathbb{Z}\}$

$$N(t) = \max[\, n \mid T_n \leq t \,]$$

$$A_n = T_n - T_{n-1}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

Elementos e Interacciones

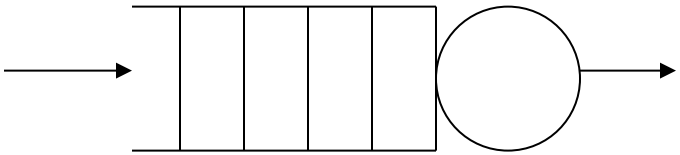


Uno de muchos posibles modelos

- Elementos
  - Fuente (Tiempo entre llegadas de paquetes)
  - Paquete (Instante de Llegada, Longitud en bits)
  - Buffer (Número de paquetes, Número de Cupos)
  - Enlace (Capacidad en bps, estado de ocupación)
- Interacciones
  - Si un paquete llega y encuentra el enlace ocupado, espera en el buffer hasta que le llegue su turno. Si el enlace está libre, lo ocupa. El tiempo de ocupación está dado por la longitud del paquete y la capacidad del enlace.

Evaluación Analítica

λ paquetes/segundo



μ paquetes/segundo

Si la entrada forma un proceso estacionario de Poisson:

$$P[N(t)=n]=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

Con incrementos independientes

Y si el tiempo de transmisión es exponencial i.i.d. para cada paquete:

$$P[T \le t]=1-e^{-\mu t}$$

Entonces las estadísticas del buffer de transmisión y la ocupación del enlace se pueden obtener analíticamente de un modelo de cola M/M/1. Por ejemplo, el retardo promedio de cada paquete en el enlace es

$$E[D]=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

Evaluación Analítica

$$P\left[A(t,t+\Delta t)=n\right]=\begin{cases}\lambda\Delta t+o(\Delta t) & n=1\\ 1-\lambda\Delta t+o(\Delta t) & n=0\\ o(\Delta t) & n>1\end{cases}\qquad P\left[D(t,t+\Delta t)=n\right]=\begin{cases}\mu\Delta t+o(\Delta t) & n=1\\ 1-\mu\Delta t+o(\Delta t) & n=0\\ o(\Delta t) & n>1\end{cases}\qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

$$P\left[N(t+\Delta t)=n\right]\triangleq p_n(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(t)P\left[A(t,t+\Delta t)-D(t,t+\Delta t)=n-k\,\middle|\,N(t)=k\right]$$

$$p_n(t+\Delta t)=p_{n-1}(t)P\left[A(t,t+\Delta t)=1\right]P\left[D(t,t+\Delta t)=0\right]+p_{n+1}(t)P\left[A(t,t+\Delta t)=0\right]P\left[D(t,t+\Delta t)=1\right]+p_n(t)P\left[A(t,t+\Delta t)=0\right]P\left[D(t,t+\Delta t)=0\right]+o(\Delta t)$$

$$p_n(t+\Delta t)=p_{n-1}(t)\left(\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(1-\mu\Delta t+o(\Delta t)\right)+p_{n+1}(t)\left(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(\mu\Delta t+o(\Delta t)\right)+p_n(t)\left(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)\right)\left(1-\mu\Delta t+o(\Delta t)\right)+o(\Delta t)$$

$$p_n(t+\Delta t)=p_{n-1}(t)\left(\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)+p_{n+1}(t)\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(\mu\Delta t\right)+p_n(t)\left(1-\lambda\Delta t\right)\left(1-\mu\Delta t\right)+o(\Delta t)$$

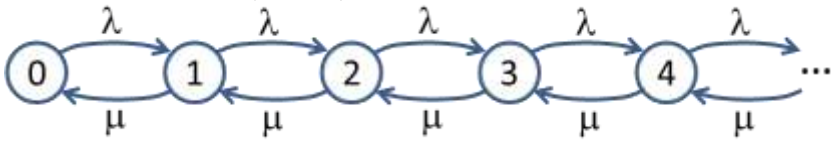
$$p_n(t+\Delta t)=p_{n-1}(t)\left(\lambda\Delta t\right)+p_{n+1}(t)\left(\mu\Delta t\right)+p_n(t)\left(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t\right)+o(\Delta t)$$

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t}=\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t)-\left(\lambda+\mu\right)p_n(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}p_n(t)=\lambda p_{n-1}(t)+\mu p_{n+1}(t)-\left(\lambda+\mu\right)p_n(t)$$

$$\text{Estabilidad}:\ \lim_{t\to\infty}p_n(t)=p_n\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}p_n(t)=0$$

$$\left(\lambda+\mu\right)p_n=\lambda p_{n-1}+\mu p_{n+1}$$



$$\lambda p_0=\mu p_1\Rightarrow p_1=\rho p_0\qquad \lambda p_1=\mu p_2\Rightarrow p_2=\rho^2 p_0\qquad \lambda p_2=\mu p_3\Rightarrow p_3=\rho^3 p_0\qquad\Longrightarrow\qquad p_n=\rho^n p_0\qquad\left(\rho\triangleq\lambda/\mu\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_n=p_0\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n=1\quad\text{(Condición de estabilidad: ρ<1)}\quad\Rightarrow\quad p_0=1-\rho\quad\Rightarrow\quad p_n=\rho^n\left(1-\rho\right)$$

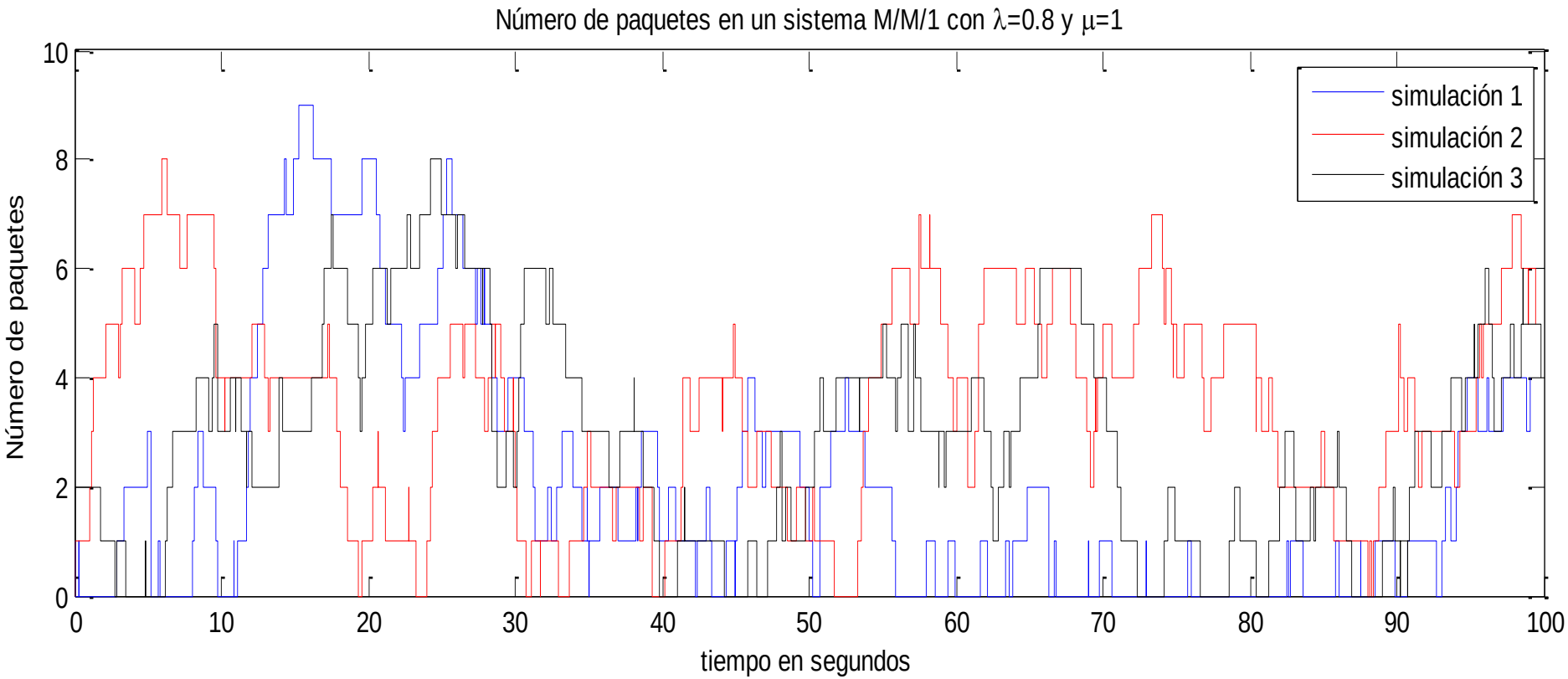
$$E[N]=\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\left(1-\rho\right)\rho\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^{n-1}=\left(1-\rho\right)\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

Ley de Little
Principio PASTA $\Rightarrow$ $E[D]=\frac{1}{\lambda}E[N]=\frac{1}{\mu-\lambda}$

Evaluación por Simulación

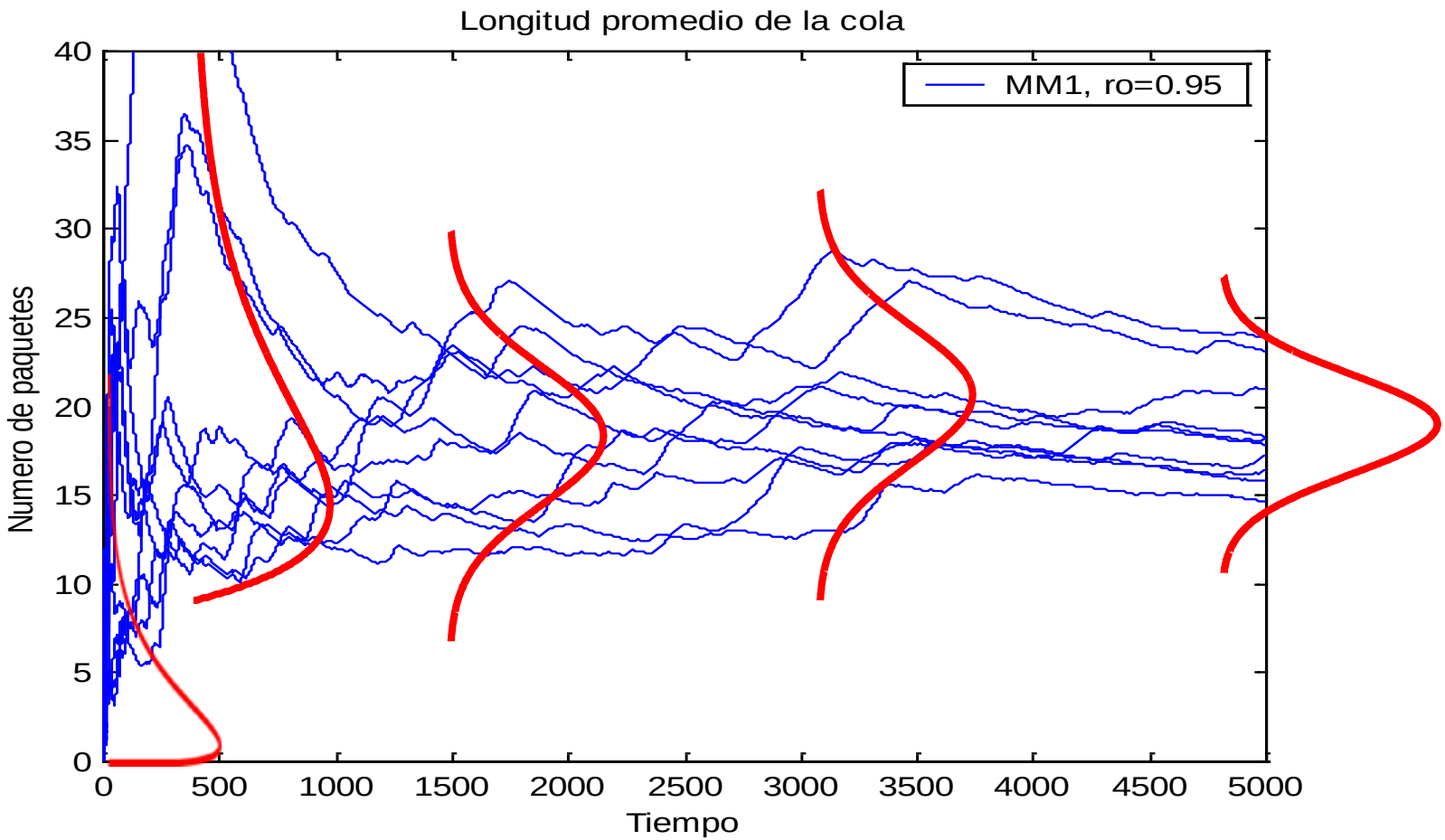
```
function ColaMM1(lambda,mu,tiempoSimulacion)
   reloj = 0;                                  % Reloj de la simulación
   proximaLlegada = 0;                         % Tiempo de la siguiente llegada
   proximaSalida = inf;                        % Tiempo de la siguiente salida
   paquetesSistema = 0;                        % Número de paquetes en el sistema [N(t)]
   while reloj<tiempoSimulacion
      if proximaLlegada<proximaSalida          % Procesa una llegada
         reloj = proximaLlegada;               % Actualiza el reloj de simulación
         proximaLlegada = reloj + random('exp', 1/lambda); % Programa la próxima llegada
         paquetesSistema = paquetesSistema+1; % Hay un paquete más en el sistema
         if paquetesSistema == 1               % Si es el único, inicia su transmisión inmediatamente
            proximaSalida = reloj + random('exp', 1/mu); % Programa la próxima salida
         end
      else                                     % Procesa una salida
         reloj = proximaSalida;                % Actualiza el reloj de simulación
         paquetesSistema = paquetesSistema-1; % Hay un paquete menos en el sistema
         proximaSalida = inf;                  % Si el sistema queda vacío, no se espera una salida
         if paquetesSistema > 0                % En otro caso,
            proximaSalida = reloj + random('exp', 1/mu); % Programa la próxima salida
         end
      end
   end
```

Evaluación por Simulación

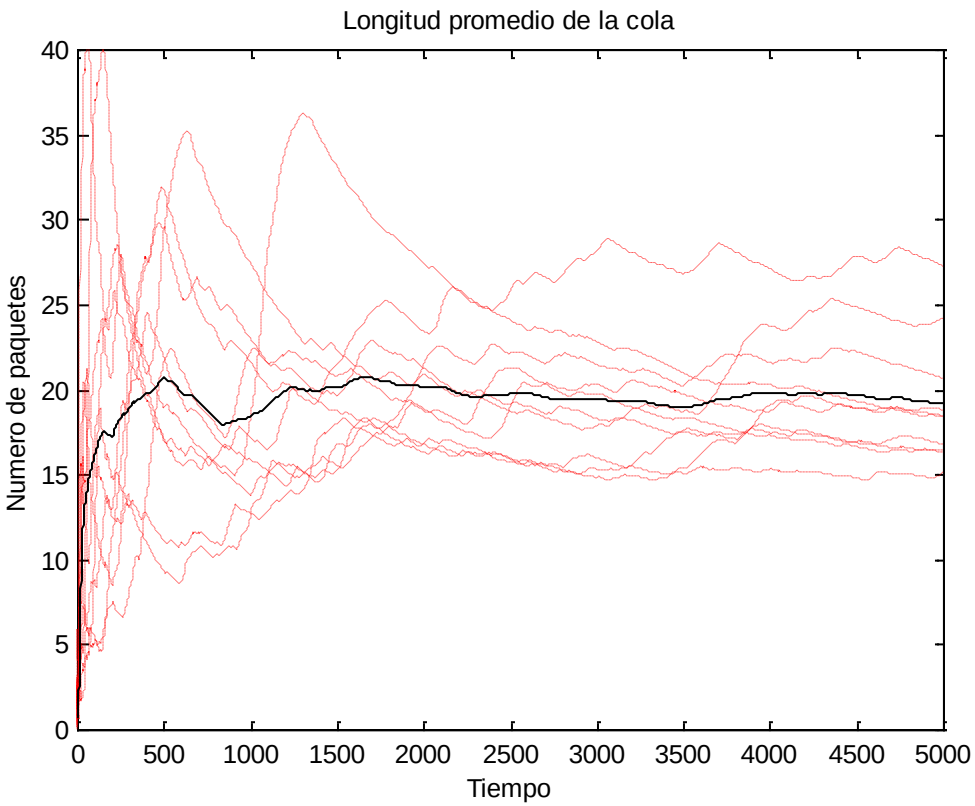


Evaluación por Simulación

$$\bar{N}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t N(\tau)d\tau$$



Análisis de distintos experimentos independientes



$$\bar{N}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{t}\int_0^t N_k(\tau)d\tau\right)$$

El promedio de diez experimentos independientes converge más rápidamente a la que parece ser la verdadera longitud promedio de la cola

Pero siempre hay incertidumbre...

¿Cómo cuantificar la incertidumbre?

- Teorema del Límite Central

Sea $\{X_i, i=1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de n variables aleatorias independientes con media μ , varianza σ^2 y distribución arbitraria. Sea X la media muestral de los X_i,

$$X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

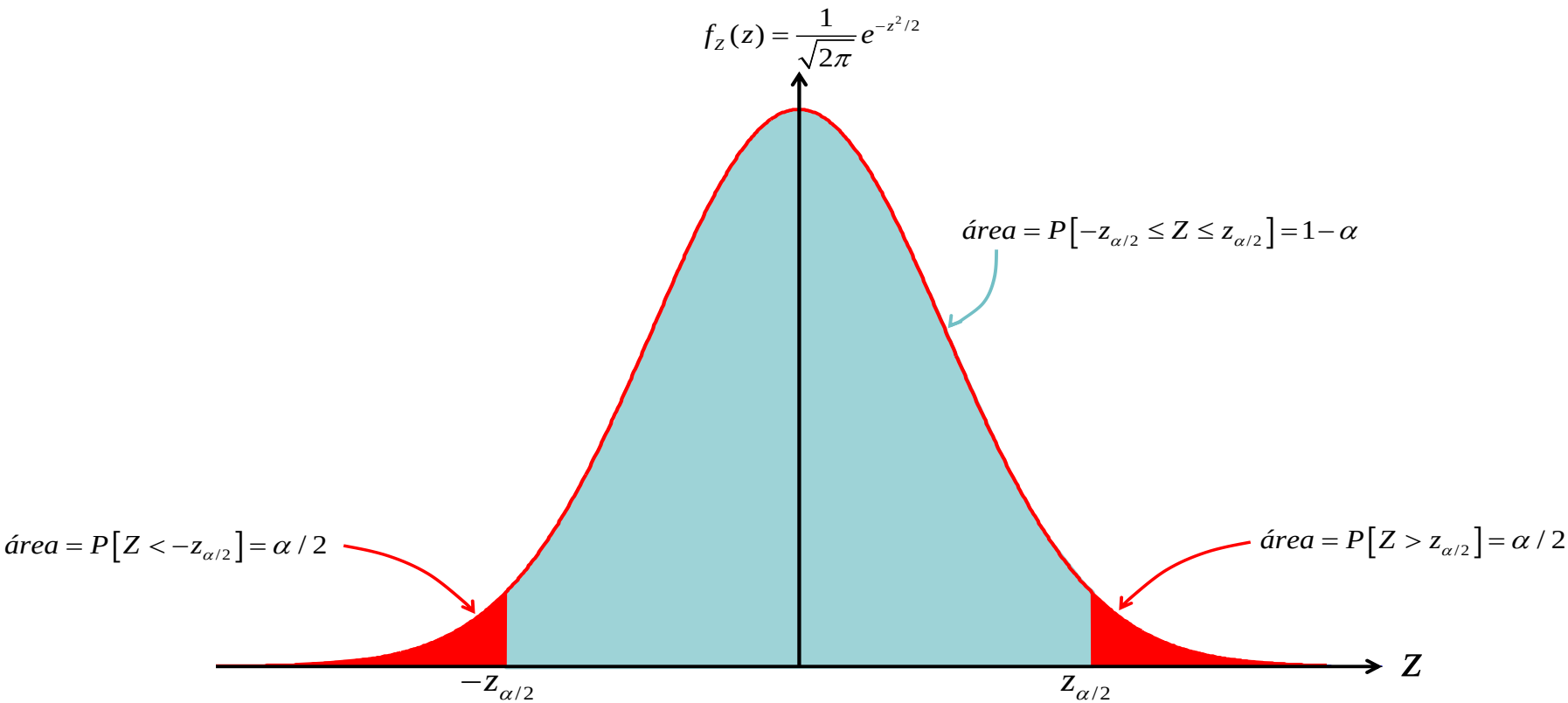
Entonces X es asintóticamente Normal, con media μ y varianza σ^2/n:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(X-\mu) \le x\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du$$

Este es el caso de la media muestral de n simulaciones independientes

Intervalos de Confianza

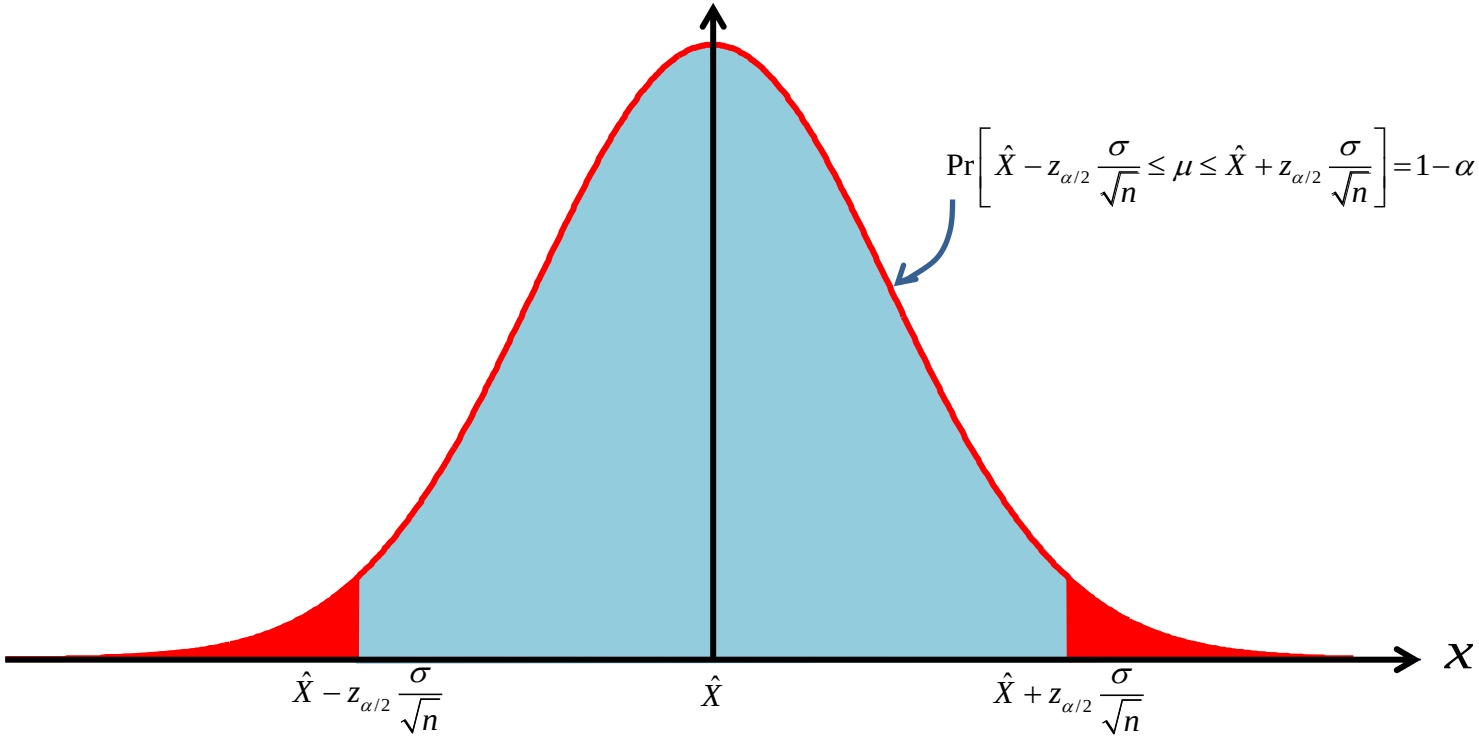
$$P[Z \le -z] = \int_{-\infty}^{-z} f_Z(s)ds \qquad P[|Z| \le z] = \int_{-z}^{z} f_Z(s)ds \qquad P[Z > z] = \int_{z}^{\infty} f_Z(s)ds$$



Intervalos de Confianza

Escribiendo el anterior resultado en términos de $\hat{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\Pr\left[\hat{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \hat{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$



Esto es, la media μ se encuentra en el **Intervalo de Confianza** $X \pm z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$ con un **Nivel de Confianza** $1 - \alpha$.

¿Estimar μ conociendo σ?

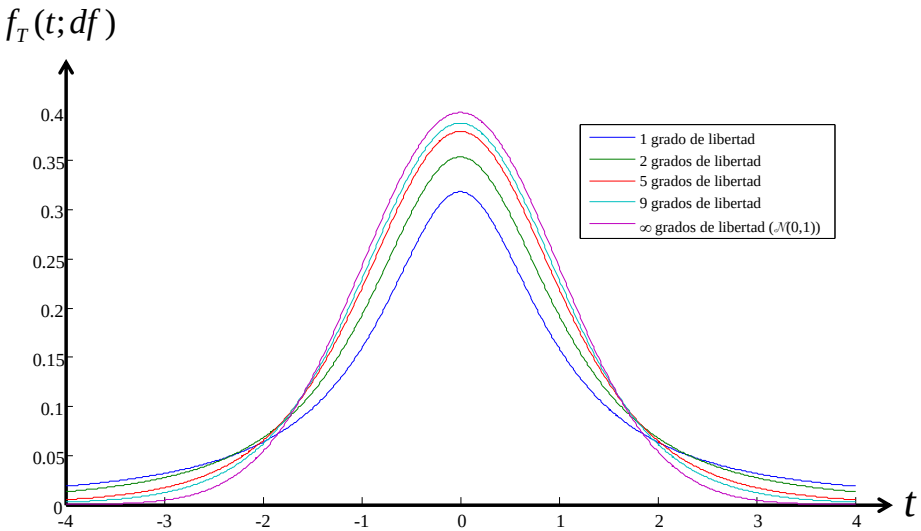
Si no se conoce μ, es de esperarse que no se conozca σ. Sin embargo, este último se puede estimar mediante

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}\right)^2$$

Al remplazar σ^2 por S^2, la variable aleatoria

$$t = \frac{\hat{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

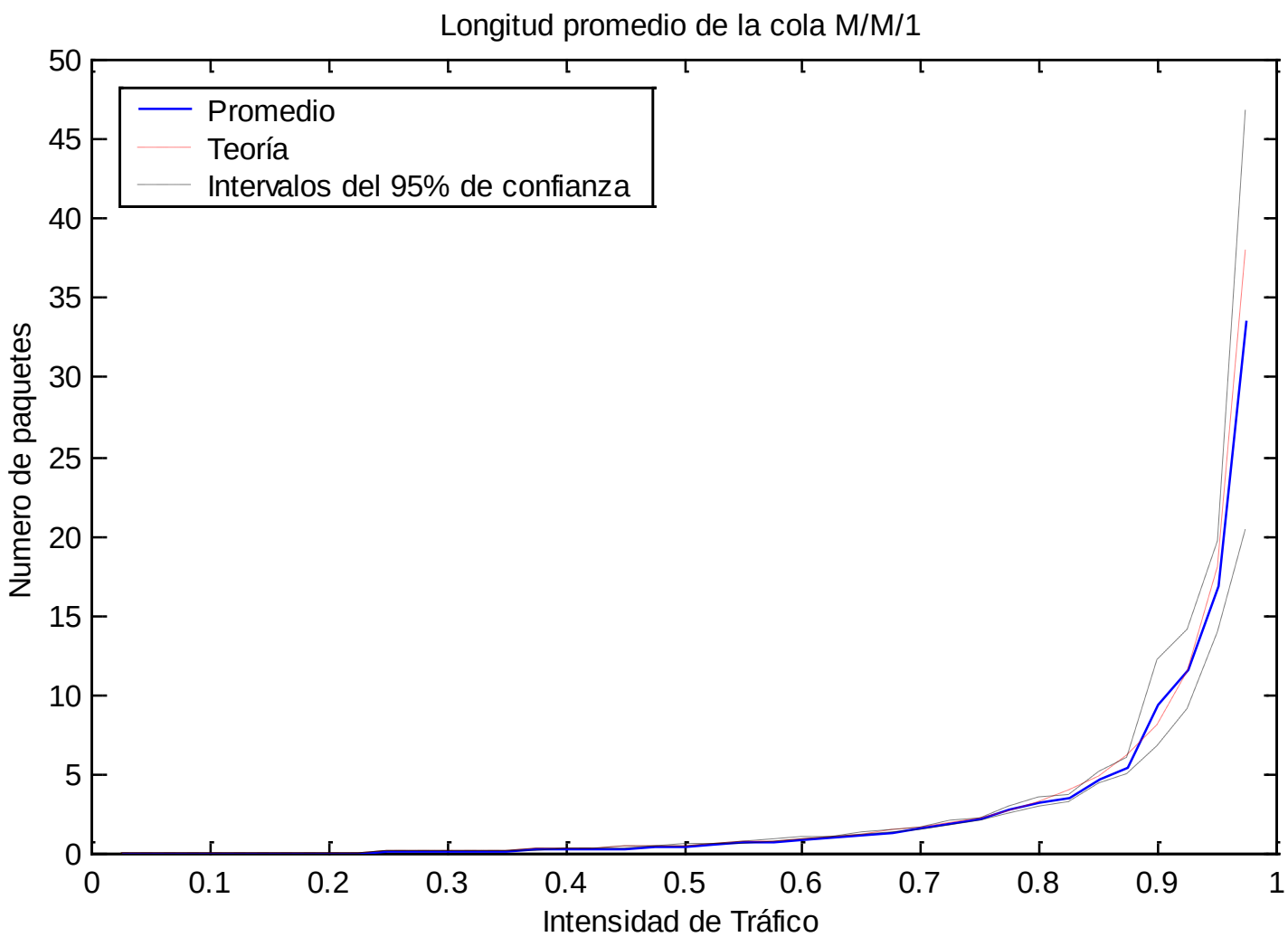
no tiene una distribución normal, sino una distribución t-de-Student con n-1 grados de libertad:



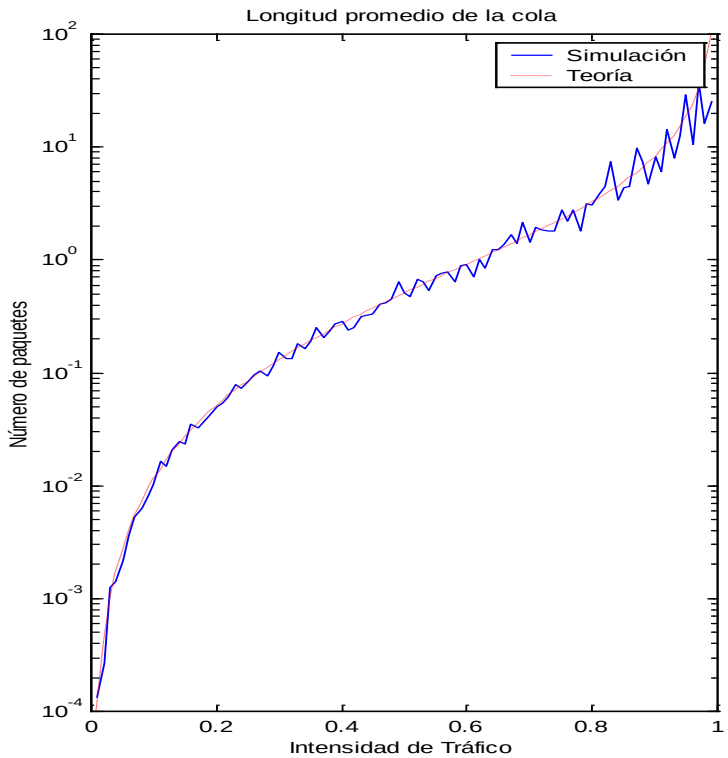
$$\Pr\left[\hat{X} - t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \hat{X} + t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

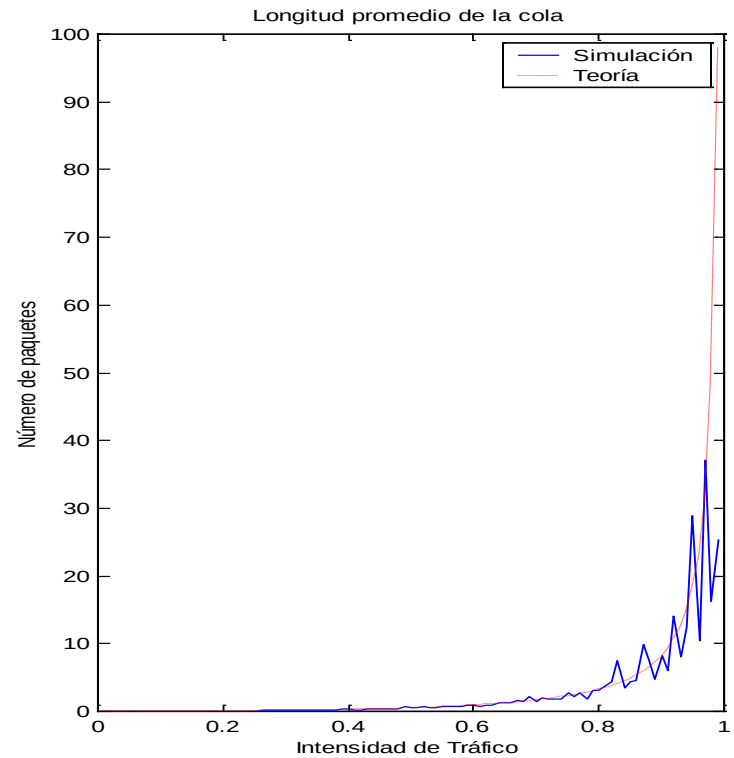
donde $t_{a/2;n\text{-}1}$ son los percentiles 1-α/2 de la distribución t-de-student con n-1 grados de libertad

10 simulaciones de M/M/1



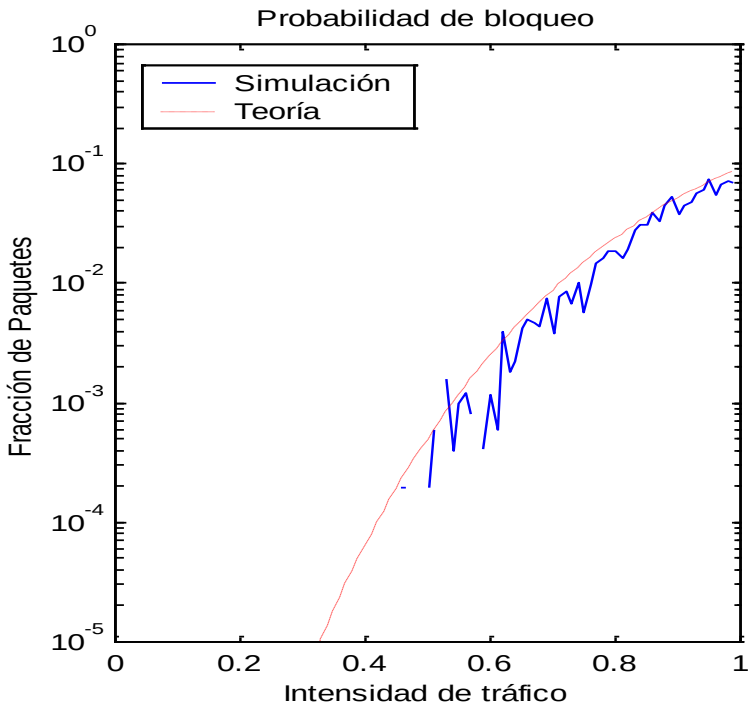
M/M/1

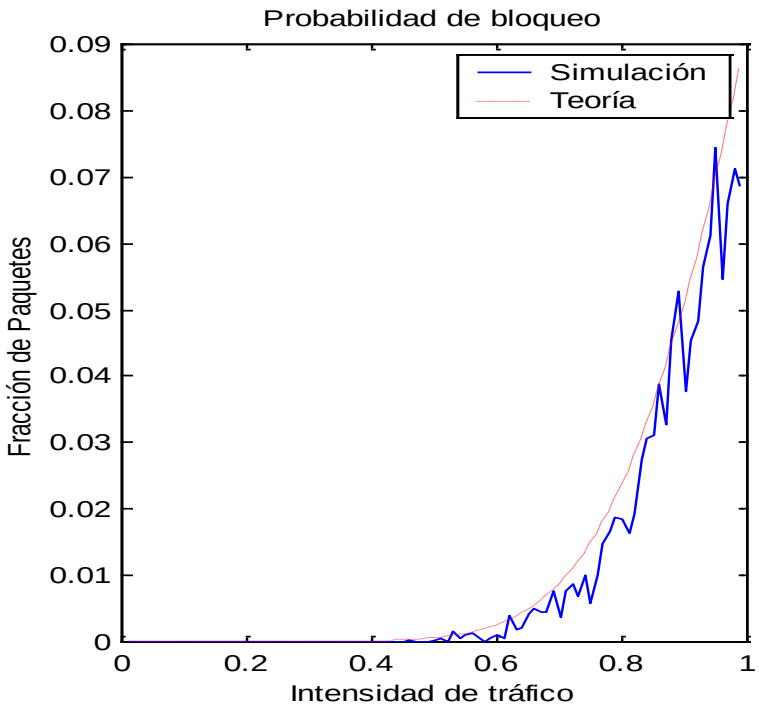




Los resultados de simulación pueden ser muy cercanos a los resultados teóricos, aunque una alta varianza puede conducir a resultados de simulación muy alejados del verdadero promedio.

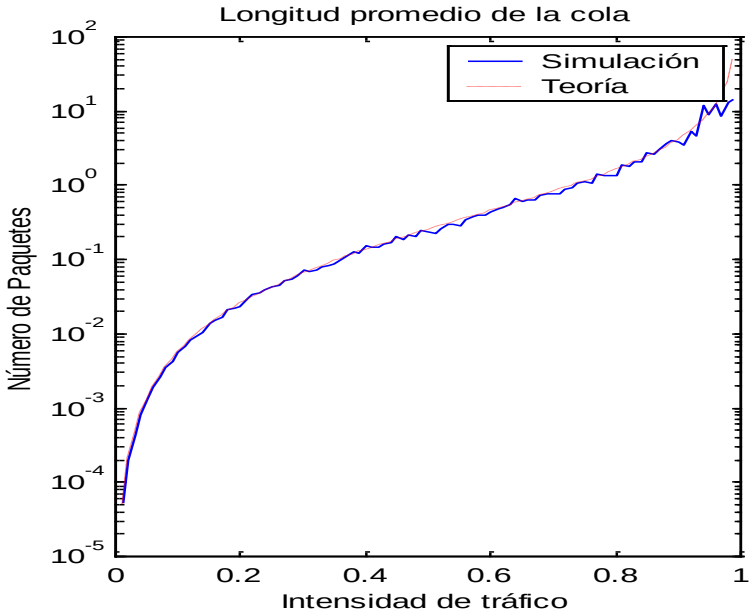
M/M/1/N

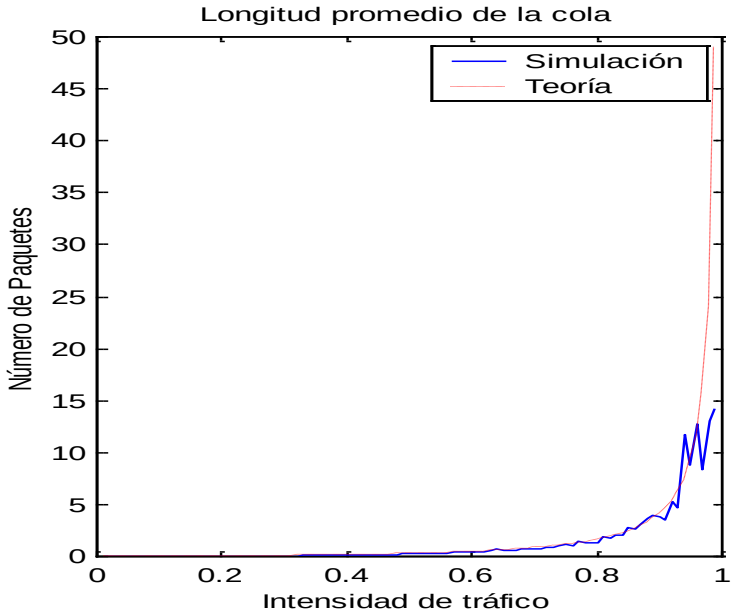




La observación de “eventos raros” (aquellos que se dan con muy baja probabilidad) requiere de largos experimentos de simulación si se quieren estimar sus probabilidades con suficiente precisión.

M/D/1





Este es el caso de la mínima modificación en el programa de simulación, porque basta son sustituir el tiempo de servicio por $1/\mu$ para todo paquete, en vez de tomar una muesta de una variable aleatoria exponencial con promedio $1/\mu$. Sin embargo la solución analítica requiere un método completamente diferente.

Evaluación por Simulación

```
function ColaMD1(lambda,mu,tiempoSimulacion)
   reloj = 0;                                  % Reloj de la simulación
   proximaLlegada = 0;                         % Tiempo de la siguiente llegada
   proximaSalida = inf;                        % Tiempo de la siguiente salida
   paquetesSistema = 0;                        % Número de paquetes en el sistema [N(t)]
   while reloj<tiempoSimulacion
      if proximaLlegada<proximaSalida          % Procesa una llegada
         reloj = proximaLlegada;               % Actualiza el reloj de simulación
         proximaLlegada = reloj + random('exp', 1/lambda); % Programa la próxima llegada
         paquetesSistema = paquetesSistema+1;  % Hay un paquete más en el sistema
         if paquetesSistema == 1               % Si es el único, inicia su transmisión inmediatamente
            proximaSalida = reloj + 1/mu;      % Programa la próxima salida
         end
      else                                     % Procesa una salida
         reloj = proximaSalida;                % Actualiza el reloj de simulación
         paquetesSistema = paquetesSistema-1;  % Hay un paquete menos en el sistema
         proximaSalida = inf;                  % Si el sistema queda vacío, no se espera una salida
         if paquetesSistema > 0                % En otro caso,
            proximaSalida = reloj + 1/mu;      % Programa la próxima salida
         end
      end
   end
```

M/G/1

$$N_j = N_{j-1} - u\left(N_{j-1}\right) + \upsilon_j \qquad E\left[N_j\right] = E\left[N_{j-1}\right] - E\left[u\left(N_{j-1}\right)\right] + E\left[\upsilon_j\right]$$

Estabilidad : $\lim_{j\to\infty} E\left[X_j\right] = E\left[X\right]$

$$1 - p_0 = E\left[u\left(N\right)\right] = E\left[\upsilon\right] = \frac{\lambda}{\mu} \triangleq \rho$$

$$N_j^{\,2} = N_{j-1}^{\,2} - 2N_{j-1}u\left(N_{j-1}\right) + 2N_{j-1}\upsilon_j + u^2\left(N_{j-1}\right) - 2u\left(N_{j-1}\right)\upsilon_j + \upsilon_j^{\,2} = N_{j-1}^{\,2} - 2N_{j-1} + 2N_{j-1}\upsilon_j + u\left(N_{j-1}\right) - 2u\left(N_{j-1}\right)\upsilon_j + \upsilon_j^{\,2}$$

$$\lim_{j\to\infty} E\left[X_j\right] = E\left[X\right] \quad \Rightarrow \quad 2E\left[N\right]\left(1-\rho\right) = \rho - 2\rho^2 + E\left[\upsilon^2\right] = \rho - \rho^2 + \left(E\left[\upsilon^2\right] - E^2\left[\upsilon\right]\right) = \rho\left(1-\rho\right) + \sigma_\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad E\left[N\right] = \frac{\rho}{2} + \frac{\sigma_\upsilon^2}{2\left(1-\rho\right)}$$

$$E\left[N_j^{\,2}\right] = E\left[N_{j-1}^{\,2}\right] - 2E\left[N_{j-1}\right] + 2E\left[N_{j-1}\right]E\left[\upsilon_j\right] + E\left[u\left(N_{j-1}\right)\right] - 2E\left[u\left(N_{j-1}\right)\right]E\left[\upsilon_j\right] + E\left[\upsilon_j^{\,2}\right]$$

$$\sigma_\upsilon^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k-\rho\right)^2 P\left[\upsilon = k\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(k-\rho\right)^2 \int_0^\infty P\left[\upsilon = k \middle| \tau = t\right] f_\tau(t)dt\right] = \int_0^\infty f_\tau(t)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(k-\rho\right)^2 P\left[\upsilon = k \middle| \tau = t\right]\right]dt$$

$$\sigma_\upsilon^2 = \int_0^\infty f_\tau(t)\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(k^2 - 2k\rho + \rho^2\right)\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t}\right]dt = \int_0^\infty f_\tau(t)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left[k^2\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t}\right] - 2\rho\sum_{k=0}^{\infty}\left[k\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t}\right] + \rho^2\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\lambda t\right)^k}{k!}e^{-\lambda t}\right]\right]dt$$

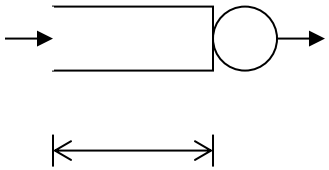
$$\sigma_\upsilon^2 = \int_0^\infty f_\tau(t)\left[E\left[\upsilon^2 \middle| \tau = t\right] - 2\rho E\left[\upsilon \middle| \tau = t\right] + \rho^2\right]dt = \int_0^\infty f_\tau(t)\left[\lambda^2 t^2 + \lambda t - 2\rho\lambda t + \rho^2\right]dt = \lambda^2 E\left[\tau^2\right] + \lambda\left(1-2\rho\right)E\left[\tau\right] + \rho^2$$

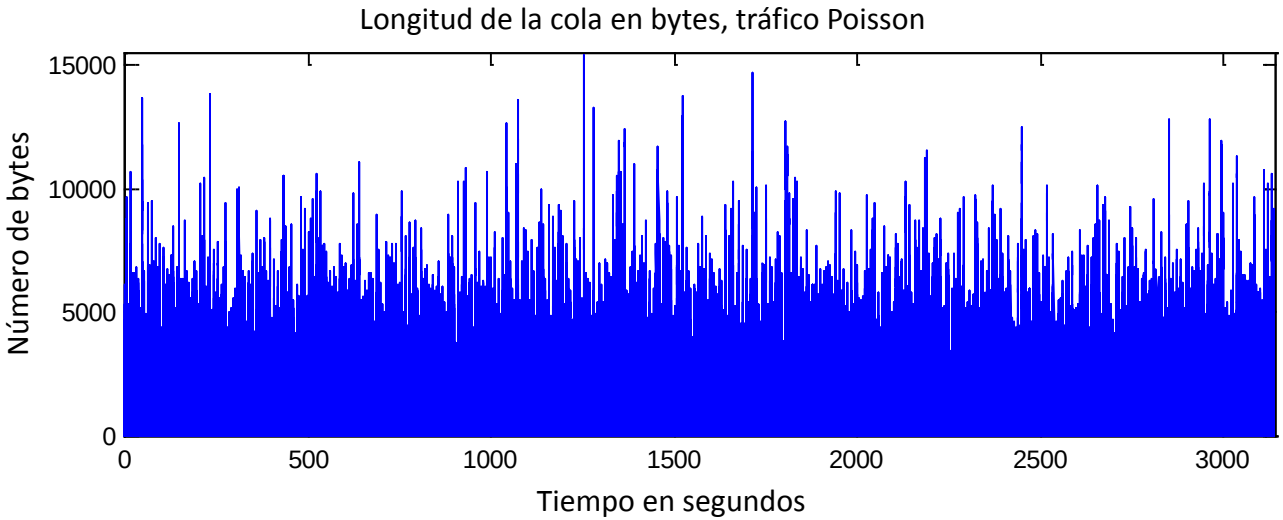
$$\sigma_\upsilon^2 = \lambda^2 E\left[\tau^2\right] + \rho - \rho^2 = \lambda^2\left(E\left[\tau^2\right] - E^2\left[\tau\right]\right) + \rho = \lambda^2\sigma_\tau^2 + \rho \quad \Rightarrow \quad E\left[N\right] = \frac{\rho}{2} + \frac{\lambda^2\sigma_\tau^2 + \rho}{2\left(1-\rho\right)} = \frac{\rho}{1-\rho}\left(1 - \frac{\rho}{2}\left(1 - \mu^2\sigma_\tau^2\right)\right)$$

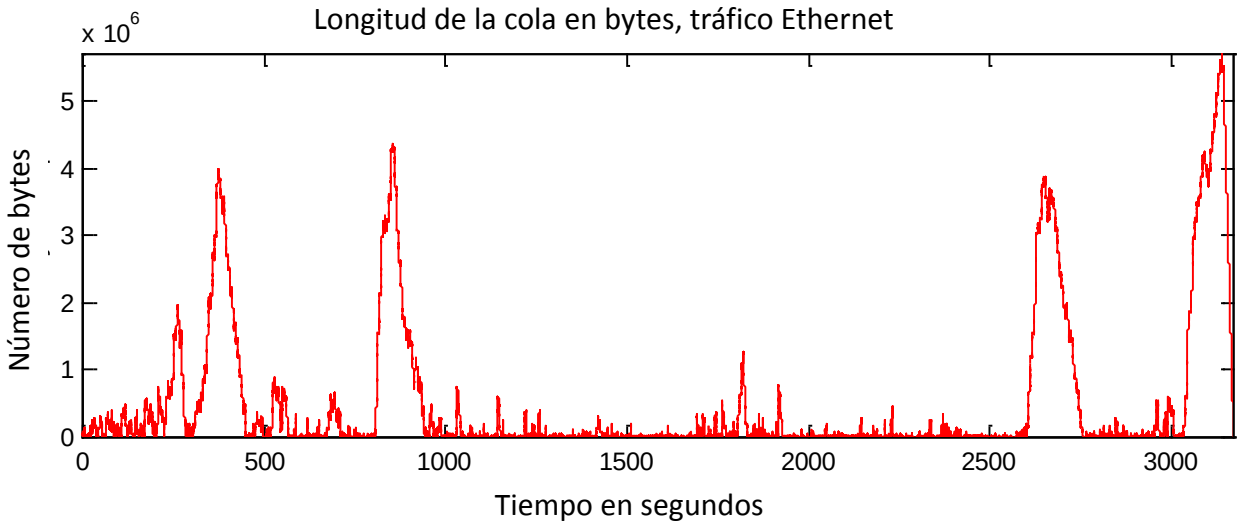
En el caso M/D/1, $\sigma_\tau^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_{M/D/1}\left[N\right] = \frac{\rho}{1-\rho}\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)$

Ley de Little
Principio PASTA $\quad \Rightarrow \quad E_{M/D/1}[D] = \frac{1}{\lambda}E_{M/D/1}[N] = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(1 - \frac{\rho}{2}\right)$

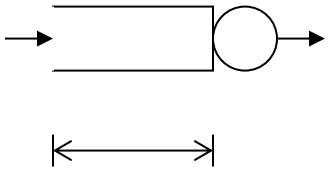
¿Otras distribuciones de tiempos entre llegadas y tiempos de servicio?

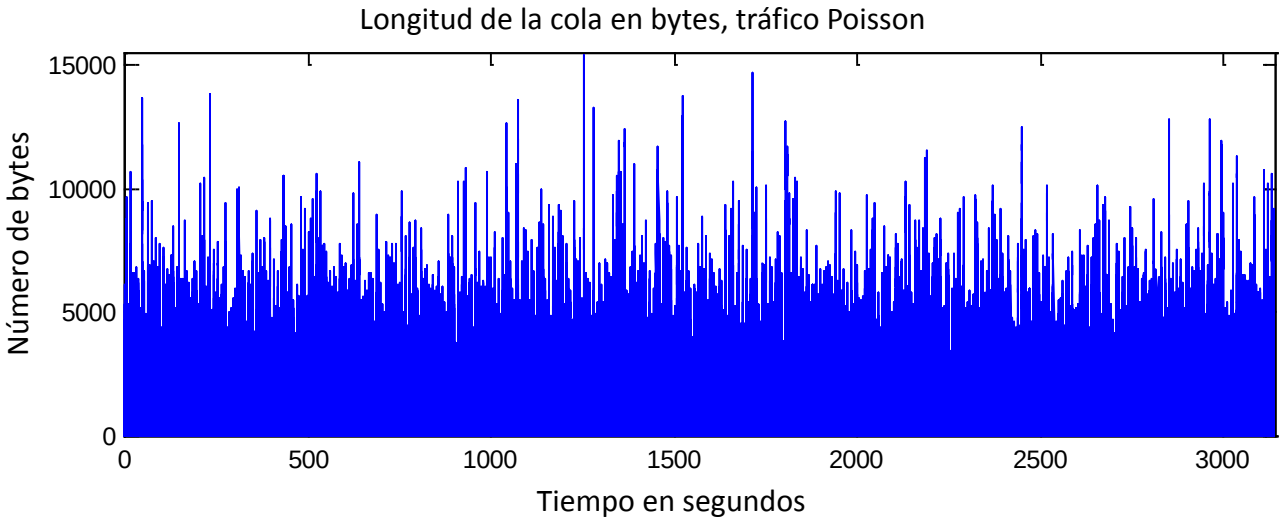


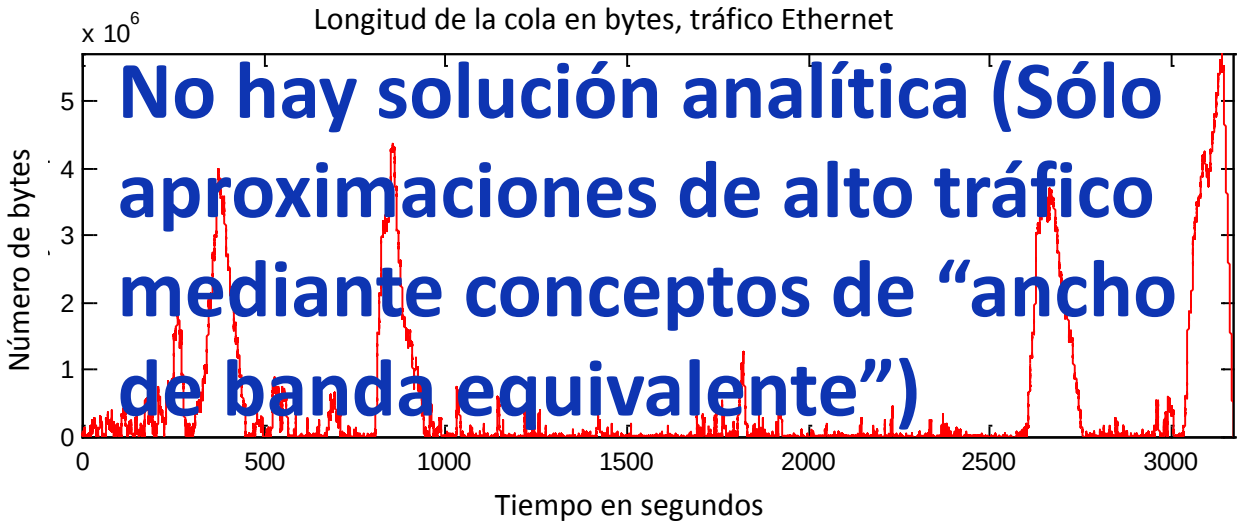




¿Otras distribuciones de tiempos entre llegadas y tiempos de servicio?



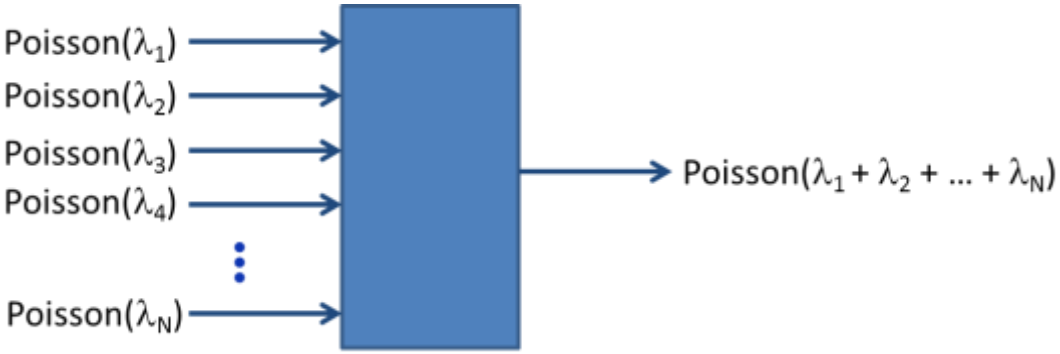




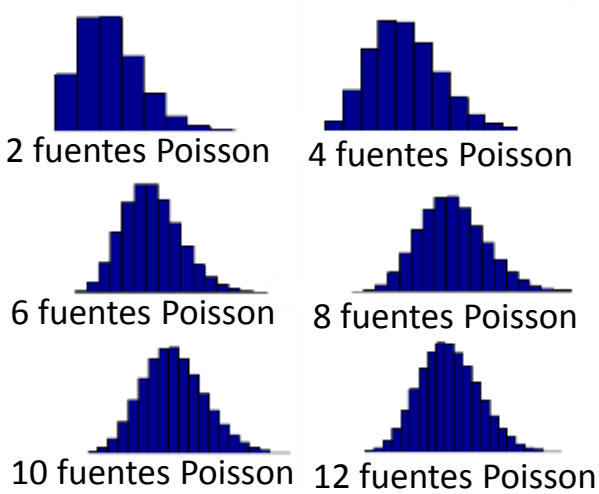
No hay solución analítica (Sólo aproximaciones de alto tráfico mediante conceptos de "ancho de banda equivalente")

¿Porqué se hizo tan difícil?

Porque perdimos dos características fundamentales:



Linealidad



Gaussianidad

3. De lo lineal a lo no-lineal

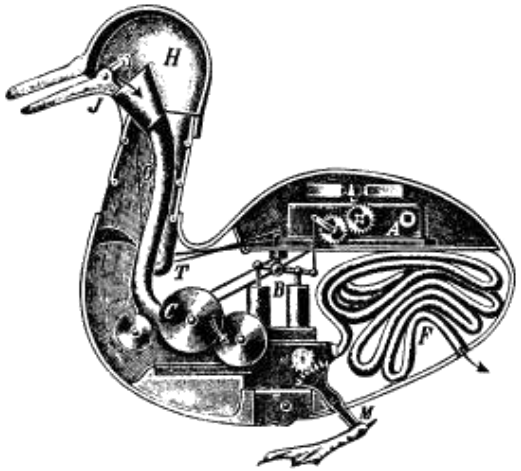
Determinismo

"Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría concebir un intelecto que en cualquier momento dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen; si este intelecto fuera lo suficientemente vasto como para someter los datos a análisis, podría condensar en una simple fórmula el movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro así como el pasado estarían frente sus ojos".

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Mecanicismo

"Esto tampoco parecerá extraño para quienes están familiarizados con la variedad de movimientos realizados por las máquinas fabricadas por la industria humana, con base en algunas pocas piezas, cuando las comparan con la multitud de huesos, músculos, nervios, arterias y otras partes que se encuentran en los cuerpos de los animales. Es apenas natural ver sus cuerpos como máquinas hechas por las manos de Dios, que están mucho mejor ordenadas y adecuadas para movimientos admirables que cualquier otra máquina de invención humana. Y sostengo que si una máquina de invención humana replicara los órganos y las formas externas de un animal irracional, no tendríamos forma de distinguirla del animal mismo."

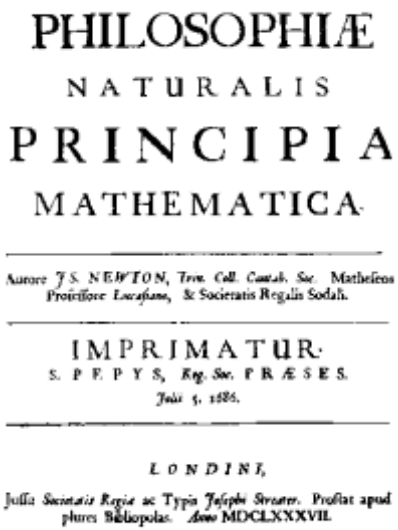


Descartes (1596 – 1650)

Reduccionismo

- “Creo que podemos inferir todos los otros fenómenos de la naturaleza usando el mismo tipo de razonamiento, a partir de principios mecánicos, pues muchas razones me inducen a sospechar que todos ellos dependen de ciertas fuerzas”

Newton (1643 – 1727)



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore JS. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

“Divida cada problema en tantas partes como sea posible y necesario para resolverlo”

… Predecibilidad!

- **Napoleón:** “Me cuentan que ha escrito usted este gran libro sobre el sistema del universo sin haber mencionado ni una sola vez a su Creador”.
- **Laplace:** “Señor, nunca he necesitado esa hipótesis”.

  (Newton tuvo que aludir a la voluntad divina para justificar que la ley universal de la gravedad no explicara las anomalías en los movimientos de Júpiter y Saturno).
- **Lagrange**: “Pero Dios es una bella hipótesis que explica muchas cosas”
- **Laplace**: “Aunque esa hipótesis pueda explicar todo, no permite predecir nada“.

Linealidad

Yo lavo mi carro en 15 minutos. Mi hijo lo lava en 30 minutos. ¿Cuánto tiempo nos toma lavarlo entre ambos?

45 estudiantes de primer semestre:
El que más tarda responde en 3 minutos
(en promedio les toma 2 minutos)

36 estudiante de sexto semestre:
El que más tarda responde en 10 minutos
(en promedio les toma 6 minutos)

27 estudiantes de décimo semestre:
El que más tarda responde en 18 minutos
(en promedio les toma 11 minutos)

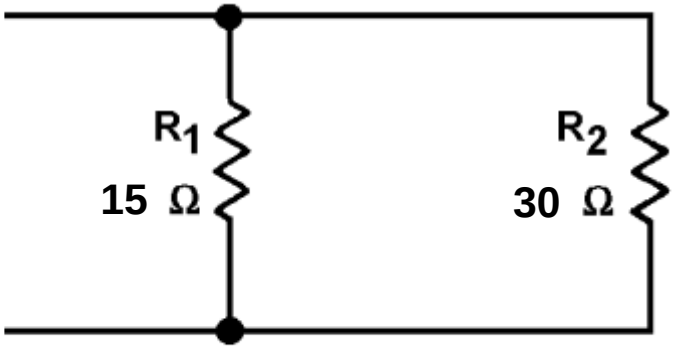
Linealidad

Yo lavo mi carro en 15 minutos. Mi hijo lo lava en 30 minutos. ¿Cuánto tiempo nos toma lavarlo entre ambos?

45 estudiantes de primer semestre:
El que más tarda responde en 3 minutos
(en promedio les toma 2 minutos)

36 estudiante de sexto semestre:
El que más tarda responde en 10 minutos
(en promedio les toma 6 minutos)

27 estudiantes de décimo semestre:
El que más tarda responde en 18 minutos
(en promedio les toma 11 minutos)



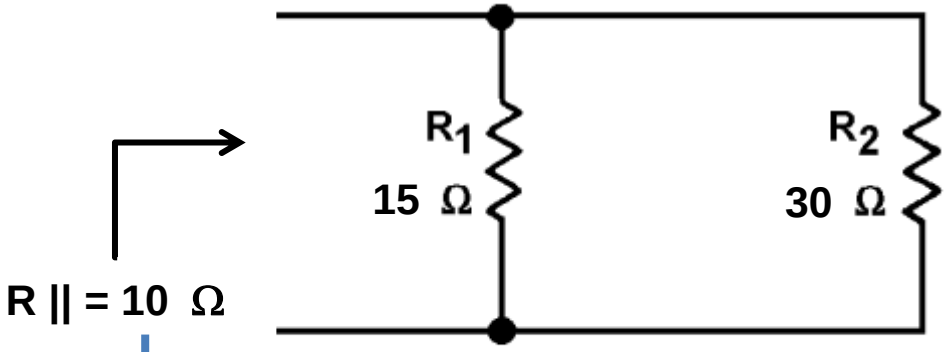
Linealidad

Yo lavo mi carro en 15 minutos. Mi hijo lo lava en 30 minutos. ¿Cuánto tiempo nos toma lavarlo entre ambos?

45 estudiantes de primer semestre:
El que más tarda responde en 3 minutos
(en promedio les toma 2 minutos)

36 estudiante de sexto semestre:
El que más tarda responde en 10 minutos
(en promedio les toma 6 minutos)

27 estudiantes de décimo semestre:
El que más tarda responde en 18 minutos
(en promedio les toma 11 minutos)



Nos toma 10 minutos lavar el carro entre ambos

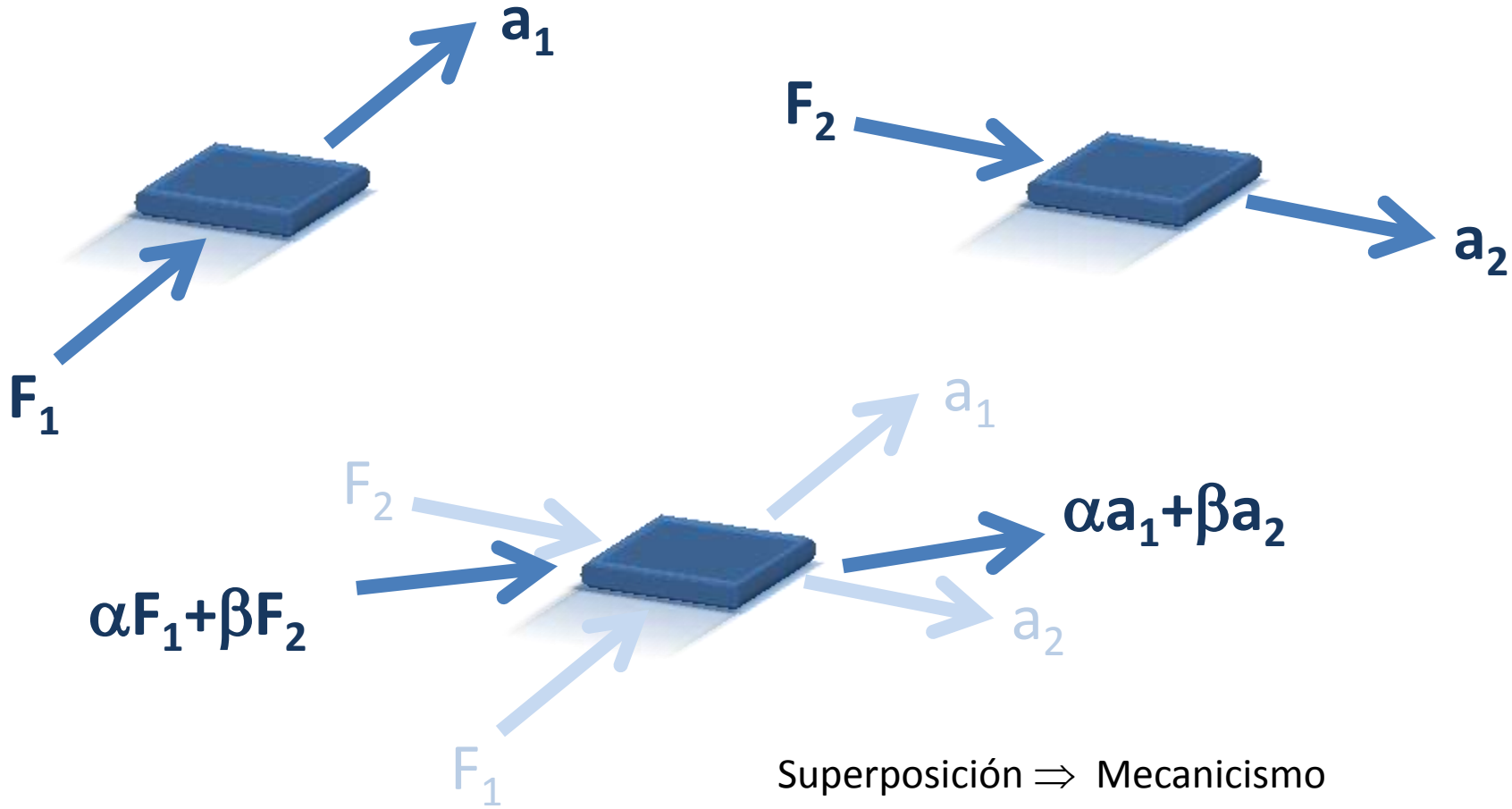
Linealidad

Si 40 granjeros construyen un granero en 8 horas

entonces 1280 granjeros lo construirán en 15 minutos

Nos toma 120 minutos lavar el carro entre ambos

Linealidad

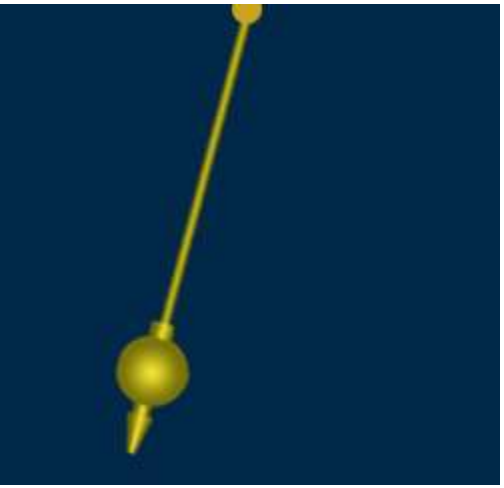


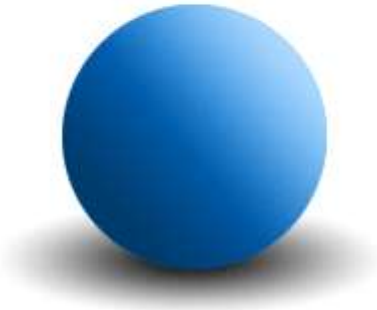
Superposición $\Rightarrow$ Mecanicismo
Reduccionismo
Predecibilidad

Sistemas dinámicos

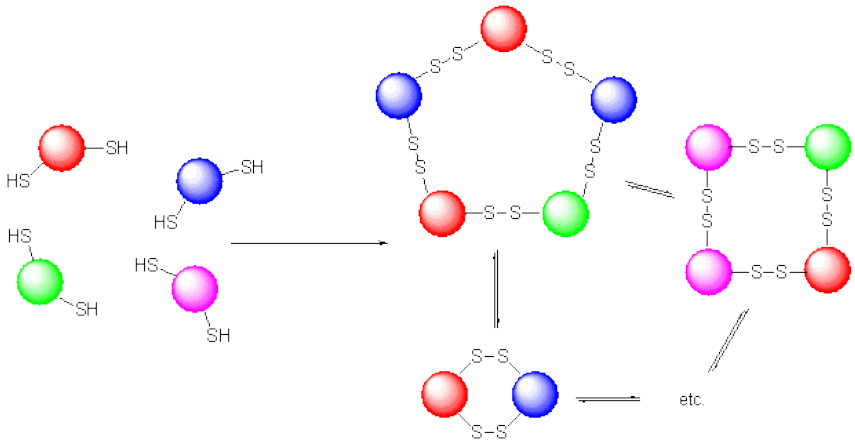
El estado del sistema cambia con el tiempo:

- Normalmente cambia la posición
- O la velocidad
- O la aceleración… ¡Movimiento!





Sistemas dinámicos



Otras veces cambian otros estados:

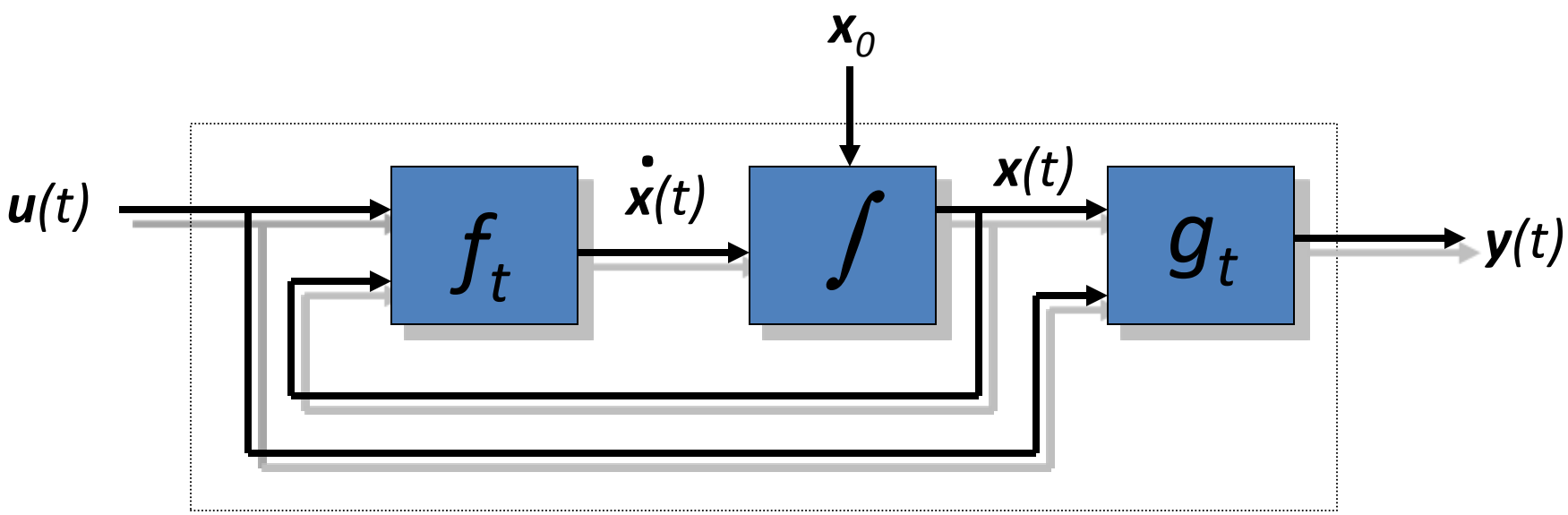
- Tasa de reactantes
- Temperatura
- Pressión
- Viscosidad
- masa

- Relaciones de amistad

- Estado de ánimo

Sistemas dinámicos

- Junto con lo que cambia, es importante saber cómo cambia
- Reglas
  - Modelos Matemáticos

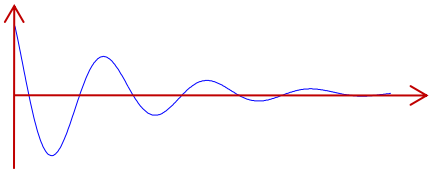


$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

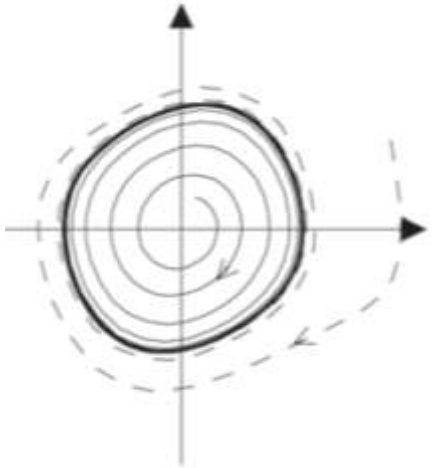
$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{g}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t\right)$$

¿Qué puede hacer un sistema dinámico?

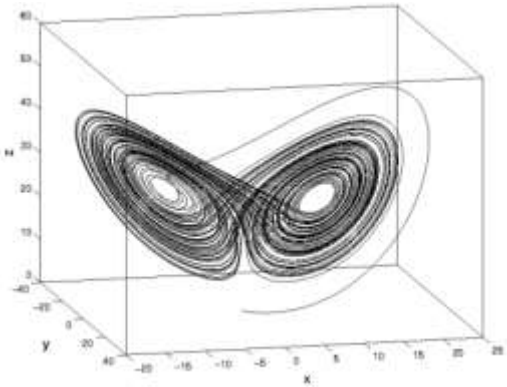
- Tal vez alcanzar un punto de equilibrio



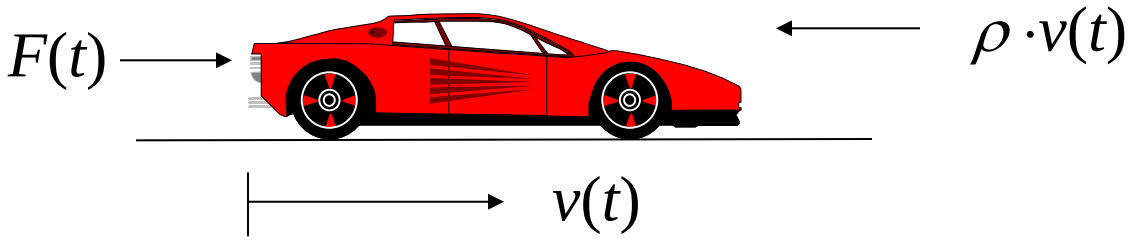
- Tal vez repetir un ciclo periódico

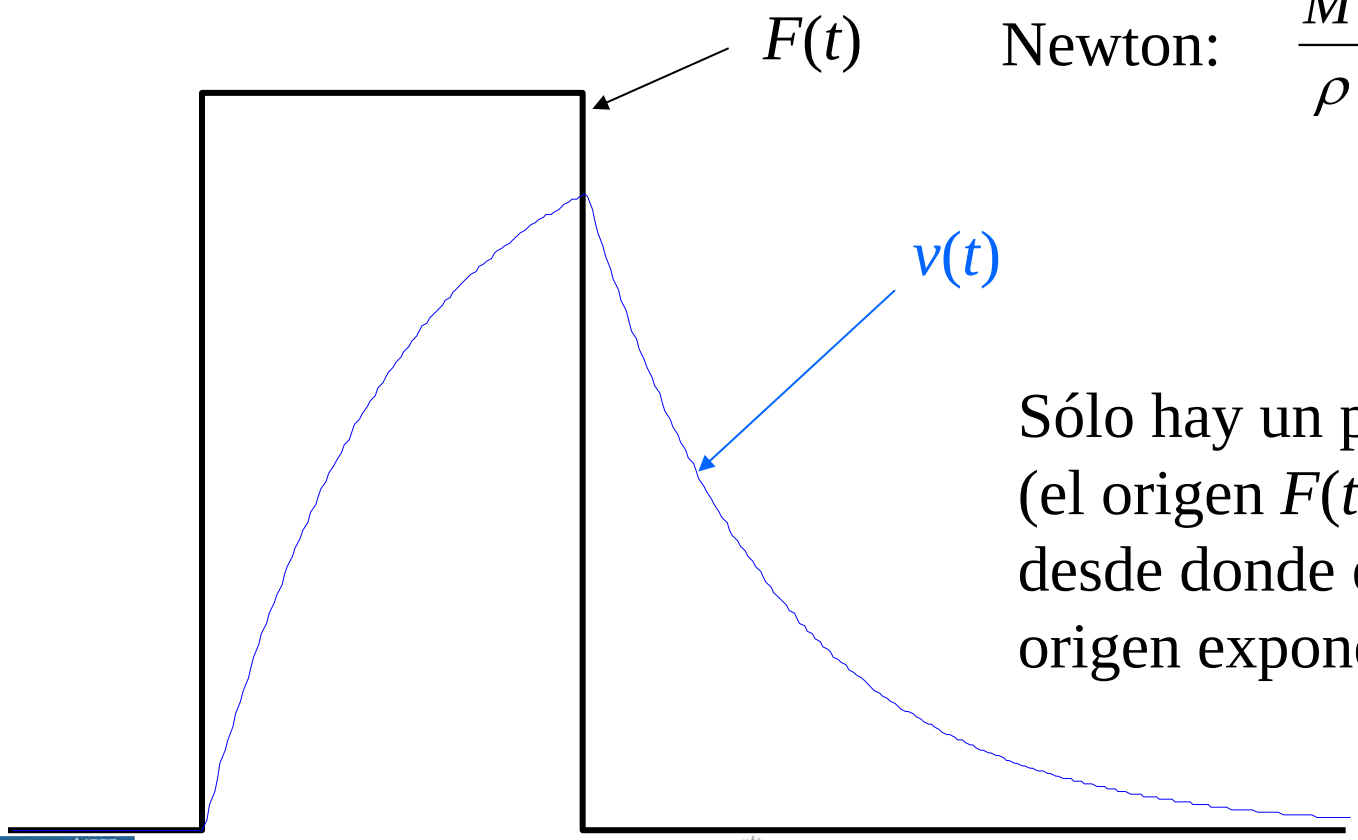


- Tal vez cosas más raras



Sistemas dinámicos lineales





Newton: $$\frac{M}{\rho}\frac{d}{dt}v(t) + v(t) = \frac{1}{\rho}F(t)$$

Sólo hay un punto de equilibrio (el origen $F(t) - \rho v(t) = 0$) y, desde donde esté, tenderá al origen exponencialmente

Sistemas dinámicos lineales

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

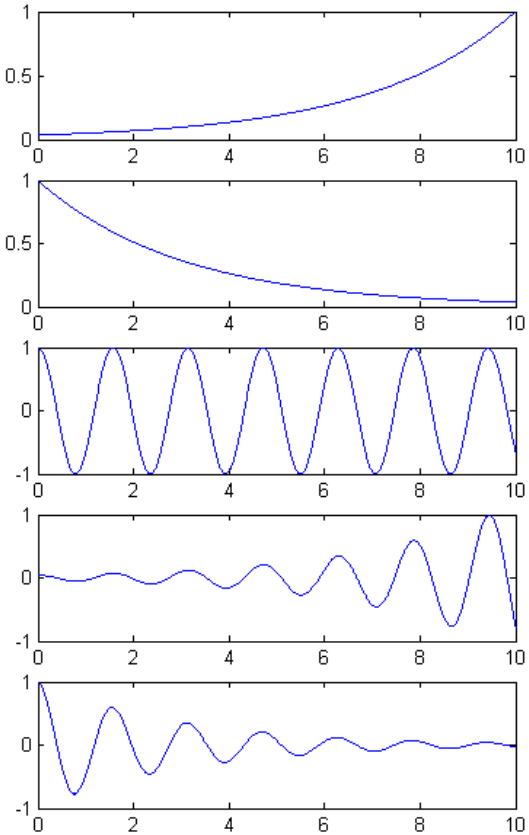
Valores propios reales positivos

Valores propios reales negativos

Valores propios puramente imaginarios

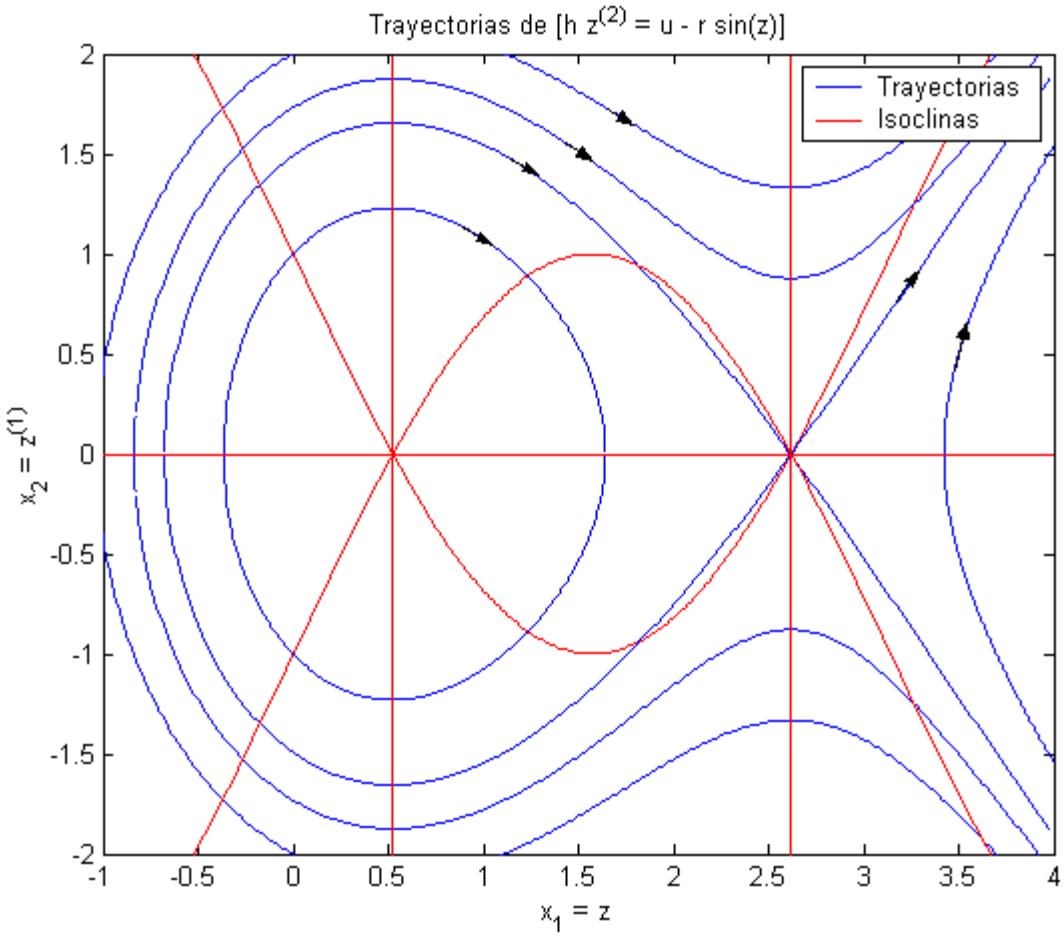
Valores propios complejos con parte real positiva

Valores propios complejos con parte real negativa



Sistemas dinámicos no-lineales

$$h\frac{d^2}{dt^2}z(t) = u(t) - r\sin(z(t))$$



- Más de un punto de equilibrio
- Ciclos límite
- Bifurcaciones
- Sincronización
- Sensibilidad a condiciones iniciales
- etc.

Sistemas lineales y no-lineales

Reduccionismo mecanicista

- Los sistemas lineales se pueden separar en partes, resolver cada parte separadamente y recombinar las soluciones parciales para obtener la respuesta total: **Principio de superposición**… Un sistema lineal es exactamente igual a la suma de sus partes.

Posibilidad de complejidad

- Muchos sistemas dinámicos en la naturaleza no son así: Las partes del sistema interfieren (cooperan o compiten) por lo que el principio de superposición falla dramáticamente… En los sistemas no lineales el todo es mayor a la suma de sus partes

Sistemas no-lineales

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right)$$

El sistema más sencillo: $\frac{d}{dt}x(t) = f\left(x(t)\right), \qquad x(0) = x_0$

- Tratamiento analítico ☹
- Tratamiento geométrico ☺

p.ej. $\frac{d}{dt}x(t) = sin\left(x(t)\right), \qquad x(0) = x_0$

Uno de los pocos sistemas no lineales fáciles de resolver analíticamente

$$dt = \frac{dx}{\sin(x)} \Rightarrow t = \int \csc(x)dx = -\ln\left|\csc(x) + \cot(x)\right| + C$$

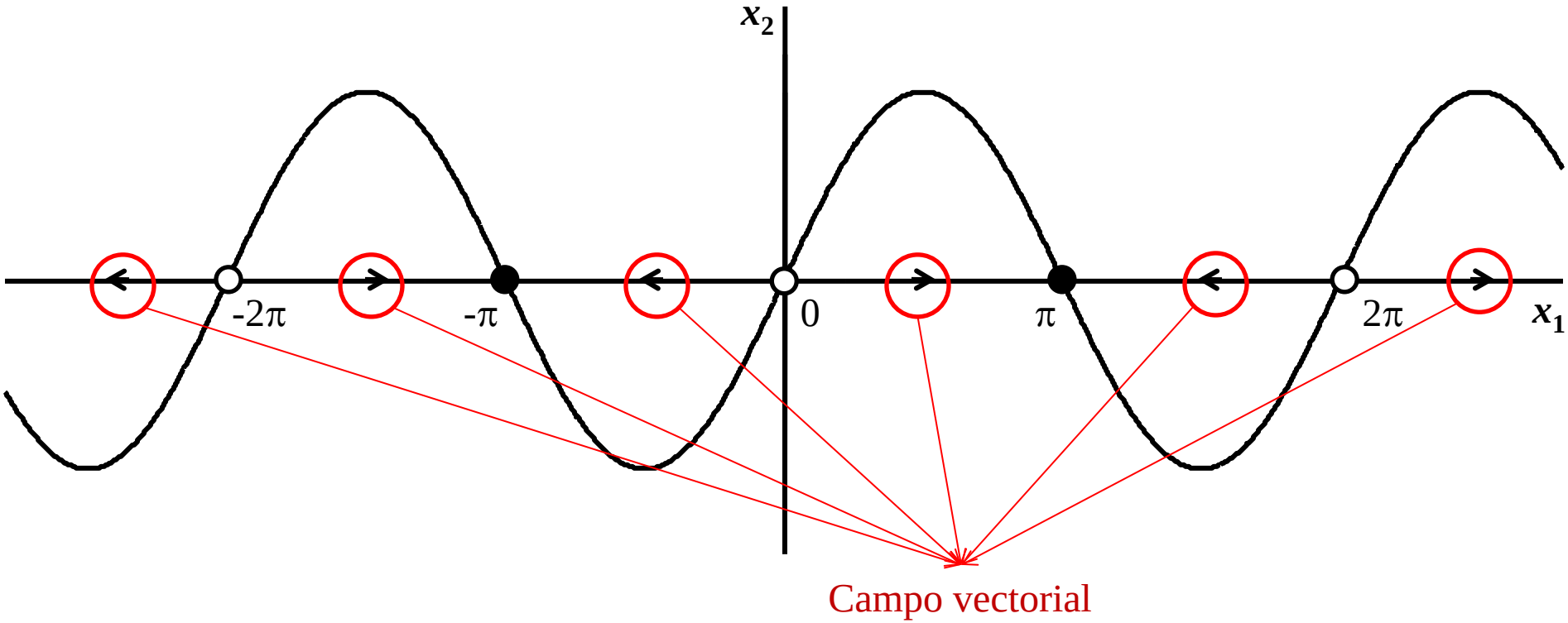
Y, como $x(0)=x_0$, $\boxed{t = \ln\left|\frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)}\right|}$

Solución analítica exacta, pero… ¿qué carajos significa? ¿Quién puede interpretar esto?

¿Qué va a pasar con $x(t)$, $t\to\infty$ si $x_0=\pi/4$? ¿Qué va a pasar con $x(t)$, $t\to\infty$ para cualquier x_0?

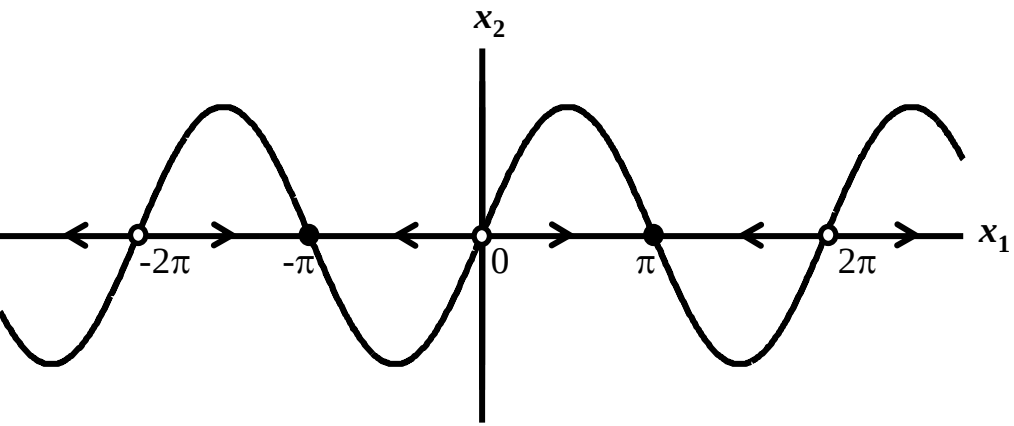
Mejor métodos gráficos

$x_1 = x(t)$ es la posición de una partícula y $x_2 = \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t$ es su velocidad



Si hay una partícula desplazándose en el eje x con una velocidad $dx/dt = \sin(x)$, el movimiento será hacia la izquierda o hacia la derecha según dx/dt sea menor o mayor a cero. Los puntos con $dx/dt = 0$ son **puntos fijos**, unos de ellos **estables** (atractores) y otros **inestables** (repelentes).

Mejor métodos gráficos

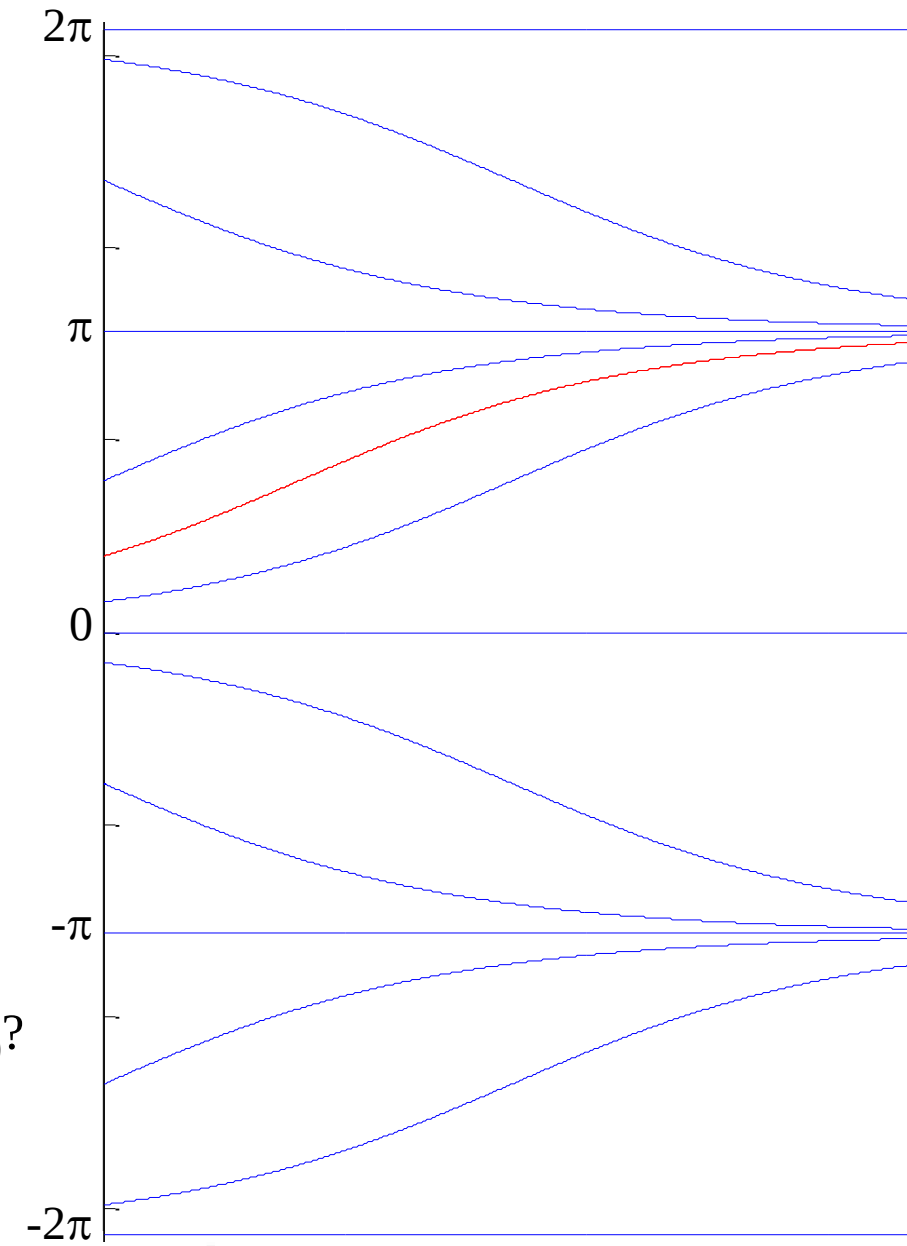


¿Qué va a pasar con $x(t)$, $t\to\infty$ si $x_0=\pi/4$?

En $\pi/4$ la velocidad es positiva y va aumentando, de manera que $x(t)$ se incrementa de manera convexa hasta que llega a $\pi/2$. En ese momento la velocidad empieza a decrecer, aunque sigue siendo positiva, de manera que a partir de ese momento $x(t)$ aumenta de manera cóncava. A medida que $x(t)$ se acerca a π, la velocidad se acerca a cero, por lo que el acercamiento a $x(t)=\pi$ es asintótico.

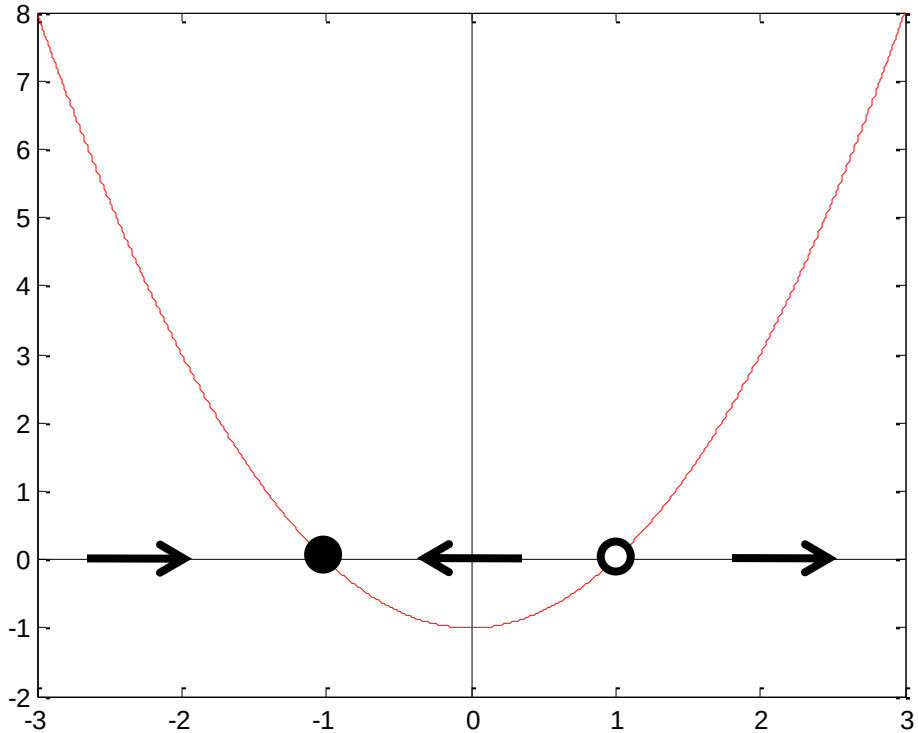
¿Qué va a pasar con $x(t)$, $t\to\infty$ para cualquier x_0?

Aunque no podemos poner números en el eje del tiempo, podemos responder las preguntas cualitativamente



Sistemas no-lineales

Ejemplo: Analizar el sistema $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + c$, con c = -1



Los puntos fijos satisfacen $x^2 = 1$

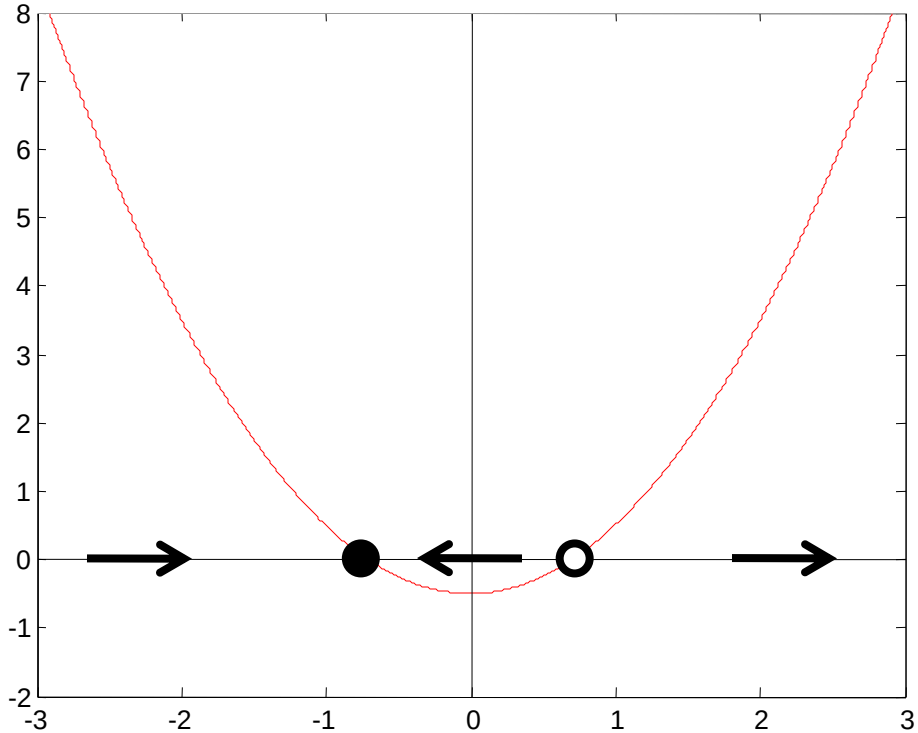
$x^* = \pm 1$

La estabilidad de los puntos fijos se determina a partir del campo de vectores:

-1 es estable, +1 es inestable

Sistemas no-lineales

Ejemplo: Analizar el sistema $\frac{dx}{dt} = x^2 + c$, con c = -1/2



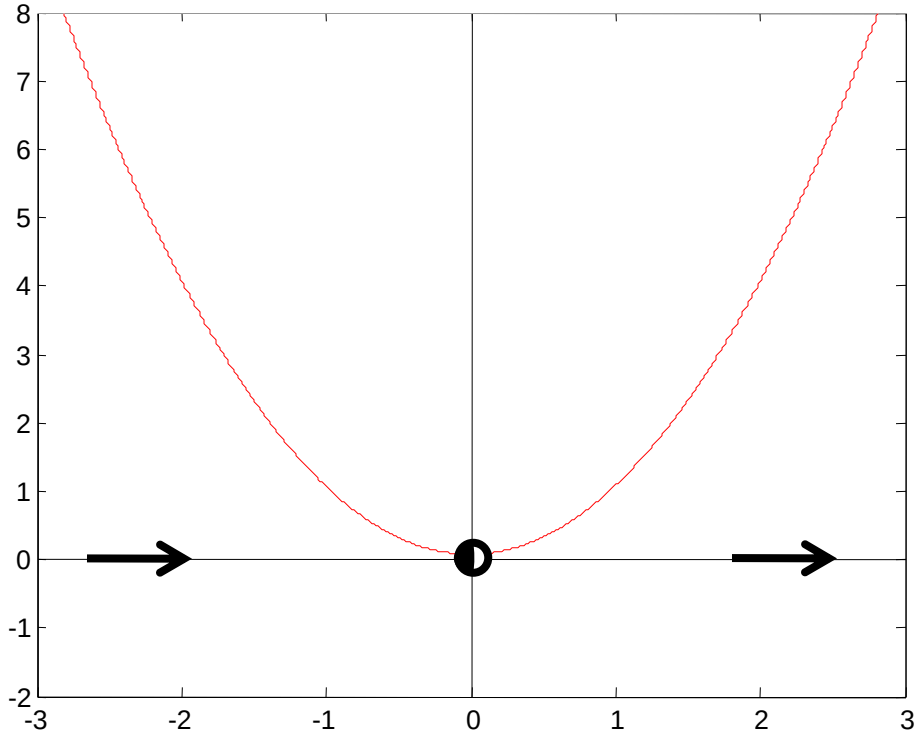
Los puntos fijos satisfacen $x^2 = 1/2$

$x^* = \pm\sqrt{1/2}$

-1/2 es estable, +1/2 es inestable

Sistemas no-lineales

Ejemplo: Analizar el sistema $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + c$, con $c = 0$

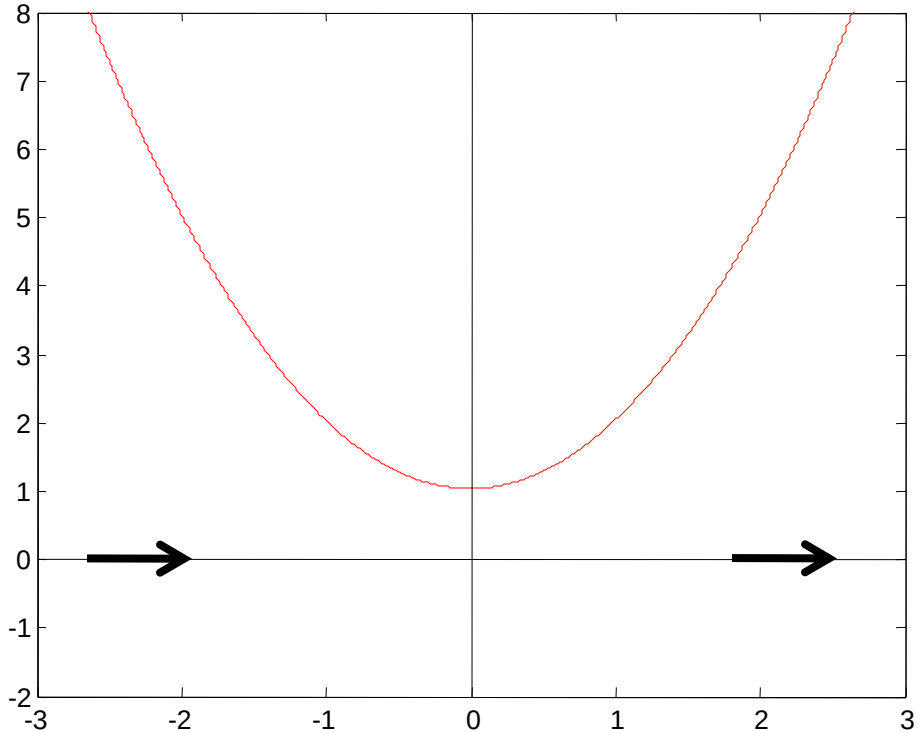


El punto fijo satisface $x^2 = 0$

0 es estable por la izquierda
0 es inestable por la derecha

Sistemas no-lineales

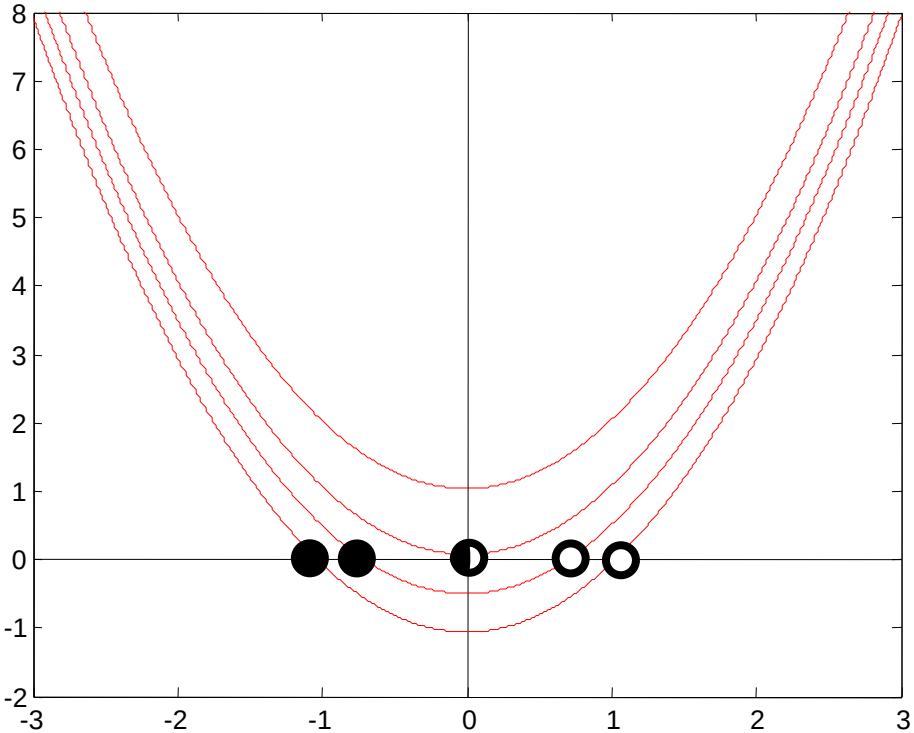
Ejemplo: Analizar el sistema $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + c$, con $c = 1$

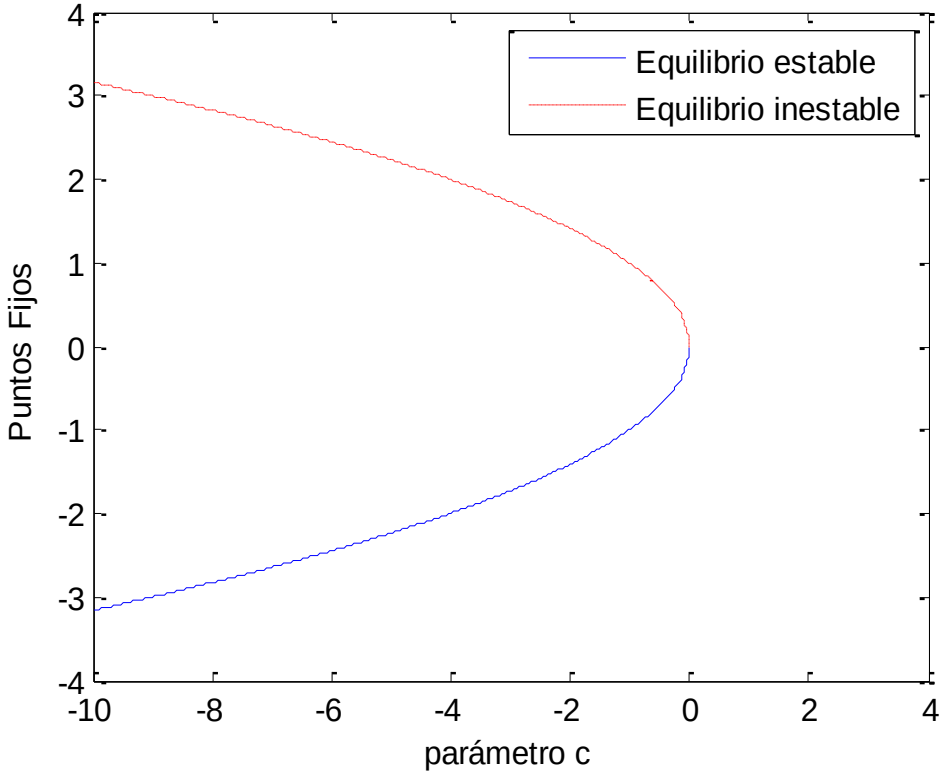


Los puntos fijos satisfacen $x^2 = -1$

No hay puntos fijos en el eje real.

Bifurcación





El Mapa Logístico

- Modelo de crecimiento poblacional
- Entre más individuos haya en una generación, mayor será la tasa de reproducción

$$N_n = R \cdot N_{n-1}$$

- Entre más individuos haya en una generación, menor será la tasa de reproducción por escasez de recursos

$$R_n = R\left(N_{n-1}\right), \text{ p.ej. } R_n = \lambda - bN_{n-1}$$

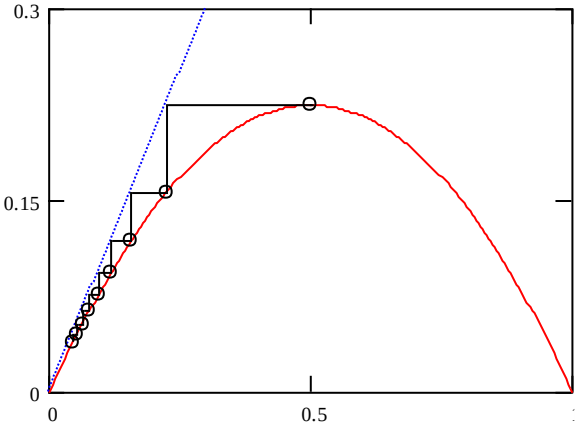
$$N_n = N_{n-1}\left(\lambda - bN_{n-1}\right)$$

- Definamos $x_n = \frac{b}{\lambda} N_n$ como una "población normalizada"

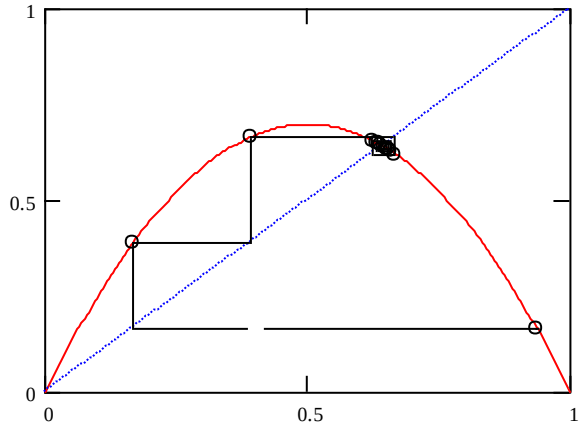
$$x_n = \lambda x_{n-1}\left(1 - x_{n-1}\right), \quad 0 \le x_n \le 1$$

Un sistema dinámico no-lineal

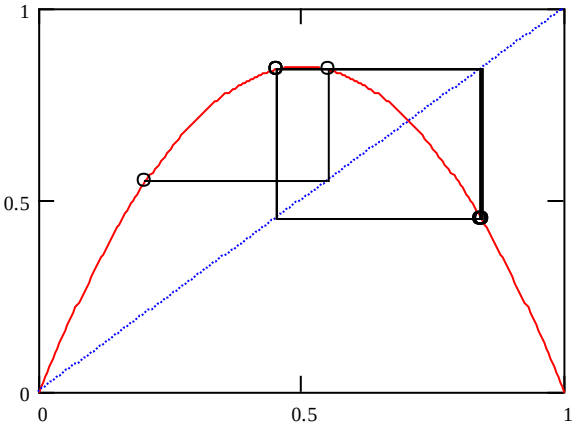
$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$: Si $\lambda \leq 4$ y $x_0 \in [0, 1]$, entonces la trayectoria se mantiene en el intervalo [0, 1].



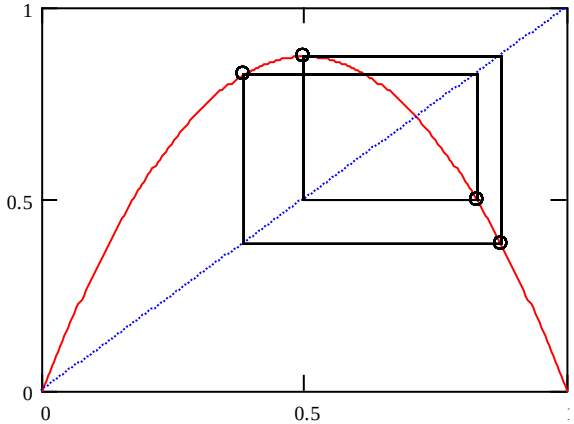
Con λ<1, la trayectoria tiende a cero



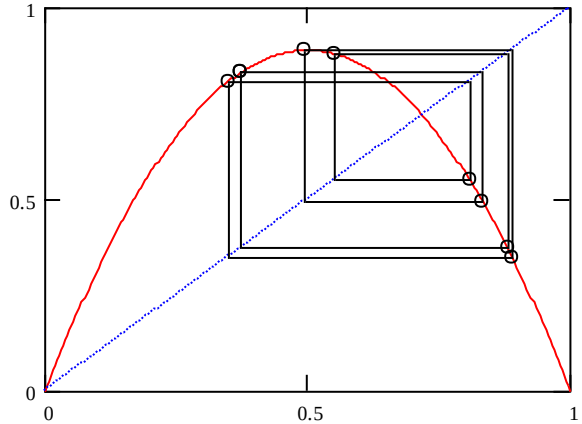
Con $1 \leq \lambda \leq 3$, la trayectoria tiende a 1-1/λ



Con $3 < \lambda \leq 1+\sqrt{6}$, la trayectoria tiende a un ciclo de período 2



Con $3.449 < \lambda < 3.544$, la trayectoria tiende a un ciclo de período 4

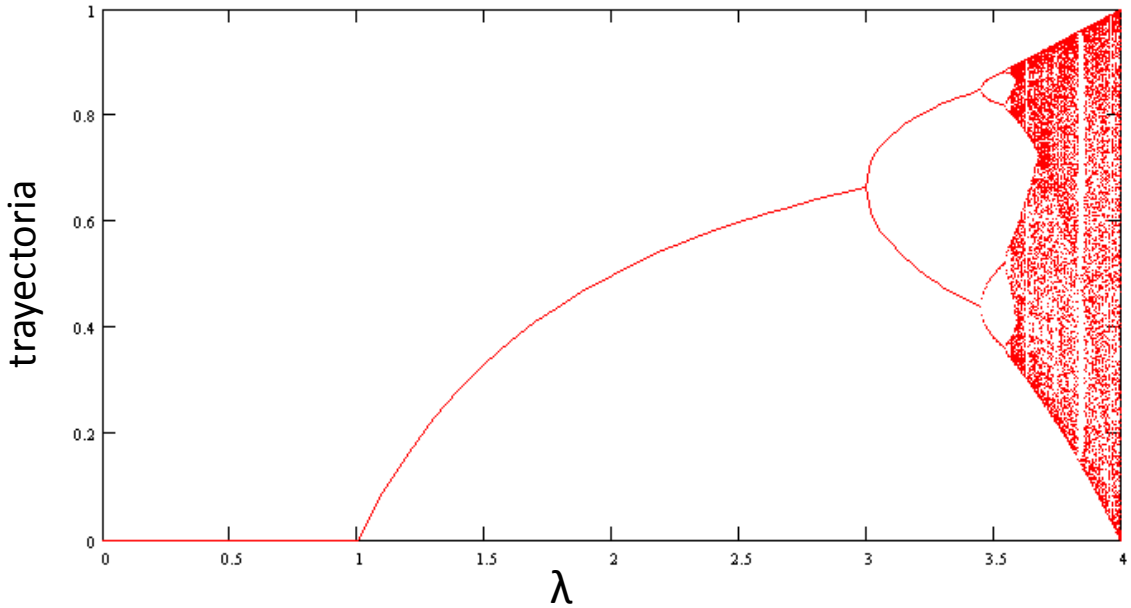


Con $3.544 < \lambda < 3.564$, la trayectoria tiende a un ciclo de período 8

Bifurcación por duplicación del período

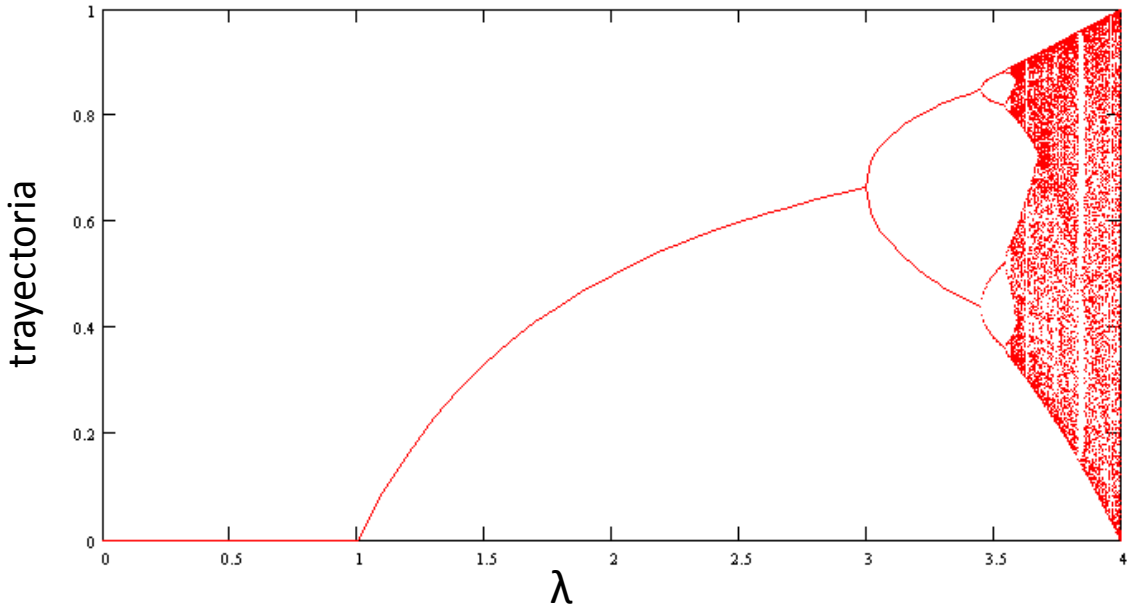
3	1
3.449	2
3.544	4
3.564	8
3.568	16
3.569	32
…	
3.570	∞

Diagrama de Bifurcación

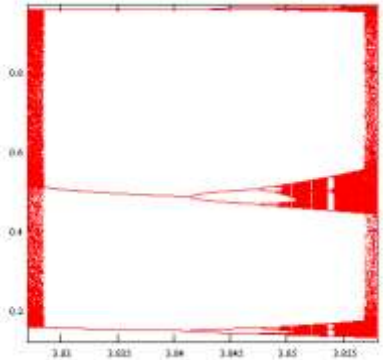



```
x = zeros(2000,1);
for L = 0.01:0.001:3.99
    x(1) = rand(1);
    for i=2:2000
        x(i) = L*x(i-1)*(1-x(i-1));
    end
    plot(L*ones(1000,1),x(1001:2000),'b.','MarkerSize',1)
    hold on
end
```

Diagrama de Bifurcación



Con $3.57 < \lambda < 3.829$, la trayectoria es muy complicada. Puede ser aperiódica, pero también hay trayectorias periódicas con todos los períodos 2^n.



En λ=3.829 aparece por primera vez una órbita de período 3 que se bifurca a 6, 12, 24,… De 3.829 a 4.0 aparecen órbitas periódicas de todos los posibles períodos y órbitas aperiódicas: **Caos!**

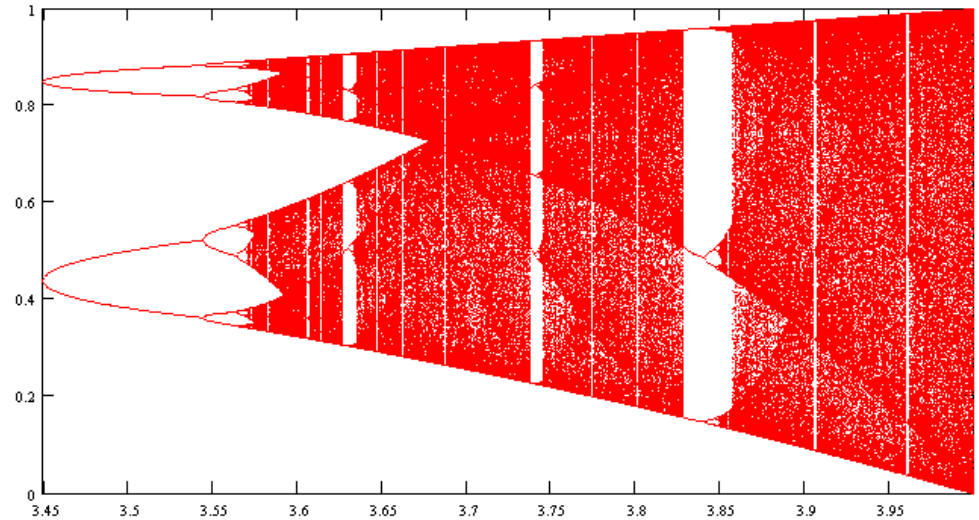
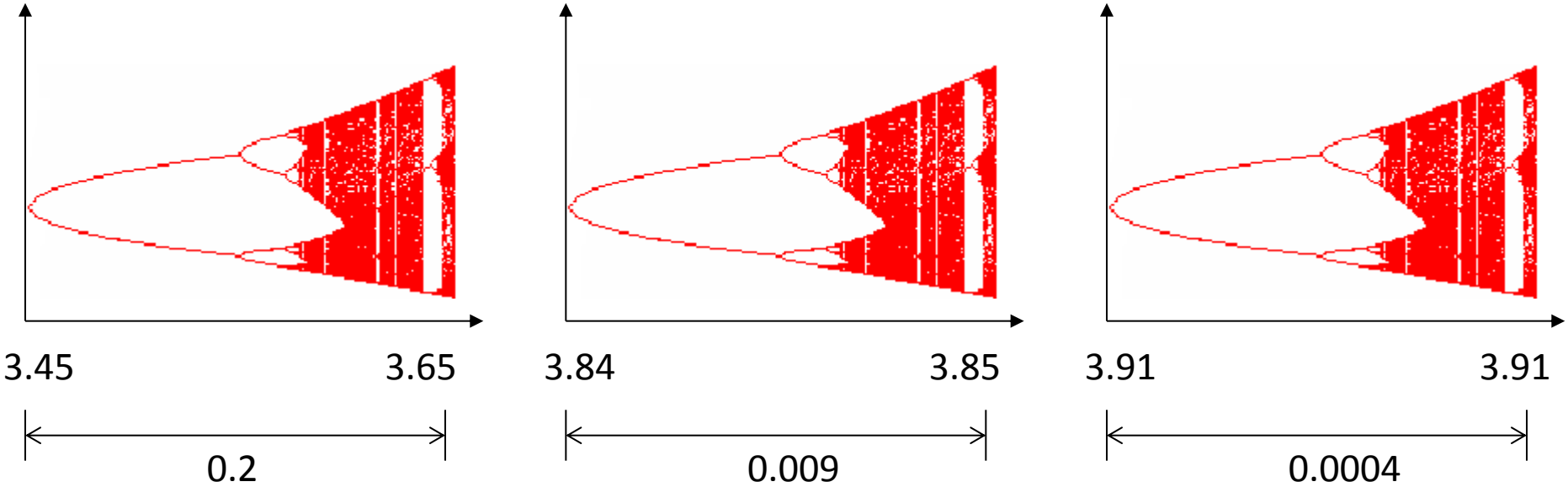
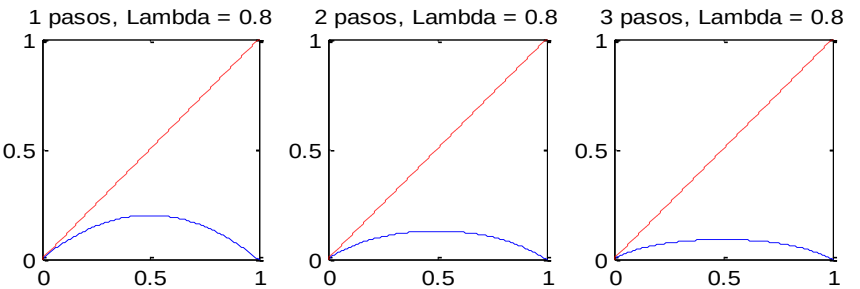


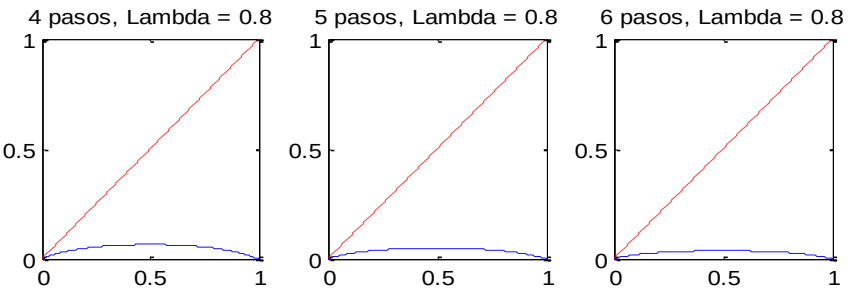
Diagrama de Bifurcación

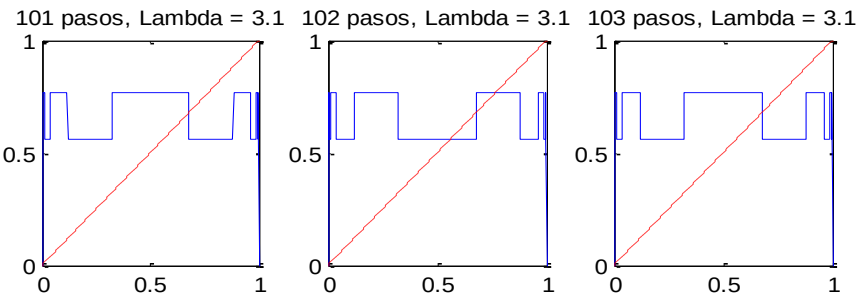


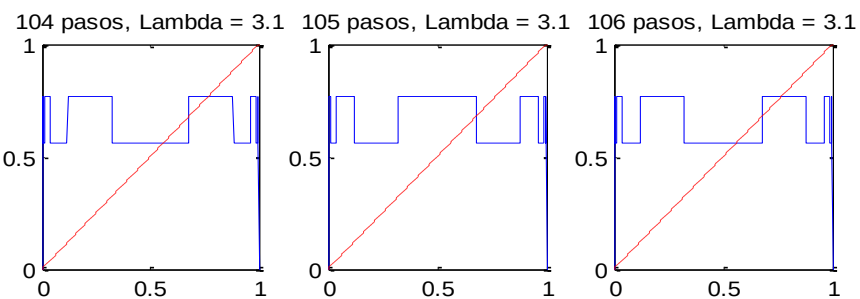
Si nos ocultan la escala, no podemos distinguir las tres porciones del diagrama de bifurcación: Es una figura fractal!

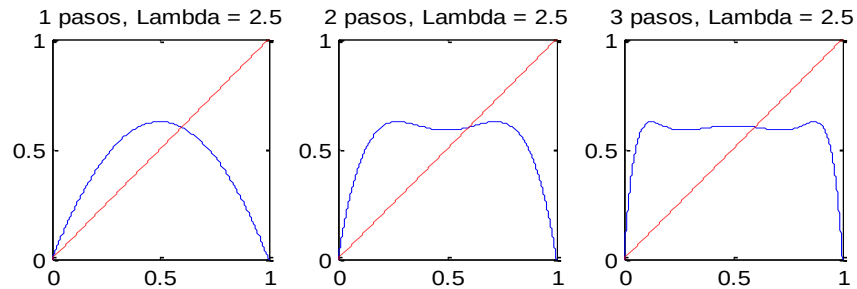
$$f(x) = \lambda x(1-x), \quad f^{<m>}(x) = f\left(f\left(\cdots f(x)\right)\right) \; m \text{ veces}$$

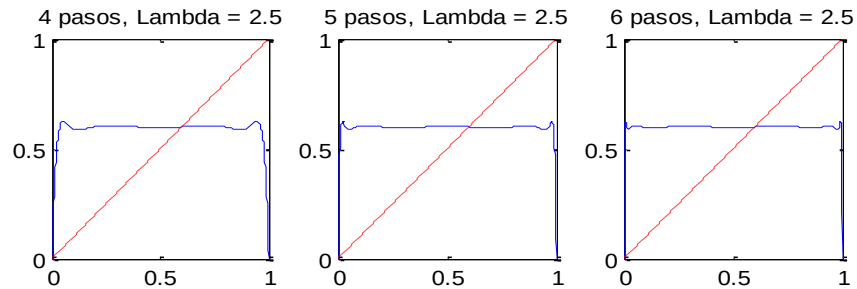


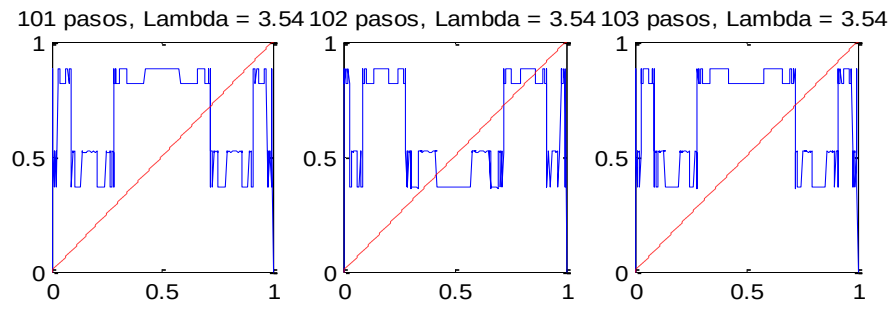


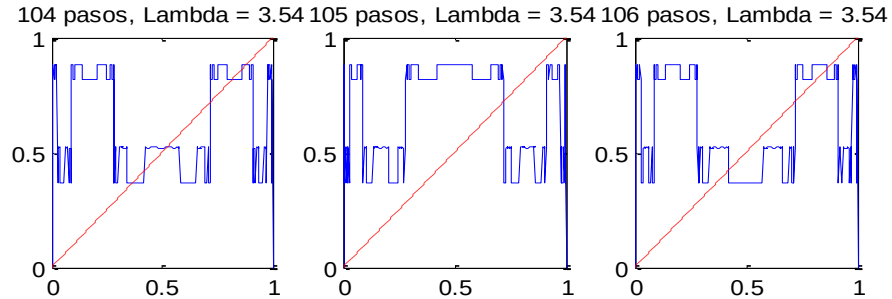


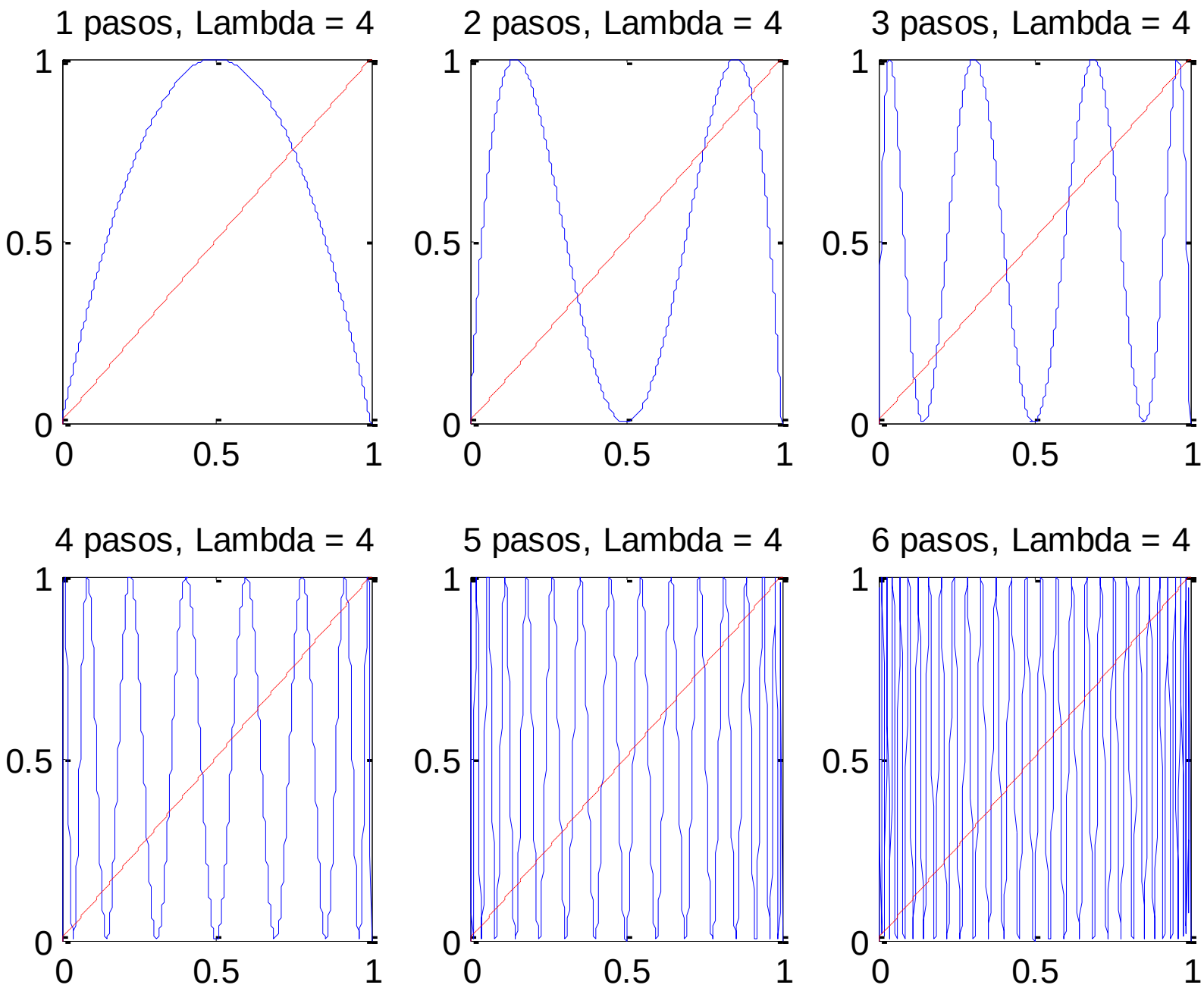






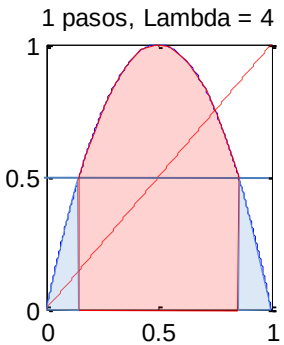




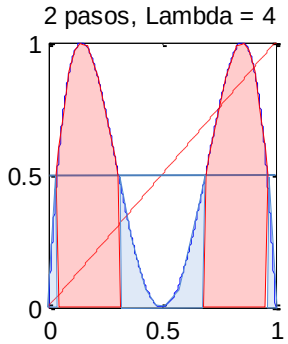

1 pasos, Lambda = 4
2 pasos, Lambda = 4
3 pasos, Lambda = 4
4 pasos, Lambda = 4
5 pasos, Lambda = 4
6 pasos, Lambda = 4
0
0.5
1

Predecibilidad del caos

- Nos dan x_t y sólo nos piden determinar si dentro de m pasos el valor de x_{t+m} supera o no el valor ½. Nuestra respuesta es "si" (1) o "no" (0) : Debemos proporcionar un bit de información.

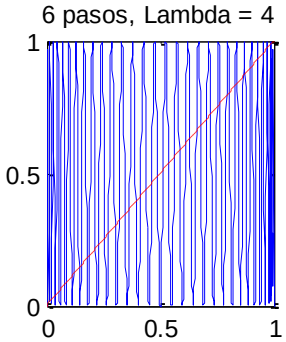


- Si m es 1, es suficiente con saber en cuál de las tres secciones cae x_t:



- Si m es 2, es suficiente con saber en cuál de las cinco secciones cae x_t:

- Si m es 6, necesitamos distinguir las $2^6+1 = 65$ secciones en que puede caer x_t:



- Para predecir si x_{t+m} supera o no el valor ½ debemos conocer x_t con, por lo menos, m+1 bits de precisión

Un procesador i7 de 64 bits nos podrá informar si x_{t+m} supera o no el valor ½ hasta, máximo, 63 pasos en el futuro!

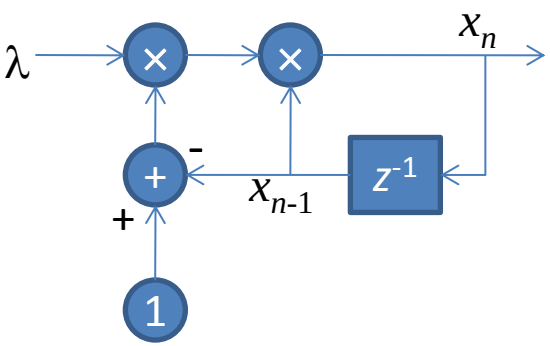
Predecibilidad del caos

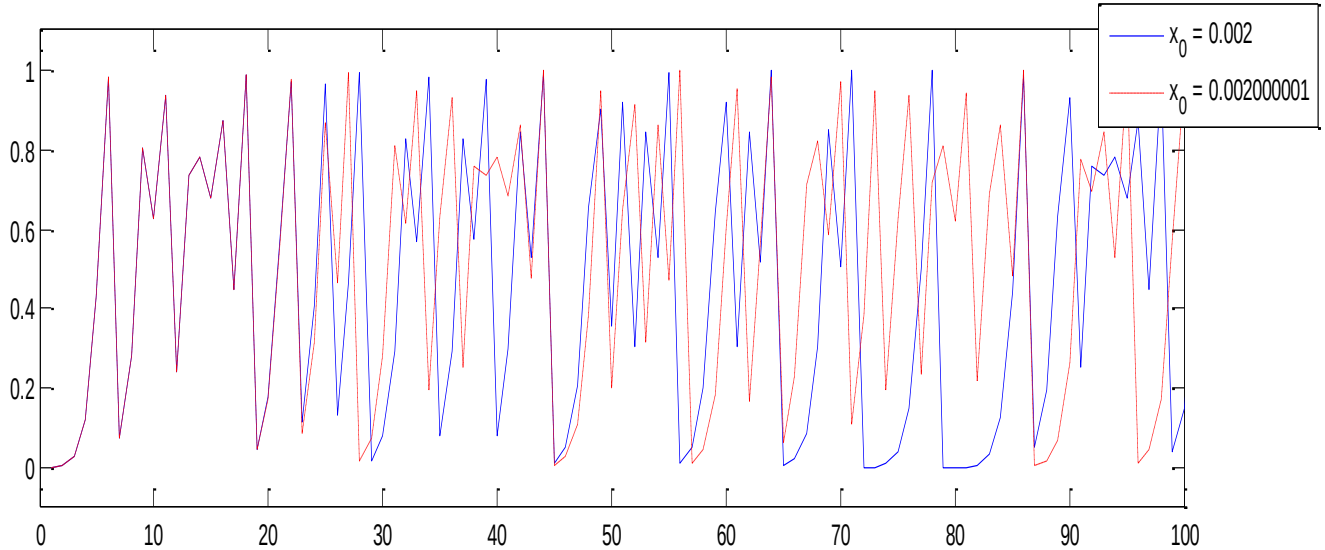
1011010011101100011 0

Aleatoriedad

y

Caos





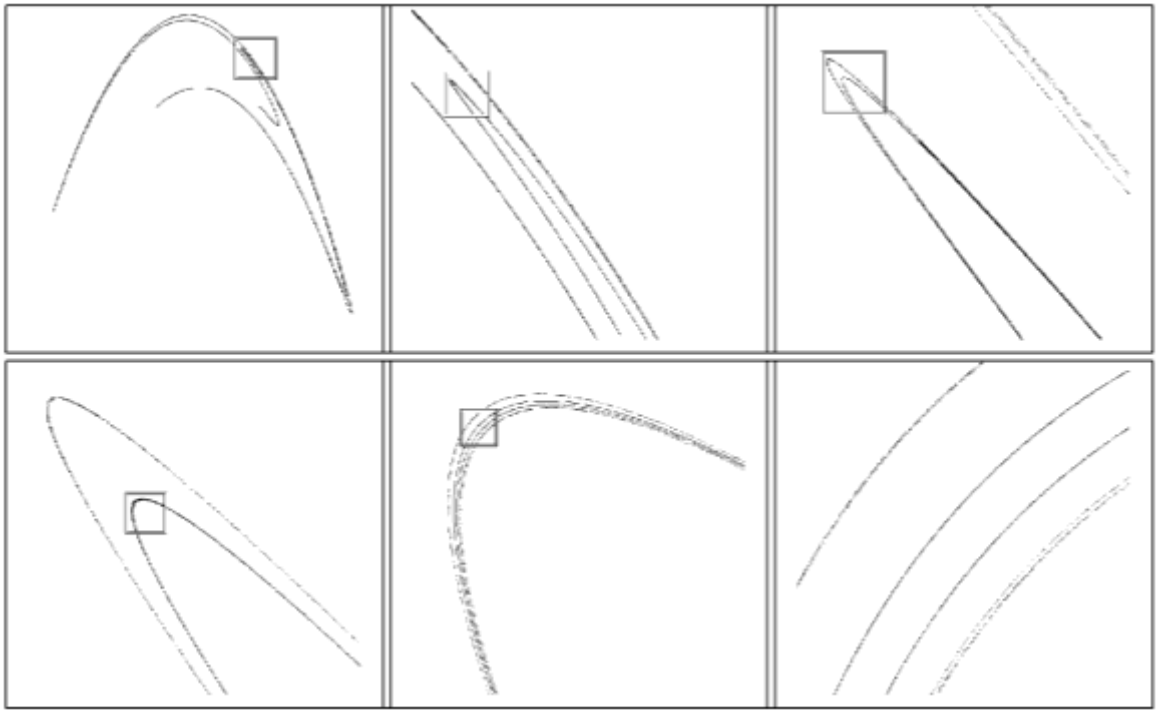
Mapa de Hénon

```
x = zeros(100000,1);
a = 1.29; b = 0.3;
x(1:2) = (2*rand(2,1)-1)/1.1;
for i=3:100000
    x(i) = a - x(i-1)^2 + b*x(i-2);
end
plot(x(10:99999),x(11:100000),'.','MarkerSize',1)
```

$$x_{n+1} = a - x_n^2 + by_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$

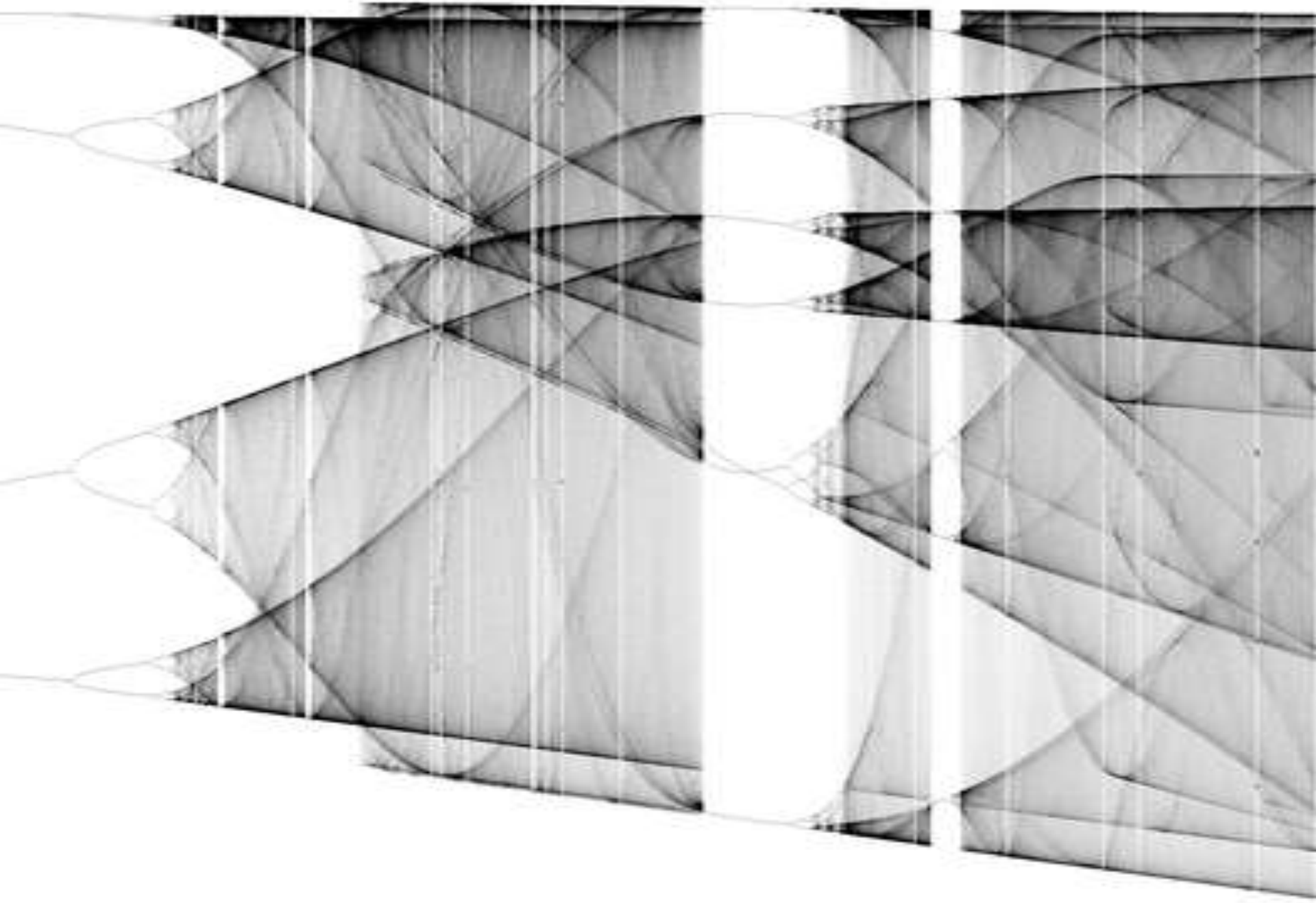
$a = 1.29$
$b = 0.3$

Por ejemplo

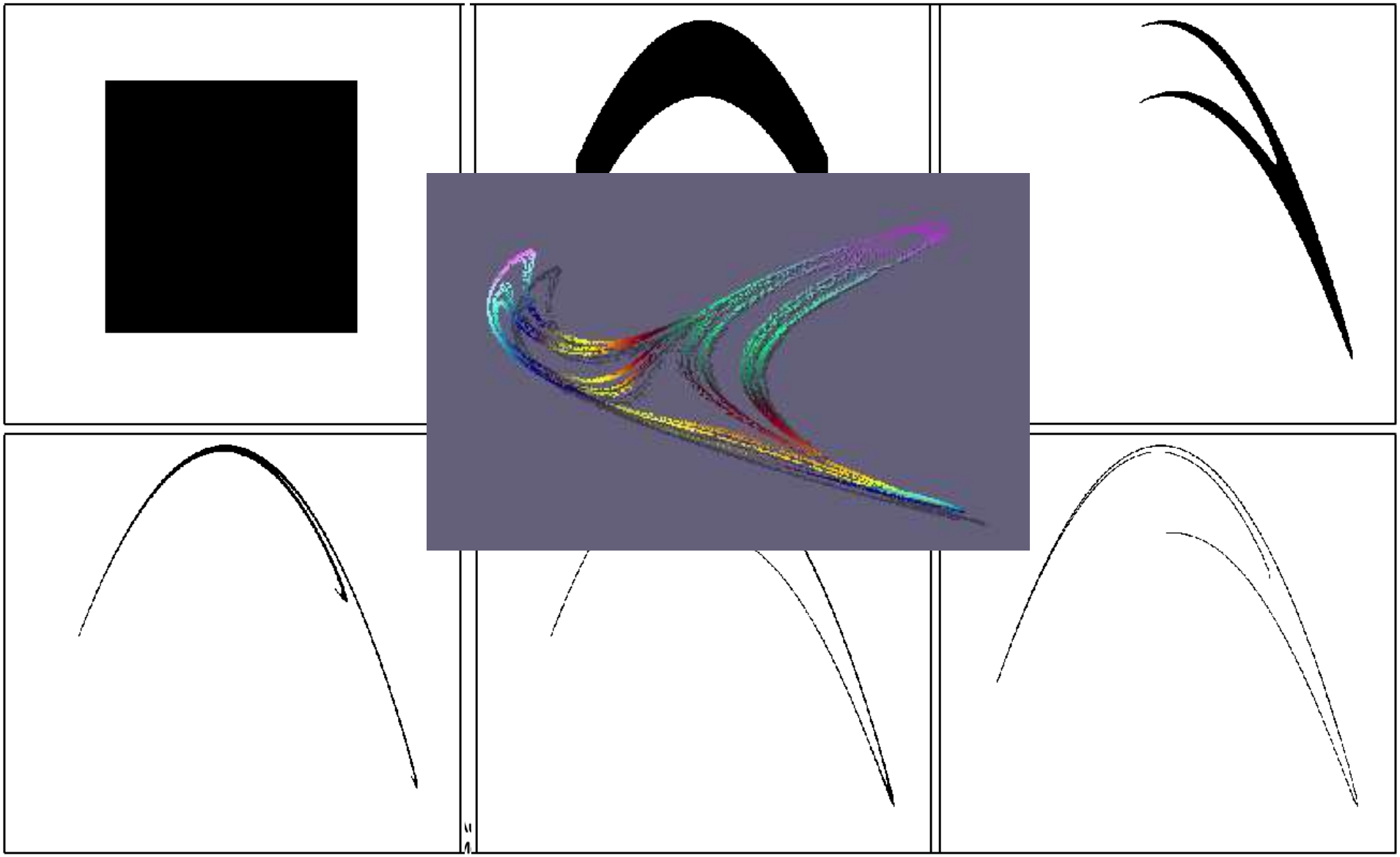


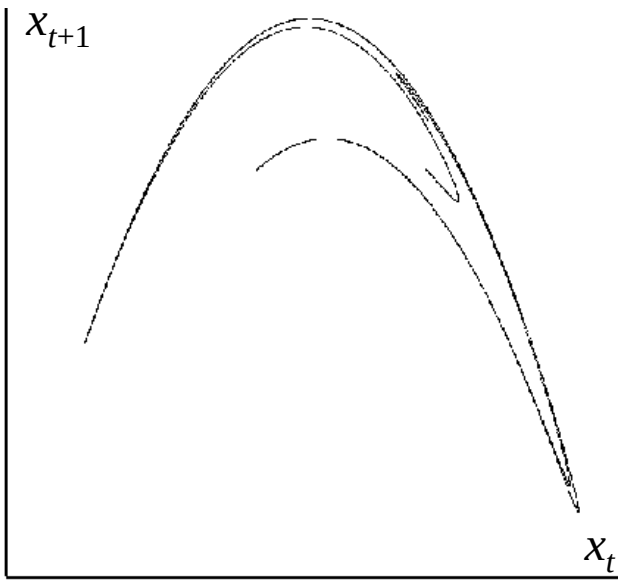
Atractor Extraño:

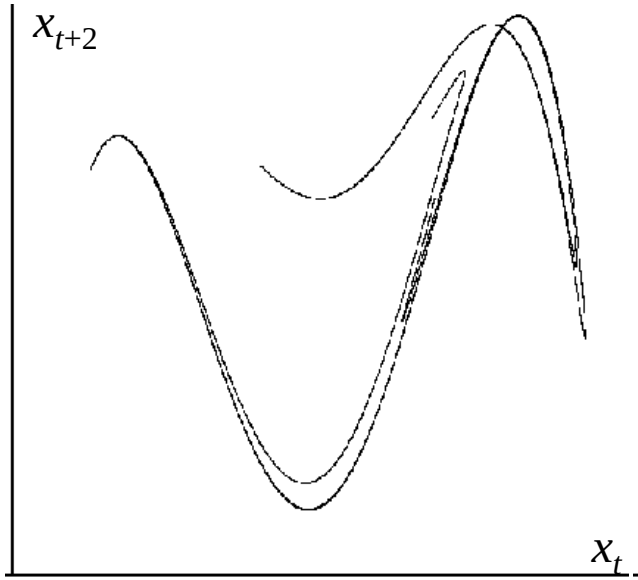
Podríamos agrandar la imagen por siempre, sin encontrar fin a la aparición de nuevos detalles

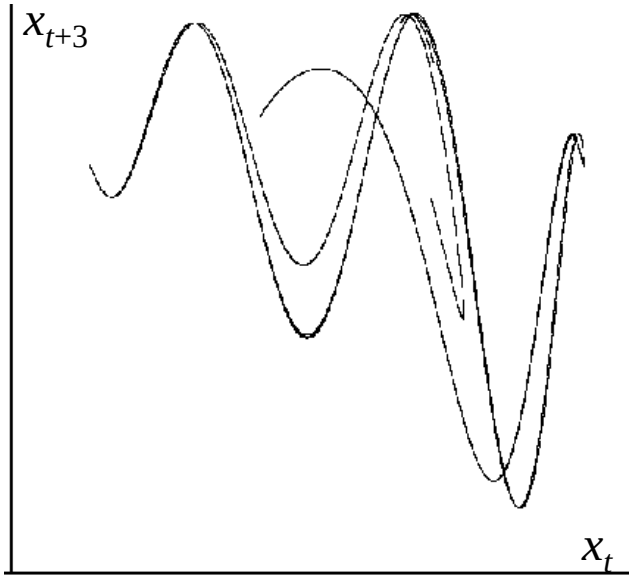


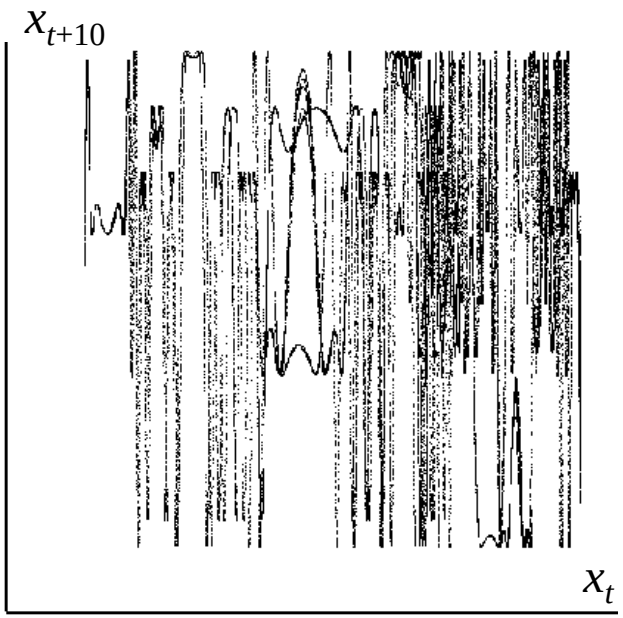
Sistema IFS: $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{bmatrix}$$

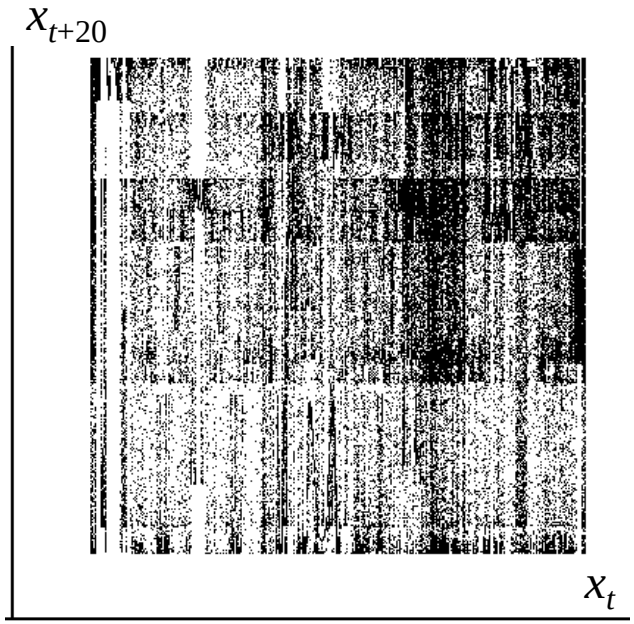


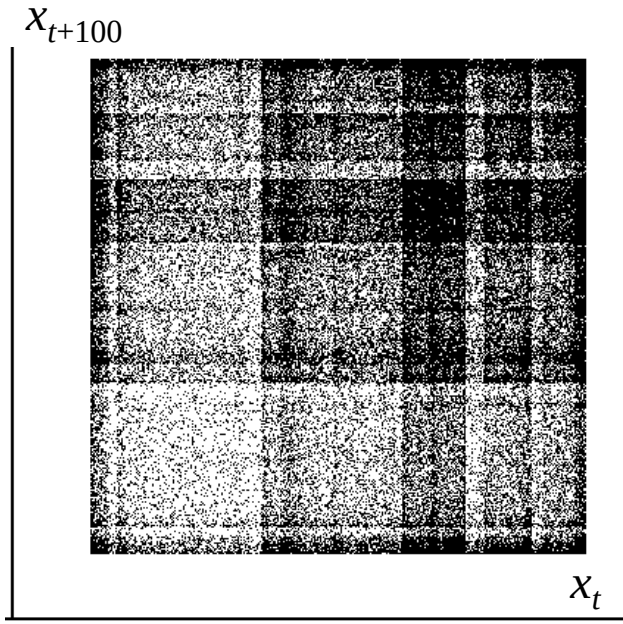

x_{t+1}
x_t


x_{t+2}
x_t

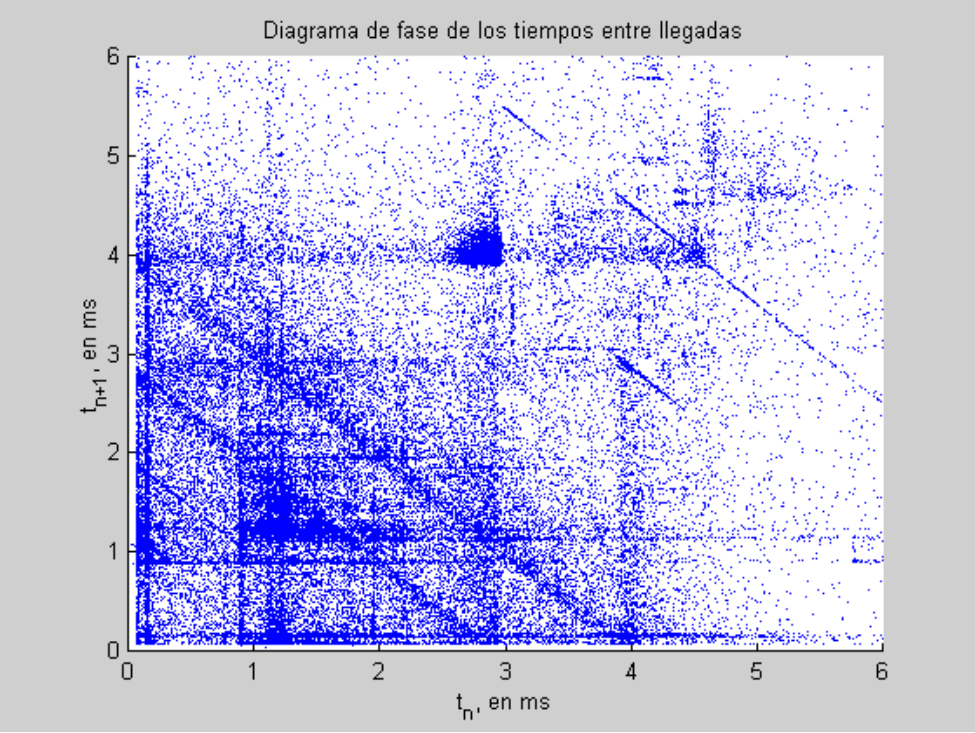

x_{t+3}
x_t


x_{t+10}
x_t

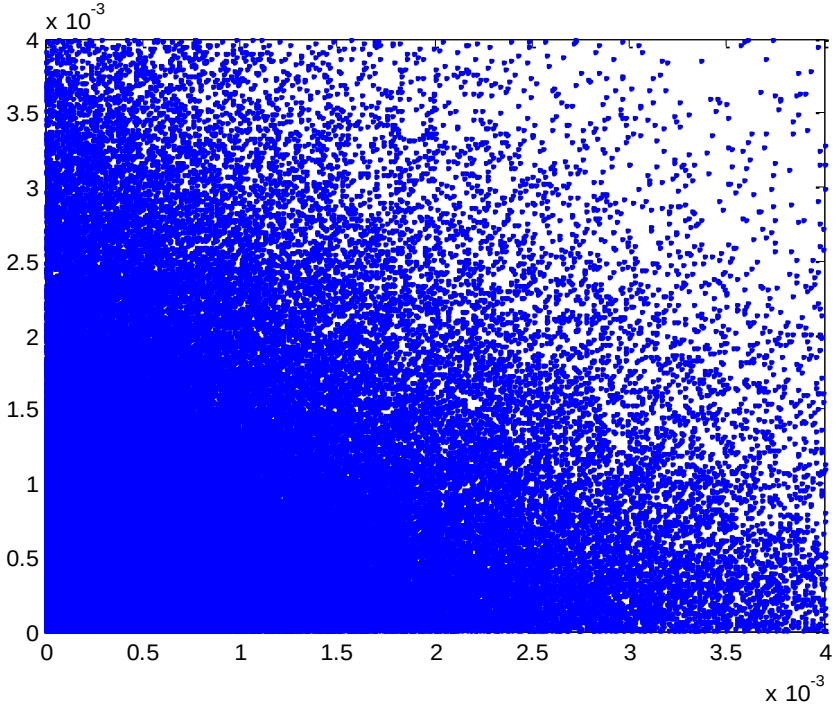

x_{t+20}
x_t


x_{t+100}
x_t

Incertidumbre: ¿Caos o aleatoriedad?



Tráfico real sobre una red ethernet



Tráfico tipo Poisson

130 JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES VOLUME 20

Deterministic Nonperiodic Flow[1]

EDWARD N. LORENZ

Massachusetts Institute of Technology

(Manuscript received 18 November 1962, in revised form 7 January 1963)

ABSTRACT

Finite systems of deterministic ordinary nonlinear differential equations may be designed to represent forced dissipative hydrodynamic flow. Solutions of these equations can be identified with trajectories in phase space. For those systems with bounded solutions, it is found that nonperiodic solutions are ordinarily unstable with respect to small modifications, so that slightly differing initial states can evolve into considerably different states. Systems with bounded solutions are shown to possess bounded numerical solutions.

A simple system representing cellular convection is solved numerically. All of the solutions are found to be unstable, and almost all of them are nonperiodic.

The feasibility of very-long-range weather prediction is examined in the light of these results.

Fundación de la teoría del caos

Como no se le ocurría un título para una conferencia que iba a dictar en 1972 en el 139 congreso de la Asociación Americana para el Avance de la Ciencia, Philip Merilees, el organizador, lo presentó así: "*Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*".

El efecto mariposa

Fundación de la Fascinación del Público con la teoría del caos

Ecuaciones de Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = ay - ax$$

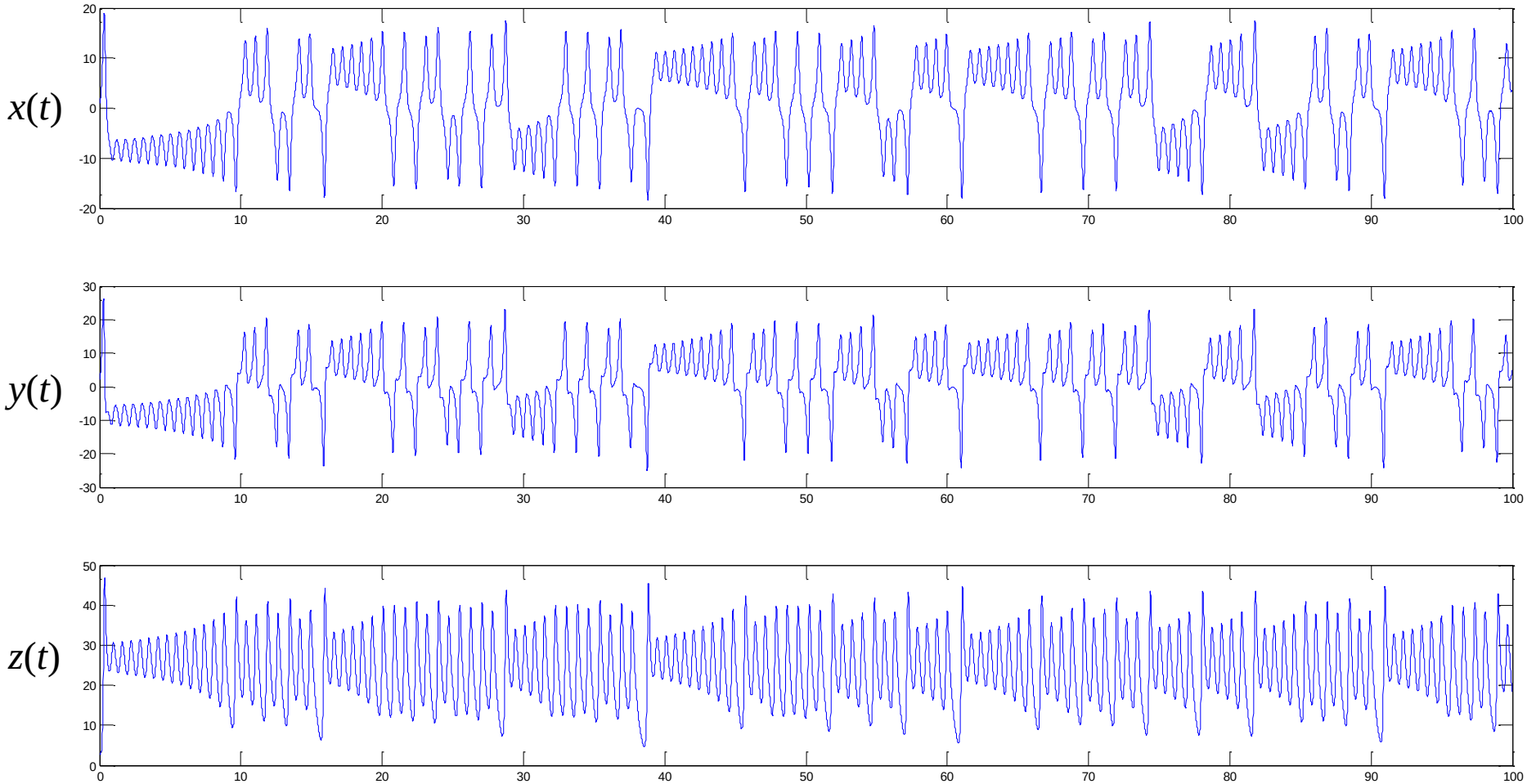
$$\frac{dy}{dt} = bx - y - zx$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - cz$$

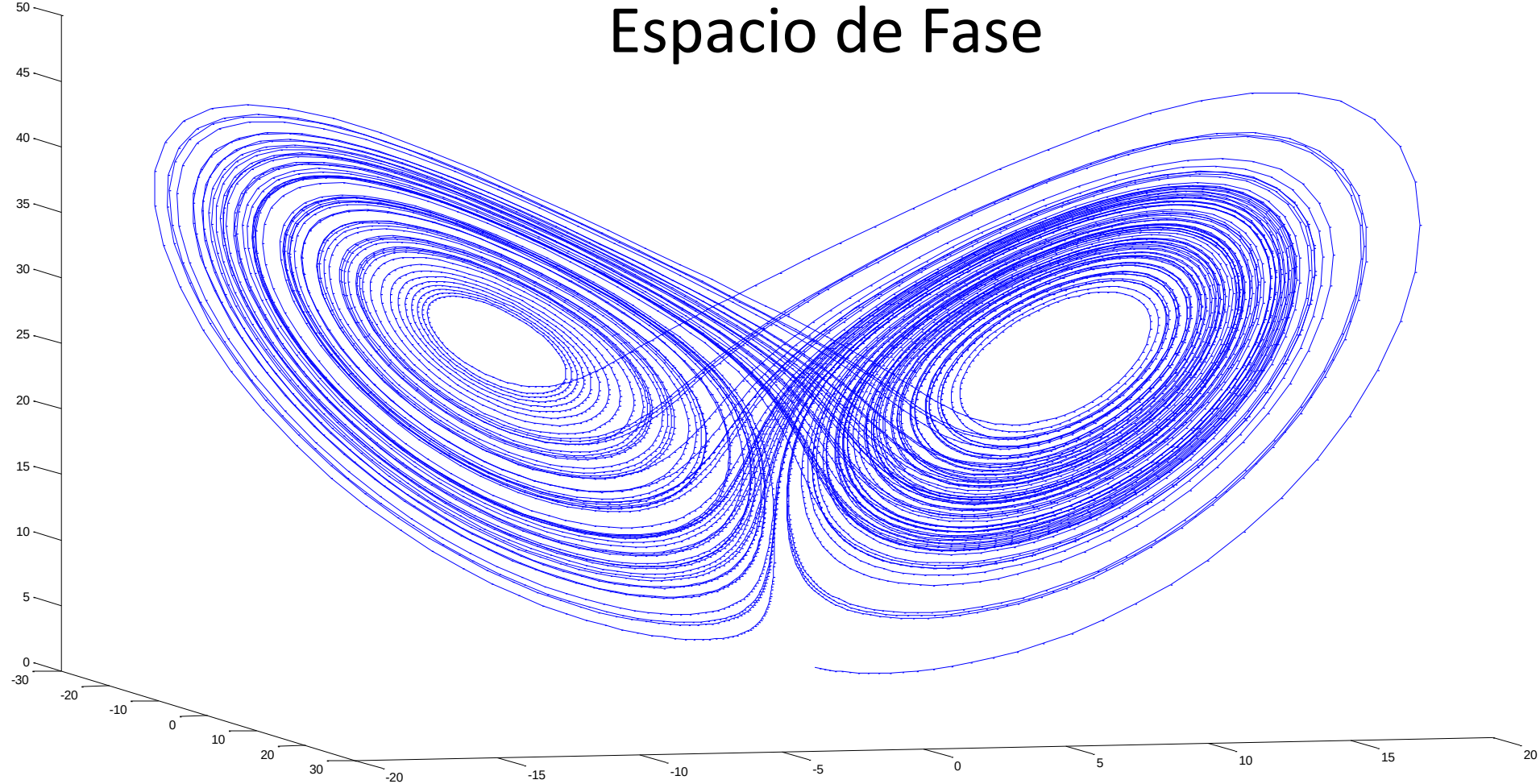
¿

t	: tiempo
$x(t)$	: Posición
$y(t)$	: temperatura
$z(t)$	: “distorsión de T”
a, b, c	: Parámetros

?


$x(t)$
$y(t)$
$z(t)$

Espacio de Fase



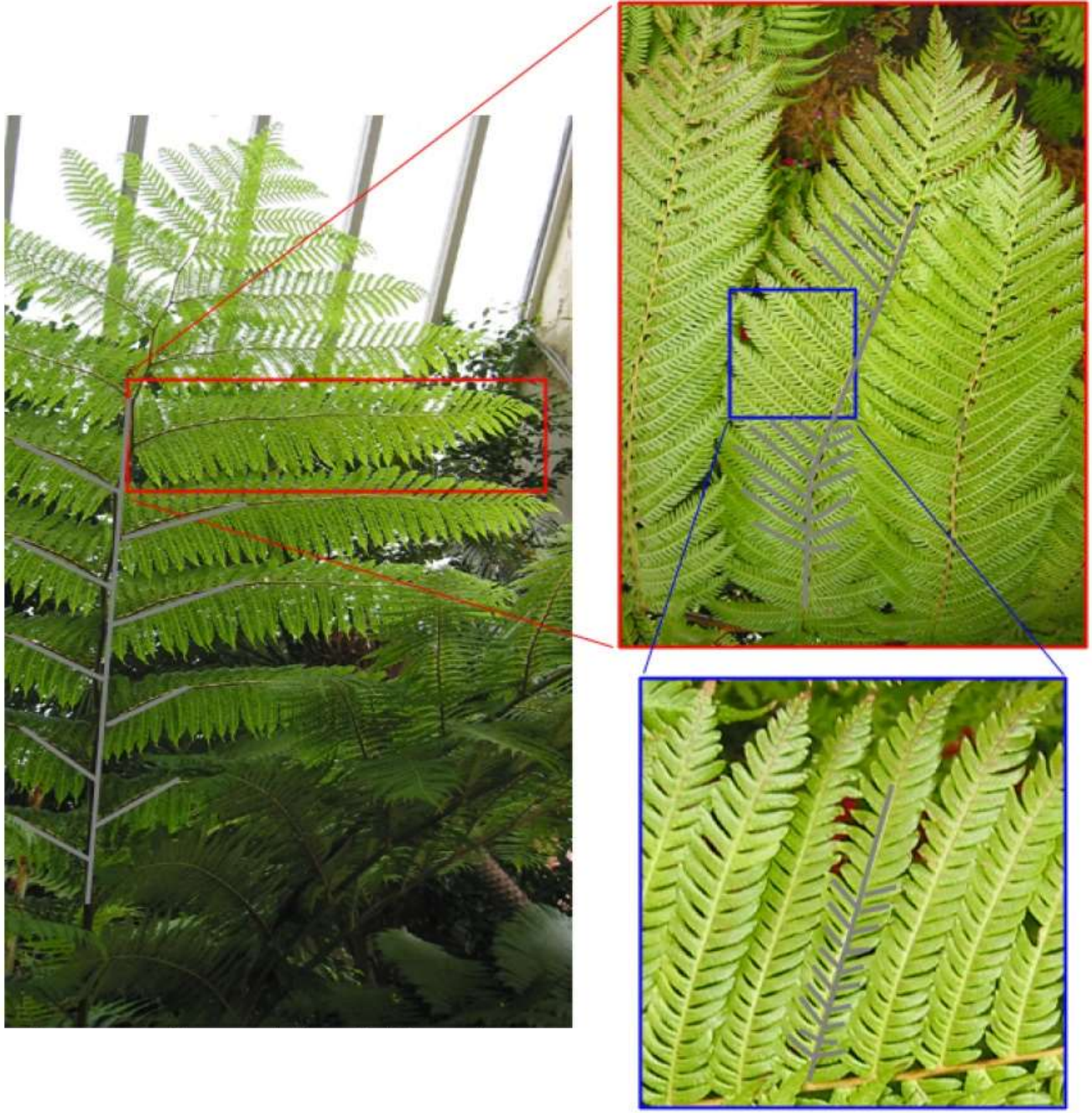
Atractor de Lorenz

```
g = inline('[10*(x(2)-x(1)); 28*x(1)-x(2)-x(1)*x(3); x(1)*x(2)-(8/3)*x(3)]','t','x');
[t,x] = ode45(g,[0:0.01:100],[1;2;3]);
plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3));
```

4. De lo Euclidiano a lo fractal

¿Otra geometría?

- Las formas principales no se construyen como líneas rectas, círculos, triángulos, elipses, etc.
- … Se parecen más a un conjunto de procedimientos (algoritmos) para rotar, desplazar, re-escalizar o distorsionar alguna forma original.

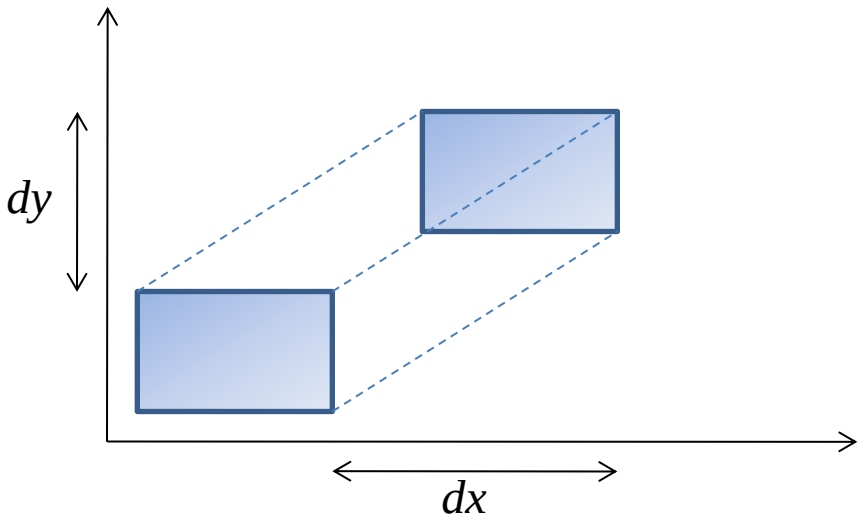


Transformaciones afines en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

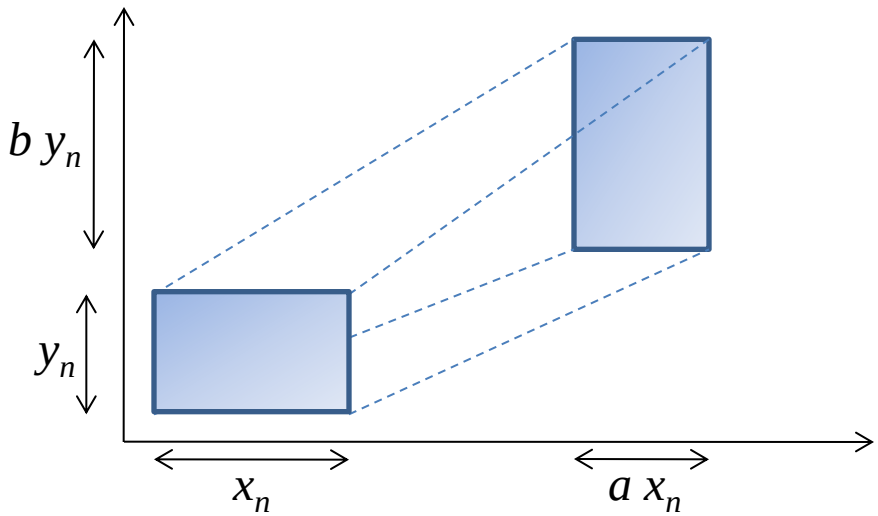
$\downarrow$ Rotar
Escalizar
distorsionar

$\downarrow$ desplazar



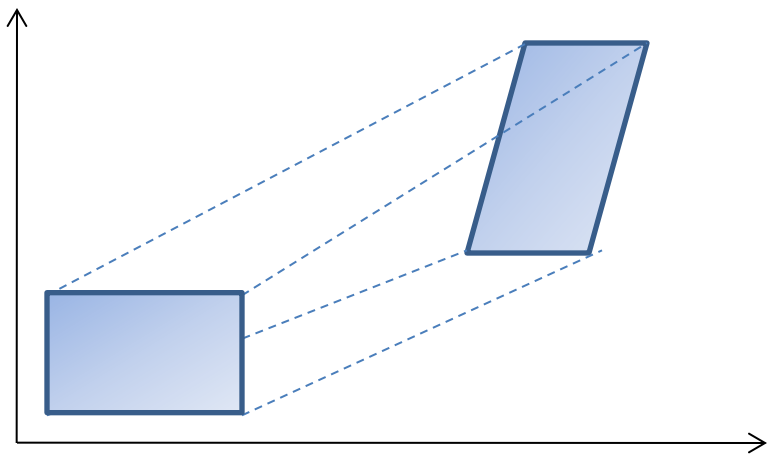
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Una translación de (dx,dy)



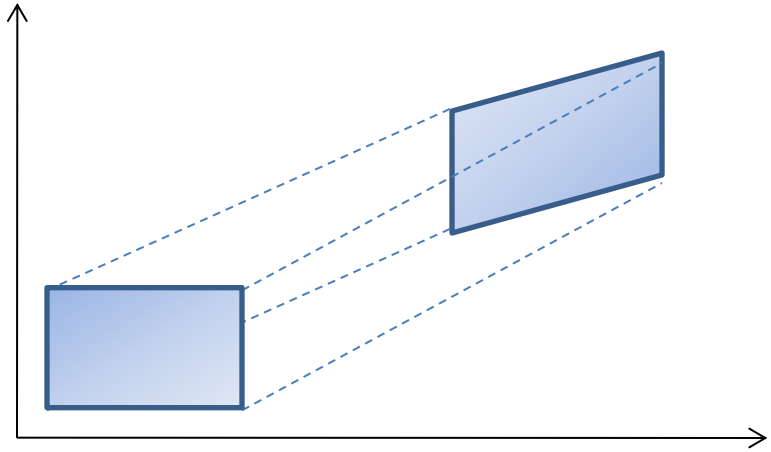
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Re-escalización por (a,b)



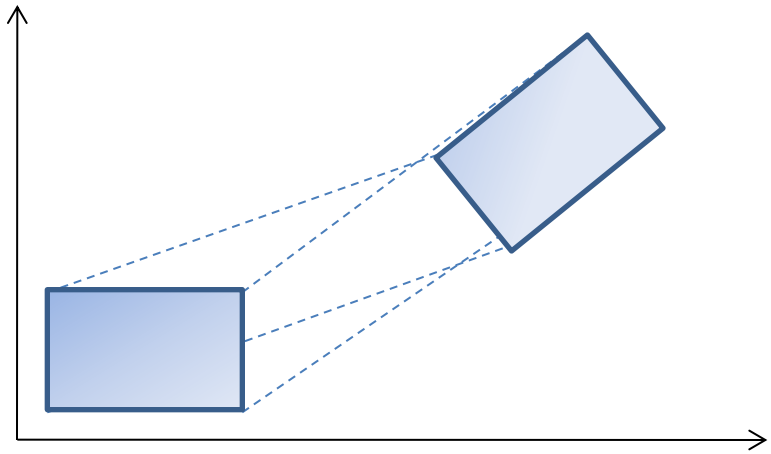
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Deformación paralela a x



$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Deformación paralela a y



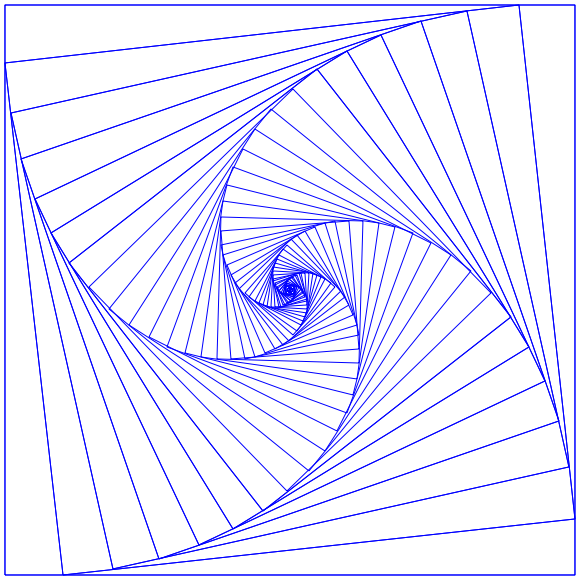
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Rotación por un ángulo θ

Iteremos una transformación simple

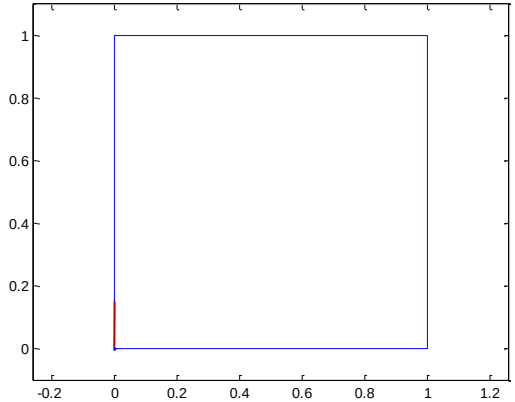
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

Iterated Function System

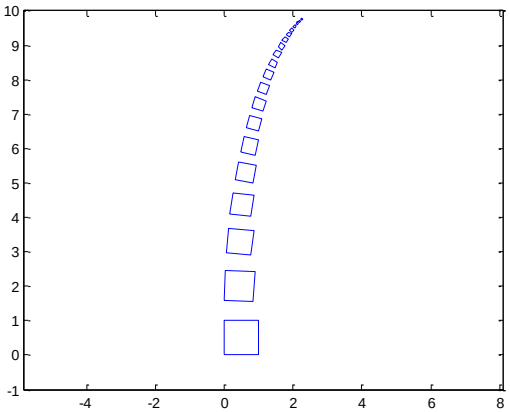


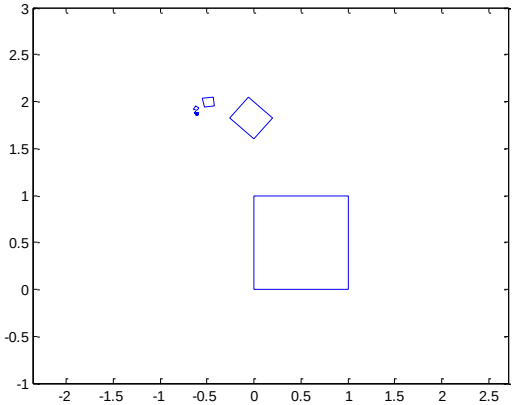
```
xy    = [0 0; 1 0; 1 1; 0 1; 0 0]';
A     = [0.9 -0.1; 0.1 0.9];
b     = repmat([0.1; 0.0],1,5);
for i = 1:100
    plot(xy(1,:),xy(2,:)); hold on
    xy = A*xy + b;
end
```

Cuatro transformaciones “interesantes” (¿?)



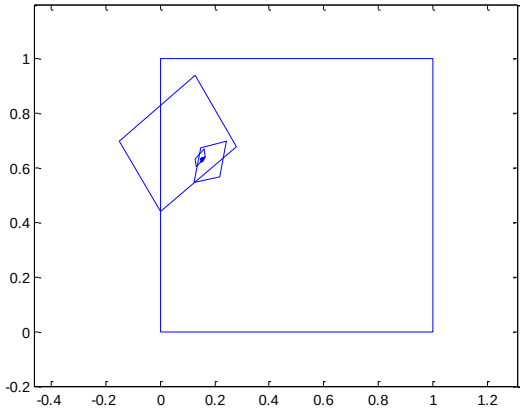
$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}$$

Geometría de la naturaleza

Empezando con **x** = (0.5, 0.5):

grafique(**x**)

con prob. 0.01, $\mathbf{x} \leftarrow A_1\,\mathbf{x} + b_1$;

con prob. 0.85, $\mathbf{x} \leftarrow A_2\,\mathbf{x} + b_2$;

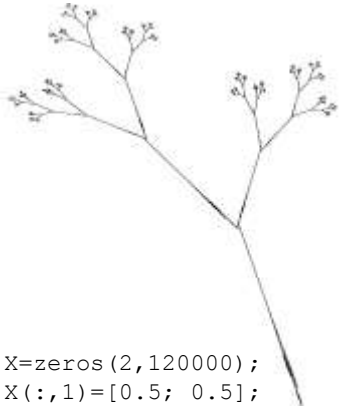
con prob. 0.07, $\mathbf{x} \leftarrow A_3\,\mathbf{x} + b_3$;

con prob. 0.07, $\mathbf{x} \leftarrow A_4\,\mathbf{x} + b_4$;

Repita hasta tener suficientes puntos

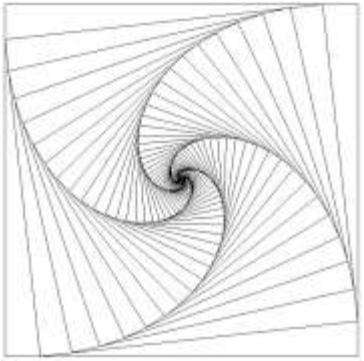
```
X=zeros(2,120000);
X(:,1)=[0.5; 0.5];
A1 = [ 0.00  0.00;  0.00  0.16]; b1 = [0.0; 0.00];
A2 = [ 0.85  0.04; -0.04  0.85]; b2 = [0.0; 1.60];
A3 = [ 0.20 -0.26;  0.23  0.22]; b3 = [0.0; 1.60];
A4 = [-0.15  0.28;  0.26  0.24]; b4 = [0.0; 0.44];
for k=1:119999
    r=rand;
    if     r<.01, A = A1; b = b1;
    elseif r<.86, A = A2; b = b2;
    elseif r<.93, A = A3; b = b3;
    else          A = A4; b = b4;
    end
    X(:,k+1) = A*X(:,k) + b;
end
scatter(X(1,:),X(2,:),2,'g')
axis equal
```

Iterated Function Systems

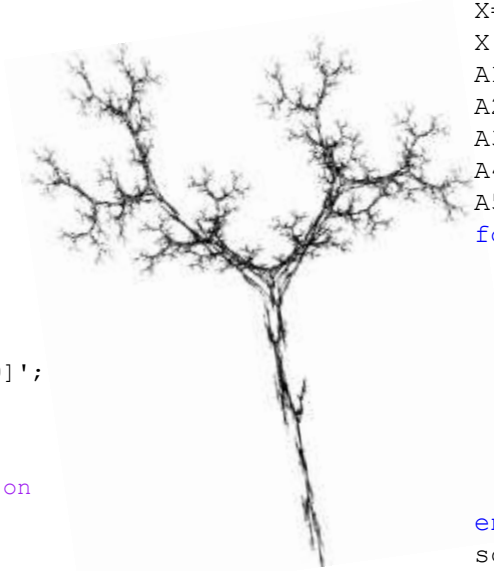


```
X=zeros(2,120000);
X(:,1)=[0.5; 0.5];
A1 = [ 0.387  0.430;  0.430 -0.387]; b1 = [0.2560; 0.5220];
A2 = [ 0.441 -0.091; -0.009 -0.322]; b2 = [0.4219; 0.5059];
A3 = [-0.468  0.020; -0.113  0.015]; b3 = [0.4000; 0.4000];
for k=1:119999
    r=rand;
    if r<.333,     A = A1; b = b1;
    elseif r<.666, A = A2; b = b2;
    else           A = A3; b = b3;
    end
    X(:,k+1) = A*X(:,k) + b;
end
scatter(X(1,:),X(2,:),2,'g')
```

```
X=zeros(2,120000);
X(:,1)=[0.5; 0.5];
A1 = [ 0.00  0.00;  0.00  0.16]; b1 = [0.0; 0.00];
A2 = [ 0.85  0.04; -0.04  0.85]; b2 = [0.0; 1.60];
A3 = [ 0.20 -0.26;  0.23  0.22]; b3 = [0.0; 1.60];
A4 = [-0.15  0.28;  0.26  0.24]; b4 = [0.0; 0.44];
for k=1:119999
    r=rand;
    if     r<.01, A = A1; b = b1;
    elseif r<.86, A = A2; b = b2;
    elseif r<.93, A = A3; b = b3;
    else          A = A4; b = b4;
    end
    X(:,k+1) = A*X(:,k) + b;
end
scatter(X(1,:),X(2,:),2,'g')
```

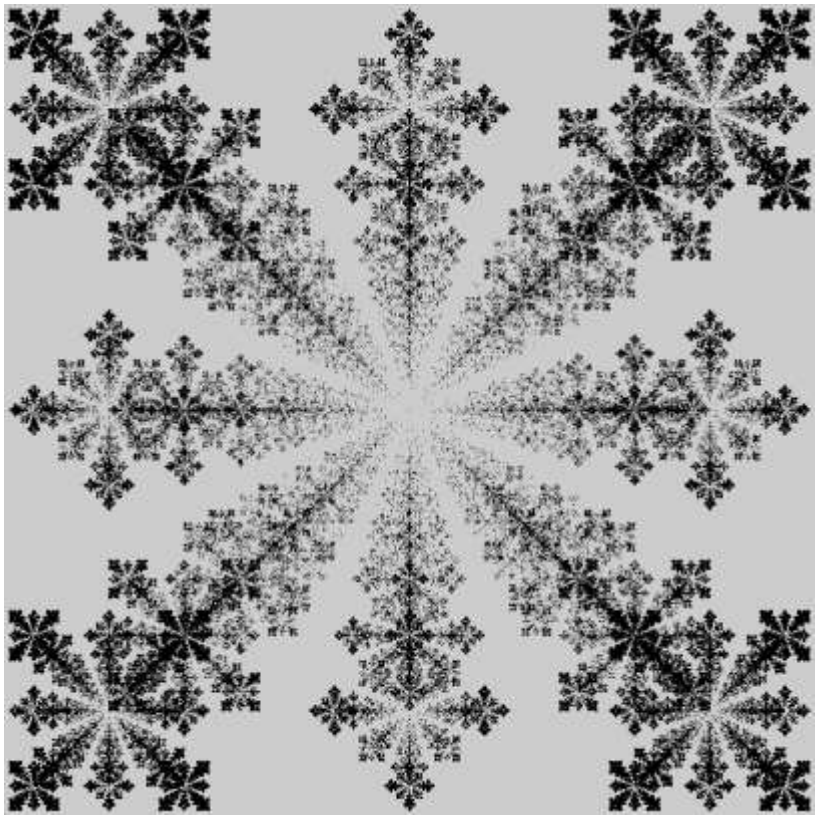


```
xy    = [0 0; 1 0; 1 1; 0 1; 0 0]';
A     = [0.9 -0.1; 0.1 0.9];
b     = repmat([0.1; 0.0],1,5);
for i = 1:100
    plot(xy(1,:),xy(2,:)); hold on
    xy = A*xy + b;
end
```



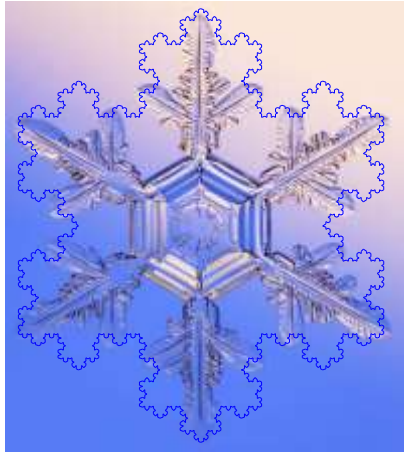
```
X=zeros(2,120000);
X(:,1)=[0.5; 0.5];
A1 = [ 0.195  -0.488;  0.344  0.443]; b1 = [0.4431; 0.2452];
A2 = [ 0.462   0.414; -0.252  0.361]; b2 = [0.2511; 0.5692];
A3 = [-0.637   0.000;  0.000  0.501]; b3 = [0.8562; 0.2512];
A4 = [-0.035   0.070; -0.469  0.022]; b4 = [0.4884; 0.5069];
A5 = [-0.058  -0.070;  0.453 -0.111]; b5 = [0.5976; 0.0969];
for k=1:119999
    r=rand;
    if r<0.2,     A = A1; b = b1;
    elseif r<0.4, A = A2; b = b2;
    elseif r<0.6, A = A3; b = b3;
    elseif r<0.8, A = A3; b = b3;
    else          A = A5; b = b5;
    end
    X(:,k+1) = A*X(:,k) + b;
end
scatter(X(1,:),X(2,:),2,'k')
```

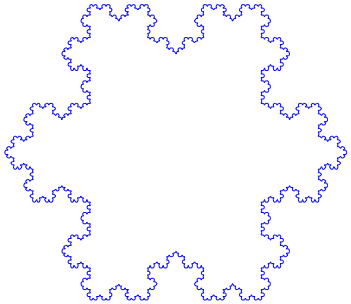
No sólo plantas



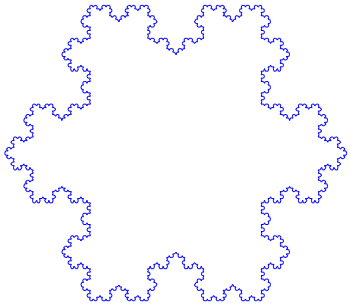
```
X=zeros(2,250000);
X(:,1)=[0.5; 0.5];
A1 = [ 0.75  0.00;  0.00  0.75]; b1 = [0.125; 0.125];
A2 = [ 0.50 -0.50;  0.50  0.50]; b2 = [0.500; 0.000];
A3 = [ 0.25  0.00;  0.00  0.25]; b3 = [0.000; 0.750];
A4 = [ 0.25  0.00;  0.00  0.25]; b4 = [0.750; 0.750];
A5 = [ 0.25  0.00;  0.00  0.25]; b5 = [0.000; 0.000];
A6 = [ 0.25  0.00;  0.00  0.25]; b6 = [0.750; 0.000];
for k=1:249999
    r=rand;
    if r<0.1667,     A = A1; b = b1;
    elseif r<0.3333, A = A2; b = b2;
    elseif r<0.5,    A = A3; b = b3;
    elseif r<0.6667, A = A4; b = b4;
    elseif r<0.8333, A = A5; b = b5;
    else             A = A6; b = b6;
    end
    X(:,k+1) = A*X(:,k) + b;
end
scatter(X(1,:),X(2,:),2,'k')
axis equal
```

Simetría y crecimiento





¿



?

Sistemas L

Aristid Lindenmayer, 1925 - 1989

En muchos procesos de crecimiento de organismos vivos, especialmente de plantas, se puede notar fácilmente la aparición de ciertas estructuras multicelulares que se repiten regularmante.... En el caso de una hoja compuesta, por ejemplo, algunos lóbulos, que son partes de la hoja en un estado avanzado, tienen la misma forma que la hoja entera tenía en una etapa anterior… Matemáticamente hablando, la forma orgánica de la hoja es una función del tiempo... Podemos decir que la forma de un organismo es un evento en el espacio-tiempo y no solamente una configuración en el espacio… *La idea de una forma contiene implícitamente la historia de la forma*.

Sistemas-L: Gramática Formal y Re-escritura

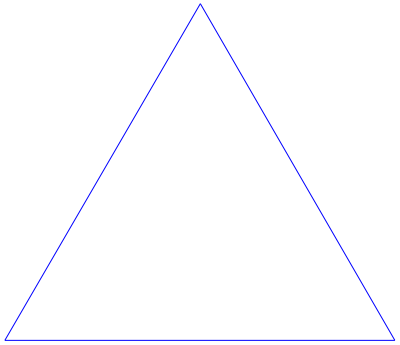
Chomsky
Gramática formal
Re-escribir para describir las características sintácticas del lenguaje natural (1950's)

Backus y Naur
Notación basada en re-escritura
Definición formal de los lenguajes de programación (Algol, 1960's)

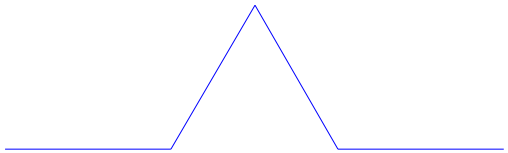
El reconocimiento de su equivalencia inicio un período de fascinación con la sintaxis, la gramática y su aplicación a la ciencia de la computación

Sistemas-L: Gramática Formal y Re-escritura

- Re-escribir: definir objetos complejos mediante el remplazo sucesivo de las partes de un objeto simple inicial, usando un conjunto de reglas de re-escritura.
- El ejemplo clásico es el copo de nieve propuesto en 1905 por Von Koch, que Mandelbrot describe así:
  - Se empieza con dos formas, un iniciador y un generador, que es una línea orientada y quebrada compuesta por *N* lados iguales de longitud *r*. En la primera etapa de la construcción se remplaza cada segmento recto del iniciador con una copia del generador, reducida y desplazada para que coincida en sus puntos extremos con los del segmento recto que se está remplazando. Este proceso se repite con cada segmento recto de la forma resultante.

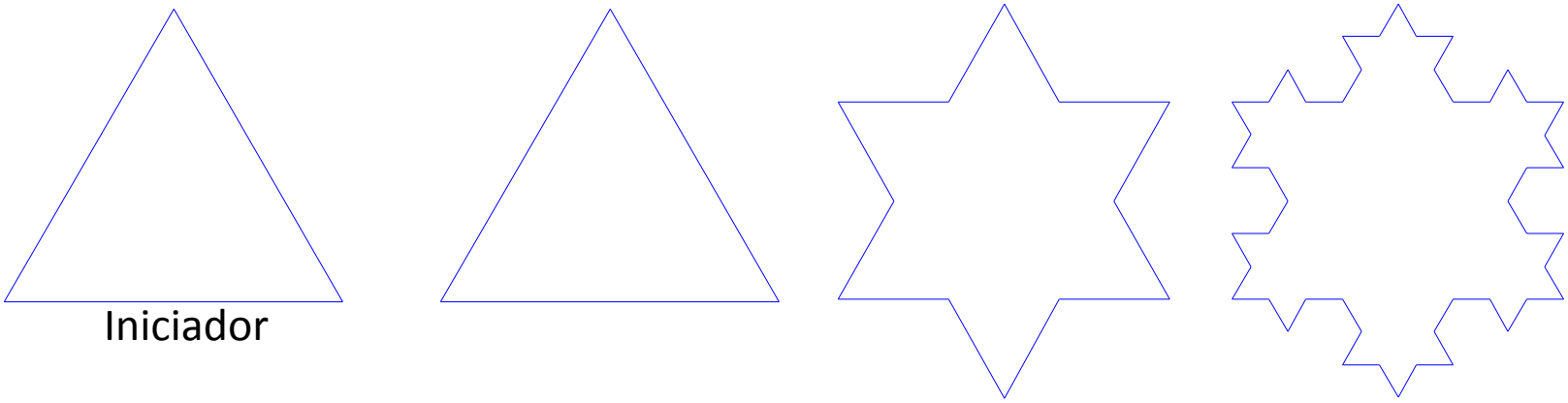


Iniciador

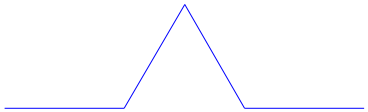


Generador

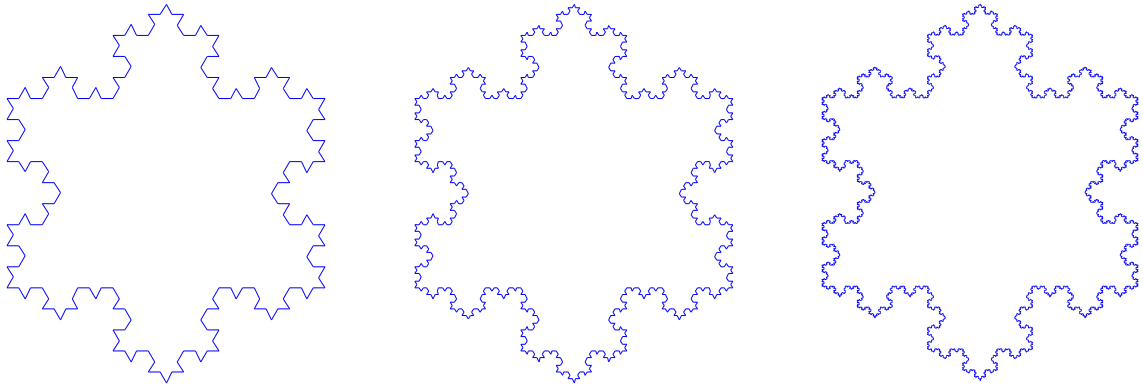
Sistemas L: Re-escritura

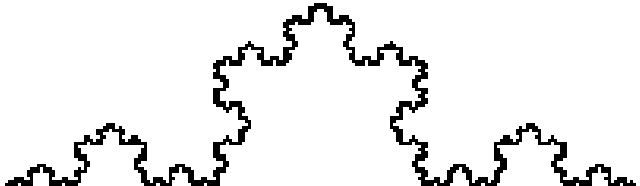


Iniciador



Generador





Sistemas-L: Re-escritura

- Un árbol crece desde una semilla: ¿Cómo se pueden generar nuevas células a partir de las células viejas?
- La semilla se conoce como un *axioma*
- Las instrucciones para hacer crecer nuevas células se conocen como *reglas de producción*
- Por ejemplo,

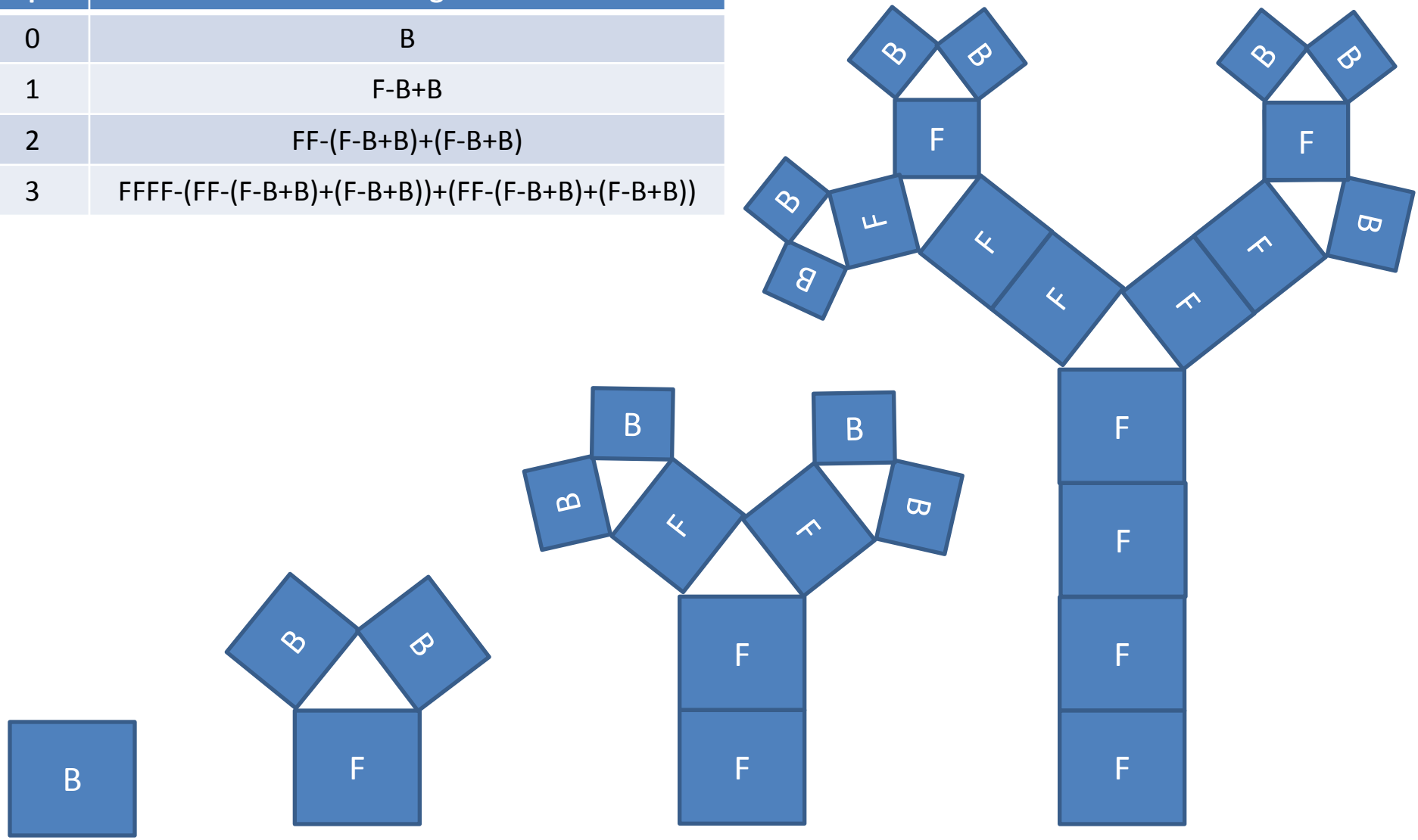
Axioma : B

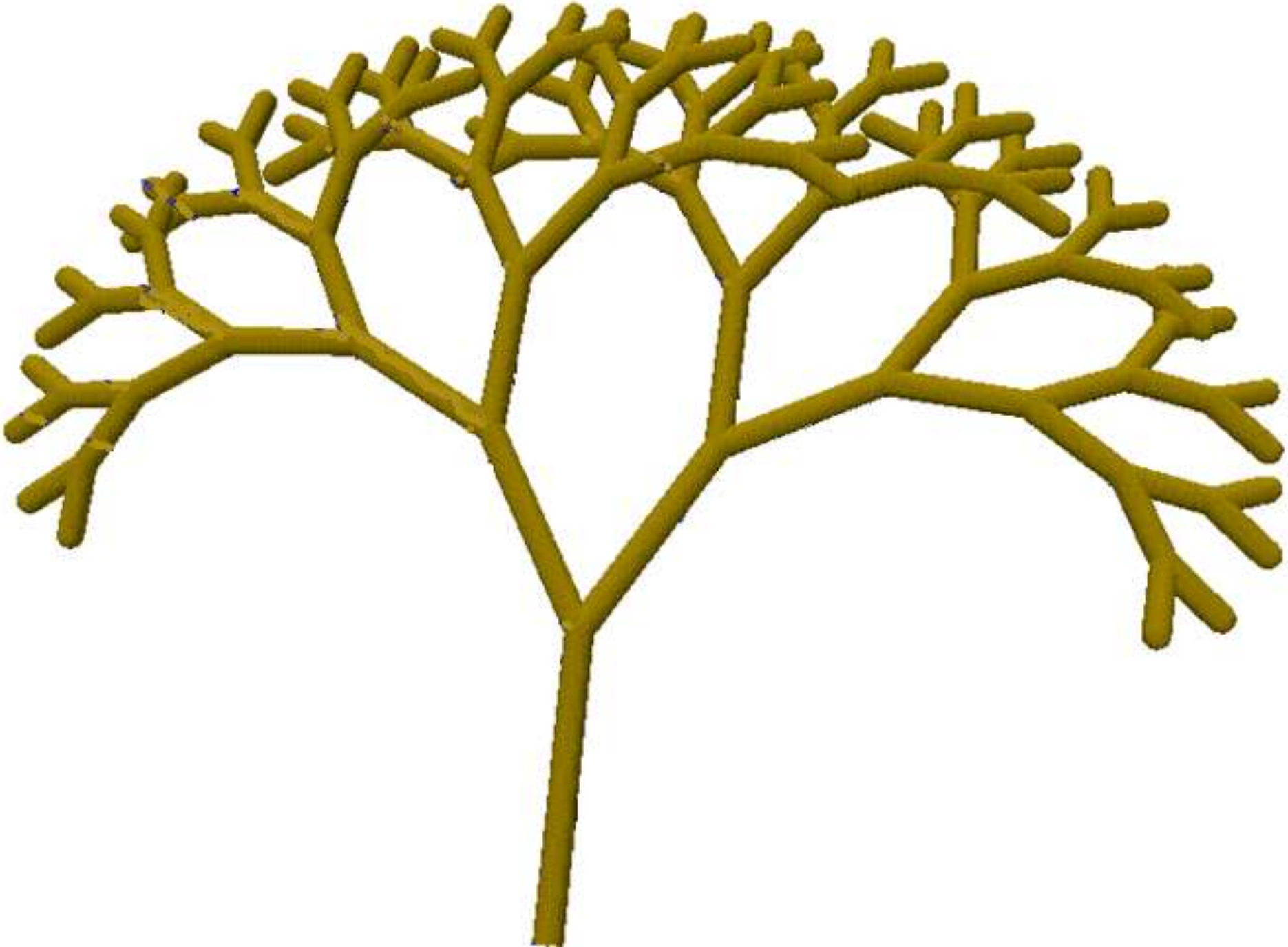
Reglas : $B \rightarrow F\text{-}B+B$, $F \rightarrow FF$

Nivel	Cadena
0	B
1	F-B+B
2	FF-(F-B+B)+(F-B+B)
3	FFFF-(FF-(F-B+B)+(F-B+B))+(FF-(F-B+B)+(F-B+B))

Sistemas-L: Re-escritura

Depth	String
0	B
1	F-B+B
2	FF-(F-B+B)+(F-B+B)
3	FFFF-(FF-(F-B+B)+(F-B+B))+(FF-(F-B+B)+(F-B+B))





Sobre axioma, gramáticas, reglas y teoremas…

De esto se trata todo en matemáticas

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ - axiomas y teoremas demostrados previamente
La demostración formal de una proposición P es una secuencia

$$S_1, S_2, \ldots, S_n$$

donde:

1. S_n es P sucede una de las siguientes dos condiciones:

2a. S_i es una de las "verdades" $A_1, A_2, \ldots, A_k$

o

2b. S_i se infiere de las proposiciones anteriores mediante una argumentación válida según las reglas gramaticales

La matemática es, simplemente, un lenguaje formal

Ejemplo: Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad

Axiomas: **(1)** $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

(2) $A \in \mathscr{F} \Rightarrow \mathbf{P}(A) \geq 0$

(3) $A, B \in \mathscr{F} \wedge A \cap B = \phi, \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Teorema: $A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

Demostración: $B = A \cup (B \cap A^C)$

$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B \cap A^C)$

$\mathbf{P}(B \cap A^C) \geq 0$

$\mathbf{P}(B) \geq \mathbf{P}(A)$.

Quiz: (saquen papel y lápiz ☺)

Un sistema formal consiste de los símbolos **M**, **I** y **U**, junto con algunas reglas gramaticales para construir teoremas.

Axioma: **MI**

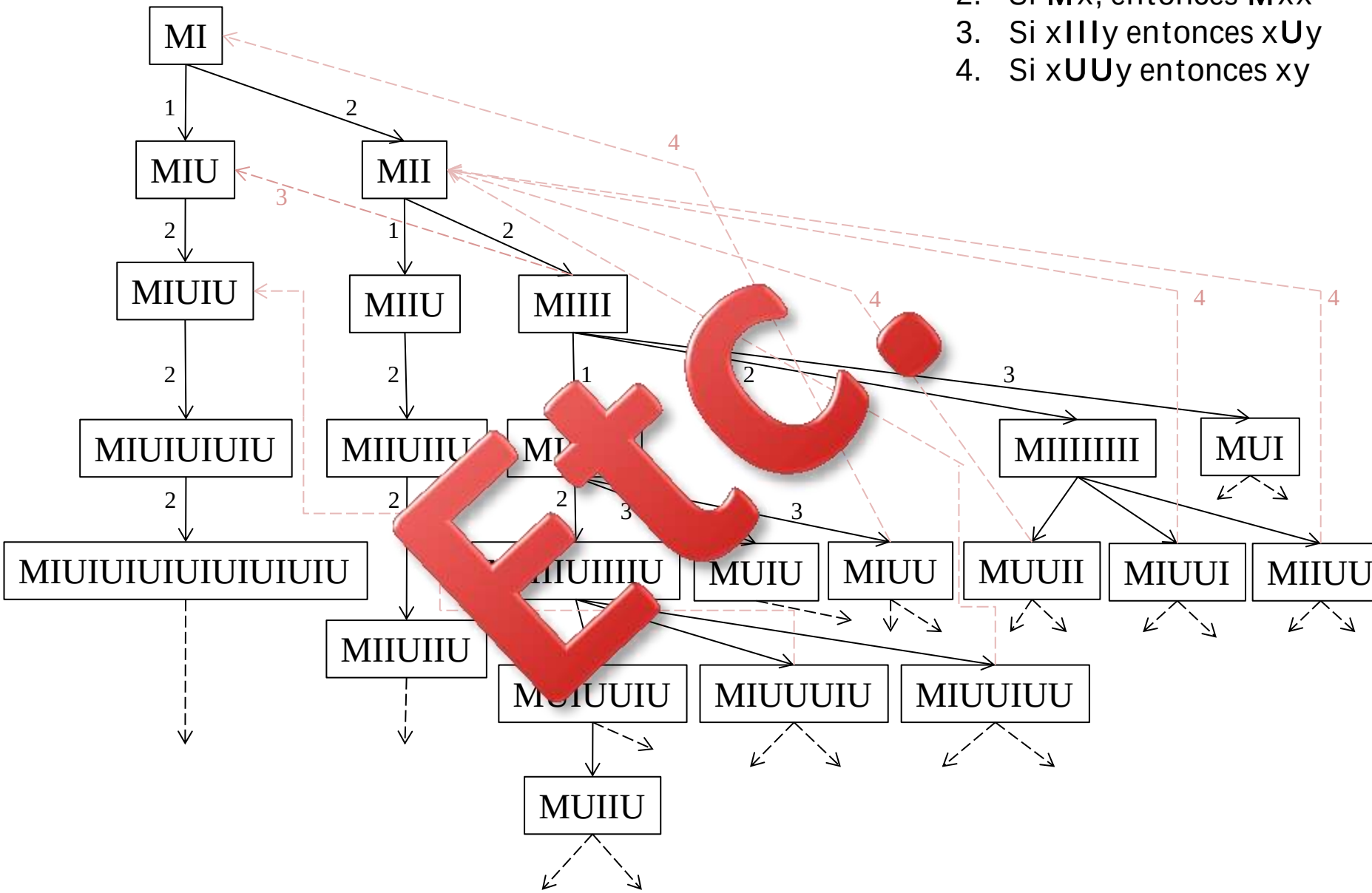
Reglas gramaticales:
1. Si *x***I**, entonces *x***IU**
2. Si **M***x*, entonces **M***xx*
3. Si *x***III***y* entonces *x***U***y*
4. Si *x***UU***y* entonces *xy*

(*x* y *y* son cualquier secuencia de símbolos de cualquiere longitud, incluso vacías)

Quiz: Demostrar **MU**, si es posible

Douglas R. Hofstadter,
"Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid",
Basic Books, 1979

1. Si x**I**, entonces x**IU**
2. Si **M**x, entonces **M**xx
3. Si x**III**y entonces x**U**y
4. Si x**UU**y entonces xy



Douglas R. Hofstadter,
"Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid",
Basic Books, 1979

1. Si x**I**, entonces x**IU**
2. Si **M**x, entonces **M**xx
3. Si x**III**y entonces x**U**y
4. Si x**UU**y entonces xy

3 caminos: **M**echanical mode
Intelligent mode
Un-mode

El **M**echanical mode va aplicando las reglas hasta que **MU** aparezca… ¡o hasta la eternidad si **MU** no aparece!

El **I**ntelligent mode empieza a notar patrones a medida que ganamos experiencia con el sistema. Por ejemplo, no hay una regla que exija que los teoremas empiece con **M**, pero las relaciones entre el axioma inicial y las reglas gramaticales hacen obvio este hecho.

Es imposible pasar de la cadena **MI** a la cadena **MU** aplicando iterativamente las reglas dadas.
Para probar esto, veamos el número total de **I**es que puede haber en una cadena:
Sólo las reglas 2 y 3 cambian este número.
La regla 2 lo dobla y la regla 3 lo reduce por 3.
Esto conduce a una propiedad invariante: el número de **I**es no es divisible por 3:
Al comienzo, el número de **I**es es 1, que no es divisible por 3.
Multiplicar por 2 un número que no es divisible por 3 no lo hace divisible por 3.
Restar 3 a un número que no es divisible por 3 tampoco lo hace divisible por 3.
Entonces el objetivo **MU**, con zero **I**es, no se puede alcanzar porque 0 es divisible por 3.

Douglas R. Hofstadter,
“Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid”,
Basic Books, 1979

3 caminos: **M**echanical mode
Intelligent mode
Un-mode

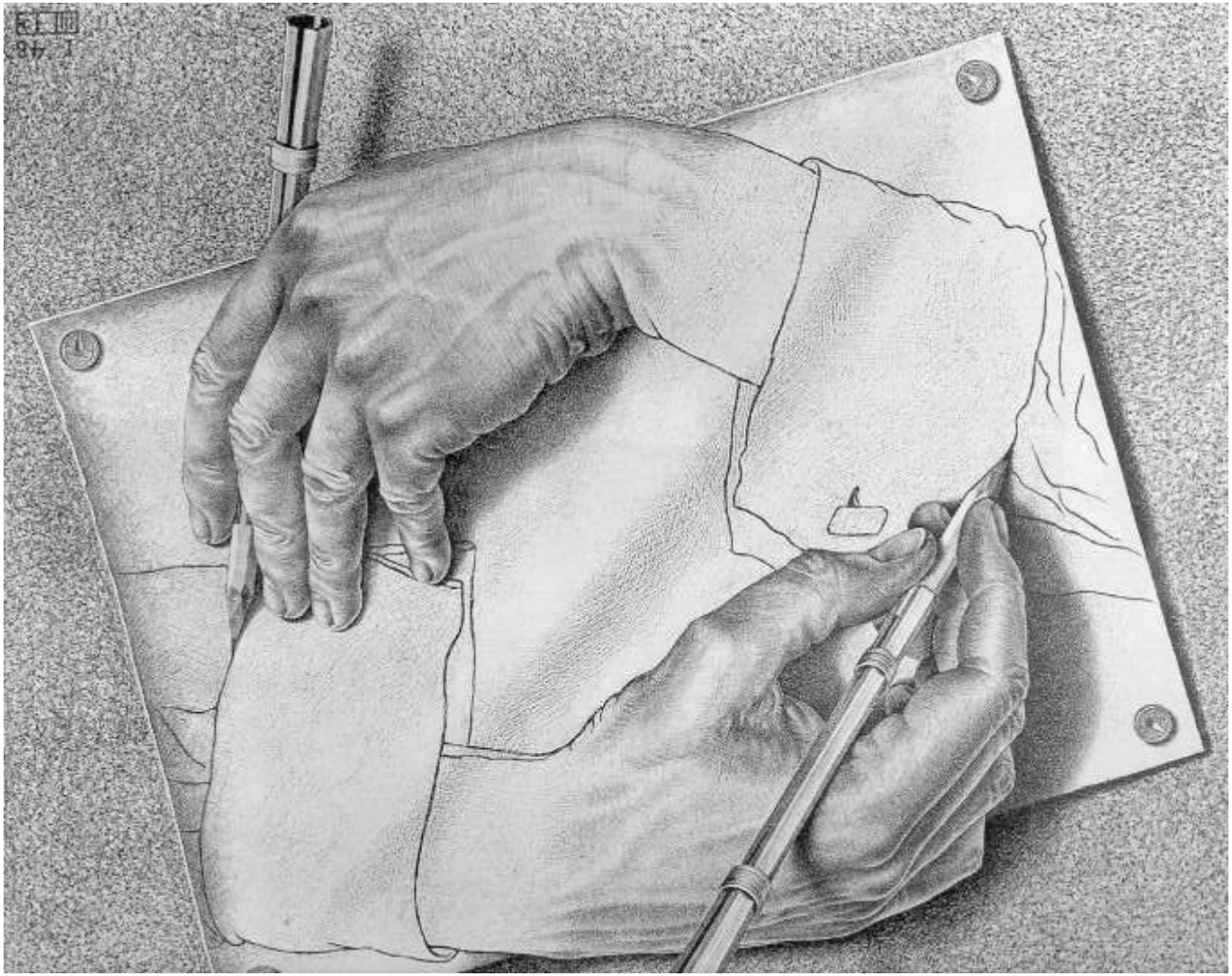
El modo inteligente aplica un meta-formalismo para demostrar que **MU** es inalcanzable en el sistema **MIU**.

Un sistema formal es **completo** si, para cualquier sentencia en el lenguaje del sistema, se puede demostrar la sentencia o su negación a partir de los axiomas.
Un sistema formal es **consistente** si no hay sentencias tales que tanto la sentencia como su negación se puedan demostrar a partir de los axiomas.
Los teoremas de incompletitud de Gödel demuestran que no es posible obtener un sistema formal (no trivial) que sea completo y consistente.

“Esta sentencia es falsa”

Lazos extraños

Douglas R. Hofstadter,
“Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid”,
Basic Books, 1979

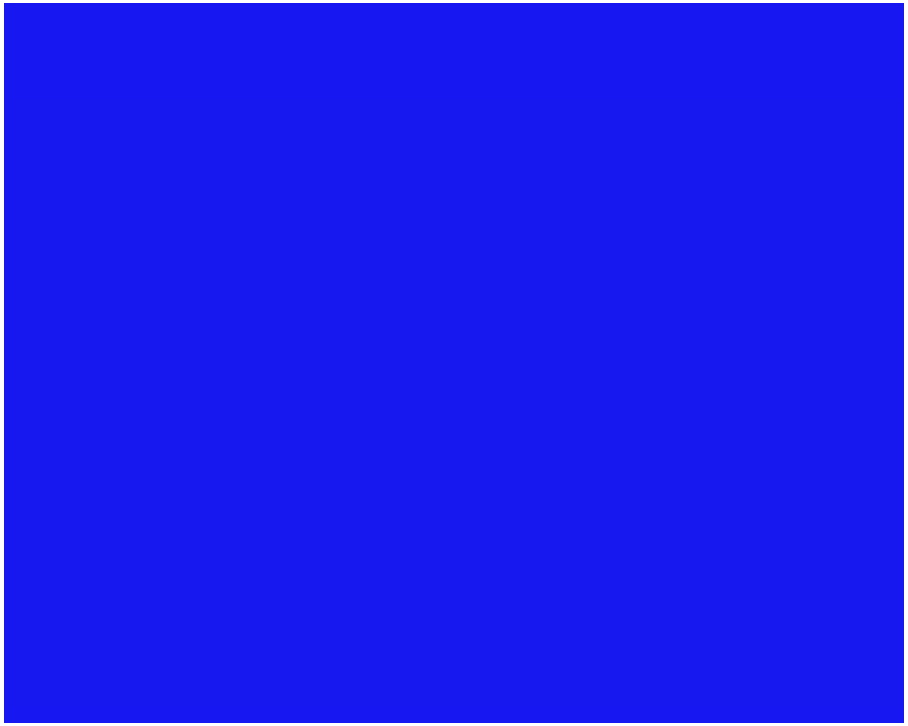


Douglas R. Hofstadter,
“Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid”,
Basic Books, 1979

Douglas R. Hofstadter,
“Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid”,
Basic Books, 1979

(http://www.youtube.com/watch?v=9WHdyG9mJaI)

Douglas R. Hofstadter,
“Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid”,
Basic Books, 1979



(http://www.youtube.com/watch?v=cwhLDLQLI44)

Douglas R. Hofstadter, “Gödel, Escher, Bach: an Eternel Golden Braid”, Basic Books, 1979

```
Axioma:     MI
Reglas:     1. Si xI, entonces xIU
            2. Si Mx, entonces Mxx
            3. Si xIIIy entonces xUy
            4. Si xUUy entonces xy
Tarea:      Demostrar MU
```

¿Y el **U**n-mode? ¡Es el modo del Zen!

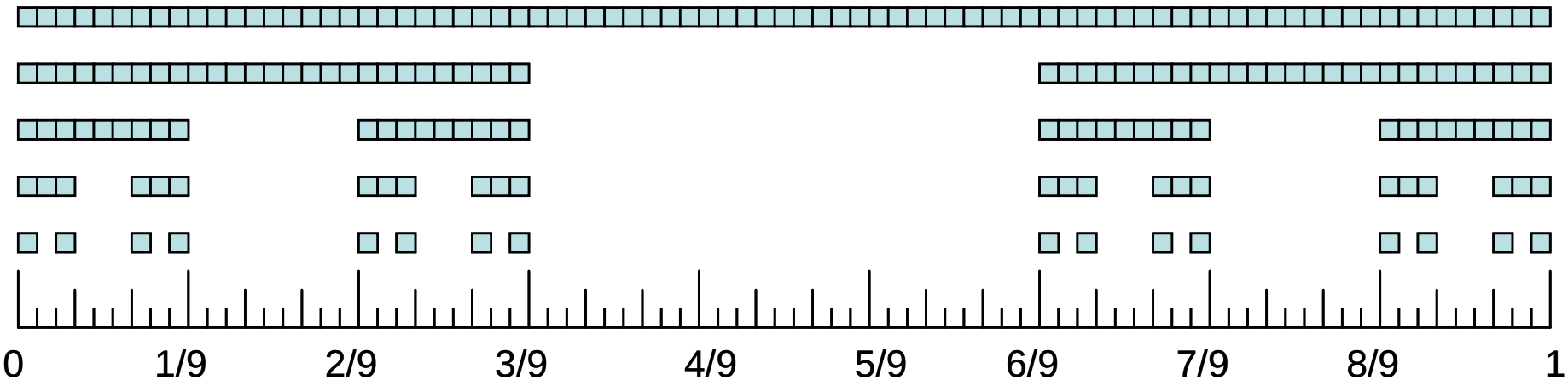
El término japonés y koreano ***mu*** (japonés: 無; Koreano: 무) o Chino ***wu*** (tradicional: 無; simplificado: 无) es una palabra clave e la tradición Zen del Buddhismo

Algunas traducciones al inglés de mu son: “no”, “not”, “nothing”, “without”, “nothingness”, “un-”, “Nonexistence”, “nonbeing”, “not having”, “a lack of”, “Caused to be nonexistent”, “Impossible”, “lacking reason or cause”, “Pure human awareness”, “prior to experience or knowledge”

Una colección de kōans Zen del siglo 13 usa la palbra **MU** en el título (Mumonkan 無門關) y en el primer kōan (“el perro de Joshu" 趙州狗子). El Zen llama a la palabra **MU** como “la puerta de la iluminación".

Un monje pregunto al maestro Zen *Jōshū* “¿Tiene un perro naturaleza Buddha o no?” *Jōshū* respondió *“Mu"*

El conjunto de Cantor



¿Cuántos intervalos hay en el conjunto de Cantor?

En el paso n, retiramos 2^{n-1} intervalos de longitud 3^{-n}

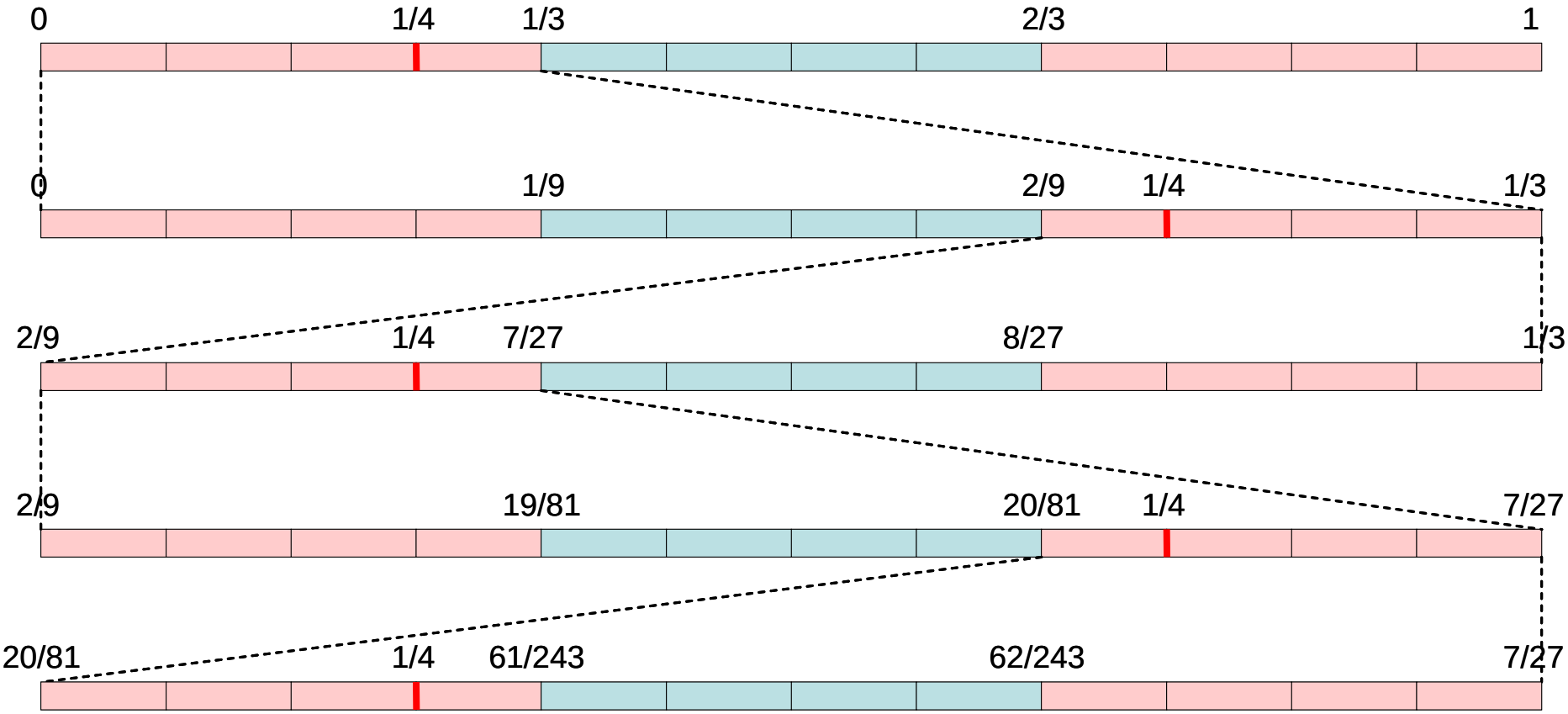
Longitud total de los intervalos retirados:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2/3}\right) = 1$$

En el conjunto de Cantor sólo hay puntos aislados, no hay intervalos

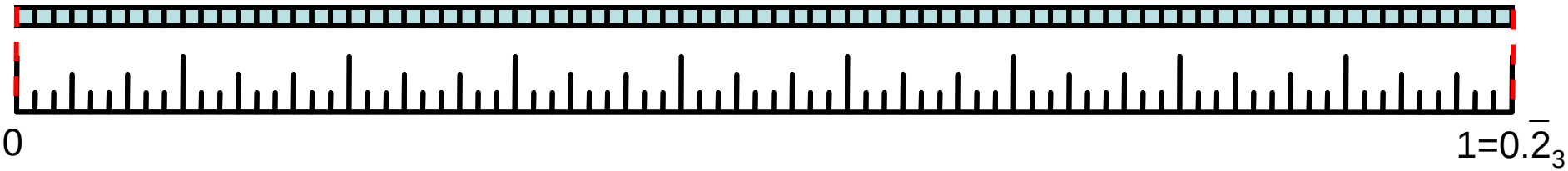
El conjunto de Cantor

Pero esos puntos del conjunto de Cantor no son sólo los puntos extremos de los intervalos que no se retiran. Por ejemplo, el punto ¼ no es un punto extremo, pero jamás se retira del conjunto de Cantor:



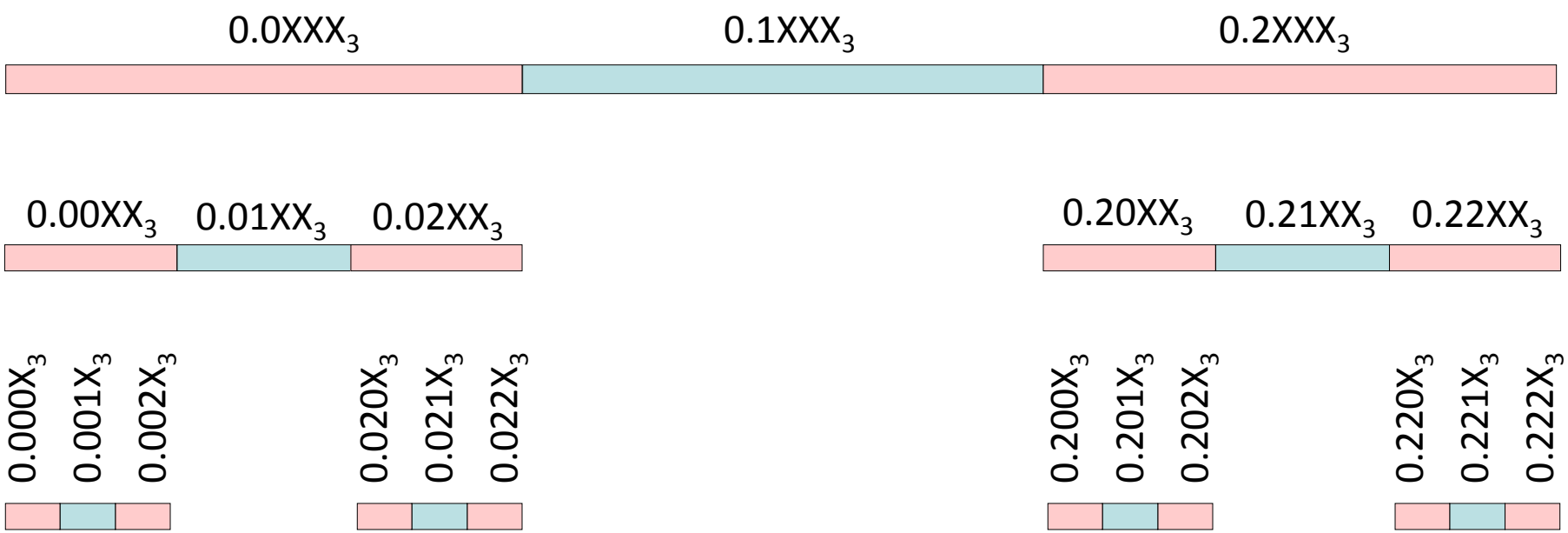
El conjunto de Cantor

Representemos los puntos del intervalo unitario en base 3:



$$0.\overline{2}_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 1$$

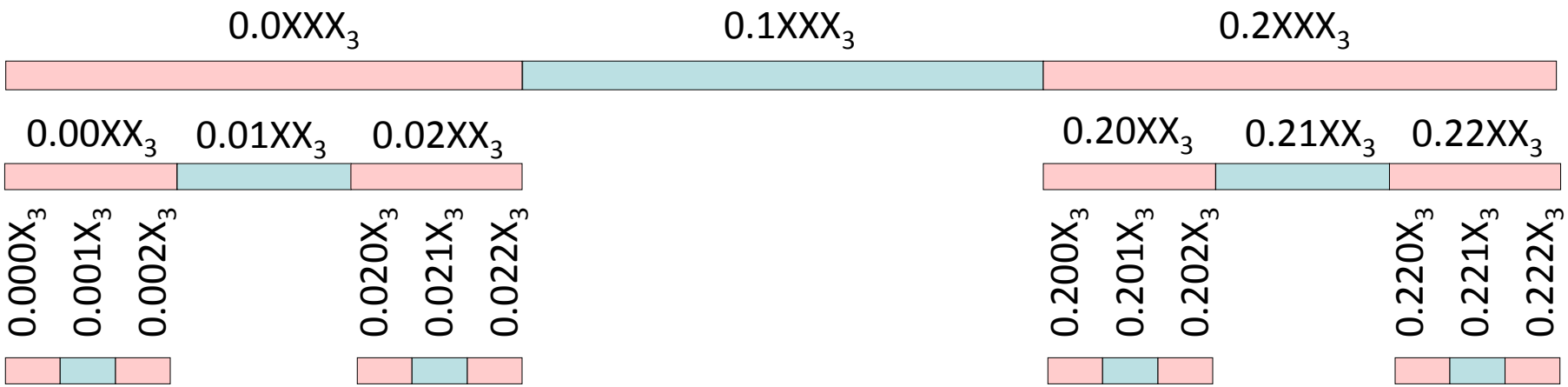
¿Qué puntos pertenecen al conjunto de Cantor?



El conjunto de Cantor consiste de aquellos puntos $c \in [0, 1]$ que no tienen unos en su expansión en base 3

No solamente los extremos de los intervalos: $0.\overline{02}_3 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n}} = \frac{2}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{1-1/9}\right) = \frac{1}{4}$

¿Cuántos puntos hay en el conjunto de Cantor?



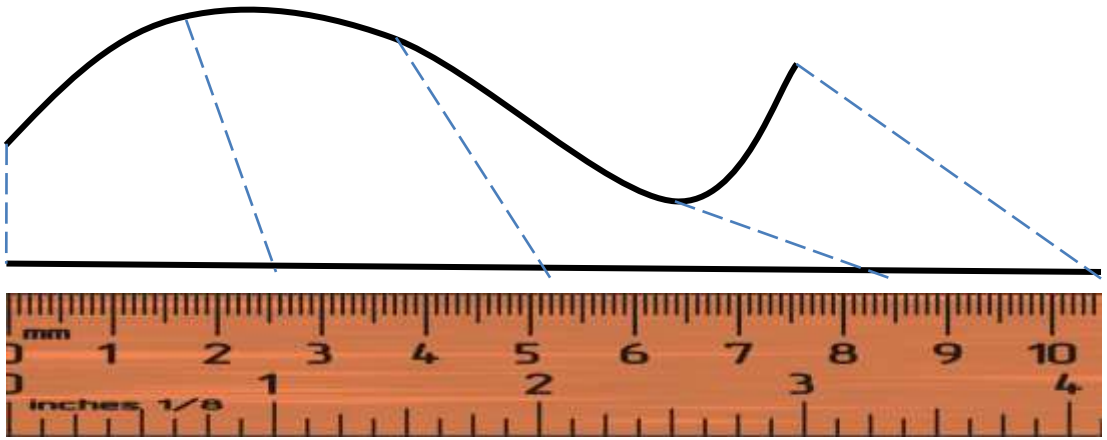
Una función biunívoca entre el intervalo unitario y el conjunto de Cantor:

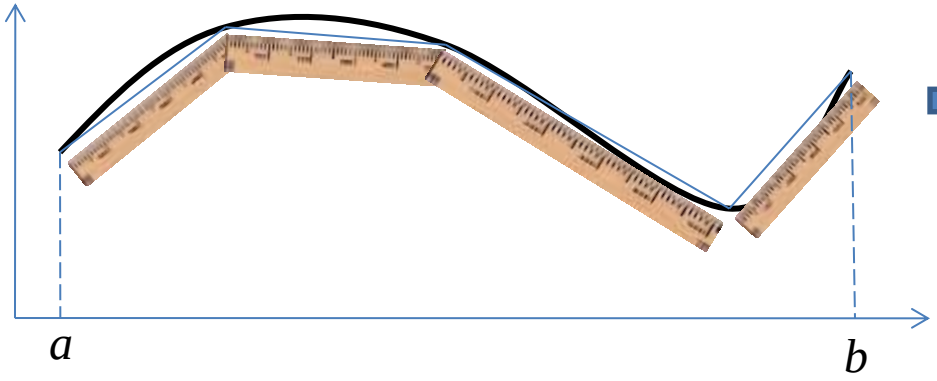
- Al expresar el punto del intervalo en base 2, obtenemos una secuencia de ceros y unos
- Reemplace cada uno por un dos y suponga que está escrito en base 3
- A cada punto del intervalo unitario le corresponde uno y solo un punto del conjunto de Cantor: **¡Hay tantos puntos en el conjunto de Cantor como en el intervalo unitario original!**

Dos conjuntos X y Y tienen la misma cardinalidad (número de elementos) si existe una función invertible que asocia cada elemento $x \in X$ con uno, y sólo un, elemento $y \in Y$.

Un conjunto X es contable si se puede poner en correspondiencia uno a uno con el conjunto de números naturales, $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$.

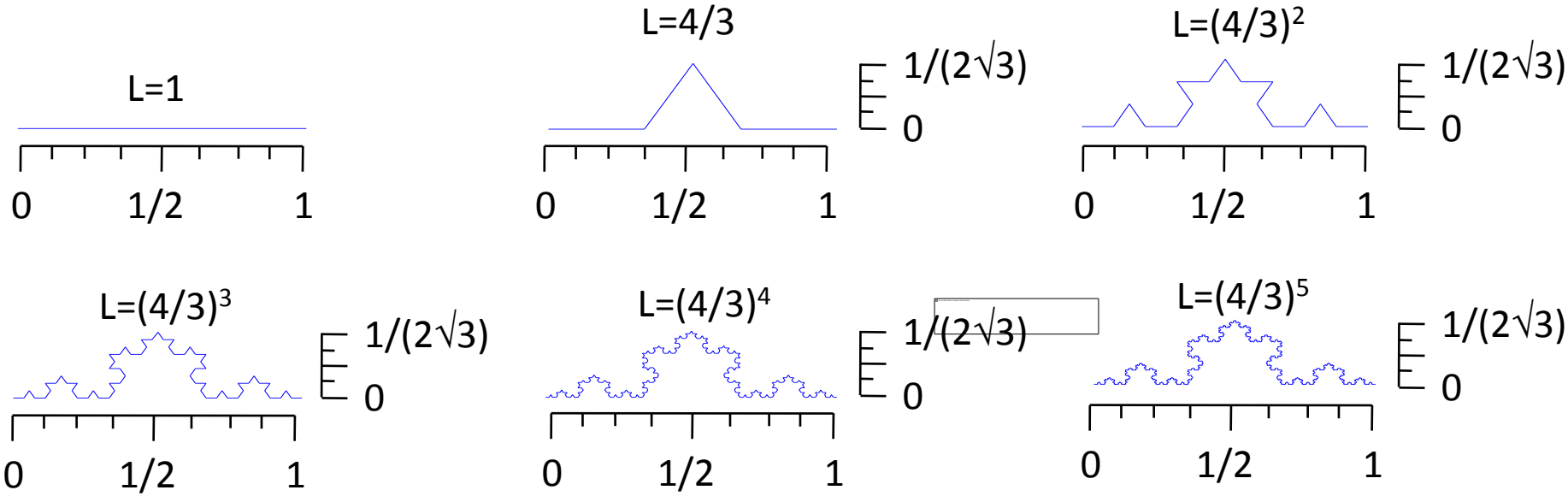
¿Cómo medir la longitud de un arco?





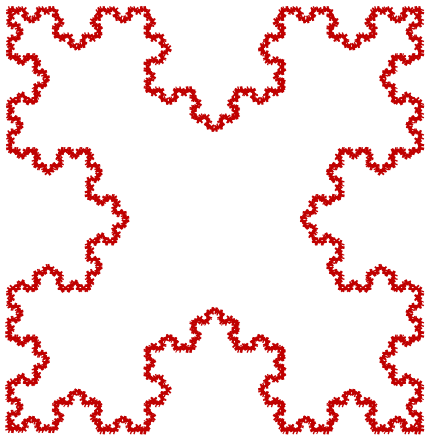
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2}\, dx$$

Por ejemplo, la curva de Koch



La longitud de Koch es $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$

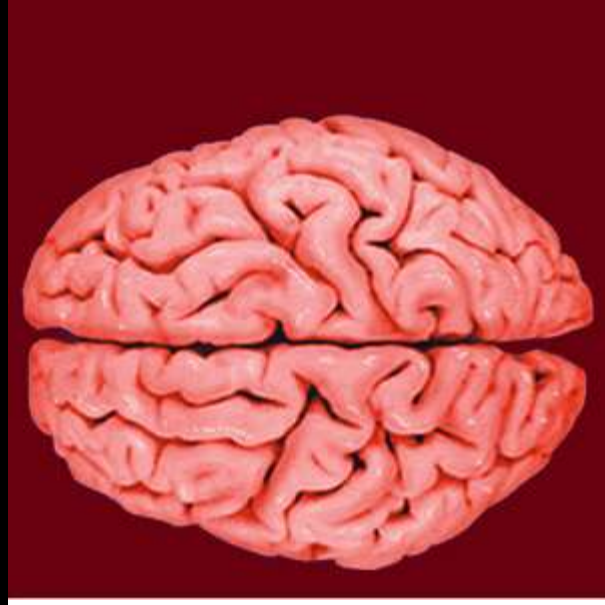
El área bajo la curva es $\sum_{n=1}^{\infty} N_T(n)A_T(n) = \frac{\sqrt{3}}{20}$



Esta figura tiene un perímetro infinito, pero un área de sólo $\frac{5-\sqrt{3}}{5}$ m²

¡La longitud del sistema circulatorio es de 80 millones de metros!

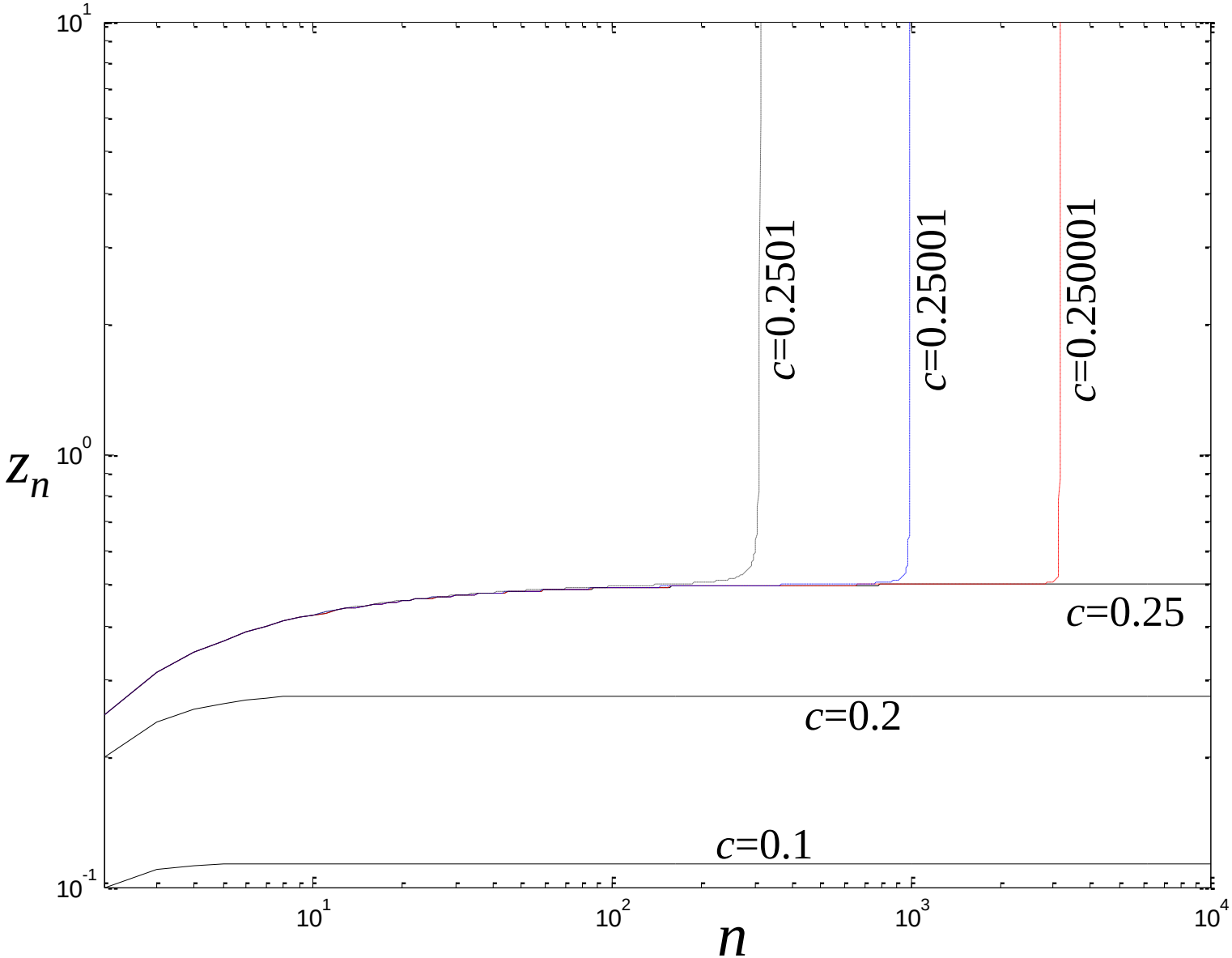
¡La longitud de los alvéolos pulmonares es de 350000 metros!



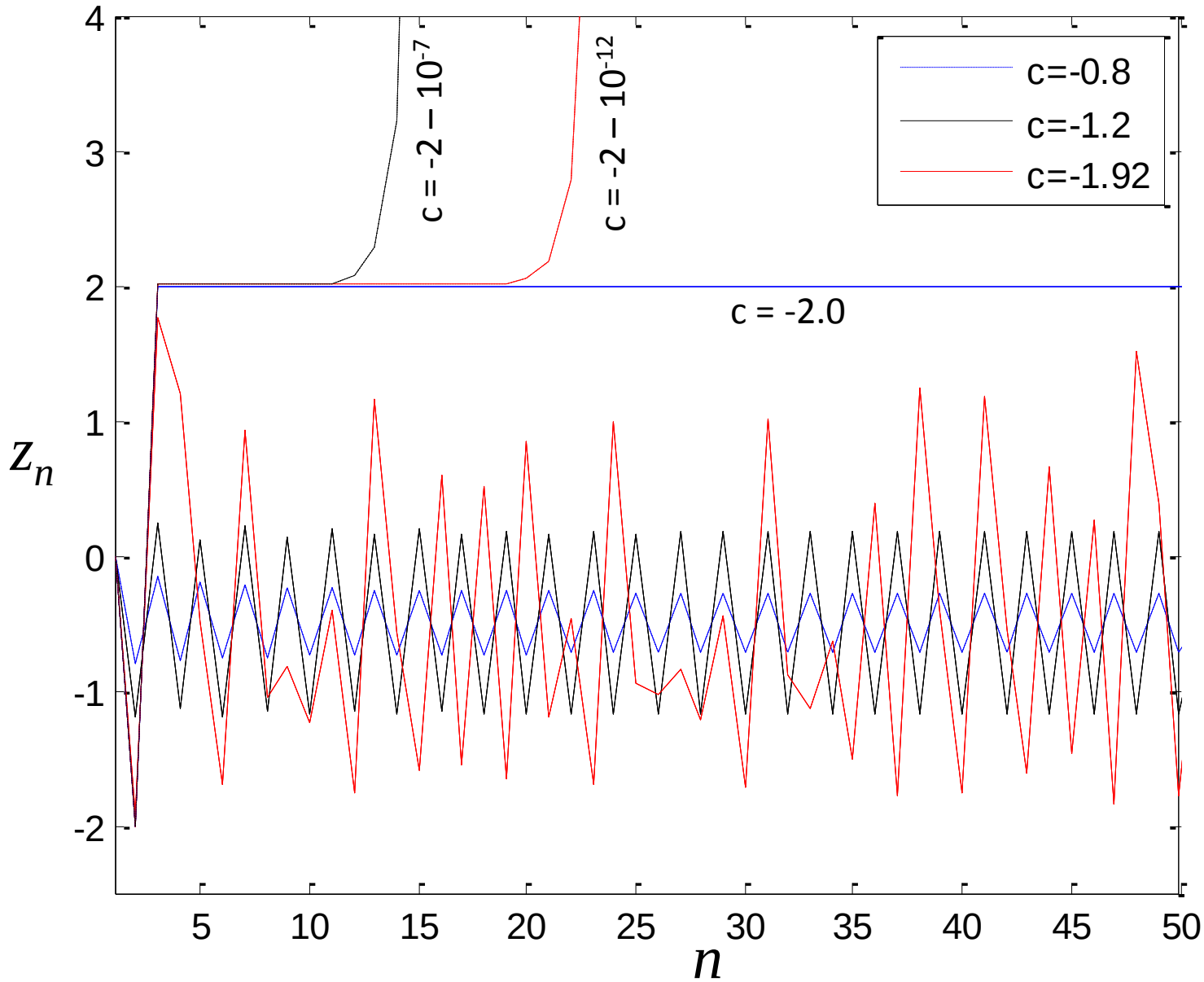
¡La superficie del cerebro humano es de 6 metros cuadrados!

¡La frugalidad de la Naturaleza exige estructuras fractales!

$$z_n = c + z_{n-1}^2, \quad z_0 = 0$$



$$z_n = c + z_{n-1}^2, \quad z_0 = 0$$

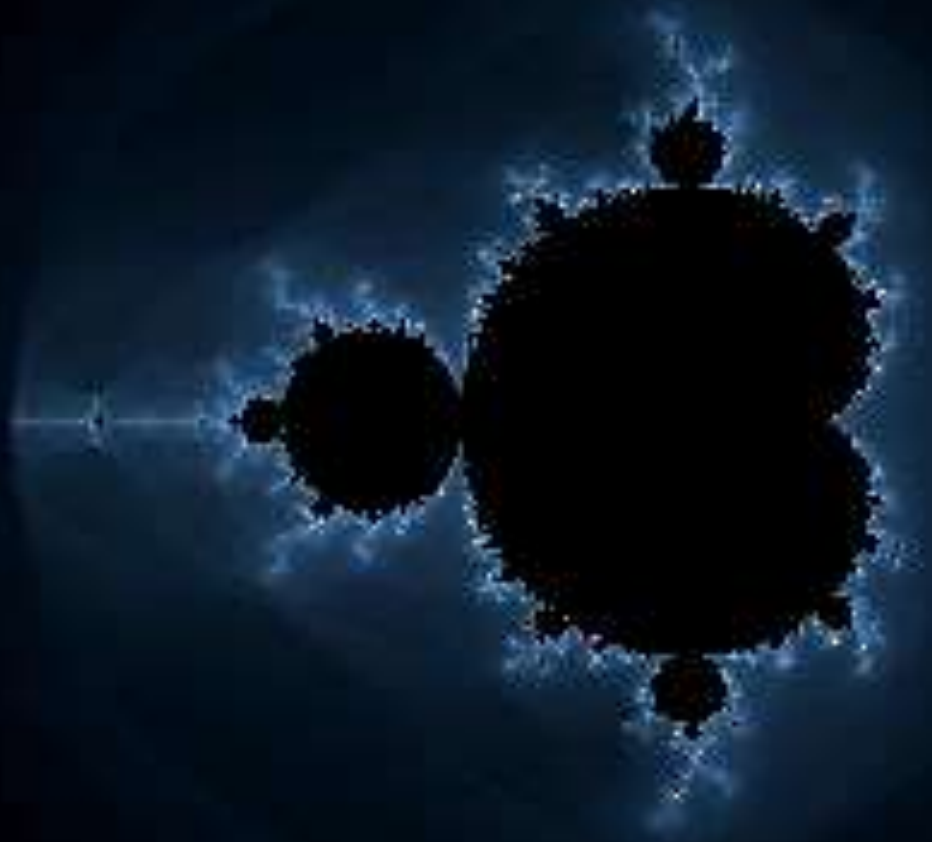


La región donde $\left\{ z_n = c + z_{n-1}^2, \quad z_0 = 0 \right\}$ no escapa a ∞ en $\mathbb{R}$ es [-2.0 0.25]

¿Cuál es la región donde $\left\{ z_n = c + z_{n-1}^2, \quad z_0 = 0 \right\}$ no escapa a ∞ en $\mathbb{C}$?

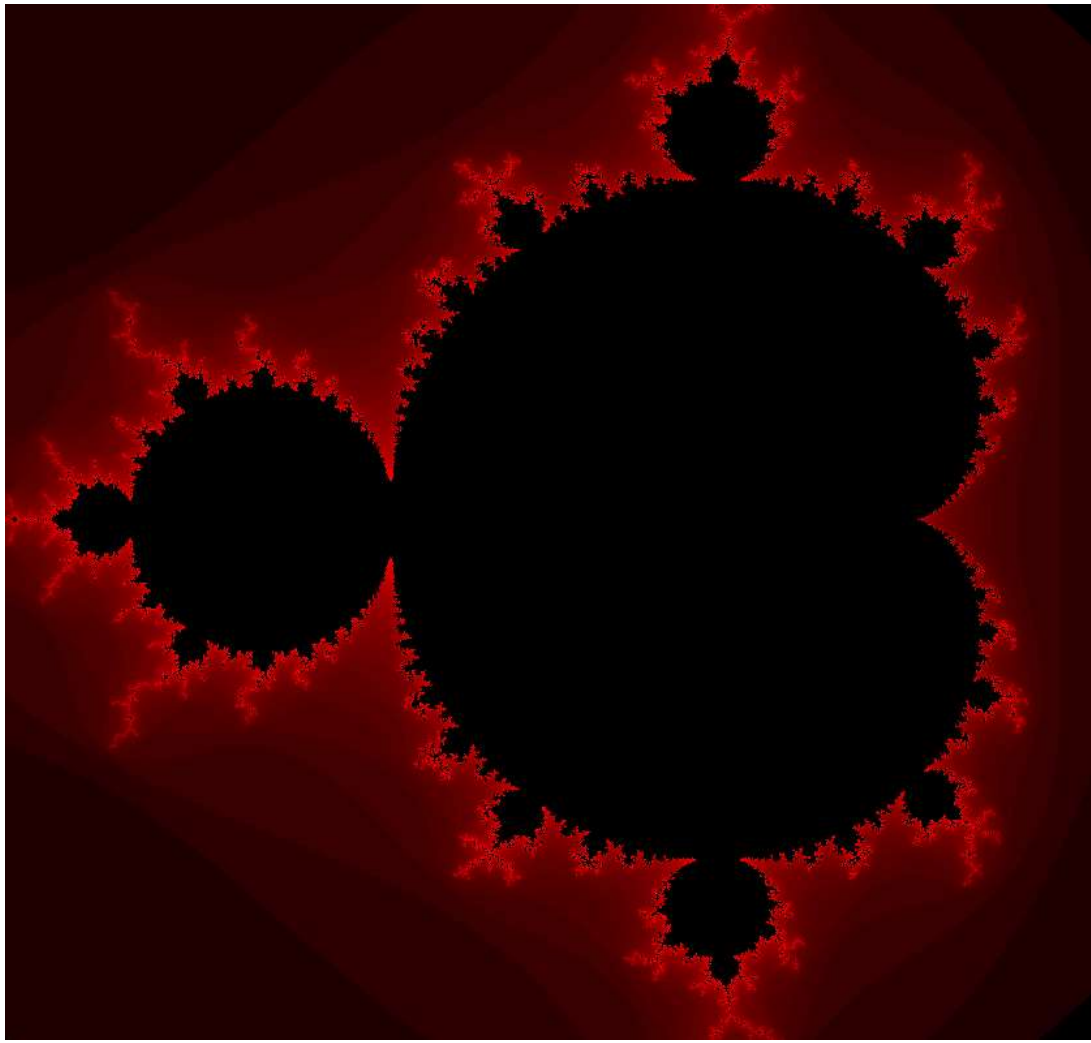
Repitamos el anterior proceso: escojamos 1'440.000 valores de ***c*** en el plano complejo y coloreemos ***c*** con color 1 if $|Z_{256}|=0$, con color 0 si $|Z_{256}|=\infty$, usando colores intermedios en (0,1) para otros valores de $|Z_{256}|$.

```
x     = linspace(-1.5,0.5,1200);
y     = linspace(-1,1,1200);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z     = zeros(1200);
C     = X+i*Y;
for k = 1:256
    Z = Z.^2+C;
end
colormap winter(256);
pcolor(x,y,exp(-abs(Z)));
shading flat;
axis('square','equal','off');
```

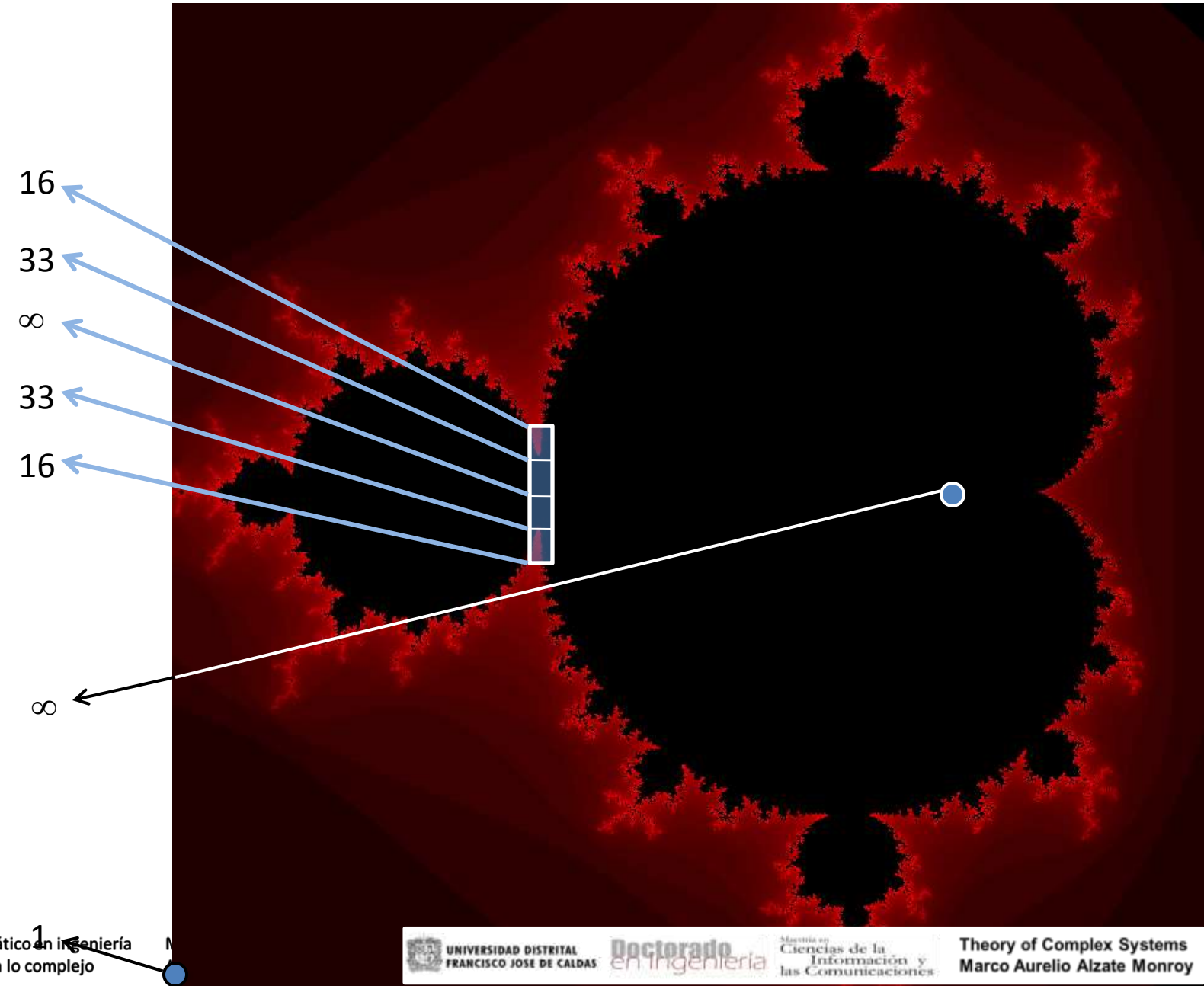


Una forma más rápida de dibujar el conjunto de Mandelbrot
¿Cuántas iteraciones para escapar a ∞?

```
x     = linspace(-1.5,0.6,1000);
y     = linspace(-1,1,1000);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
Z     = zeros(1000);
C     = X+i*Y;
for i = 1:1000
    for j=1:1000
        z = 0;
        for t=1:256
            z = z.^2+C(i,j);
            if abs(z)>2, break; end
        end
        Z(i,j)=t-1;
    end
End
pcolor(x,y,Z);
```



¿Cuántas iteraciones para alcanzar |z|>2?



How many iterations to reach |z|>2?

```
im = 1;
epsilon = zeros(7,1);
iteraciones = zeros(7,1);
for k = 1:7
    im = im/10;
    c = -0.75 + im*1j;
    z = 0;
    for t=1:100000000
        z = z.^2+c;
        if abs(z)>2, break; end
    end
    epsilon(k) = im;
    iteraciones(k) = t;
end
```

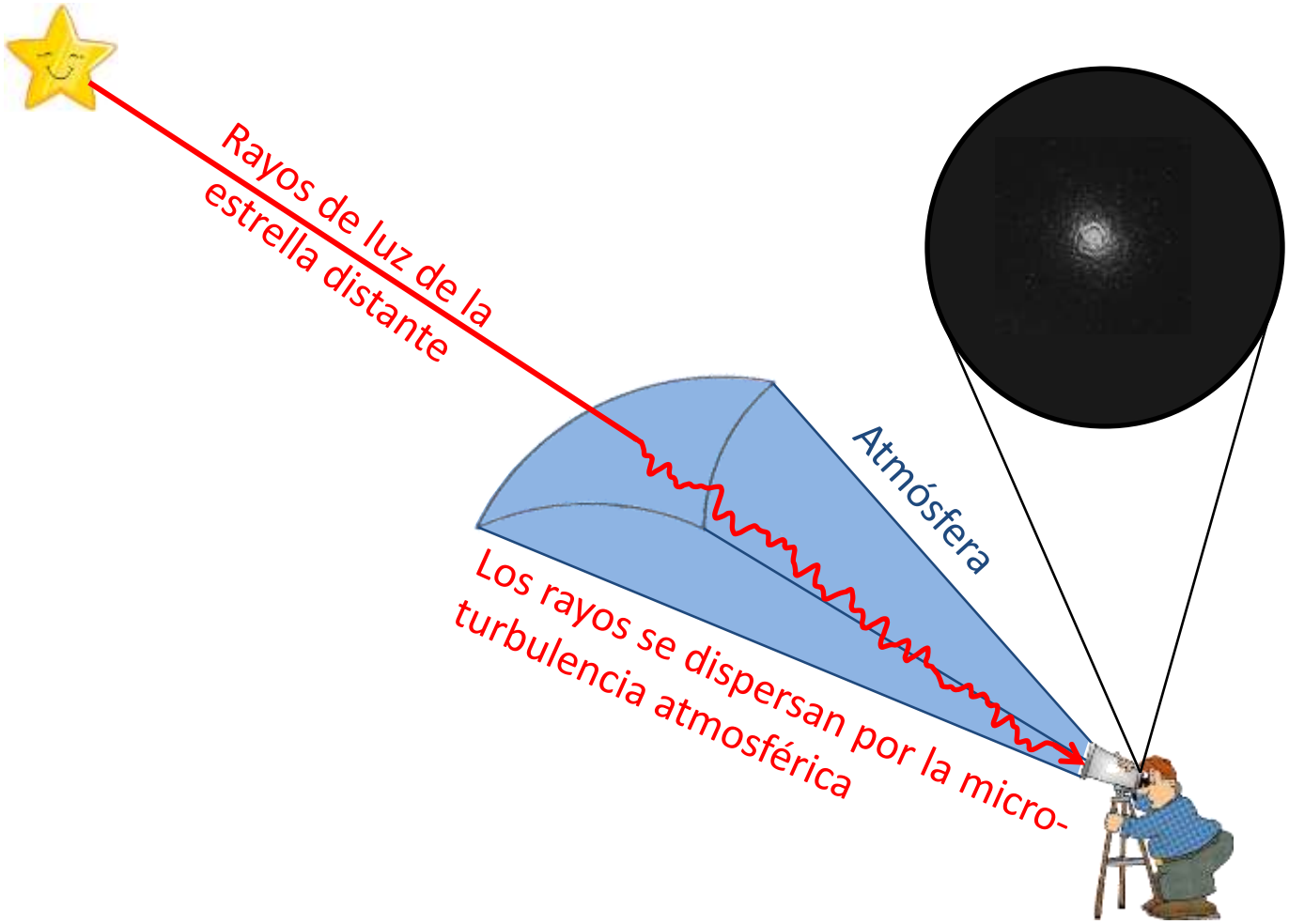
Epsilon	Iteraciones	Epsilon * Iteraciones
0.1000000	33	3.3
0.0100000	315	3.15
0.0010000	3143	3.143
0.0001000	31417	3.1417
0.0000100	314160	3.14160
0.0000010	3141593	3.141593
0.0000001	31415927	3.1415927

¿Qué está haciendo π dentro del conjunto de Mandelbrot?

¿Cuántos más secretos se encuentran en MS?

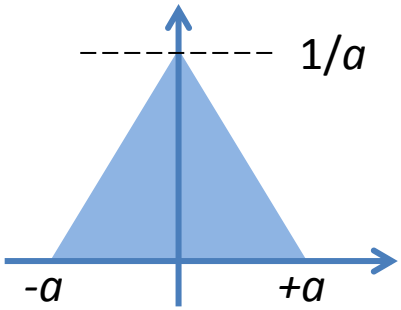
5. De lo Gaussiano a lo no-Gaussiano

¡En el determinismo, la aleatoriedad se debe a errores de medición!



¡Errores de medición!

1755 Thomas Simpson



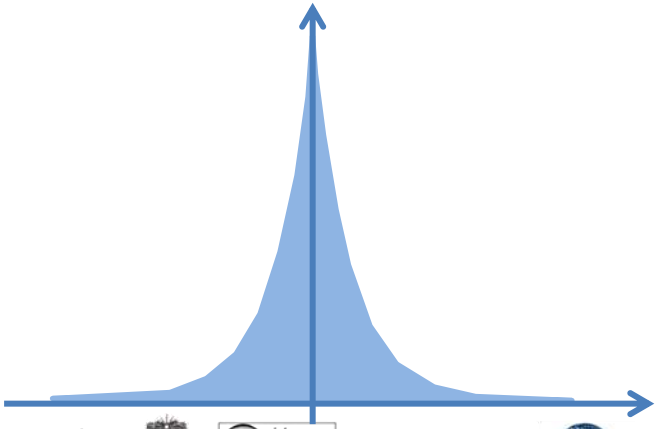
Para reducir el error tome *n* mediciones y promédielas

$$\hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1770 Simon Laplace

"La distribución del error debe ser simétrica alrededor de cero y debe tender a cero a medida que |*x*| tiende a ∞"

1780 Simon Laplace



Distribución de Laplace

$$f_E(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

¡Errores de medición!

1805 Adrien Legendre

$$\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, n\}$$

$$\hat{y}_i = ax_i + b$$

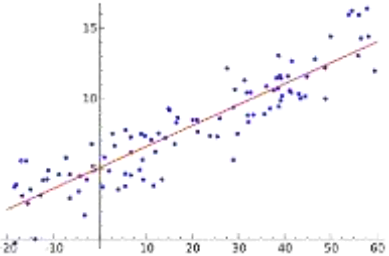
$$E_i(a,b) = y_i - \hat{y}_i$$

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_i(a,b)^2$$

$$MMSE: \quad (a^*, b^*) = \arg\min_{(a,b)} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a} MSE = \frac{\partial}{\partial b} MSE = 0$$

$$\begin{bmatrix} a^* \\ b^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i & 1 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$



Gauss=Legendre+Laplace

$\{X_i\}_{i=1}^{n}$ son n medidas erróneas de una cantidad Y

A cada medida corresponde un error $E_i = Y - X_i$

Supongamos que todos los errores son independientes e idénticamente distribuidos con *pdf* $\phi(x)$, que satisface los postulados de Laplace.

La *pdf* de la secuencia de errores $E = \{E_i\}_{i=1}^{n}$ es $f(E) = \prod_{i=1}^{n} \phi(E_i)$

Sea $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ el promedio propuesto por Simpson

En ese valor promedio se debe producir el error más probable

$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} f(E) = 0$ ó, lo que es lo mismo, $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \log[f(E)] = 0$

Expandiendo $f(E)$, la condición necesaria para maximizar la probabilidad de error con el promedio de las mediciones es

$$\frac{1}{\phi(E_1)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\phi(E_1) + \frac{1}{\phi(E_2)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\phi(E_2) + \cdots + \frac{1}{\phi(E_n)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\phi(E_n) = 0$$

Mediante la regla de la cadena,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\phi(E_i) = \frac{\partial}{\partial E_i}\phi(E_i)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}E_i = \phi'(E_i)\frac{\partial}{\partial \bar{x}}E_i = -\frac{1}{n}\phi'(E_i)\right),$$

$$\frac{\phi'(E_1)}{\phi(E_1)} + \frac{\phi'(E_2)}{\phi(E_2)} + \cdots + \frac{\phi'(E_n)}{\phi(E_n)} = 0$$

Como las medidas $X_2, X_3, \ldots, X_n$ aparecen como la suma $\sum_{i=2}^{n} X_i$, Gauss supuso que cada una era igual a $X_1 - nd$ donde d era una constante: $E_1 = (n-1)d,\ Ei = -d,\ i = 2,\ldots,n$, de manera que

$$\frac{\phi'((n-1)d)}{\phi((n-1)d)} = (1-n)\frac{\phi'(-d)}{\phi(-d)}$$

de donde Gauss dedujo que, para toda $x \in \mathbb{R}$ y algunas constantes a y c,

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = cx \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = ae^{cx^2/2}$$

Para satisfacer las condiciones de Laplace es necesario que $c<0$ ($c = -1/\sigma^2$ en notación actual). La constante a se obtiene por normalización,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right)$$

que es la distribución Gaussiana o Normal.

La distribución del error conjunto resulta ser

$$f(E) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_n^2}{2\sigma^2}\right)$$

Como Legendre, la forma natural de maximizar el likelihood de los errores es mediante la minimización de la suma de los errores cuadrados

Gauss=Legendre+Laplace

$\{X_i\}_{i=1}^{n}$ son n medidas erróneas de una cantidad Y

A cada medida corresponde un error $E_i = Y - X_i$

Supongamos que todos los errores son independientes e idénticamente distribuidos con *pdf* $\phi(x)$, que satisface los postulados de Laplace.

La *pdf* de la secuencia de errores $E = \{E_i\}_{i=1}^{n}$ es $f(E) = \prod_{i=1}^{n} \phi(E_i)$

Sea $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ el promedio propuesto por Simpson

En ese valor promedio se debe producir el error más pro

$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} f(E) = 0$ ó, lo que es lo mismo, $\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \log[f(E)] =$

Expandiendo $f(E)$, la condición necesaria

probabilidad de error con el promed

$\frac{1}{\phi(E_1)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\phi(E_1) + \frac{1}{\phi(E_2)}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\phi(E_2)$

Mediante la regla d

$\frac{\phi'(E_1)}{\phi(E_1)} +$

Como las medidas X_i, Gauss supuso que te:

$E_1 = (n$

algunas constantes a y c,

es de Laplace es necesario que $c<0$ ($c = -1/\sigma^2$

constante a se obtiene por normalización,

$$\Rightarrow \quad \phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right)$$

es la distribución Gaussiana o Normal.

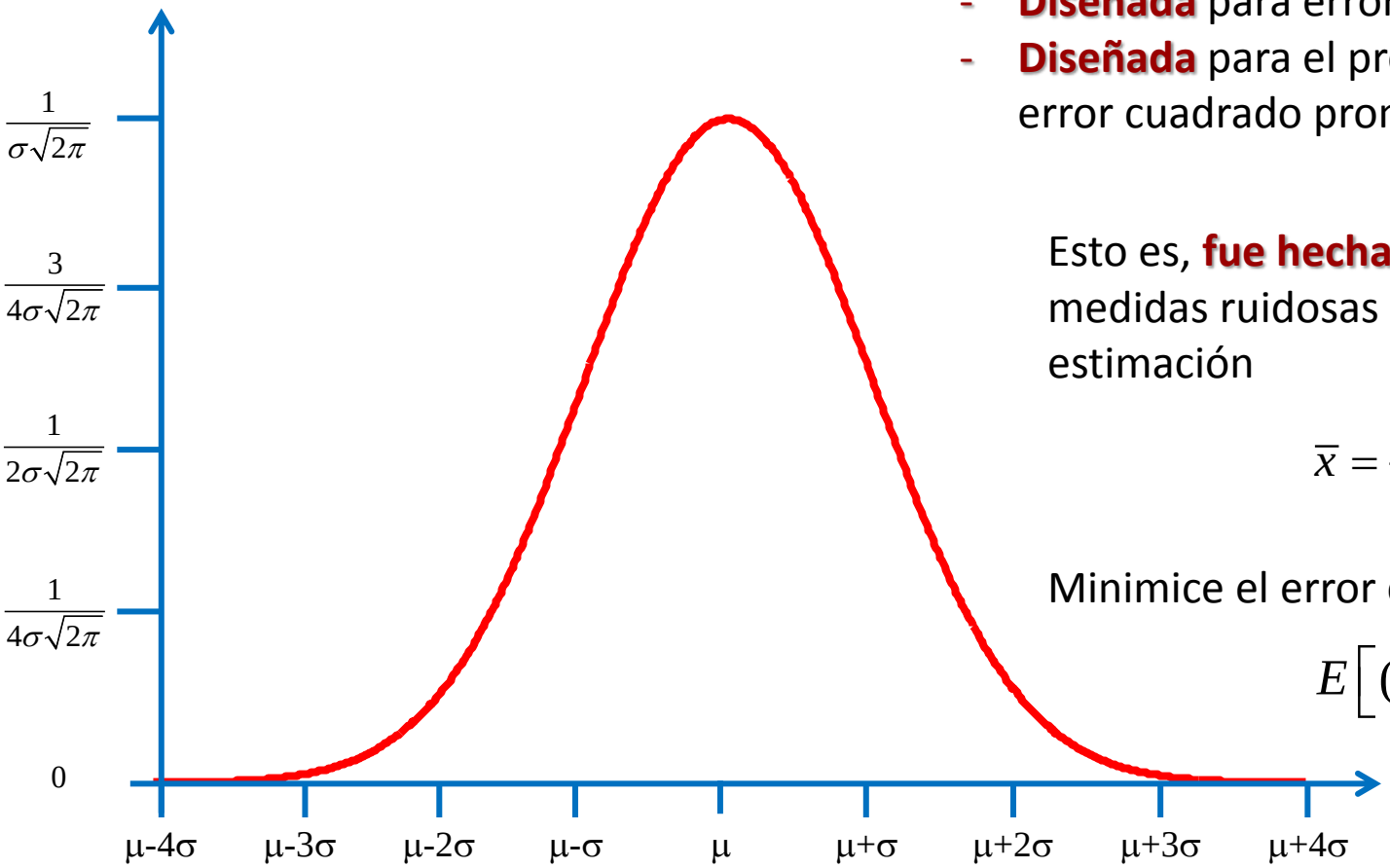
La distribución del error conjunto resulta ser

$$f(E) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{E_1^2 + E_2^2 + \cdots + E_n^2}{2\sigma^2}\right)$$

Como Legendre, la forma natural de maximizar el likelihood de los errores es mediante la minimización de la suma de los errores cuadrados

$$\mathcal{N}(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\mathscr{N}(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



- **Diseñada** para errores simétricos
- **Diseñada** para el proceso de minimizar el error cuadrado promedio

Esto es, **fue hecha** para que, al tomar *n* medidas ruidosas de *Y*, $\{X_i\}_{i=1..n}$, la estimación

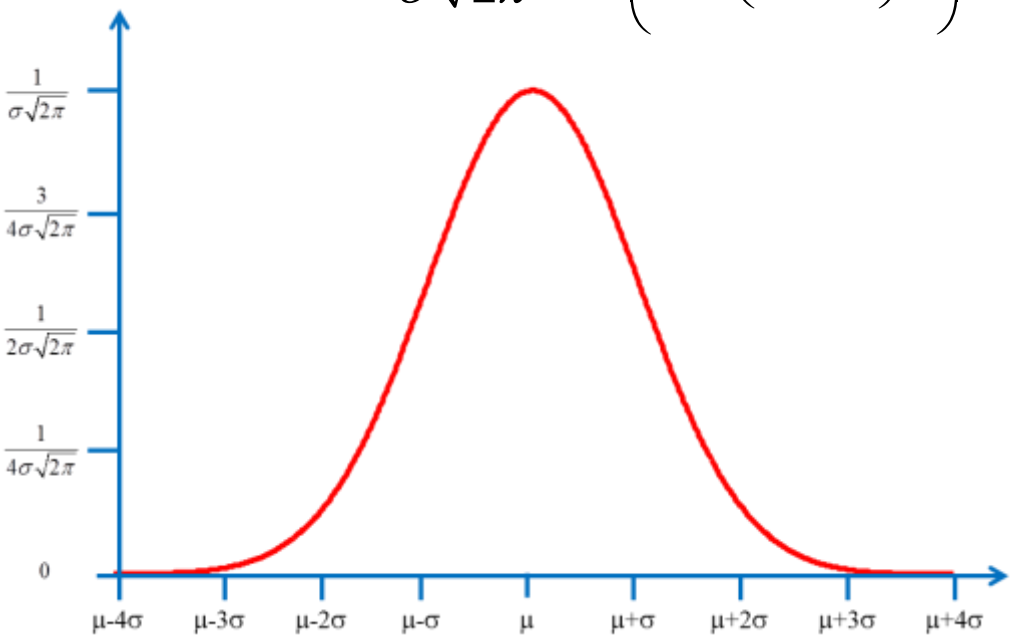
$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Minimice el error cuadrado promedio

$$E\left[(Y-\bar{x})^2\right]$$

¡Errores de medición!

$$\mathscr{N}(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



Nuestro único obstáculo para la predicción absoluta del comportamiento del universo

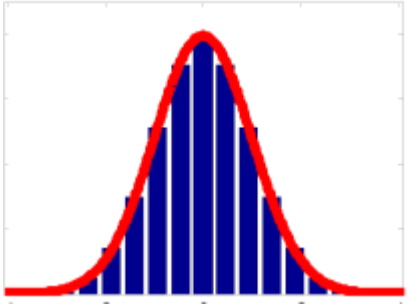
Distribución Gaussiana o **"Normal"**

Sea $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media $\mu = \mathrm{E}[X_i] < \infty$ y varianza $\sigma^2 = \mathrm{E}[X_i] < \infty$ para $i = 1 \ldots n$. Definimos la media muestral

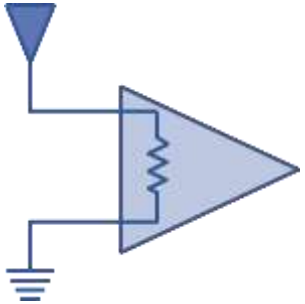
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

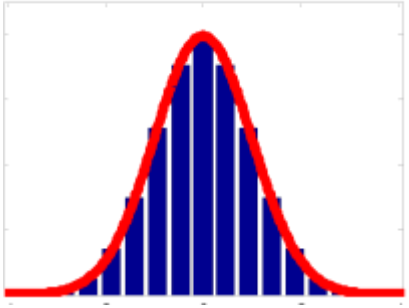
Ley de los grandes números: S_n converge en probabilidad y con probabilidad 1 al valor esperado μ a medida que n tiende a ∞.

Teorema del límite central: S_n converge en distribución a $\mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

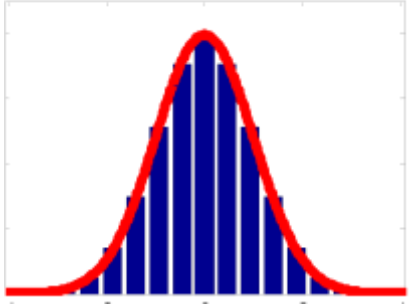


Ganancias de A





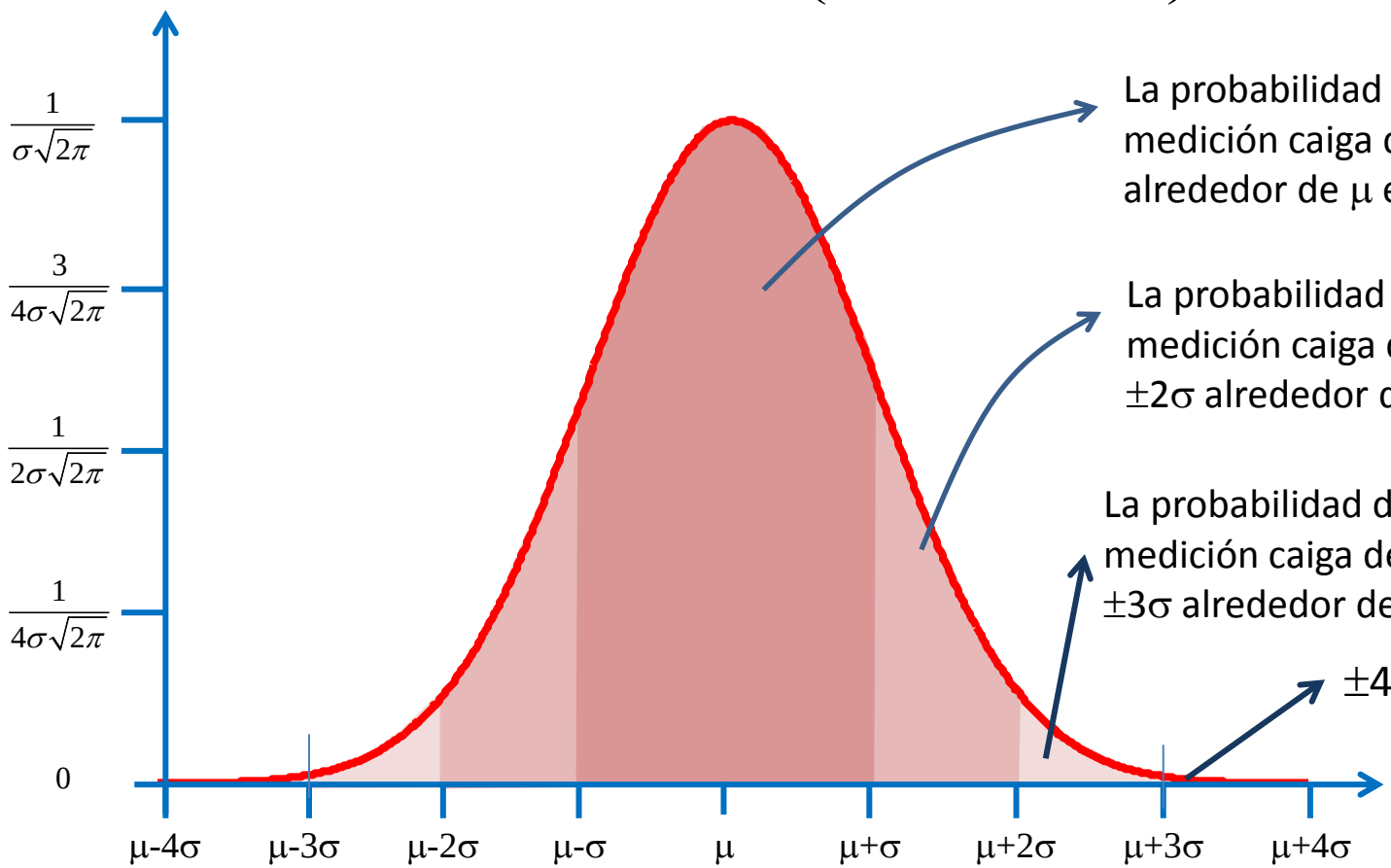
Ruido térmico



Altura de las personas

DEUTSCHE BUNDESBANK
10
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
$\mu-\sigma$
μ
$\mu+\sigma$
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
GN4480100S8

$$\mathscr{N}(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$



La probabilidad de que la medición caiga dentro de ±σ alrededor de μ es 0,683

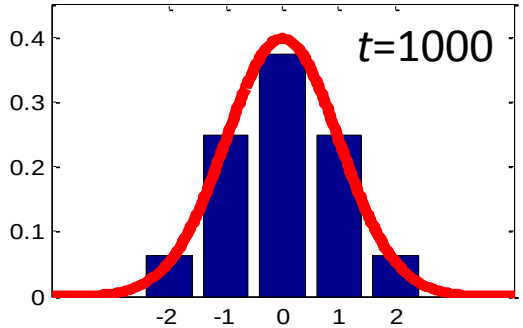
La probabilidad de que la medición caiga dentro de ±2σ alrededor de μ es 0,954

La probabilidad de que la medición caiga dentro de ±3σ alrededor de μ es 0,997

±4σ : 0,99994

Y ¿qué es probabilidad?

n=4



$$P[A] = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

$$¿P[A] = \lim \frac{N_A}{N}?$$

Cada repetición se debe hacer **bajo las mismas condiciones** (¡!)

Infinitas repeticiones = Infinito tiempo ¿Cuántas repeticiones?

(cotas de Chernoff : Pocas para estimar 0.8, cientos de miles para estimar 0.001)

¿Se puede repetir aunque sea una vez?

P[un bit se daña] 👍 P[un paquete tarda más de 100 ms] 👍

P[Mi novia de verdad me ama] 👎

Y ¿qué es probabilidad?

- Que si repito un experimento un gran número de veces y mido la fracción de experimentos en que sucede el evento *A*, la fracción obtenida tiende a **P**(*A*) a medida que hago más y más repeticiones.

- Que si logro describir el espacio muestral como un conjunto de cardinalidad finita en el que ninguno de los eventos unitarios ocurre preferencialmente sobre los otros, la probabilidad de un evento está dada por la cardinalidad del evento sobre la cardinalidad del espacio muestral.

- Que si consulto a un experto sobre la ocurrencia de un evento en una hipotética realización de un experimento, la probabilidad del evento es el grado de certeza que el experto tiene en que dicho evento ocurra.

- Que si he acumulado cierta evidencia a favor o en contra de una hipótesis, la probabilidad del evento en el que dicha hipótesis es cierta está dada por el grado de implicación lógica que existe de la evidencia a la hipótesis.

- etc.

Nadie sabe que es la probabilidad

Y ¿qué es probabilidad?

El azar es el mecanismo de expresión de las voluntades divinas ¡Y qué útil resulta ser el vocero de los dioses cuando se usan dados no balanceados!

Se usa la aleatoriedad porque

(1) Desconocemos las leyes naturales que rigen el experimento

(2) conocemos dichas leyes pero son tan complejas que nos es imposible –o resulta indeseable- evaluarlas

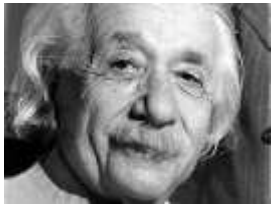
¿Hay una indeterminación básica en el universo?

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t) \right]\psi(\vec{r},t)$$

Y ¿qué es probabilidad?

¿Hay una indeterminación básica en el universo?

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t) \right]\psi(\vec{r},t)$$



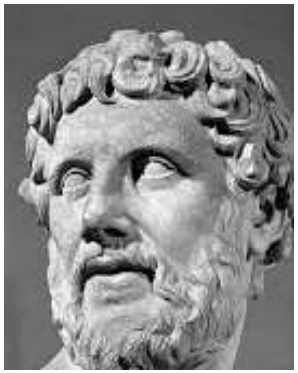
Einstein: “Usted cree en un Dios que juega a los dados, y yo, en la ley y el orden absolutos en un mundo que existe objetivamente, y el cual, de forma insensatamente especulativa, estoy tratando de comprender. Ni siquiera el gran éxito inicial de la teoría cuántica me hace creer en un juego de dados fundamental”

Born: “Señor Einstein, ¡deje de decirle a Dios lo que debe hacer!”

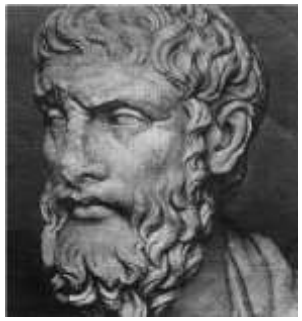
Y ¿qué es probabilidad?

¿Hay una indeterminación básica en el universo?

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r},t) \right]\psi(\vec{r},t)$$



Demócrito: “Usted cree en unos dioses que juegan a los dados, y yo, en la ley y el orden absolutos en un mundo que existe objetivamente, y el cual, de forma insensatamente especulativa, estoy tratando de comprender. Ni siquiera la paradoja del libre albedrío me hace creer en un juego de dados fundamental”



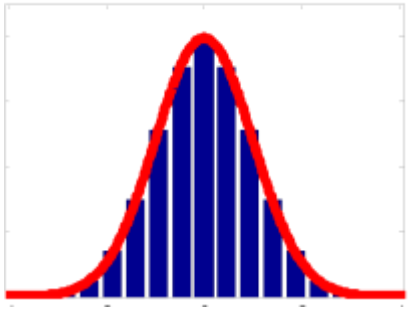
Epicuro: “Señor Demócrito, ¡deje de decirle a los dioses lo que deben hacer!”

Thomas Hobbes, *Leviatán* (1651)

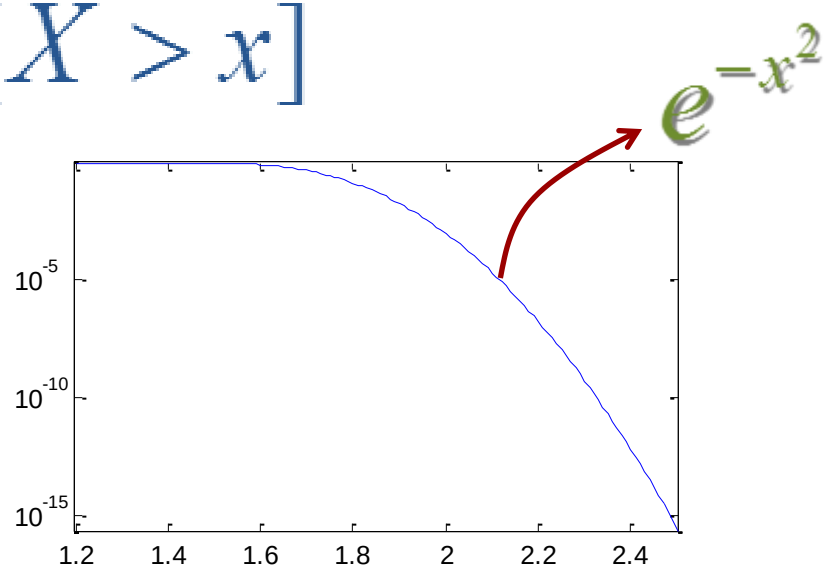
"Así se hizo creer a los hombres que encontrarían su fortuna en las respuestas ambiguas y absurdas de los sacerdotes de *Delfos*, *Delos*, *Ammon* y otros famosos oráculos, cuyas respuestas se hacían deliberadamente ambiguas para que fueran adecuadas a las dos posibles eventualidades de un asunto (…). A veces en las frases desprovistas de significado de los locos, a quienes se suponía poseídos por un espíritu divino: a esta posesión se la llamaba entusiasmo, y a estos modos de predecir acontecimientos se les denominaba *teomancia* o profecía. A veces en el aspecto que presentaban las estrellas en su nacimiento, a lo cual se llamaba *horoscopia*. A veces en sus propias esperanzas y temores, en lo llamado *tumomancia* o presagio. A veces en las predicciones de los magos, que pretendían conversar con los muertos, a lo cual se llamaba *nigromancia*, conjuro y hechicería, y no es otra cosa sino impostura y fraude. A veces en el vuelo casual o en la forma de alimentarse las aves, lo que llamaban *augurio*. A veces en las entrañas de los animales sacrificados, a lo que llamaban *aruspicina*. A veces en los sueños; a veces en el graznar de los cuervos o el canto de los pájaros. A veces en las líneas de la cara, a lo que se llamaba *metoposcopia*; o en las líneas de la mano, *palmisteria*; o en las palabras casuales, *omina*. A veces en monstruos o accidentes desusados, como eclipses, cometas, meteoros raros, temblores de tierra, inundaciones, nacimientos prematuros y cosas semejantes, lo que se llamaba *portenta* y *ostenta*, porque parecían predecir o presagiar alguna gran calamidad venidera. A veces en el mero azar, como en el acertijo de cara y cruz, en el juego de elegir versos de Homero y Virgilio, y en otros vanos e innumerables conceptos análogos a los citados. Tan fácil es que los hombres crean en cosas a las cuales han dado crédito otros hombres; con donaire y destreza puede sacarse mucho partido de su miedo e ignorancia".

Cola de una distribución

$$P[X > x]$$



Altura de las personas

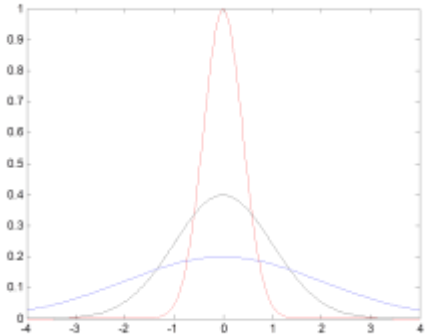


P[más de 1.70] = 0.5
P[más de 1.80] = 0.159
P[más de 1.90] = 0.0228
P[más de 2.00] = 0.00135
P[más de 2.10] = 0.0000317
P[más de 2.20] = 0.000000287
P[más de 2.30] = 0.000000000987

¡Todo está cerca al promedio! –Mediocre-

Cola liviana

Amamos el determinismo y queremos eliminar la incertidumbre promediando muchas muestras



$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

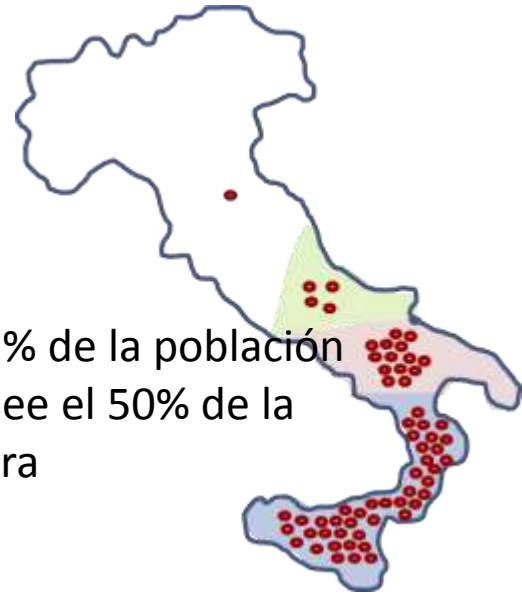
Cola de una distribución

$$P[X > x]$$

Vilfredo Pareto, 1906: En Italia, a comienzos del siglo XX, el 80% de la tierra era propiedad del 20% de la población (los ricos)

El 80% de la tierra de los ricos es propiedad del 20% de los ricos (los muy ricos)

El 80% de la tierra de los muy ricos es propiedad del 20% de los muy ricos (los extremadamente ricos)



El 1% de la población posee el 50% de la tierra

Recursión a múltiples escalas

Cola de una distribución

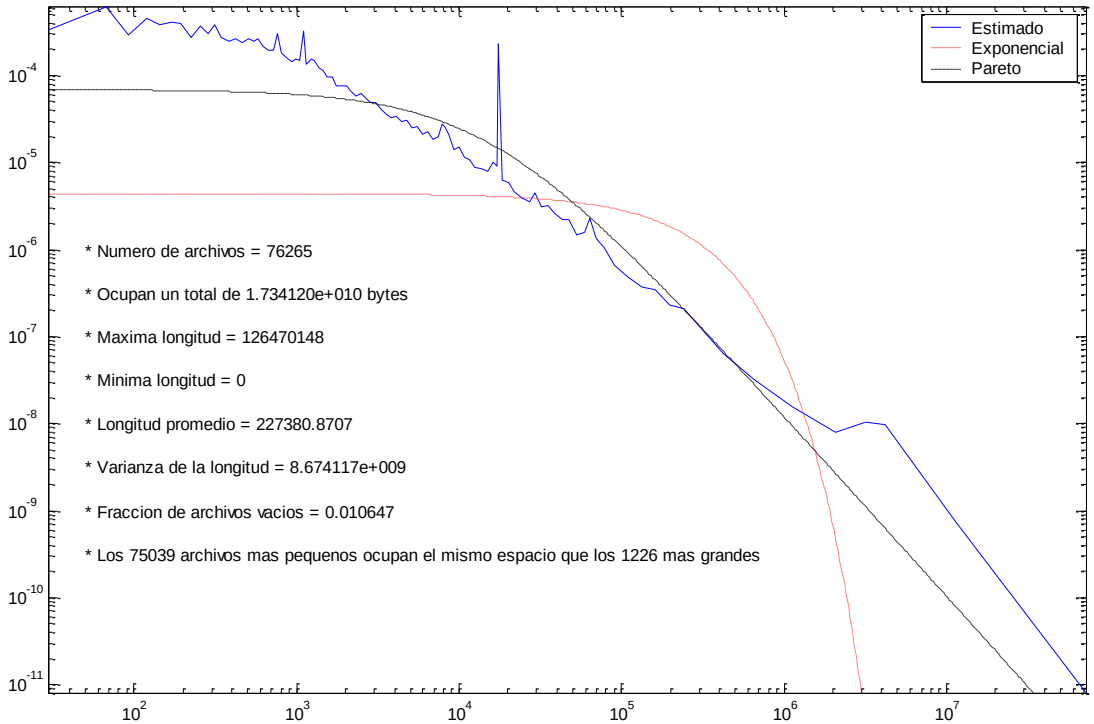
Una variable aleatoria tiene una cola pesada si, en vez de decaer exponencialmente, decae hiperbólicamente:

$$P[X > x] \propto e^{-x}$$

Cola liviana

$$P[X > x] \propto x^{-\alpha}$$

Cola pesada



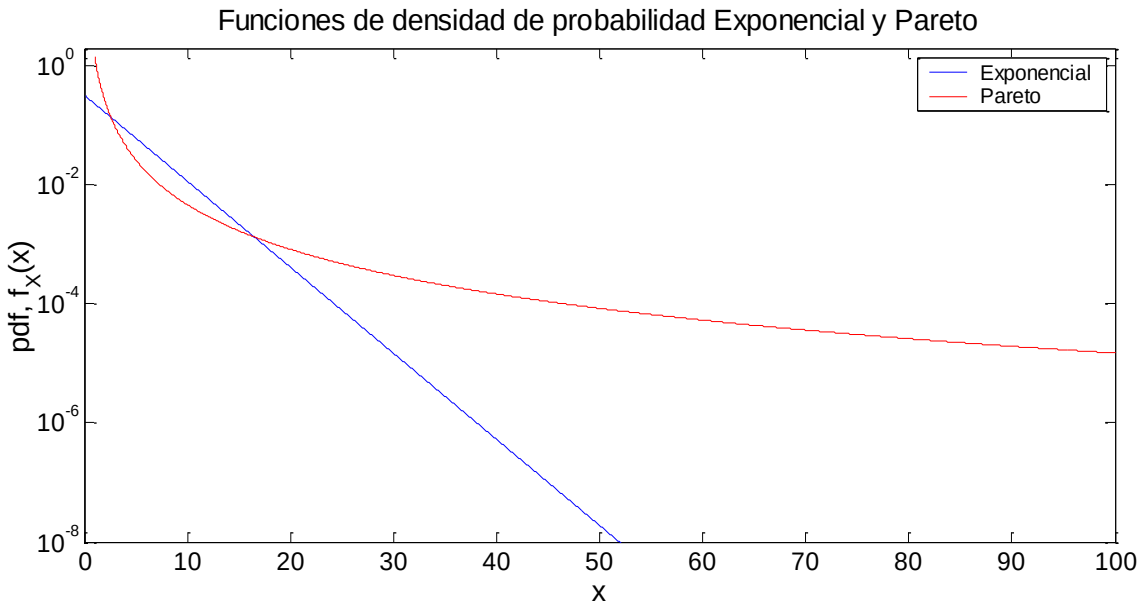
Cola de una distribución

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \; x \in \mathbb{R}$$

Cola liviana

$$f_X(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}, \quad x \geq b$$

Cola pesada



Cola de una distribución

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \; x \in \mathbb{R}$$

Cola liviana

$$f_X(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}, \quad x \geq b$$

Cola pesada

$$E[X] = \mu$$

$$V[X] = \sigma^2$$

$$E[X] = \begin{cases} \dfrac{ab}{a-1} & a > 1 \\ \infty & a \leq 1 \end{cases}$$

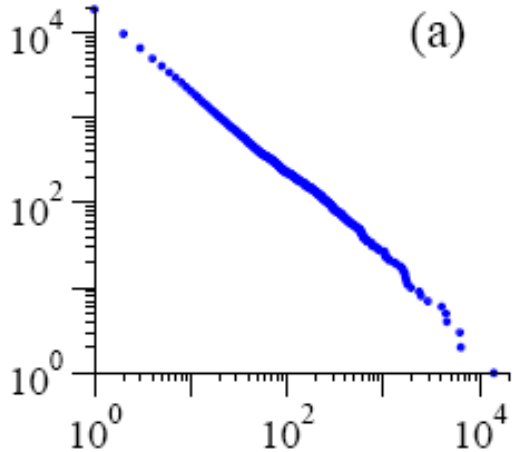
$$V[X] = \begin{cases} \dfrac{ab^2}{(a-2)(a-1)^2} & a > 2 \\ \infty & a \leq 2 \end{cases}$$

Con $1 < a < 2$, tenemos una variable con media finita y varianza infinita: Altísima variabilidad.

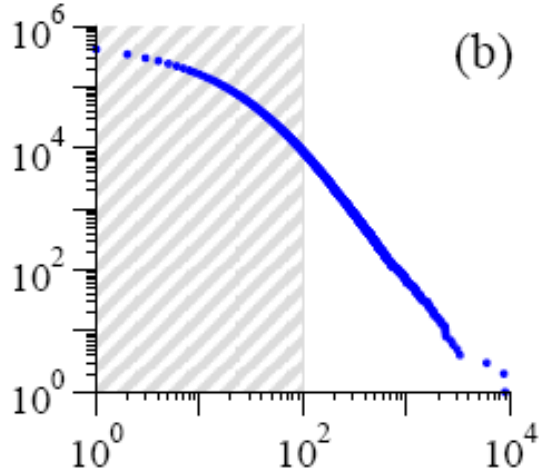
¿Ley de los grandes números?

¿Teorema del límite central?

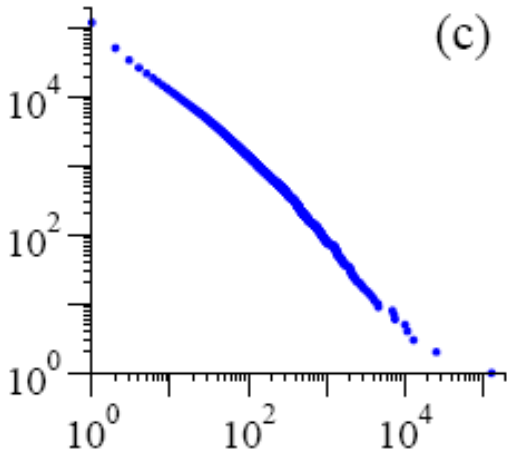
Cola Pesada



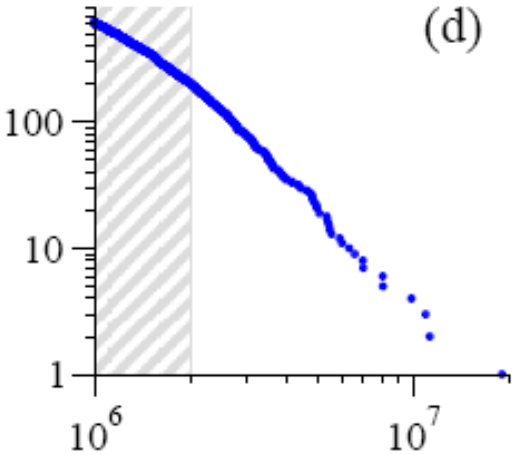
Frecuencia de palabras



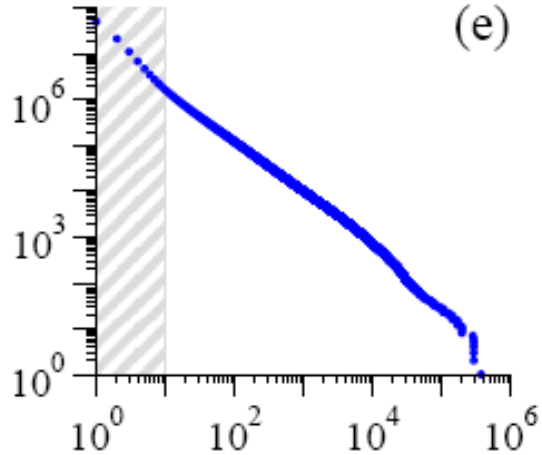
Citaciones bibliográficas



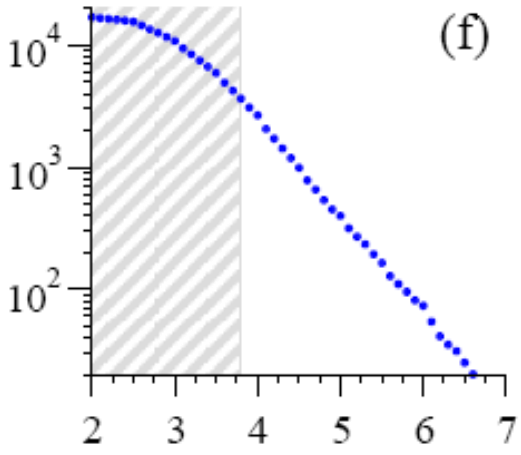
Consultas a páginas web



Libros vendidos



Llamadas telefónicas recibidas



Magnitud de terremotos

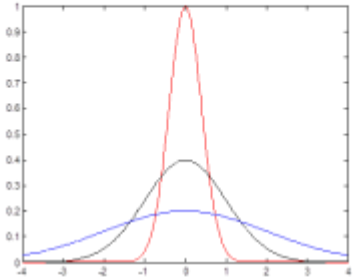
Cola Pesada

- Número de personas afectadas por un apagón
- Tamaño de los incendios forestales
- Cascada de los eventos de congestión en tráfico aéreo
- Impactos de meteoritos
- Muertes y pérdidas económicas por desastres naturales o artificiales
- Variaciones in el mercado de valores
- Uso de las palabras del español
- Población de las ciudades
- Ingresos y riqueza de las compañías y los individuos
- La masa y el tamaño de los objetos en este auditorio
- Citación de artículos
- Publicaciones por autor
- Patentes por inventor
- Tamaño de los archivos Web, UNIX, Windows
- Utilización de la CPU en un computador
- etc., Etc., ETc., ETC!

Verdadera distribución NORMAL

Cola Pesada

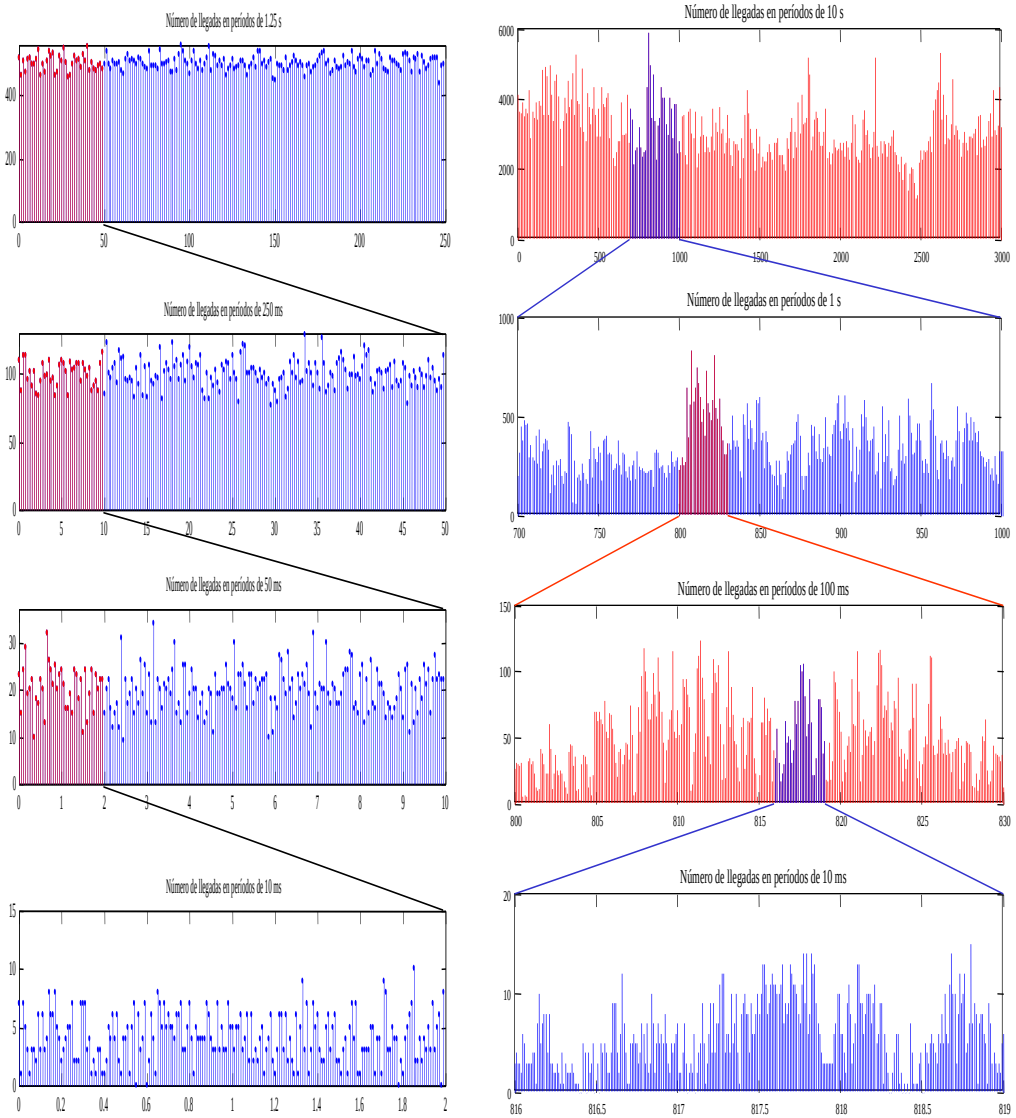
¿Promediar para eliminar incertidumbre?



$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow$$ ¡Sólo incluimos las muchas muestras insignificantes!

NOS ENGAÑAMOS

¿Y si se nos cuela por fin una muestra muy grande?
¡¡La clasificamos como *"outlier"* y la ignoramos!!

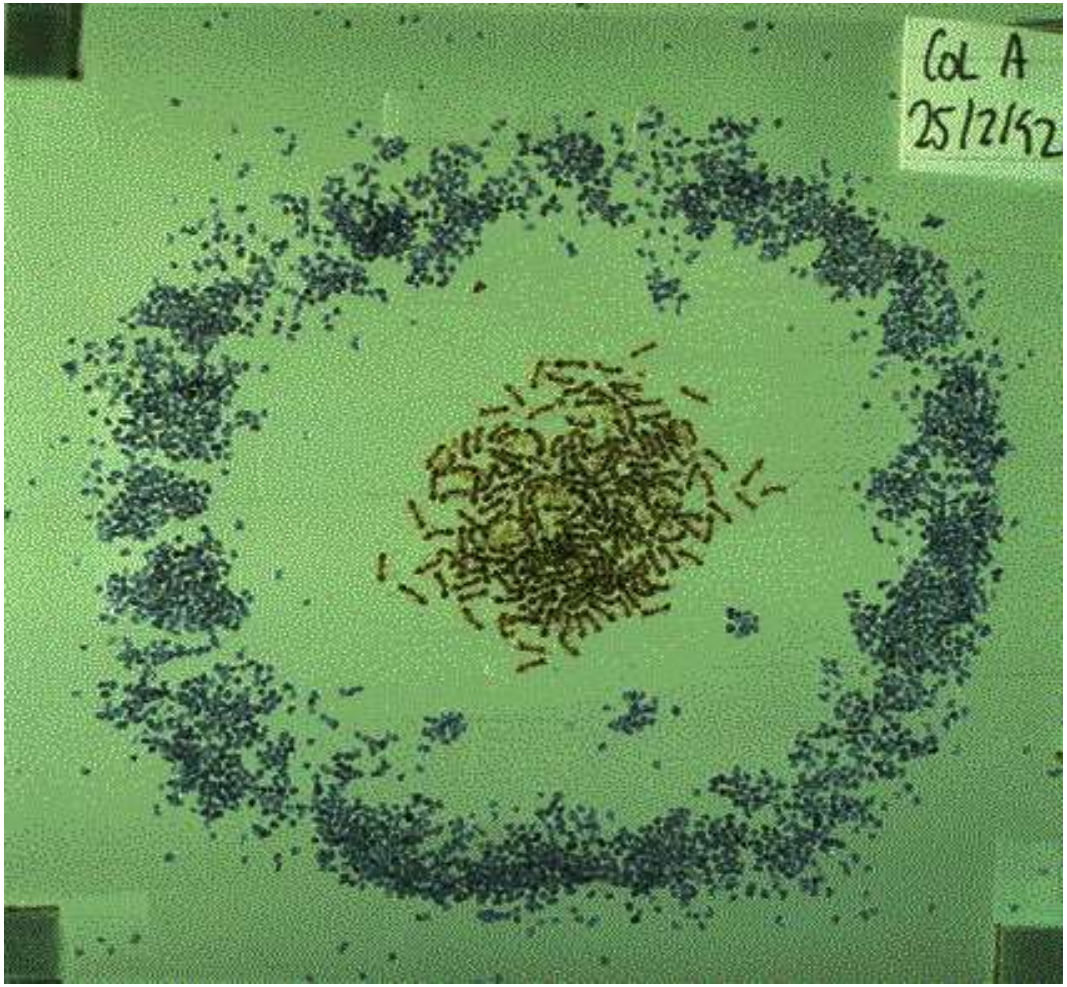


En el mundo, los eventos importantes, los que afectan la historia y la evolución, son los eventos gigantescos altamente improbables:

- Universo
- Vida
- Economía
- Conflictos
- …

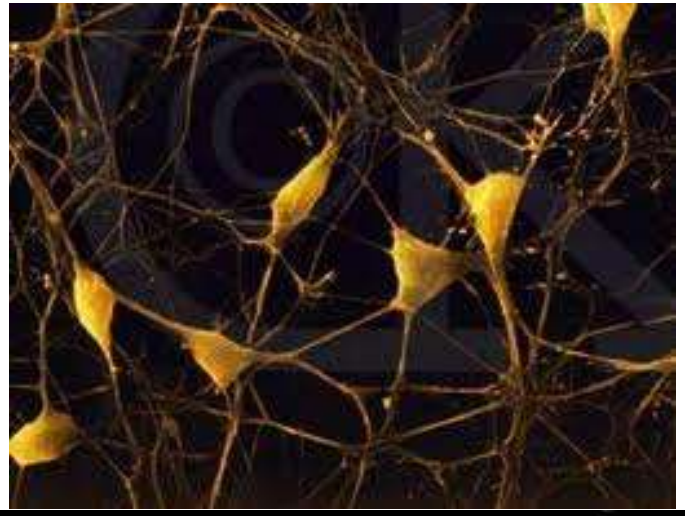
6. De lo simple a lo complejo

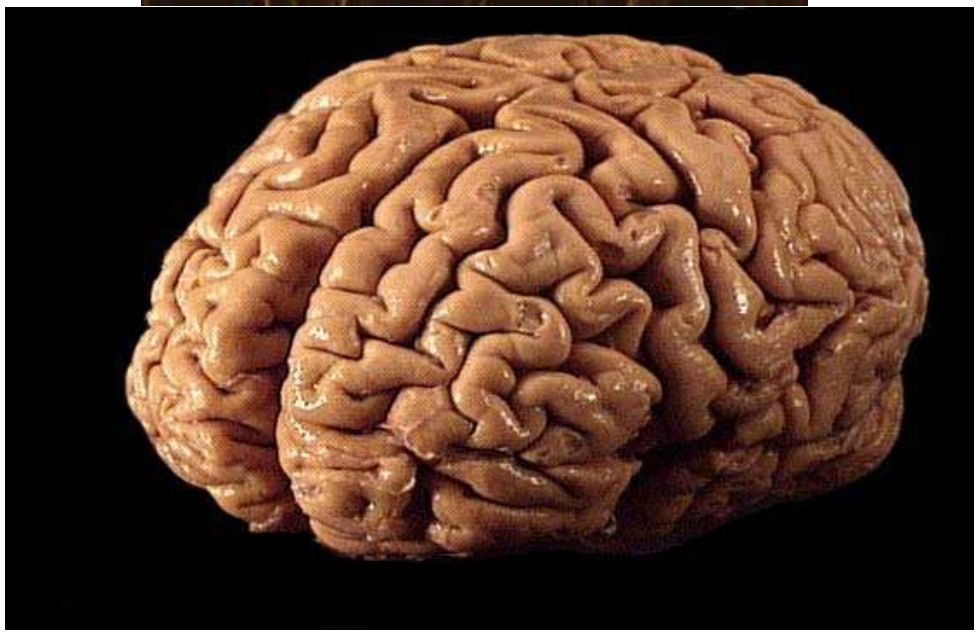
Colonias de insectos



Cada hormiga en un hormiguero realiza sus propias acciones relativamente simples, pero en conjunto construyen estructuras sorprendentemente complejas que resultan fundamentlaes para la sobrevivencia del hormiguero como un todo.

El cerebro

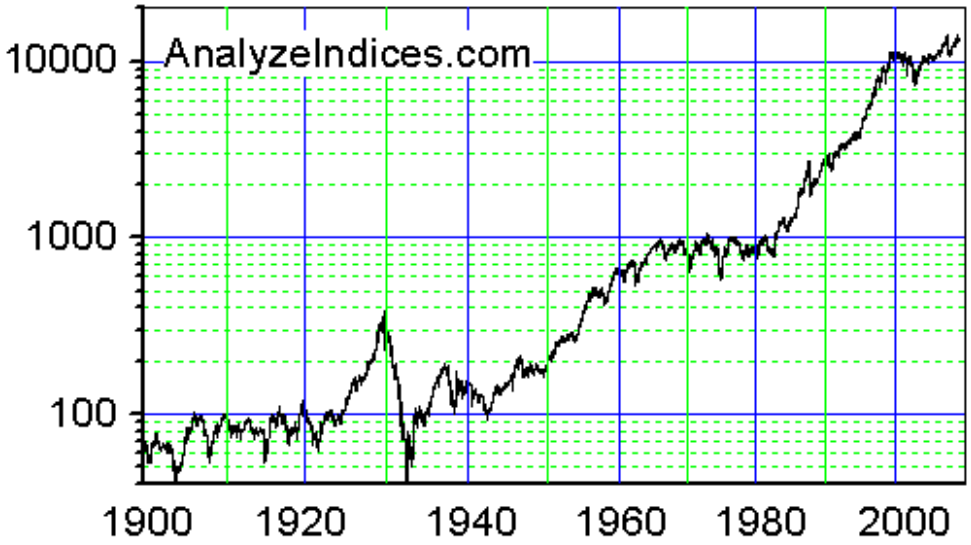




Las acciones de las neuronas y los patrones de conexiones entre grupos de neuronas producen la percepción, el pensamiento, los sentimientos, la conciencia, …

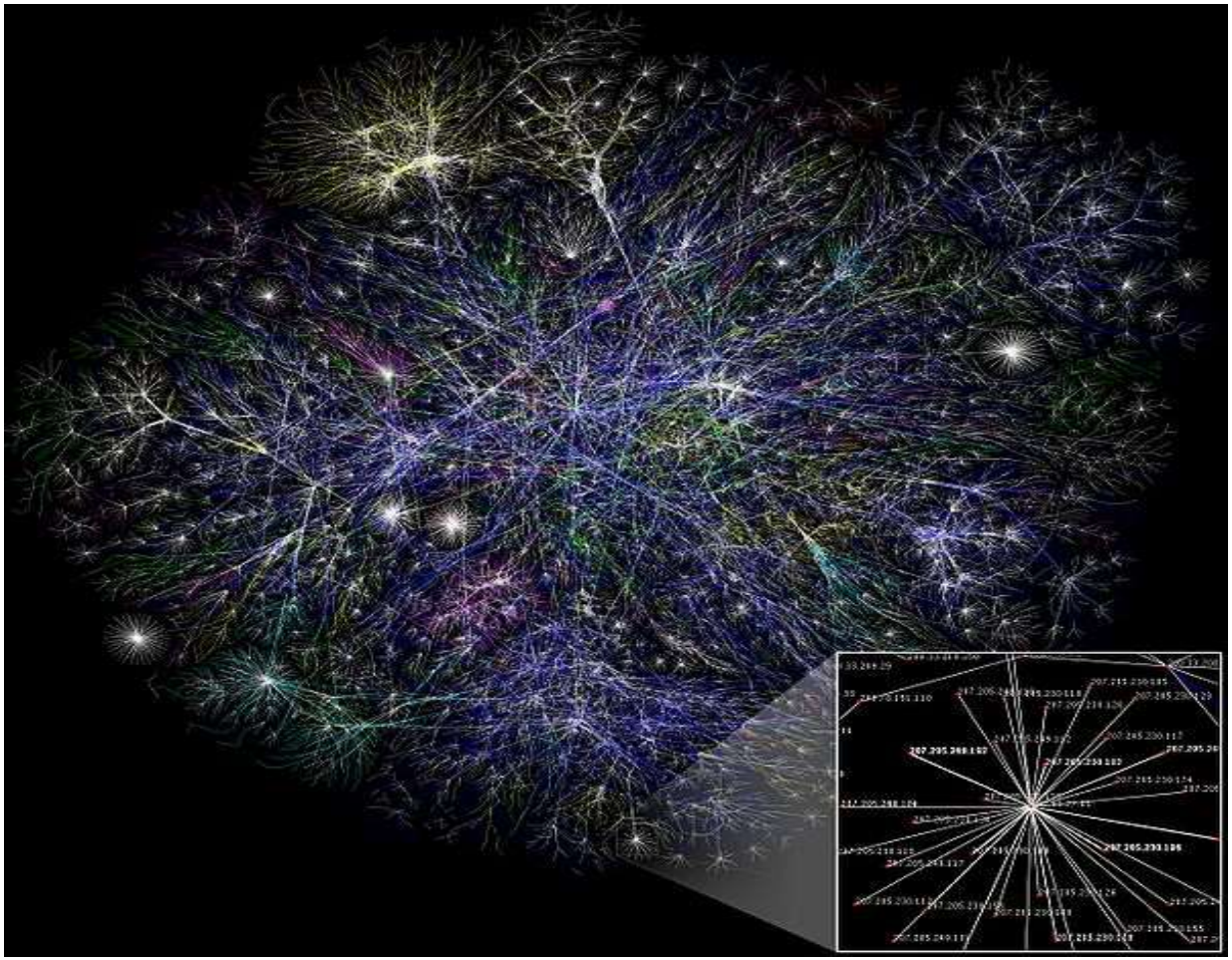
Economía

Dow-jones index



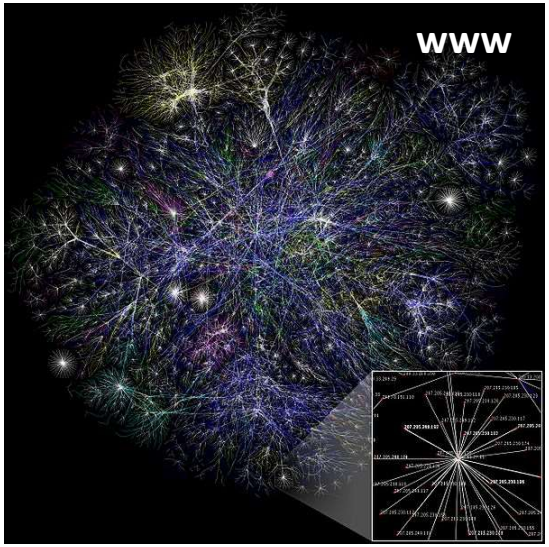
Los componentes microscópicos simples son las personas que compran y venden bienes y servicios, con lo cualk determinan el comportamiento colectivo de los precios de los valores en el mercado, tan difícil de predecir.

La WWW (World Wide Web)



Los individuos crean páginas web que conectan con otras páginas web. Como resultado, La estructura general, el patrón de crecimiento y las relaciones co-evolutivas entre los motores de búsqueda y la red de conexiones es altamente compleja.

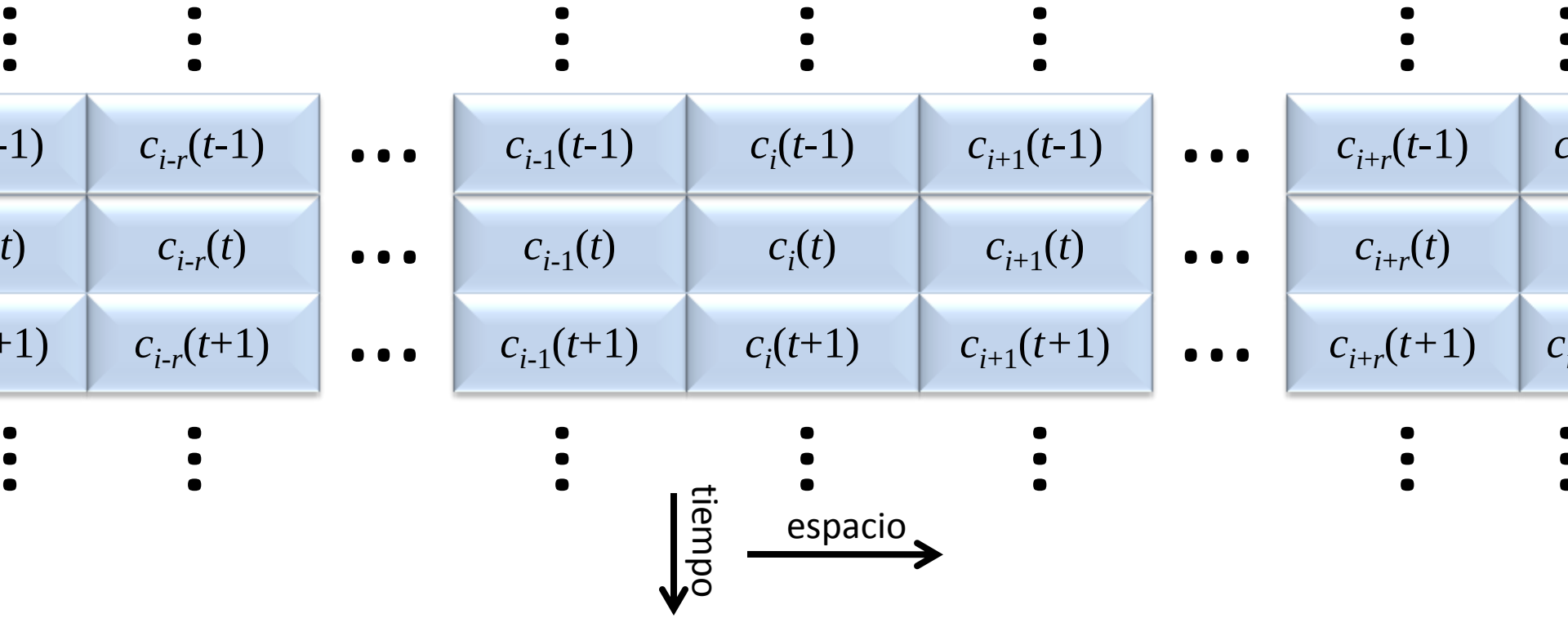
Algunos aspectos en común



Grandes redes de componentes individuales
Reglas sencillas sin ningún control central
Las acciones colectivas de muchos componentes dan lugar a patrones complejos
Se produce y se utiliza información
Se logra adaptación a través de aprendizaje y evolución

Necesidad de nuevos modelos matemáticos que expliquen la auto-organización

Descripción de un sistema dinámico



$c_i(t)$ es el estado de la celda i en el instante t

El siguiente estado de la celda i depende del estado actual de las celdas vecinas en un radio r

Para k estados necesitamos $R = k^{2r+1}$ reglas y hay k^R possibles conjuntos de reglas

Por ejemplo : Número de estados = 2

Estados = {0,1}

radio = 1

2^3=8 rules, 2^8 = 256 conjuntos de reglas

ejemplo: Si $1 \leq \Sigma_{k=-1,0,1} c_{i+k}(t) \leq 2$, entonces $c_i(t+1) \leftarrow 1$, si no, $c_i(t+1) \leftarrow 0$

Autómata de estados finitos

If

$$1 \leq \Sigma_{k=-1,0,1} c_{i+k}(t) \leq 2$$

then

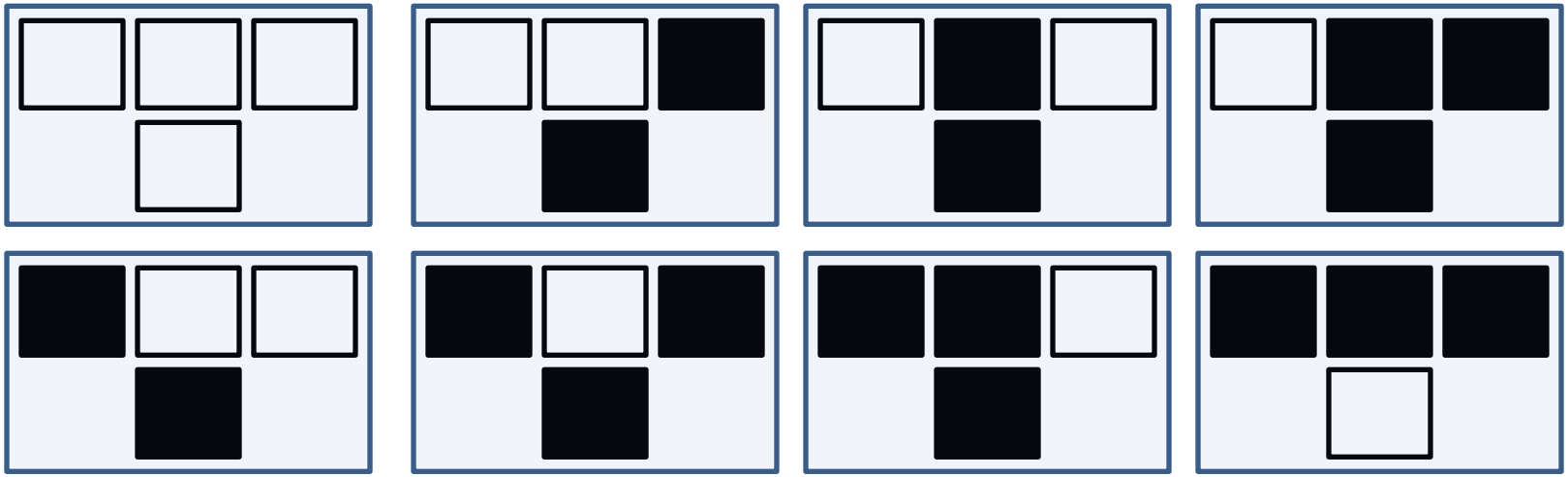
$$c_i(t+1) \leftarrow 1$$

else

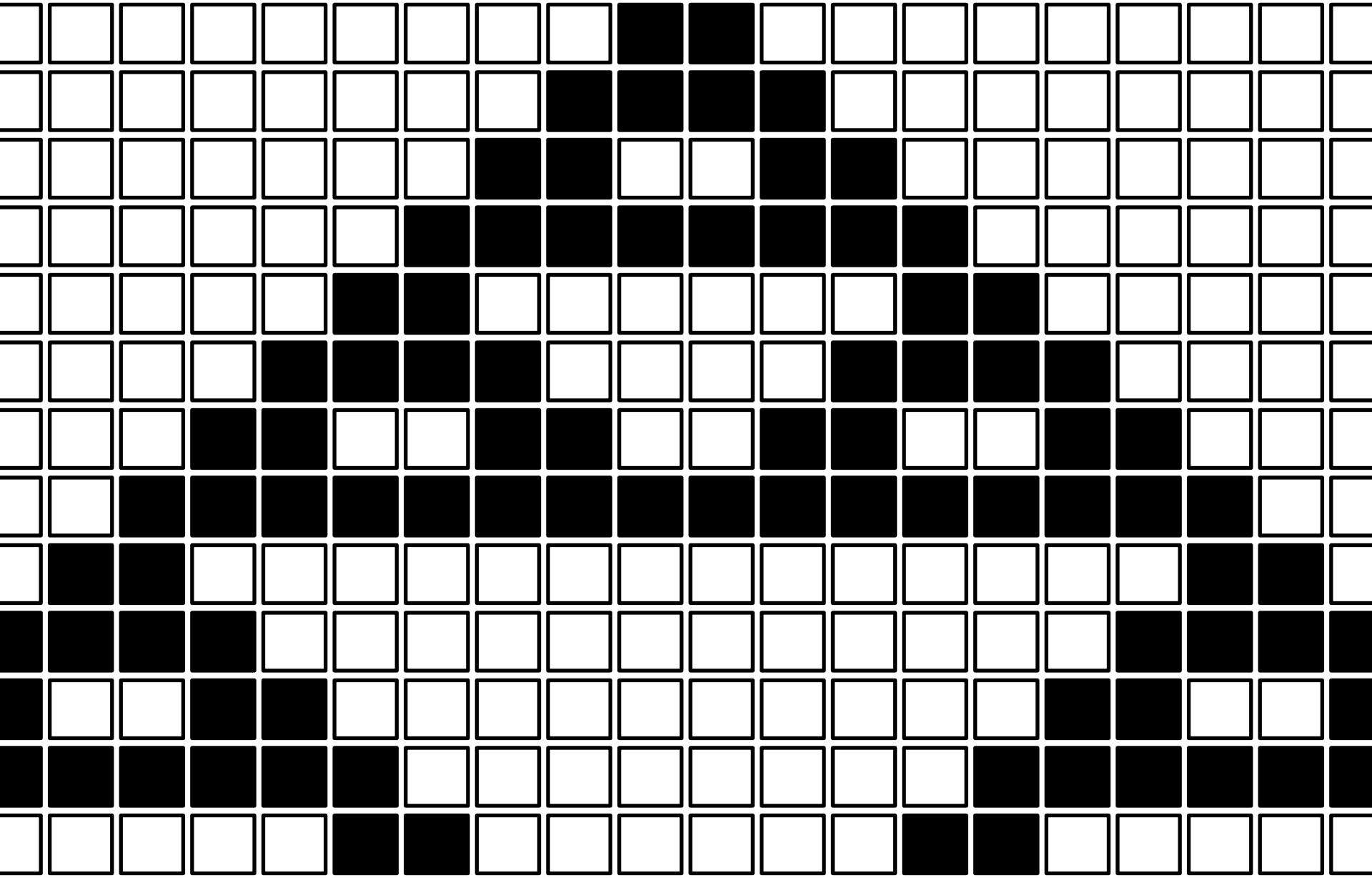
$$c_i(t+1) \leftarrow 0$$

end

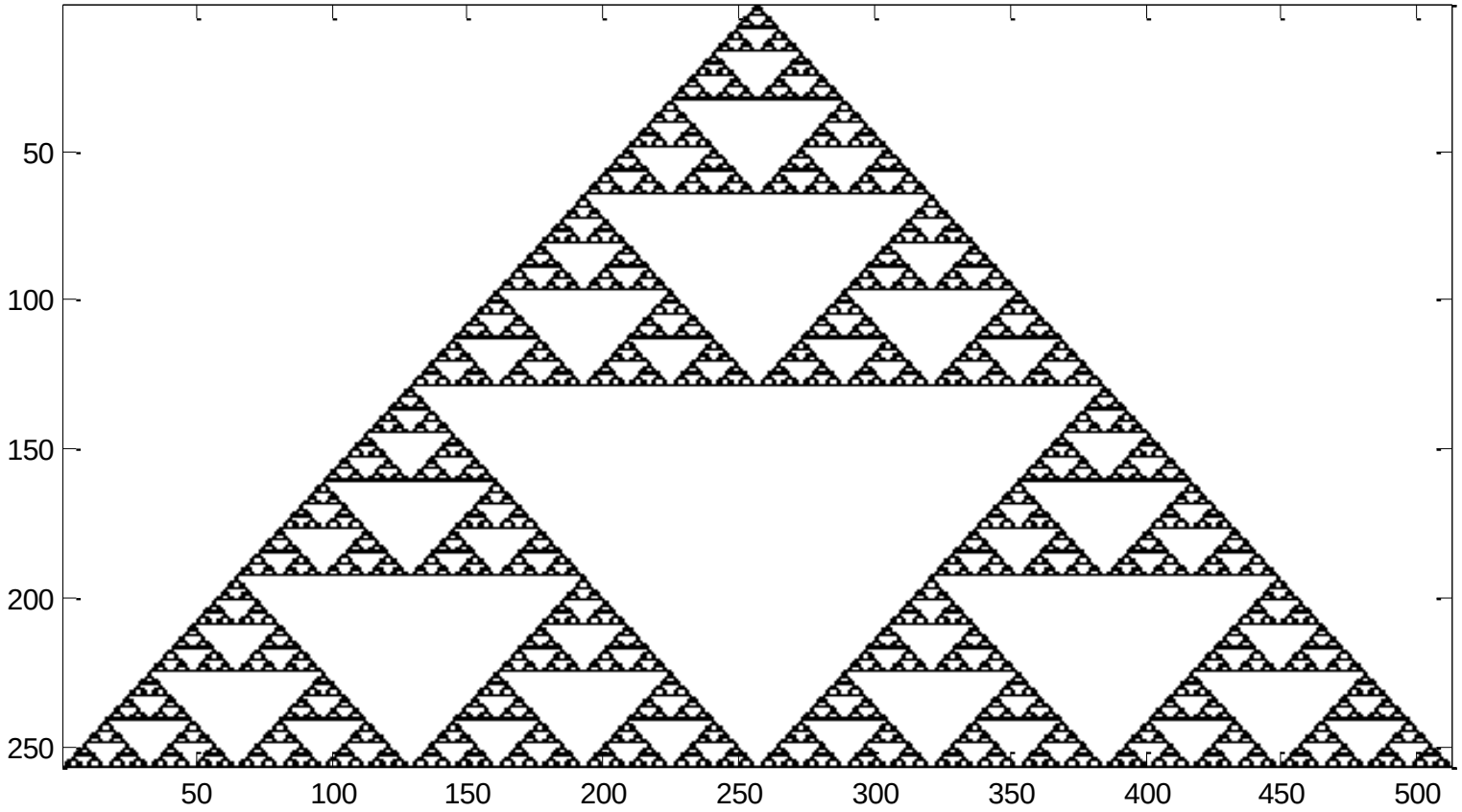
$c_{i-1}(t)$	$c_i(t)$	$c_{i+1}(t)$	$c_i(t+1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



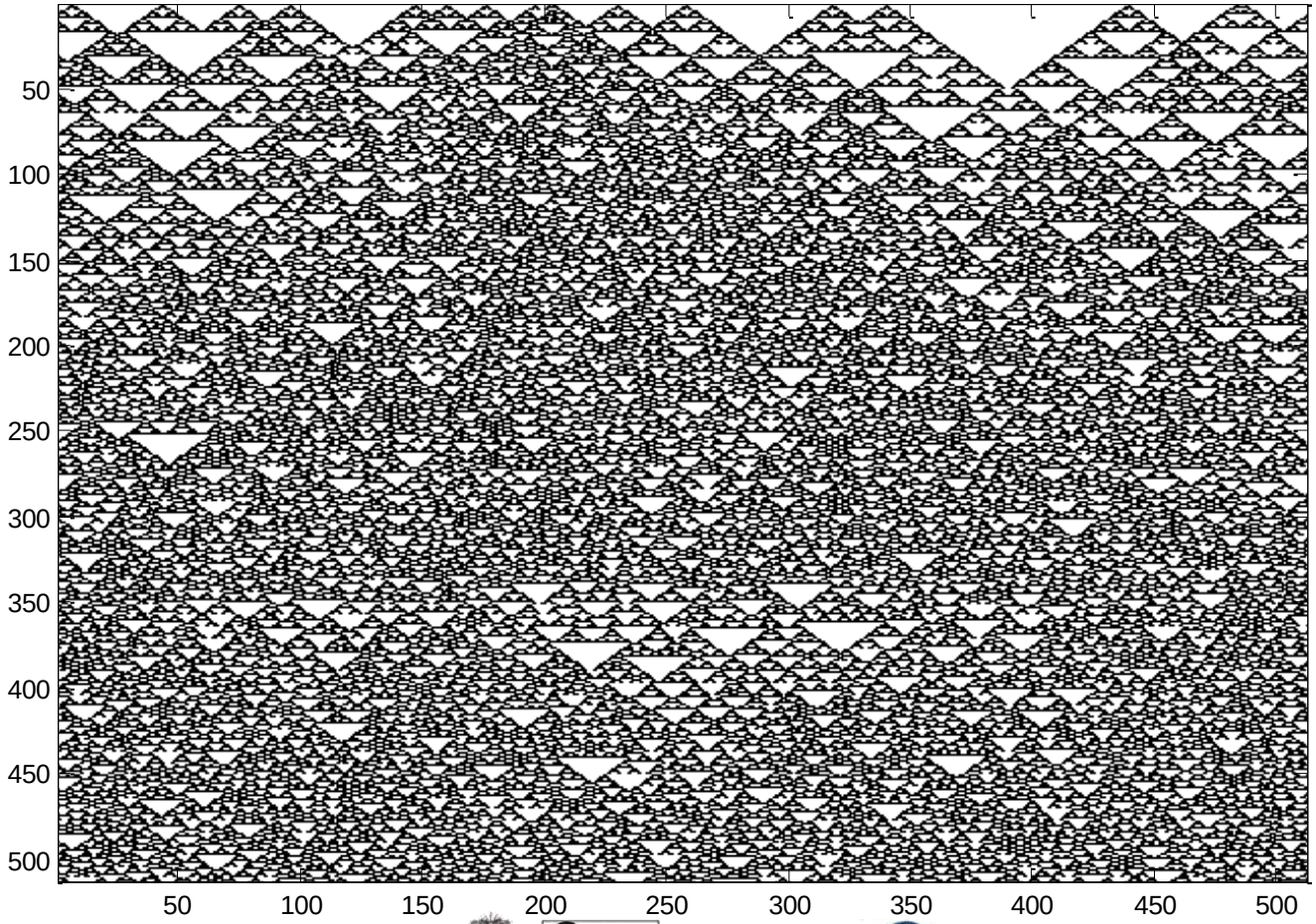
Autómata de estados finitos

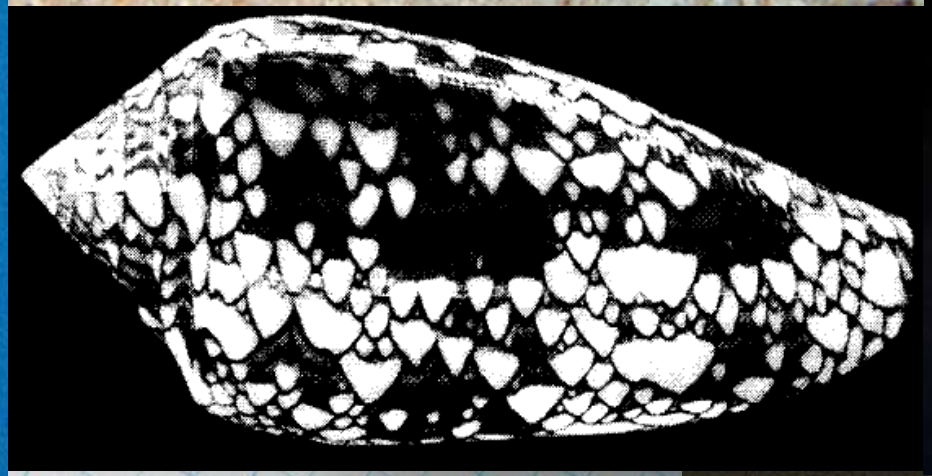


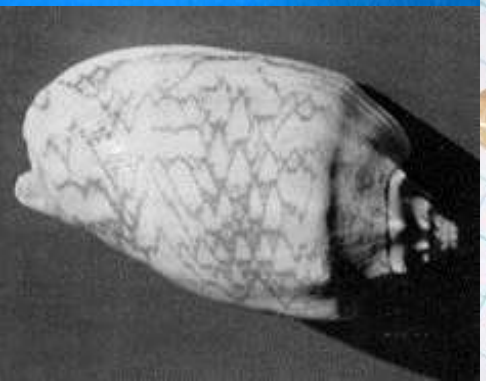
```
colormap([1 1 1; 0 0 0])    % 0 blanco, 1 negro
n = 512; i=2:n-1;           % Tamaño de la línea
c = zeros(n/2,n);           % Historia del autómata
c(1,n/2 + [0 1]) = 1;       % Estado inicial
for t=2:n/2                 % Indice de tiempo
    sum(i) = c(t-1,i-1) + c(t-1,i) + c(t-1,i+1);
    sum(1) = c(t-1,n) + c(t-1,1) + c(t-1,2);
    sum(n) = c(t-1,1) + c(t-1,n) + c(t-1,n-1);
    c(t,:) = (sum<3).*(sum>0); % Evalúa la regla
end
imagesc(c)
```

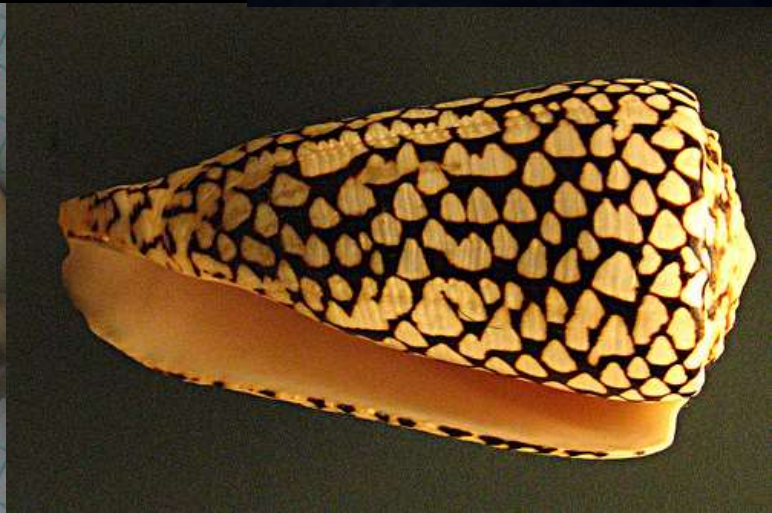


```
colormap([1 1 1; 0 0 0])    % 0 blanco, 1 negro
n = 512; i=2:n-1;           % Tamaño de la linea
c = zeros(n,n);             % Historia del autómata
c(1,:) = (rand(1,n)>0.95); % Estado inicial
for t=2:n                   % Indice de tiempo
    sum(i) = c(t-1,i-1) + c(t-1,i) + c(t-1,i+1);
    sum(1) = c(t-1,n) + c(t-1,1) + c(t-1,2);
    sum(n) = c(t-1,1) + c(t-1,n) + c(t-1,n-1);
    c(t,:) = (sum<3).*(sum>0); % Evalúa la regla
end
imagesc(c)
```

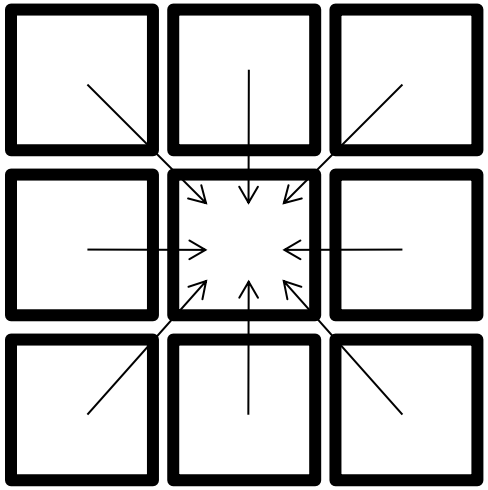








Juego de la vida

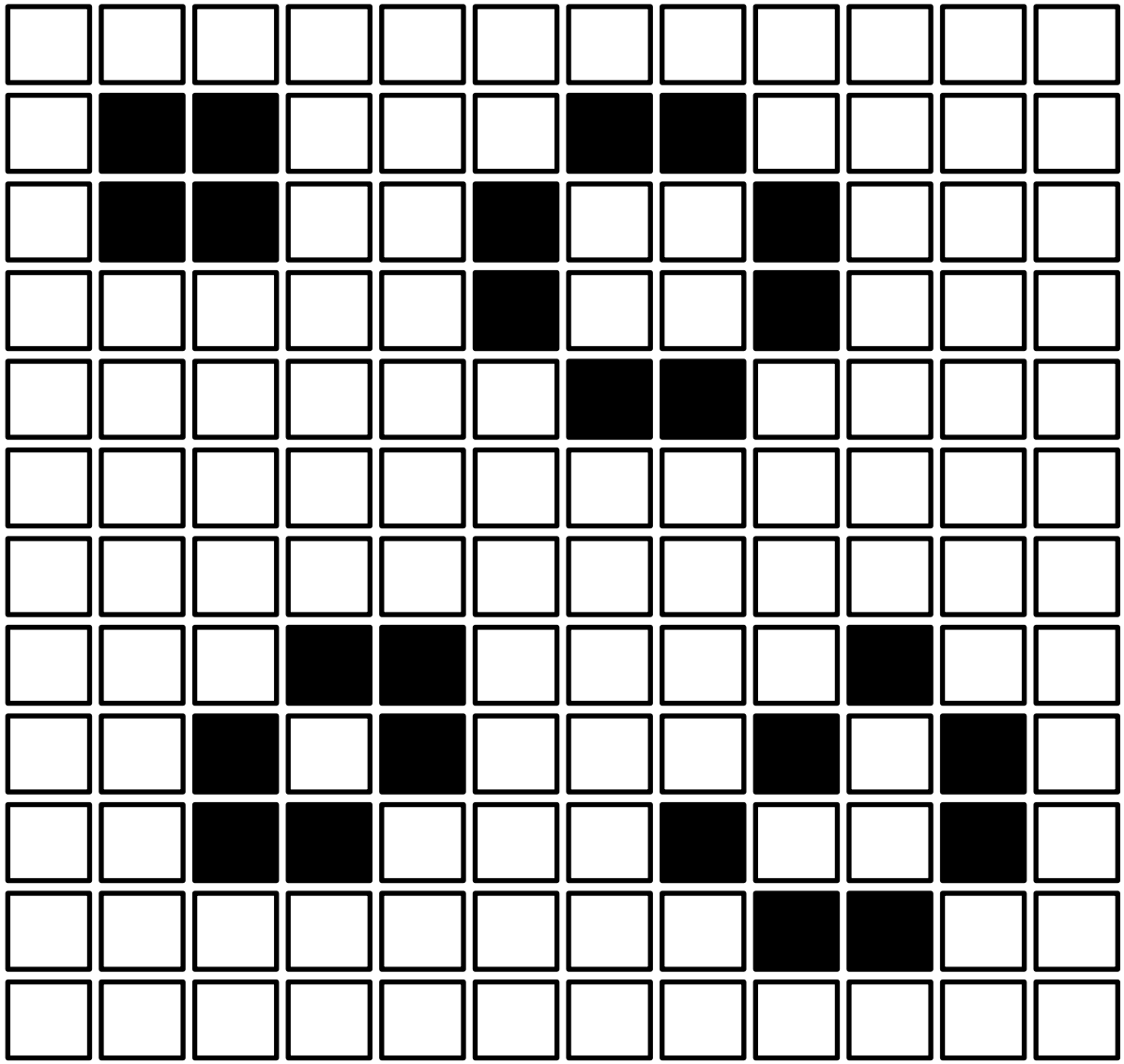


```
n=64 ;                                  % Tamaño del mundo
mundo = (rand(n,n)<0.5);                % Inicializa el mundo
imagesc(mundo);                         % Visualiza el mundo
colormap([1 1 1; 0 0 0]);               % 0 - blanco, 1 - negro
axis equal
axis tight
while(1)
    mundo = [mundo(n,n) mundo(n,1:n) mundo(n,1); ... % Forma el toroide
             mundo(1:n,n) mundo mundo(1:n,1); ...
             mundo(1,n) mundo(1,1:n) mundo(1,1)];
    % Evalúa la regla de interacción
    suma  =  mundo(1:n,1:n)   + mundo(1:n,2:n+1)   + mundo(1:n,3:n+2) + ...
             mundo(2:n+1,1:n) +                      mundo(2:n+1,3:n+2) + ...
             mundo(3:n+2,1:n) + mundo(3:n+2,2:n+1) + mundo(3:n+2,3:n+2);
    mundo = ((suma==3) + (suma==2).*mundo(2:n+1,2:n+1));
    imagesc(mundo);                     % Actualiza la imagen
    drawnow
end
```

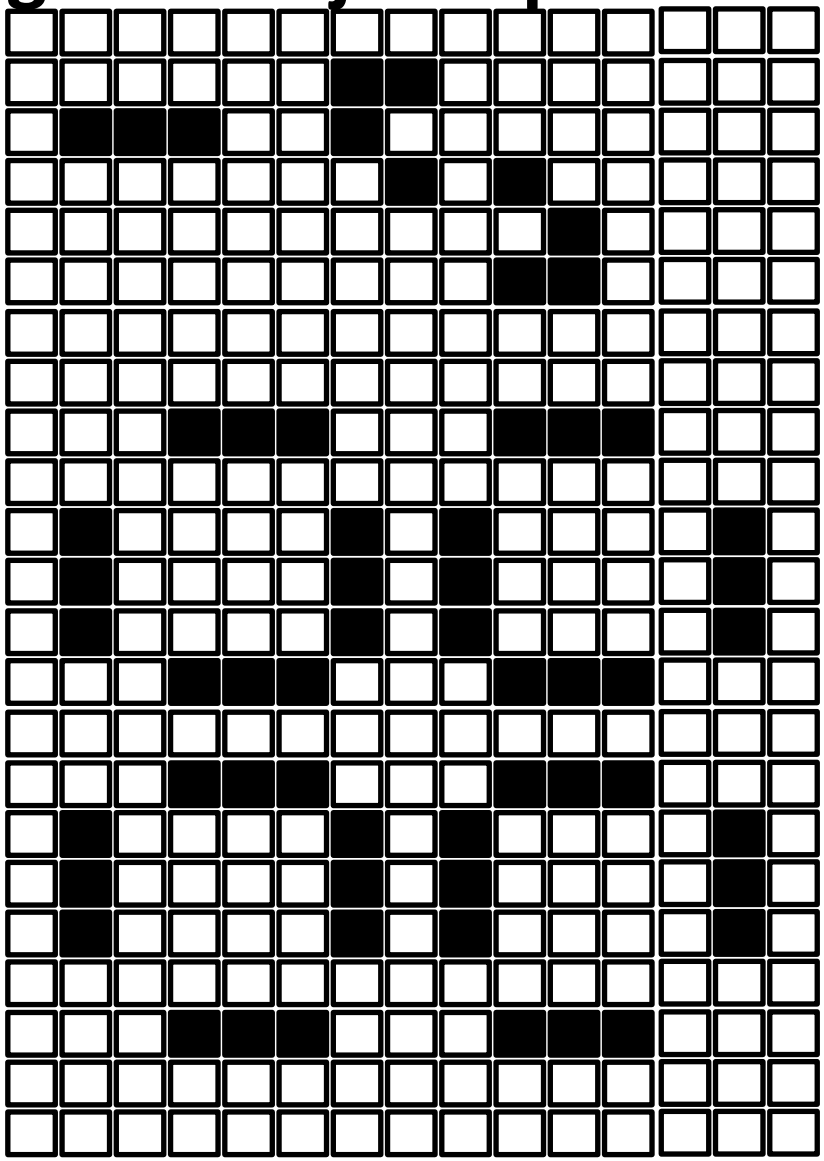
Game of life

```
n=64 ;                                  % Tamaño del mundo
mundo = (rand(n,n)<0.5);                % Inicializa el mundo
imagesc(mundo);                         % Visualiza el mundo
colormap([1 1 1; 0 0 0]);               % 0 - blanco, 1 - negro
axis equal
axis tight
while(1)
    mundo = [mundo(n,n) mundo(n,1:n) mundo(n,1); ... % Forma el toroide
             mundo(1:n,n) mundo mundo(1:n,1); ...
             mundo(1,n) mundo(1,1:n) mundo(1,1)];
    % Evalúa la regla de interacción
    suma  =  mundo(1:n,1:n)   + mundo(1:n,2:n+1)   + mundo(1:n,3:n+2) + ...
             mundo(2:n+1,1:n) +                      mundo(2:n+1,3:n+2) + ...
             mundo(3:n+2,1:n) + mundo(3:n+2,2:n+1) + mundo(3:n+2,3:n+2);
    mundo = ((suma==3) + (suma==2).*mundo(2:n+1,2:n+1));
    imagesc(mundo);                     % Actualiza la imagen
    drawnow
end
```

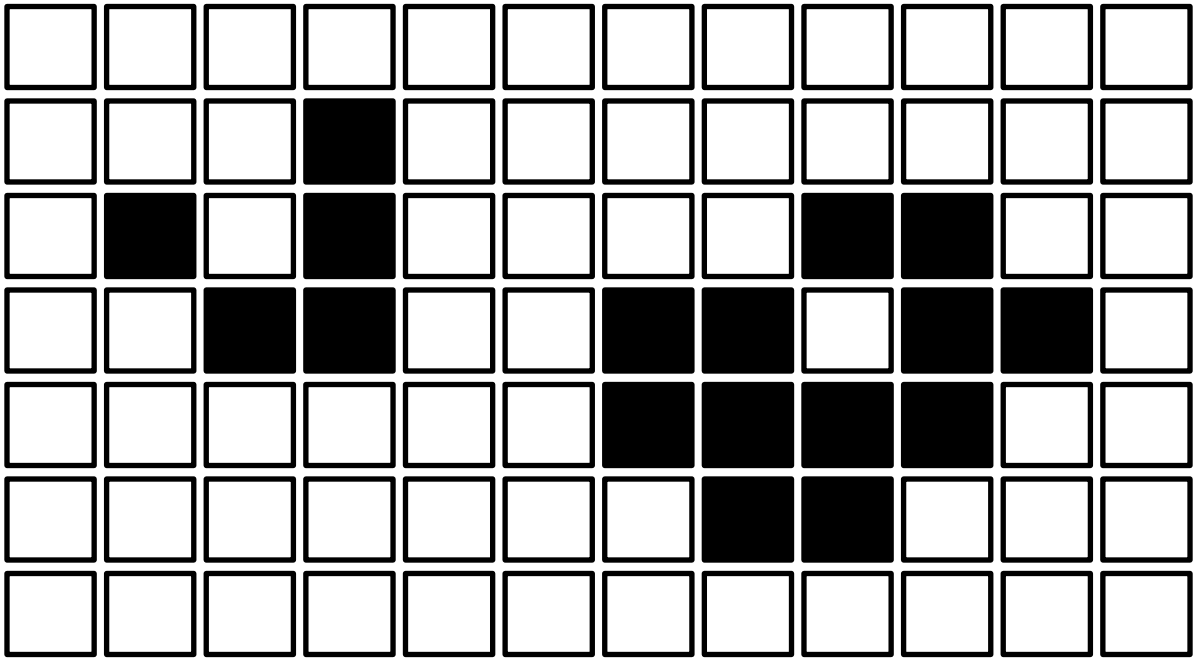
Juego de la vida
Algunos objetos estáticos



Juego de la vida
Algunos objetos períodicos



Juego de la vida
Algunos objetos que se desplazan

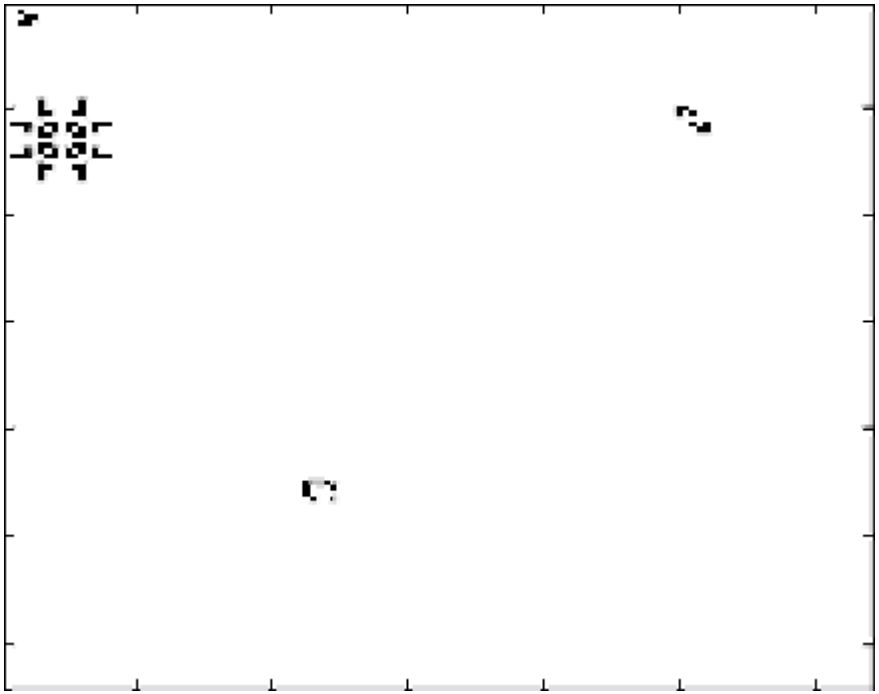


Juego de la vida

```
n = 128;
mundo = zeros(n,n);
mundo(2:4,2:4) = [0 0 1; 1 0 1; 0 1 1];
mundo(20:32,3:15) = [0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0;...
                     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
                     1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1;...
                     1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1;...
                     1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1;...
                     0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0;...
                     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
                     0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0;...
                     1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1;...
                     1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1;...
                     1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1;...
                     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;...
                     0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0];

mundo(90:93,45:49) = [0 1 1 0 0;...
                      1 1 0 1 1;...
                      0 1 1 1 1;...
                      0 0 1 1 0];

mundo(20:24,100:104) = [1 1 0 0 0;...
                        1 0 0 0 0;...
                        0 1 0 1 0;...
                        0 0 0 0 1;...
                        0 0 1 1 1];
```



Juego de la vida
Generador de objetos móviles

```
mundo = zeros(n,n);                    % Inicializa el mundo
mundo(2:10,2:37) = [0 0 0 0 1 1 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 1 1 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 1 1 1 0 0; ...
                    0 0 0 1 0 0 0 1 0; ...
                    0 0 1 0 0 0 0 0 1; ...
                    0 0 1 0 0 0 0 0 1; ...
                    0 0 0 0 0 1 0 0 0; ...
                    0 0 0 1 0 0 0 1 0; ...
                    0 0 0 0 1 1 1 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 1 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 1 1 1 0 0 0 0; ...
                    0 0 1 1 1 0 0 0 0; ...
                    0 1 0 0 0 1 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    1 1 0 0 0 1 1 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 1 1 0 0 0 0 0; ...
                    0 0 1 1 0 0 0 0 0]';
```

¿Por qué “juego de la vida”?
… Auto-Reproducción!

Tensión superficial

Otro conjunto de reglas:

Sume los 8 vecinos más cercanos con la misma celda
Si suma< 4 o suma=5, entonces estado=0
en otro caso, estado=1

```
n=64 ;                                  % Tamaño del mundo
mundo = rand(n,n)>0.5;                  % Inicializa el mundo
imagesc(mundo);                         % Visualiza el mundo
colormap([1 1 1; 0 0 0]);               % 0 - blanco, 1 - negro
axis equal
axis tight
while(1)
    mundo = [mundo(n,n) mundo(n,1:n) mundo(n,1); ... % Forma el toroide
             mundo(1:n,n) mundo mundo(1:n,1); ...
             mundo(1,n) mundo(1,1:n) mundo(1,1)];
    % Evalúa la regla de interacción
    suma  =  mundo(1:n,1:n)   + mundo(1:n,2:n+1)   + mundo(1:n,3:n+2) + ...
             mundo(2:n+1,1:n) + mundo(2:n+1,2:n+1) + mundo(2:n+1,3:n+2) + ...
             mundo(3:n+2,1:n) + mundo(3:n+2,2:n+1) + mundo(3:n+2,3:n+2);
    mundo = (suma==4) + (suma>5);
    imagesc(mundo);                     % Actualiza la imagen
    drawnow
end
```

Medio Excitable

Las celdas pueden estar en 10 estados diferentes, de 0 a 9:

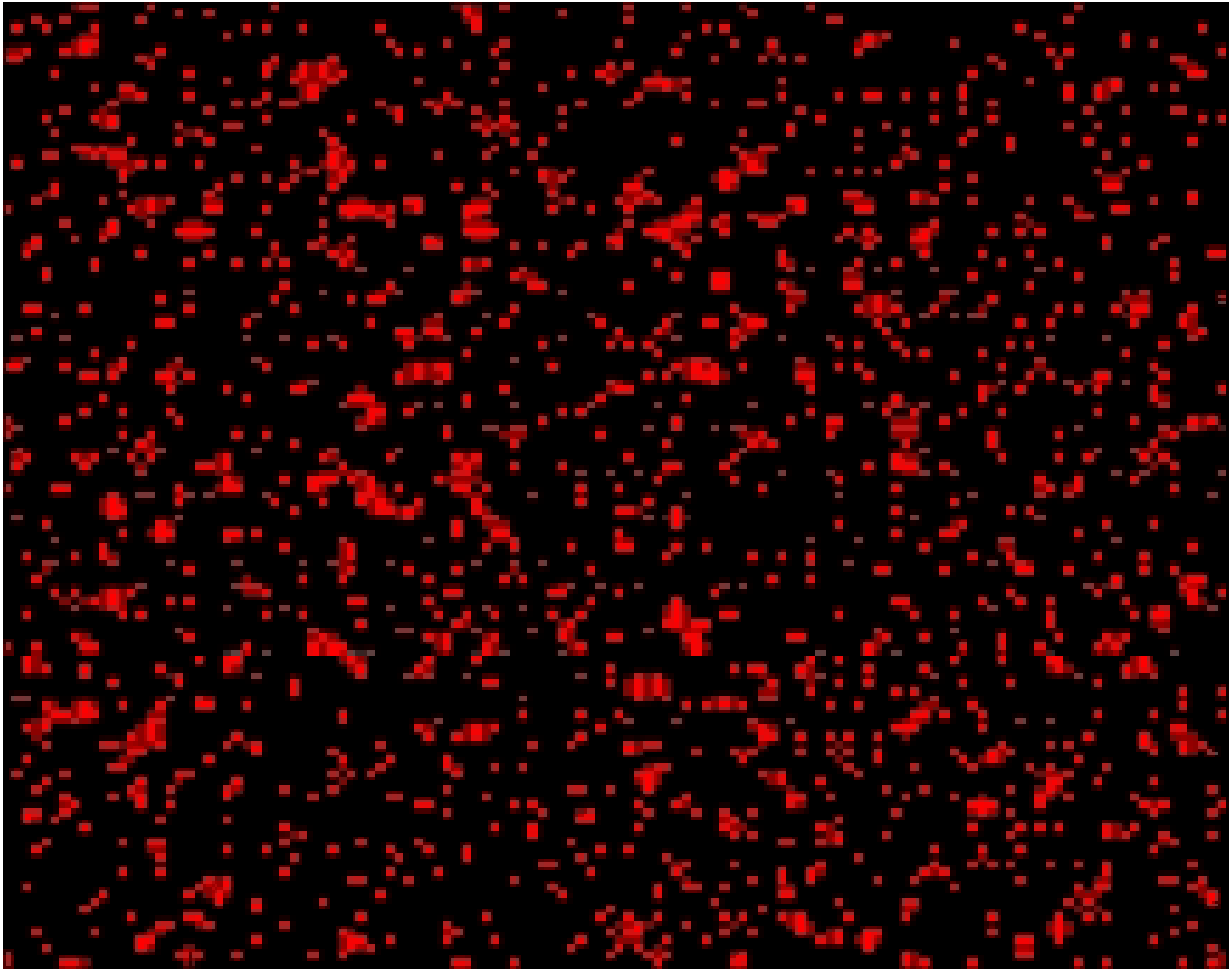
El estado 0 es de reposo, los estados 1-5 son activos, los estados 6-9 son refractarios

Cuente las celdas activas entre las 8 vecinas

Si la suma es mayor o igual a 3, entonces la celda será 1.

Los estados 1 a 9 ocurren en incrementos circulares sin más entradas

```
n=128 ;                                  % Tamaño del mundo
mundo = rand(n,n)>0.9;                   % Inicializa el mundo
imagesc(mundo);                          % Visualiza el mundo
colormap([(0:9)'/9 zeros(10,2)]);        % 0 - blanco, 1 - negro
axis equal
axis tight
while(1)
    mundo = [mundo(n,n)    mundo(n,1:n) mundo(n,1);    ... % Forma el toroide
             mundo(1:n,n) mundo          mundo(1:n,1); ...
             mundo(1,n)    mundo(1,1:n) mundo(1,1)];
    % Evalúa la regla de interacción
    suma  =  ((mundo(1:n,1:n)>0)      .* (mundo(1:n,1:n)<6)      + ...
              (mundo(1:n,2:n+1)>0)    .* (mundo(1:n,2:n+1)<6)    + ...
              (mundo(1:n,3:n+2)>0)    .* (mundo(1:n,3:n+2)<6)    + ...
              (mundo(2:n+1,1:n)>0)    .* (mundo(2:n+1,1:n)<6)    + ...
              (mundo(2:n+1,3:n+2)>0)  .* (mundo(2:n+1,3:n+2)<6)  + ...
              (mundo(3:n+2,1:n)>0)    .* (mundo(3:n+2,1:n)<6)    + ...
              (mundo(3:n+2,2:n+1)>0)  .* (mundo(3:n+2,2:n+1)<6)  + ...
              (mundo(3:n+2,3:n+2)>0)  .* (mundo(3:n+2,3:n+2)<6));
    mundo = mod(mundo(2:n+1,2:n+1) + 1,10);
    mundo = mundo.*(mundo~=1) + (mundo==1).*(suma>2);
    imagesc(mundo);                     % Actualiza la imagen
    drawnow
end
```



The Belousov–Zhabotinsky Reaction

¡No sólo sugestivo!

Modelos de fenómenos reales

- Mecánica estadística
- Conjuntos químicos autocatalíticos
- Regulación genética
- Organismos multicelulares
- Colonias y super-organismos
- Bandadas de aves, rebaños de mamíferos, bancos de peces, multitudes de humanos
- Sistemas ecológicos
- Economía y finanzas
- Tráfico urbano
- Etc.

percepción, aprendizaje, evolución, adaptación:

Sistemas complejos

Los sistemas complejos

Involucran

Muchos componentes

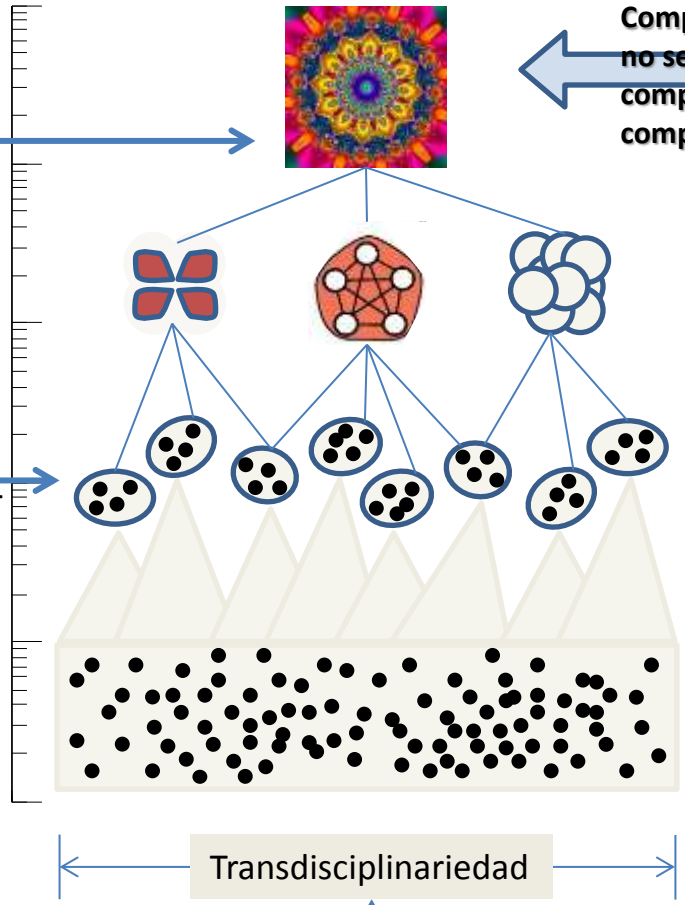
Que interactúan dinámicamente

Generando

Diferentes escalas o niveles

donde exhiben

Comportamientos comunes



Comportamiento emergente que no se puede inferir a partir del comportamiento de los componentes

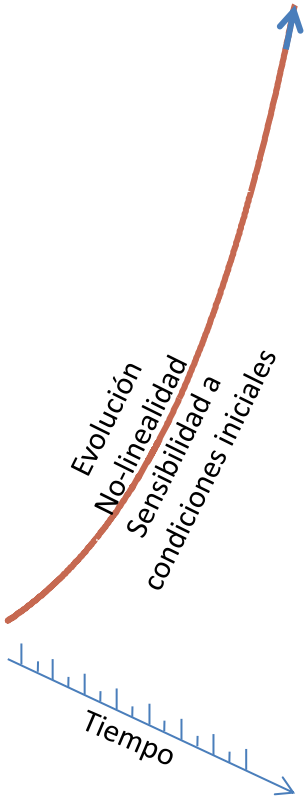
Emergencia

Jerarquías

Estructuras

Auto-organización

Componentes

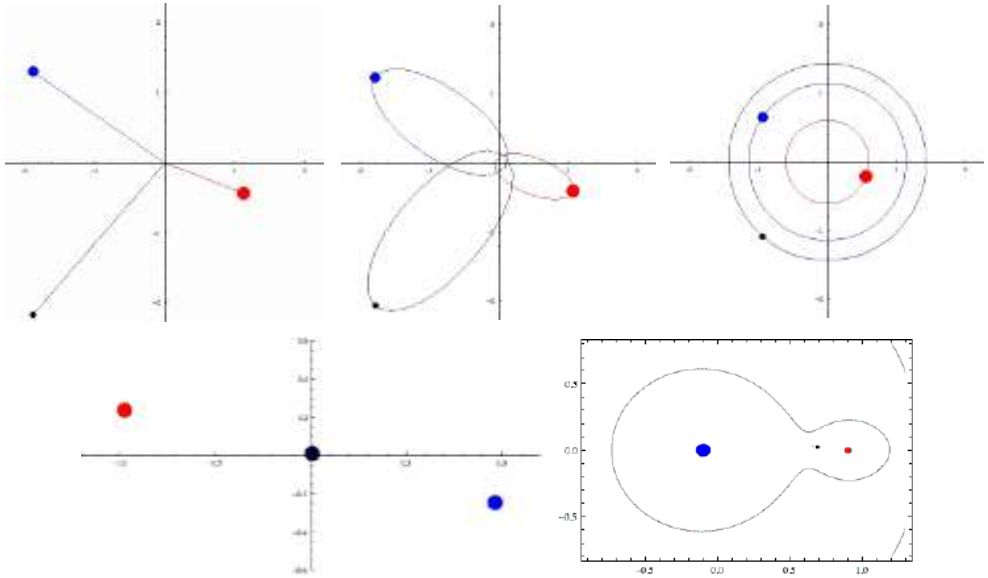


SISTEMAS COMPLEJOS

- Leyes de Potencia
- Redes libres de escala
- Fractales
- Caos
- Criticalidad
- Transición de fase
- Auto-organización
- Emergencia
- Aprendizaje
- Evolución
- Adaptabilidad
- …

Sistemas complejos

Un sistema complejo

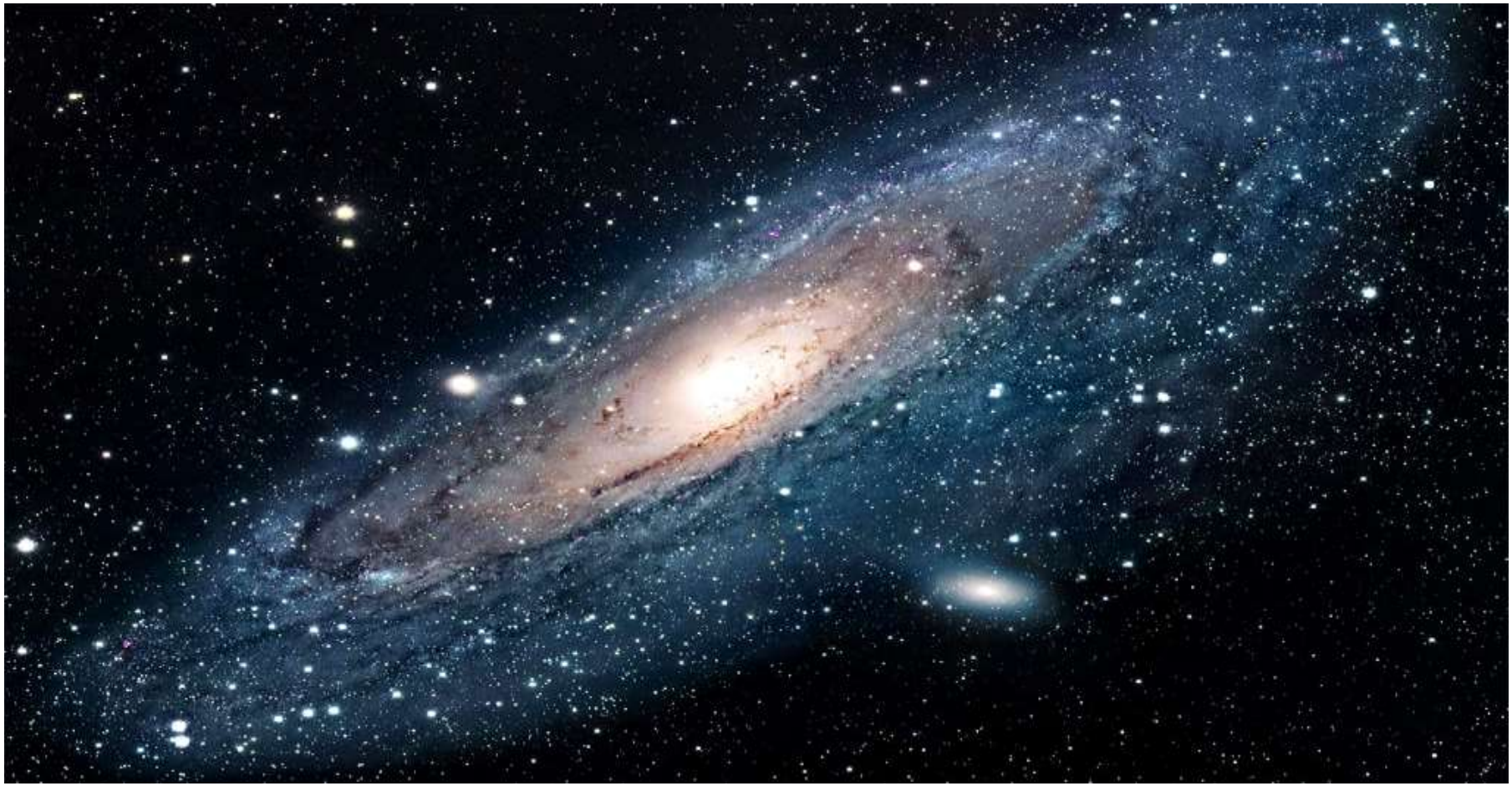


Elementos sencillos: Posición, masa, velocidad

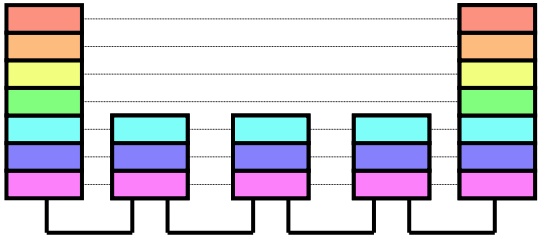
Interacciones sencillas: Dos cuerpos se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos

Aunque es fácil determinar la posición exacta de dos cuerpos en cada instante de tiempo, la solución al problema de tres cuerpos puede ser arbitrariamente compleja y está lejos de ser comprendida.

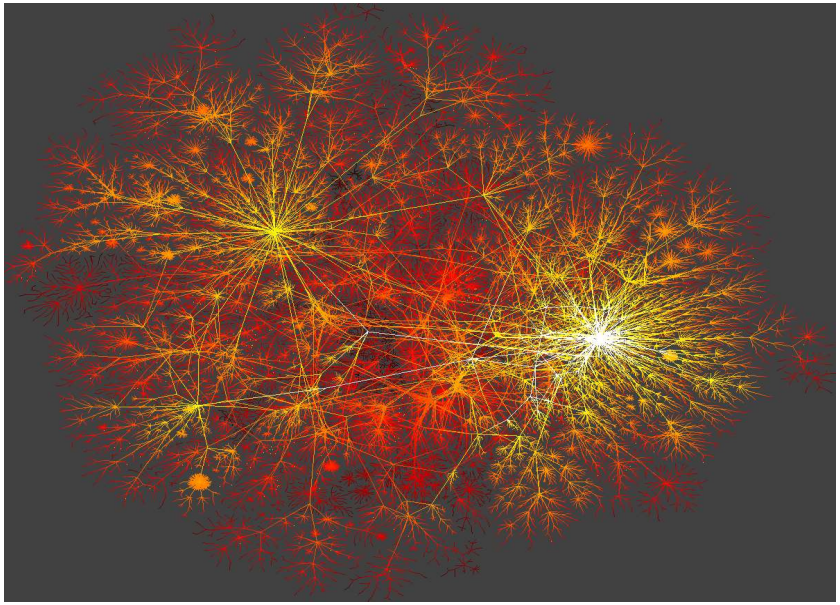
Un sistema complejo



Un sistema Complejo



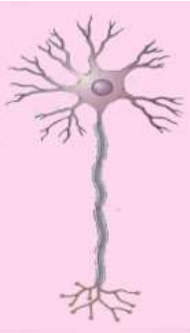
Elementos sencillos
Interacciones sencillas

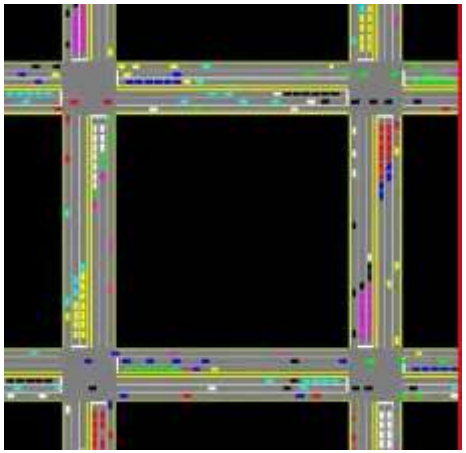


Comportamiento complejo, emergente, auto-organizado

- Tráfico fractal
- Topologías lógicas y físicas libres de escala
- Dinámica de protocolos potencialmente caótica
- Auto-organización al borde de la congestión
- …

Algunos otros sistemas complejos





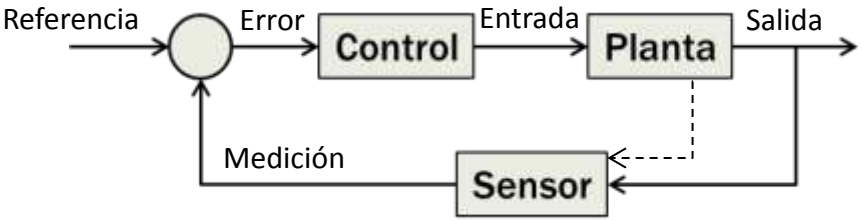
7. Ingeniería clásica bio-inspirada

Problema básico de la ingeniería: Control de sistemas dinámicos

- **Objetivo:** Influenciar el comportamiento de un sistema dinámico ya sea para mantener las salidas en un valor constante (regulación) o para hacerlas seguir una función determinada del tiempo (*tracking*).

- **Método**: Usar todos los datos disponibles en cada instante para determinar las entradas de control al sistema, alcanzando convergencia rápida, exactitud, estabilidad y robustez ante la presencia de perturbaciones.

- **Tipos de control**: Control lineal, control adaptivo, control estocástico, control robusto, control óptimo, control no-lineal, control jerárquico, control distribuido (…)



Control de sistemas lineales

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

Controlabilidad y estabilidad: Si (A,B) es controlable, el sistema se puede estabilizar realimentando el estado: $u = k^T x$.

Observabilidad y estabilidad: Si (A, B, C) es controlable y observable, el estado x se puede estimar mediante $\hat{x}$ y el estimado se puede realimentar para estabilizar el sistema, $u = k^T \hat{x}$.

Siso + Condiciones iniciales nulas: Mapa I/O (ARMA) $\Rightarrow$ Dominio de la frecuencia.

FÁCIL... ¿?

Control de Sistemas Lineales

Por ejemplo, control óptimo: $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right)$

Hay un conjunto de "controles admisibles", $\mathscr{U}$

Hay un conjunto de "trayectorias de estado admisibles", $\mathscr{X}$

Encontrar la ley de control $u^* \in \mathscr{U}$ que haga que el sistema siga una trayectoria $x^* \in \mathscr{X}$ tal que el siguiente "costo" se minimice:

$$J = h\left(\boldsymbol{x}(t_f), t_f\right) + \int_{t_0}^{t_f} d\left(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t\right) dt$$

Mínimo tiempo: $J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$

Mínimo error en el destino: $J = \left\| \boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{r}(t_f) \right\|^2$

Mínimo esfuerzo: $J = \int_{t_0}^{t_f} \left\| \boldsymbol{u}(t) \right\|^2 dt$

Trayectoria óptima: $J = \int_{t_0}^{t_f} \left\| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{r}(t) \right\|^2 dt$

Regulador: $J = \int_{t_0}^{t_f} \left\| \boldsymbol{x}(t) \right\|^2 dt$

Combinaciones de las anteriores, etc.

Control de sistemas lineales

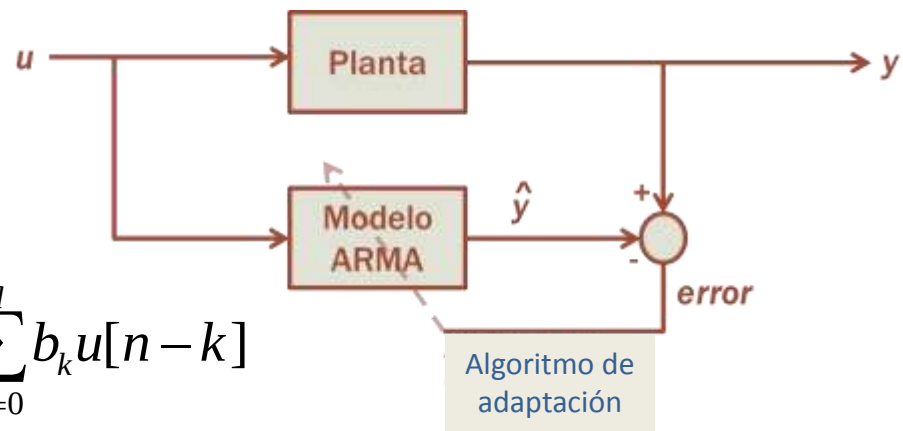
Sistemas lineales invariantes en el tiempo

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$$

$$y[k] = Cx[k] + Du[k]$$

Muy fácil, pero… ¿Si el sistema es desconocido? $\Rightarrow$ Control adaptivo: se pierde la linealidad

Identificación: Se deben estimar los parámetros desconocidos de la planta a partir de mediciones de pares Entrada/Salida.
El control es adaptivo si la estimación se hace en línea.



$$\hat{y}[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b_k u[n-k]$$

+ sistemas lineales variantes en el tiempo, o sistemas lineales no estacionarios

Control de sistemas no-lineales

$$x[k+1] = F\left(x[k], u[k], k\right)$$

$$y[k] = H\left(x[k], k\right)$$

Controlabilidad: Desde cualquier estado inicial se puede llevar a cualquier estado final mediante una entrada de control apropiada

$$\forall x[0], x[n]\ \exists\left\{u[0],\ldots,u[n-1]\right\}\ :\ x[n] = F\left(\cdots F\left(F\left(x[0],u[0]\right),u[1]\right)\cdots,u[n-1]\right) \triangleq \Phi\left(x[0],\left\{u[0],\ldots,u[n-1]\right\}\right)$$

Observabilidad: El estado inicial se puede determinar observando la salida del sistema en un intervalo finito de tiempo

Estabilidad: Concepto local: Un punto de equilibrio es estable-Lyapunov si todas las trayectorias que empiezan suficientemente cerca de él permanecen cerca a él

Control de sistemas no-lineales

$$x[k+1] = F\left(x[k], u[k], k\right)$$

$$y[k] = H\left(x[k], k\right)$$

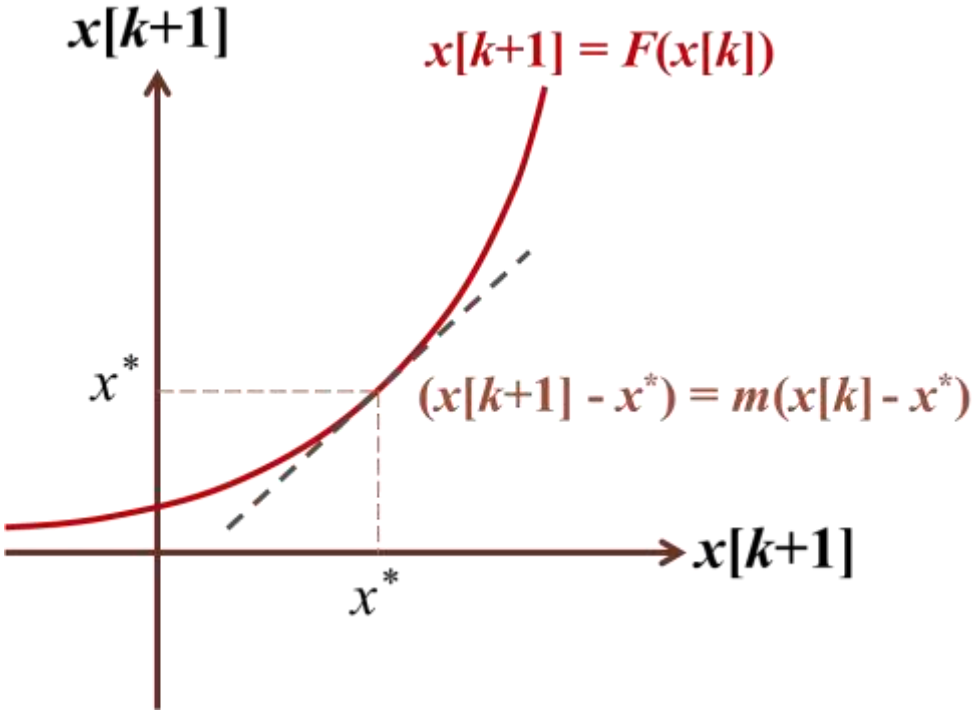
Sean $A = \frac{\partial}{\partial x} F\left(x_0, u_0\right), \quad B = \frac{\partial}{\partial u} F\left(x_0, u_0\right) \quad y \quad C = \frac{\partial}{\partial x} H\left(x_0, u_0\right)$

Si A, B y C son controlables (u observablea o estables), el sistema (F, H) es controlable (u observable o asintóticamente estable) en algún vecindario de (x_0, u_0)

CONTROL DE SISTEMAS NO-LINEALES

$$x[k+1] = F\left(x[k], u[k], k\right)$$

$$y[k] = H\left(x[k], k\right)$$



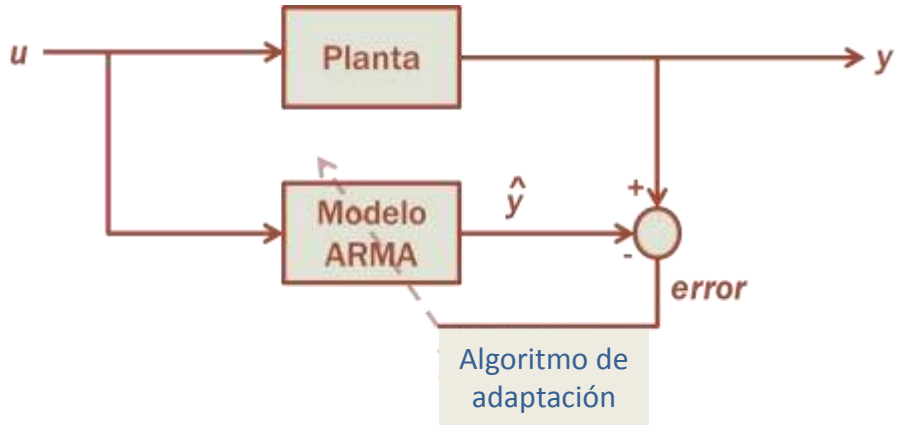
Control de sistemas no-lineales

$$x[k+1] = F\left(x[k], u[k], k\right)$$

$$y[k] = H\left(x[k], k\right)$$

Parecía difícil, pero se hizo fácil, aunque… ¿Si el sistema es desconocido?
¿o si el rango de operación sobrepasa una región de linealidad?

Identificación: Se deben estimar los parámetros desconocidos de la planta a partir de mediciones de pares Entrada/Salida.
El control es adaptivo si la estimación se hace en línea.



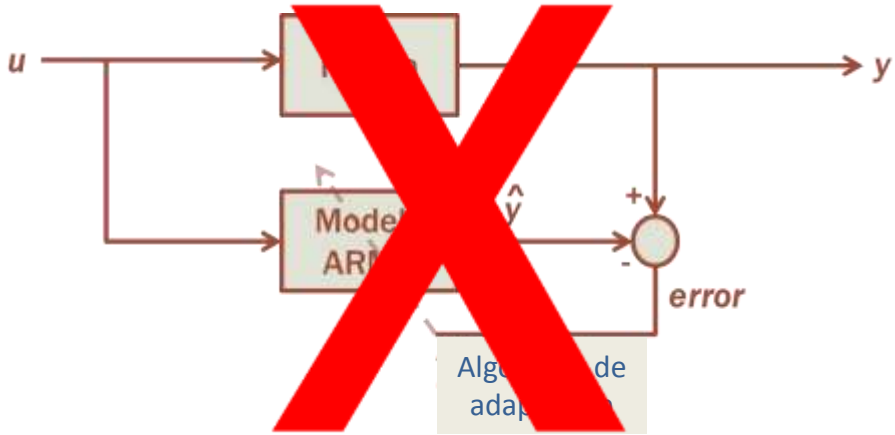
Control de sistemas no-lineales

$$x[k+1] = F\left(x[k], u[k], k\right)$$

$$y[k] = H\left(x[k], k\right)$$

Parecía difícil, pero se hizo fácil, aunque… ¿Si el sistema es desconocido?
¿o si el rango de operación sobrepasa una región de linealidad?

Identificación: Se deben estimar los parámetros desconocidos de la planta a partir de mediciones de pares Entrada/Salida.
El control es adaptivo si la estimación se hace en línea.



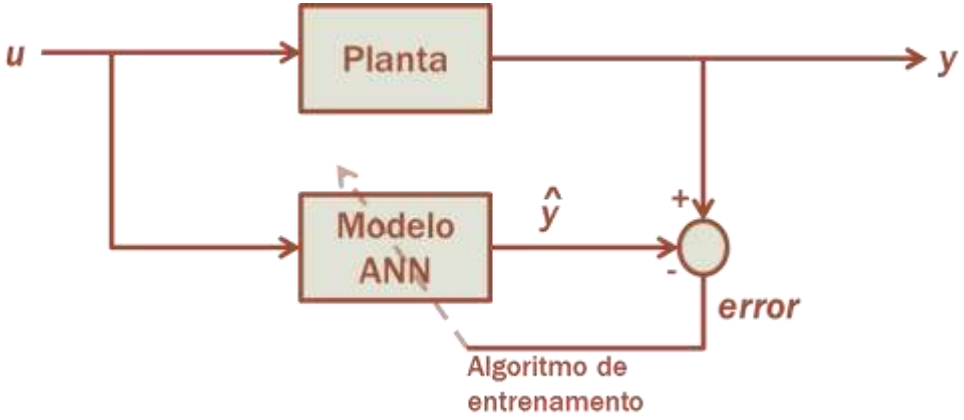
Control de sistemas no-lineales

$$x[k+1] = F\left(x[k], u[k], k\right)$$

$$y[k] = H\left(x[k], k\right)$$

Control adaptivo no-lineal!

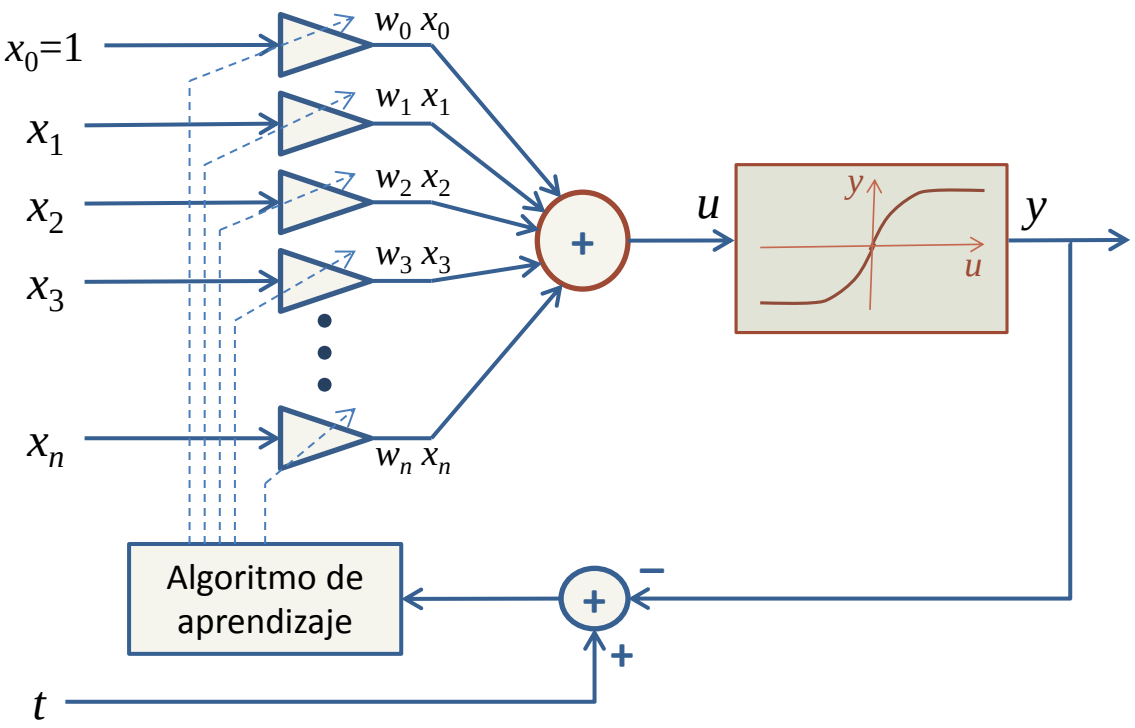
Identificación:



Determine un modelo tal que $\lim_{k\to\infty}\left\|y[k]-\hat{y}[k]\right\| \le \varepsilon$

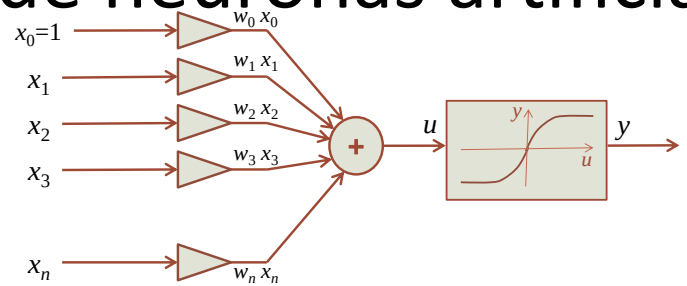
Redes neuronales

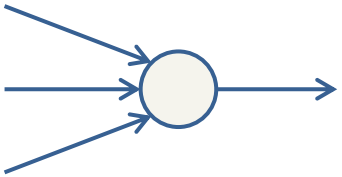
Una neurona artificial que aprende:

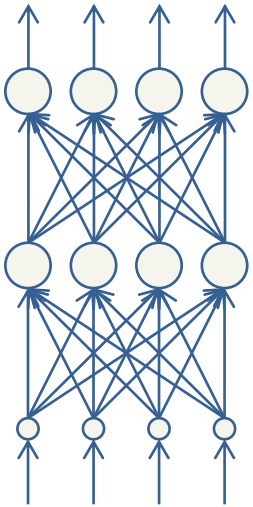


Redes neuronales

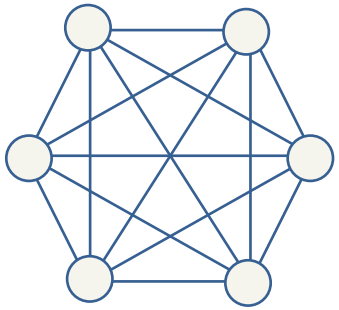
Redes de neuronas artificiales:



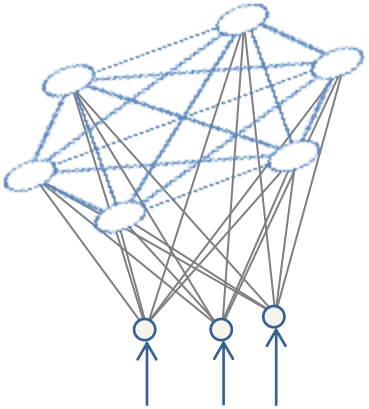




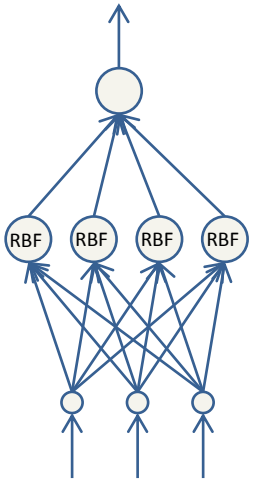
Perceptrón multicapa



Red de Hopfield



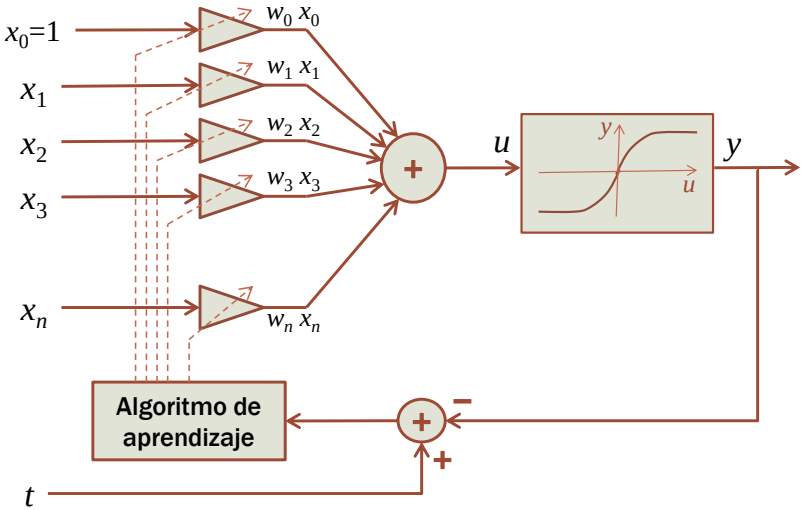
Mapa auto-organizado de Kohonen



Red de funciones de base radial

Redes neuronales y control

Las ANN traen al mundo de la computación capacidades novedosas como percepción, aprendizaje, adaptación, paralelismo masivo… y fácil implementación (HW y SW).



Computación neuronal	Computación convencional
Muchos procesadores sencillos	Pocos procesadores complicados
Pocos pasos de procesamiento	Muchos pasos de procesamiento
Procesamiento distribuido	Procesamiento centralizado
Robustez (degradación suave)	Fallas catastróficas
Entrenamiento – aprendizaje	Programación explícita

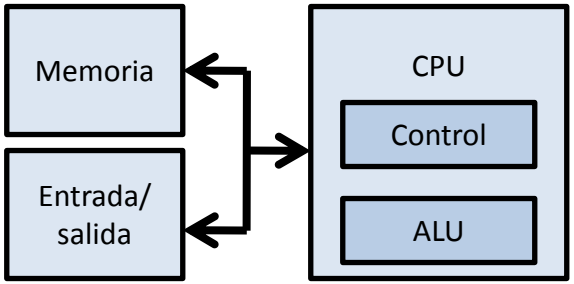
Incontables aplicaciones exitosas

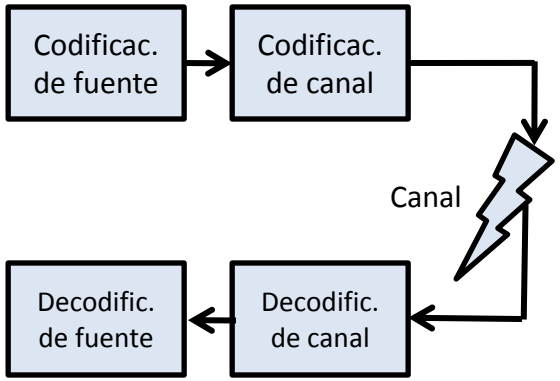
- Visión artificial
- Detección de patrones
- Filtrado de señales
- Realidad virtual
- Segmentación de datos
- Compresión de datos
- Minería de datos
- Vida artificial
- Optimización
- Un gigantesco ETC.

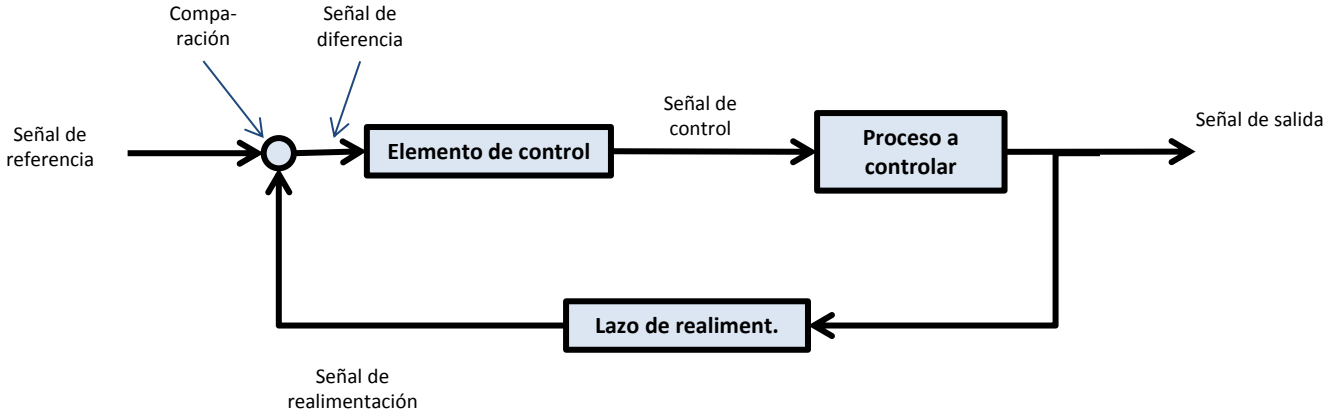
- Desde sus inicios, las aplicaciones de las ANN son cada vez más sorprendentes
- ¿Hay algún límite a su capacidades?
- El futuro de las ANN es aún muy amplio, más allá de la imaginación
- Algunas investigaciones sobre ANN plantean preguntas como
  - ¿es posible crear intuición?
  - ¿es posible crear conciencia?
  - ¿Cómo funciona la mente humana?

La ANN es un sistema complejo

El reduccionismo mecanicista tiene una larga historia de éxitos en la ingeniería clásica

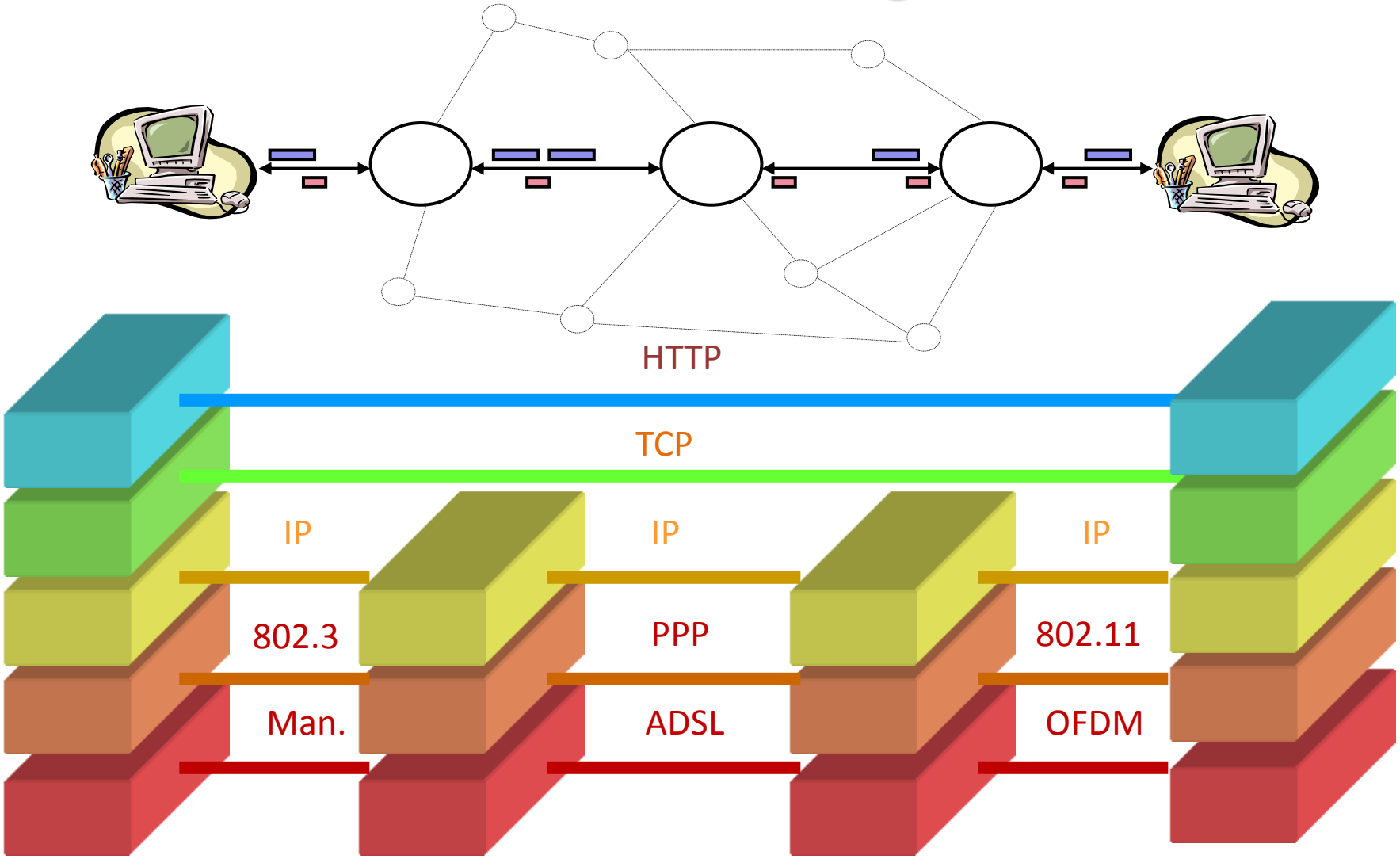




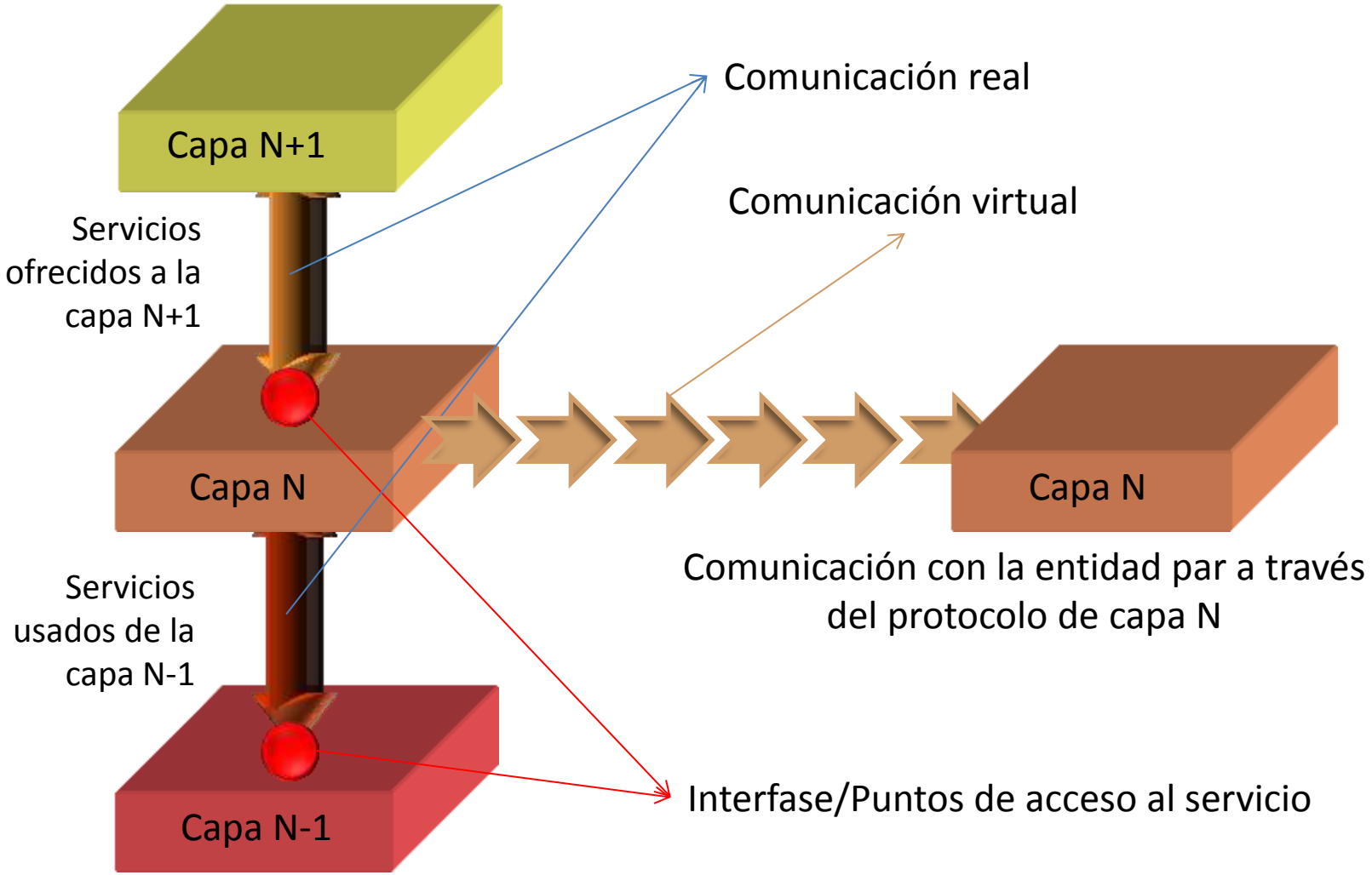


Con la ayuda de sistemas bio-inspirados para la solución de problemas “difíciles”

El máximo logro del reduccionismo mecanicista en la historia de la ingeniería

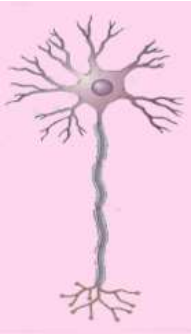


El máximo logro del reduccionismo mecanicista en la historia de la ingeniería



Soluciones bio-inspiradas

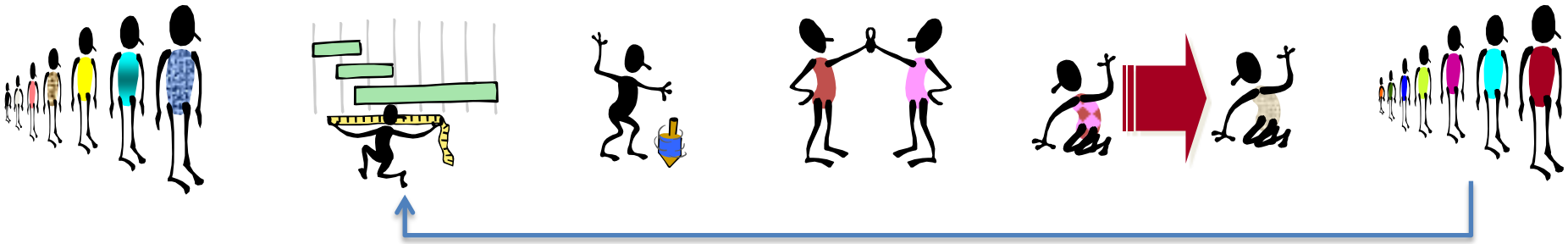
Redes Neuronales



Redes neuronales para estructuras eficientes de conmutación rápida de paquetes
Redes neuronales para optimización de enrutamiento en redes de paquetes
Redes neuronales para control adaptivo de congestión
Redes neuronales para sistemas de control de admisión
Redes neuronales para ecualización de canales
Etc.

Soluciones bio-inspiradas

Evolución genética

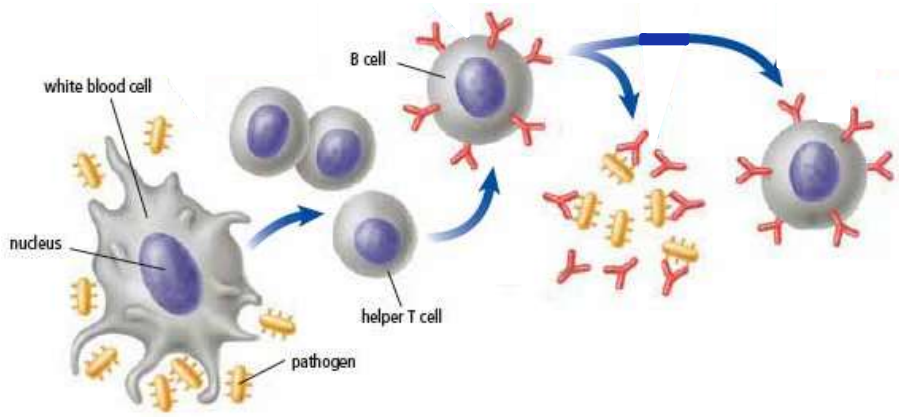


Algoritmos genéticos para diseño de redes de comunicaciones mediante optimización multi-objetivo

Algoritmos genéticos para selección de parámetros óptimos en enrutamiento, control de admisión, control de congestión, reserva de recursos, administración de memoria, etc.

Soluciones bio-inspiradas

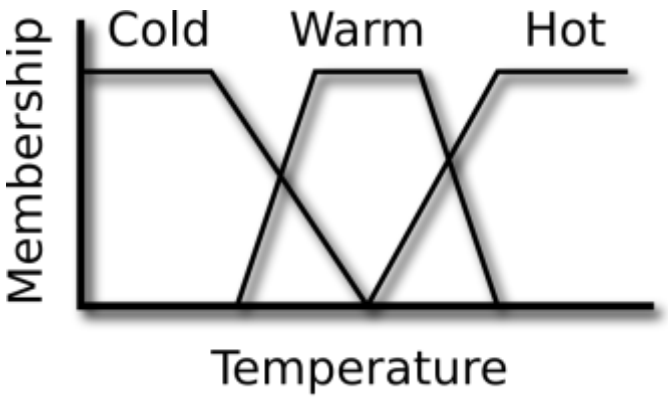
Sistemas inmunes Artificiales



AIS para detección de intrusos
AIS para detección de anomalías
AIS para negociación descentralizada de políticas de servicio
AIS para detección de usuarios no colaboradores en redes ad hoc
AIS para filtrado de correo spam
Etc.

Soluciones bio-inspiradas

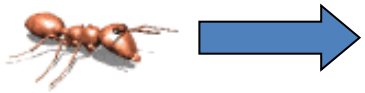
Sistemas Difusos



Sistemas difusos para control adaptivo de congestión
Sistemas difusos para sistemas de control de admisión
Sistemas difusos para ecualización de canales
Etc.

Soluciones bio-inspiradas

Inteligencia de enjambre



Enrutamiento mediante colonia de hormigas
Dispersión de tráfico mediante colonia de hormigas
Sincronización en redes ad hoc mediante luciérnagas
Etc.

¿Porqué resultan tan efectivas?

Deben operar bajo condiciones de

- Incertidumbre
- Recursos escasos (cooperar/competir)
- fractalidad
- no-linealidad (caos potencial)
- Criticalidad
- auto-organización

La vida usa

- Percepción
- Aprendizaje
- Evolución
- Adaptación

Soluciones bioinspiradas basadas en

- Redes Neuronales
- Inteligencia de enjambre
- Evolución genética
- Sistemas difusos
- Sistemas inmunes artificiales
- etc.

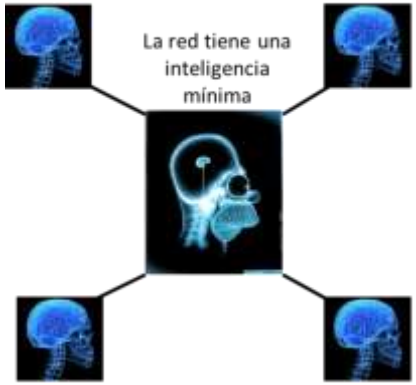
8. Ingeniería de Sistemas Complejos

Todas las condiciones para la Complejidad

Del
Modelo de la red telefónica

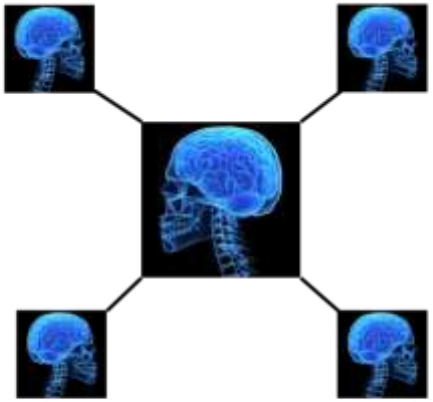
Los terminales tienen una inteligencia mínima

Al
Modelo de la red IP



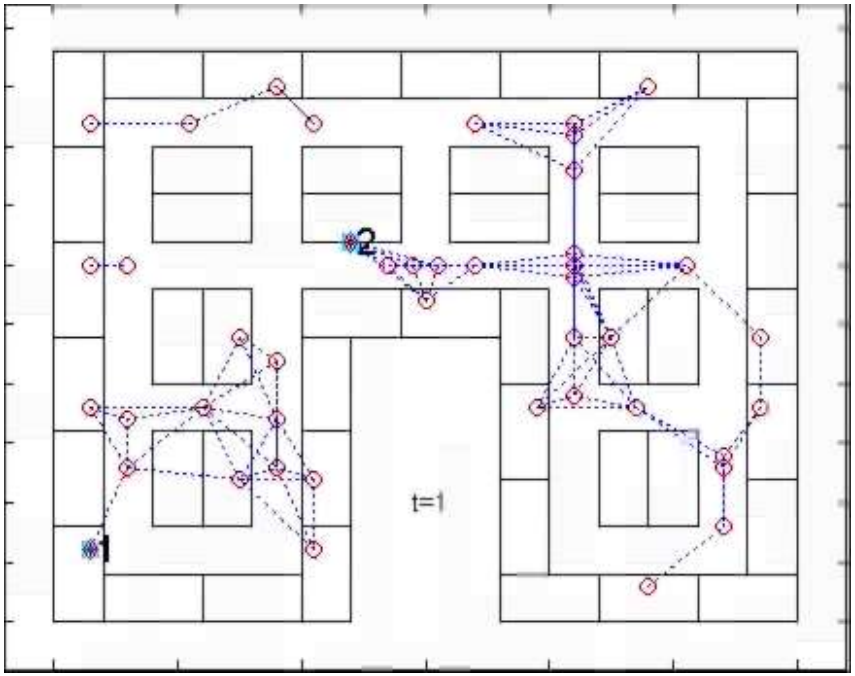
La inteligencia está en los terminales

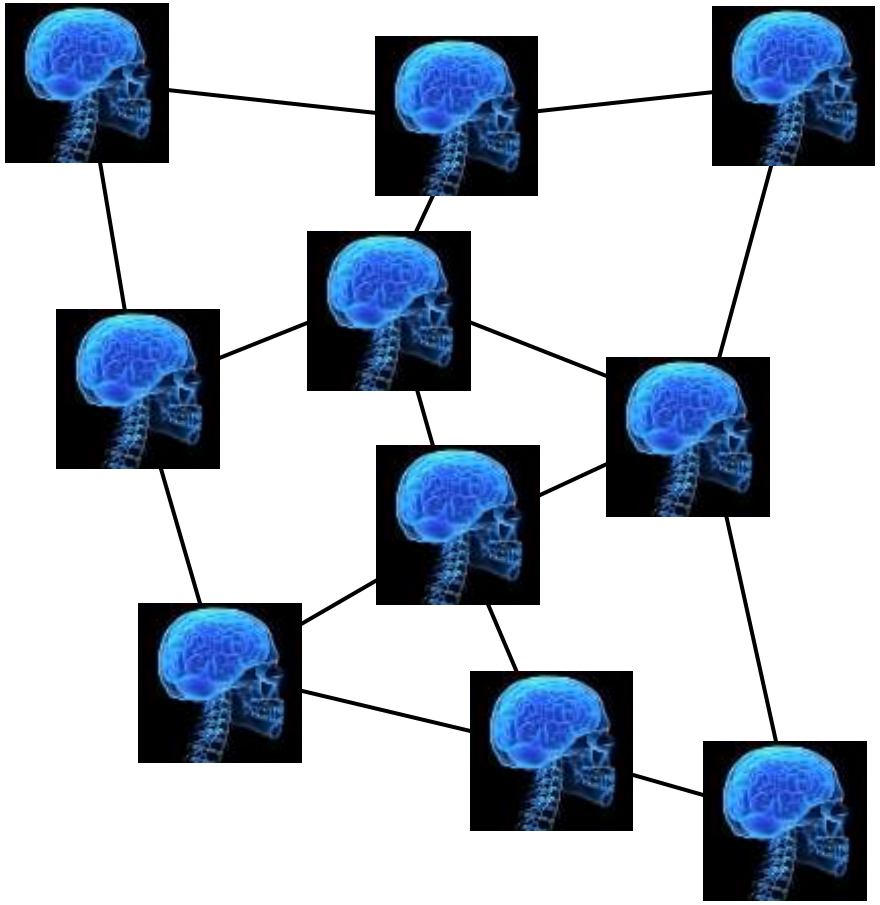
Al modelo de red multiservicios de hoy



La inteligencia se distribuye entre los terminales (aplicaciones de procesamiento de información) y la red (control de admisión, control de congestión, garantías de desempeño para múltiples clases de servicio, ingeniería de tráfico, etc.)

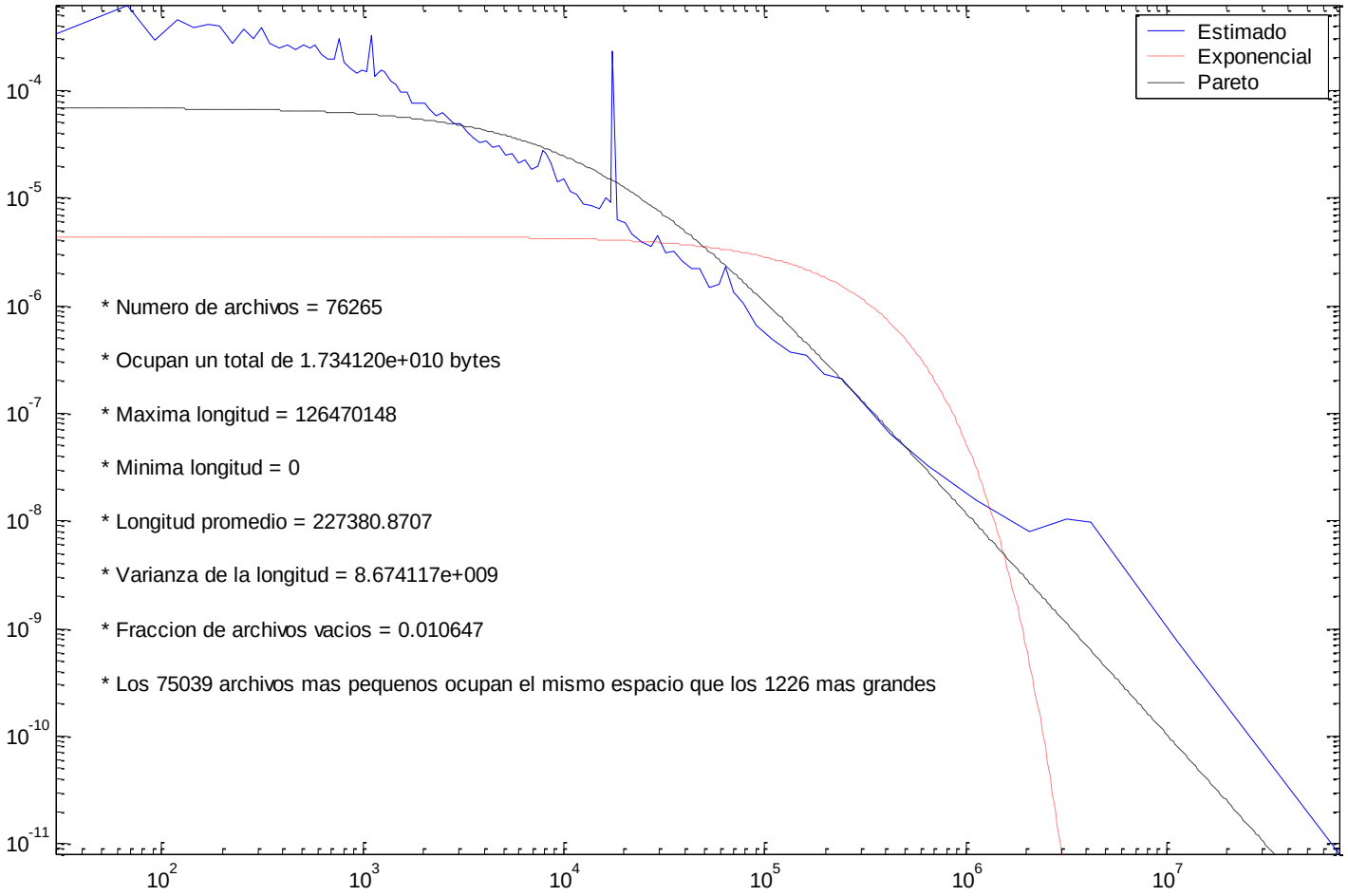
Todas las condiciones para la Complejidad



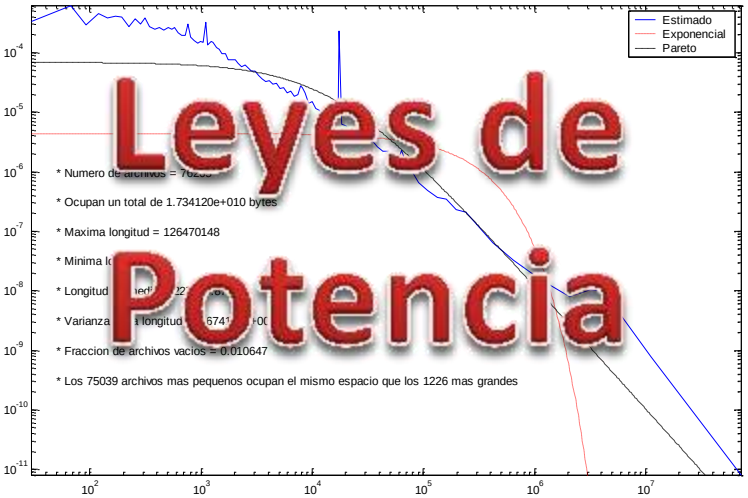


A agentes inteligentes y autónomos que compiten (y cooperan) entre ellos para utilizar recursos escasos y de capacidad limitada

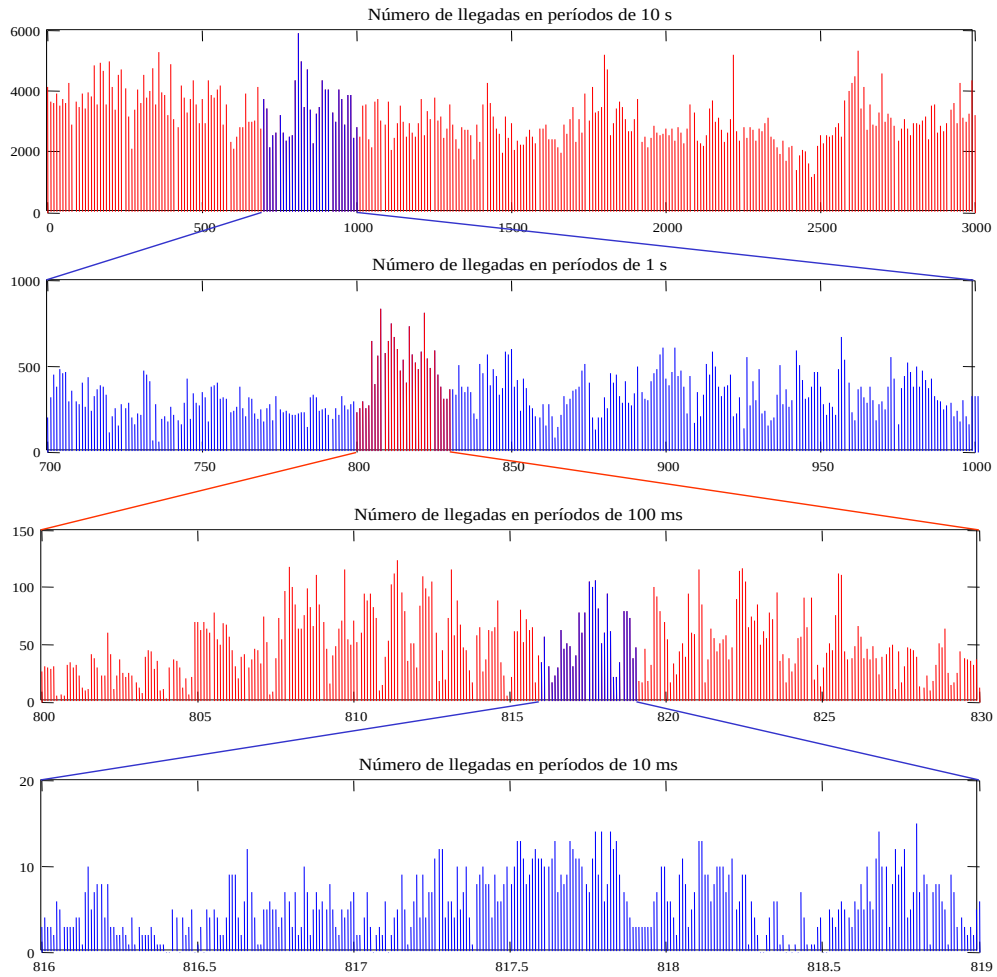
Leyes de Potencia



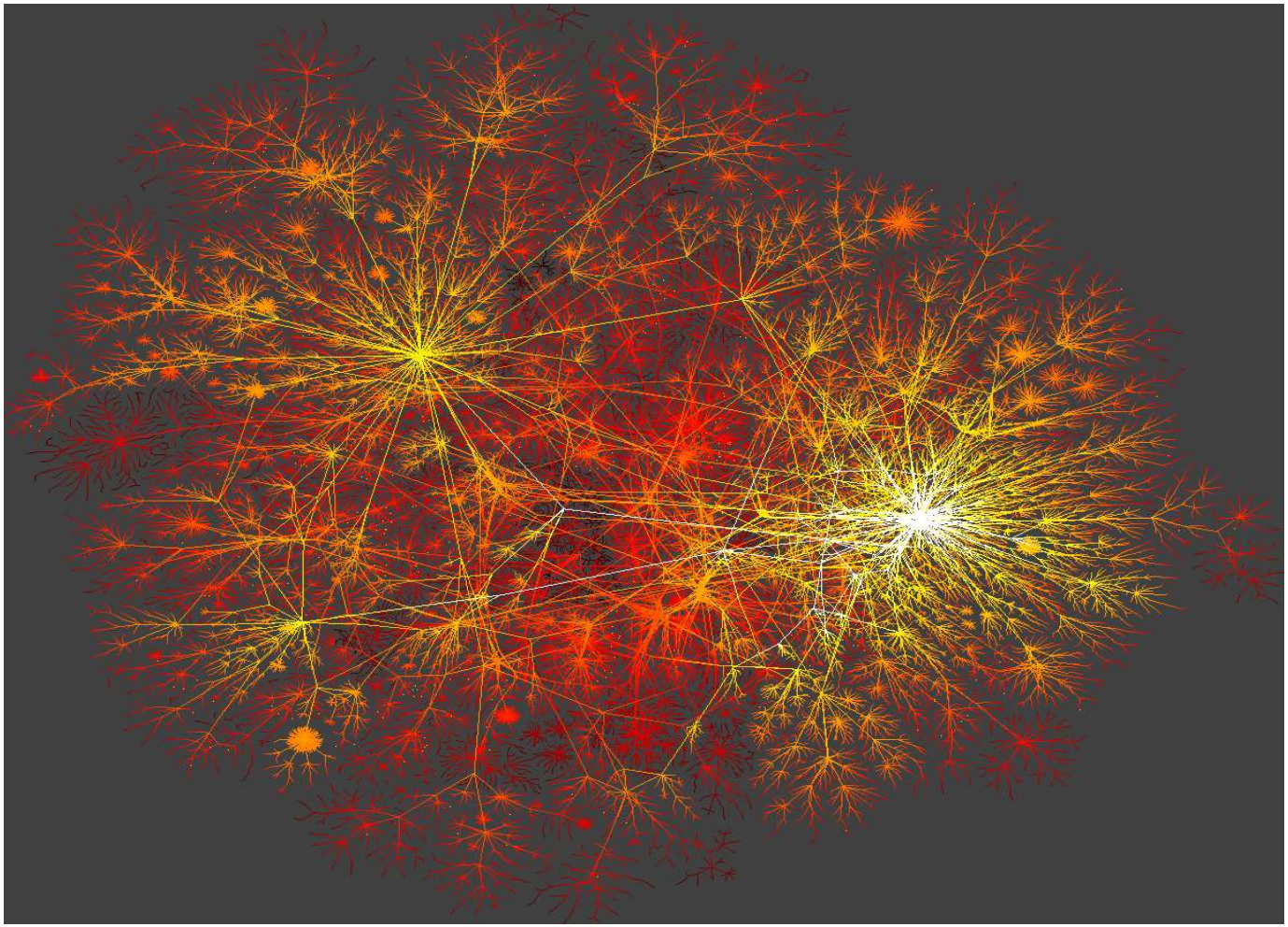
Tráfico Fractal



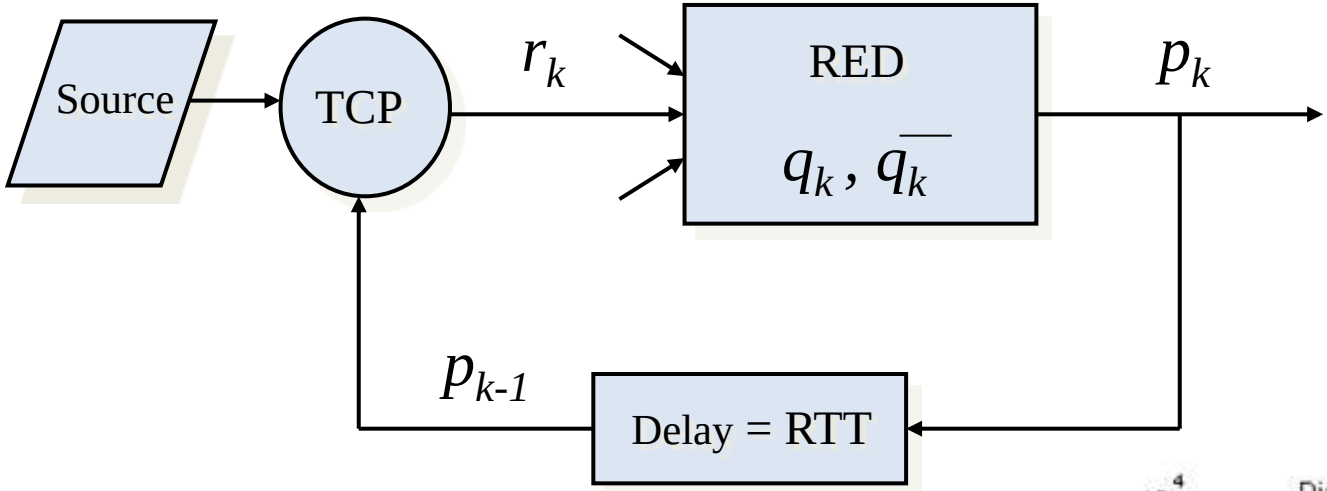
Leyes de Potencia

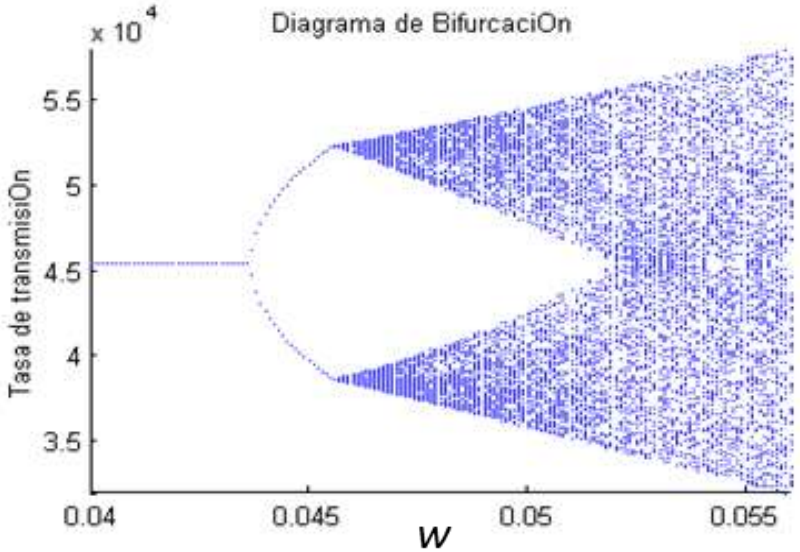


Topologías físicas y lógicas libres de escala

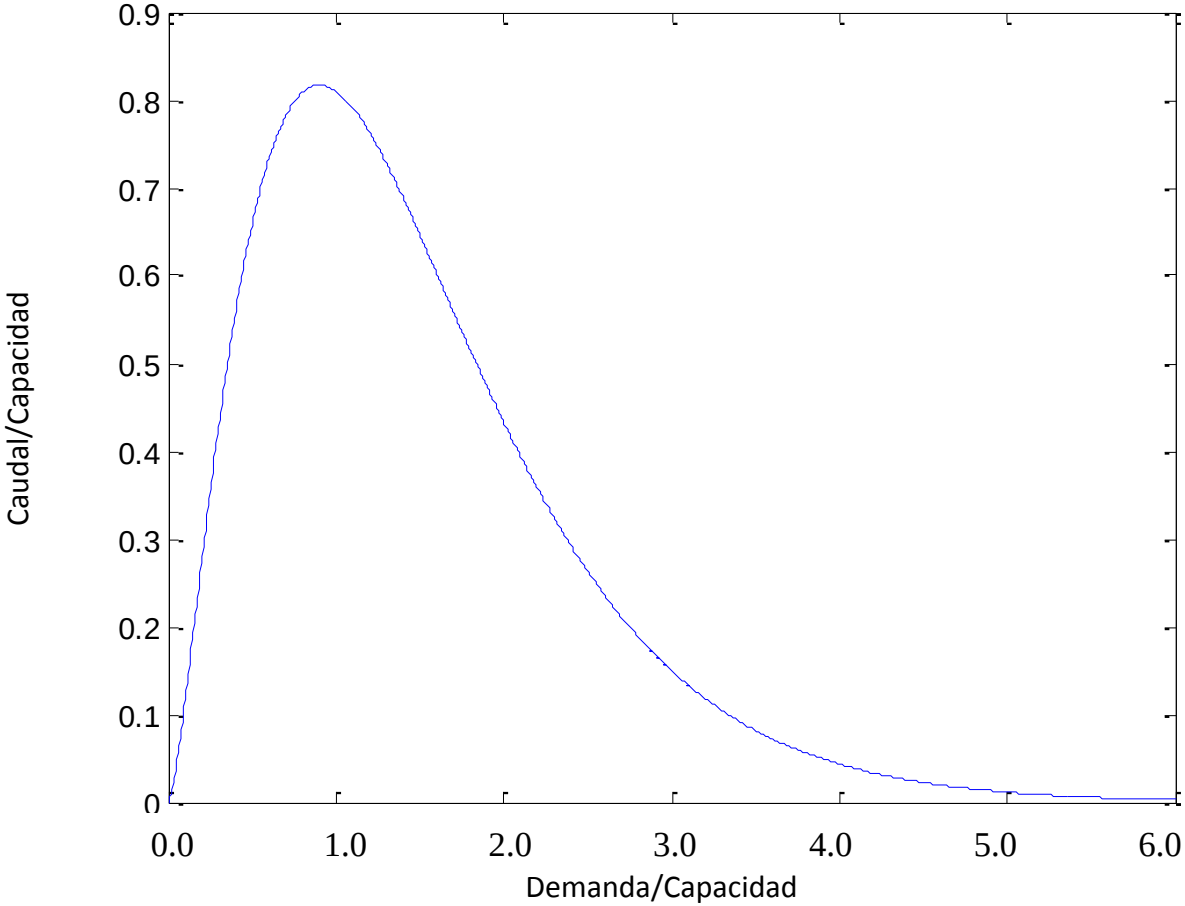


Caos potencial en las dinámicas de los Protocolos de control de congestión





Auto-organización al borde de la congestión

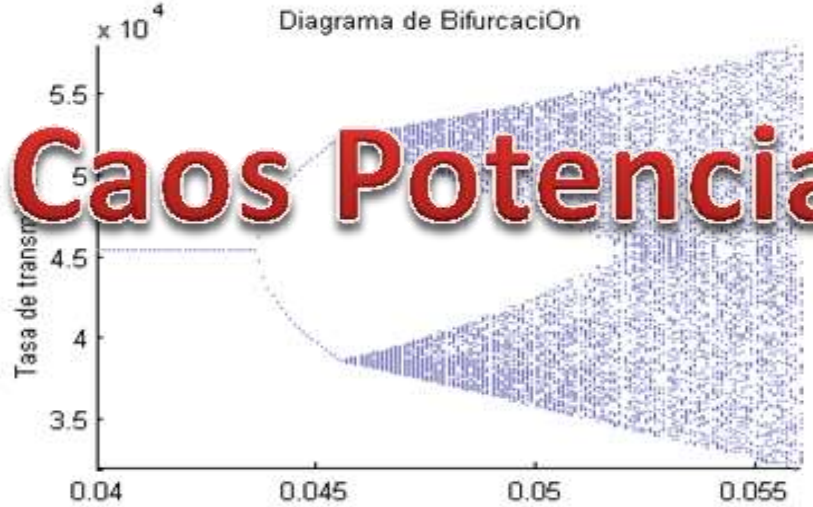


Complejidad en Redes de Comunicaciones

Leyes de Potencia

Tráfico Fractal

Redes libres de escala



Caos Potencial

Auto-Organización

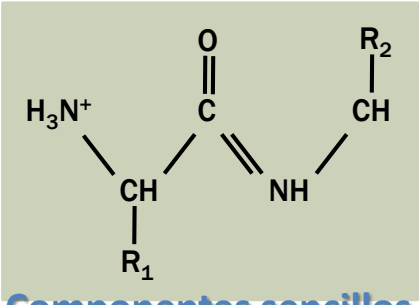
Origen de la complejidad

Componentes sencillos
Interacciones sencillas

Comportamiento emergente
auto-organizado

SOC/EOC

Self-organized criticality/
Edge of chaos
(propio de la mecánica estadística)



Componentes sencillos
Interacciones sencillas

Comportamiento emergente
auto-organizado

HOT

Highly Optimized Tolerance
(propio de sistemas optimizados)
Vida: Optimización por Evolución,
Tecnología: Optimización por Diseño

Procesos de optimización generadores de complejidad

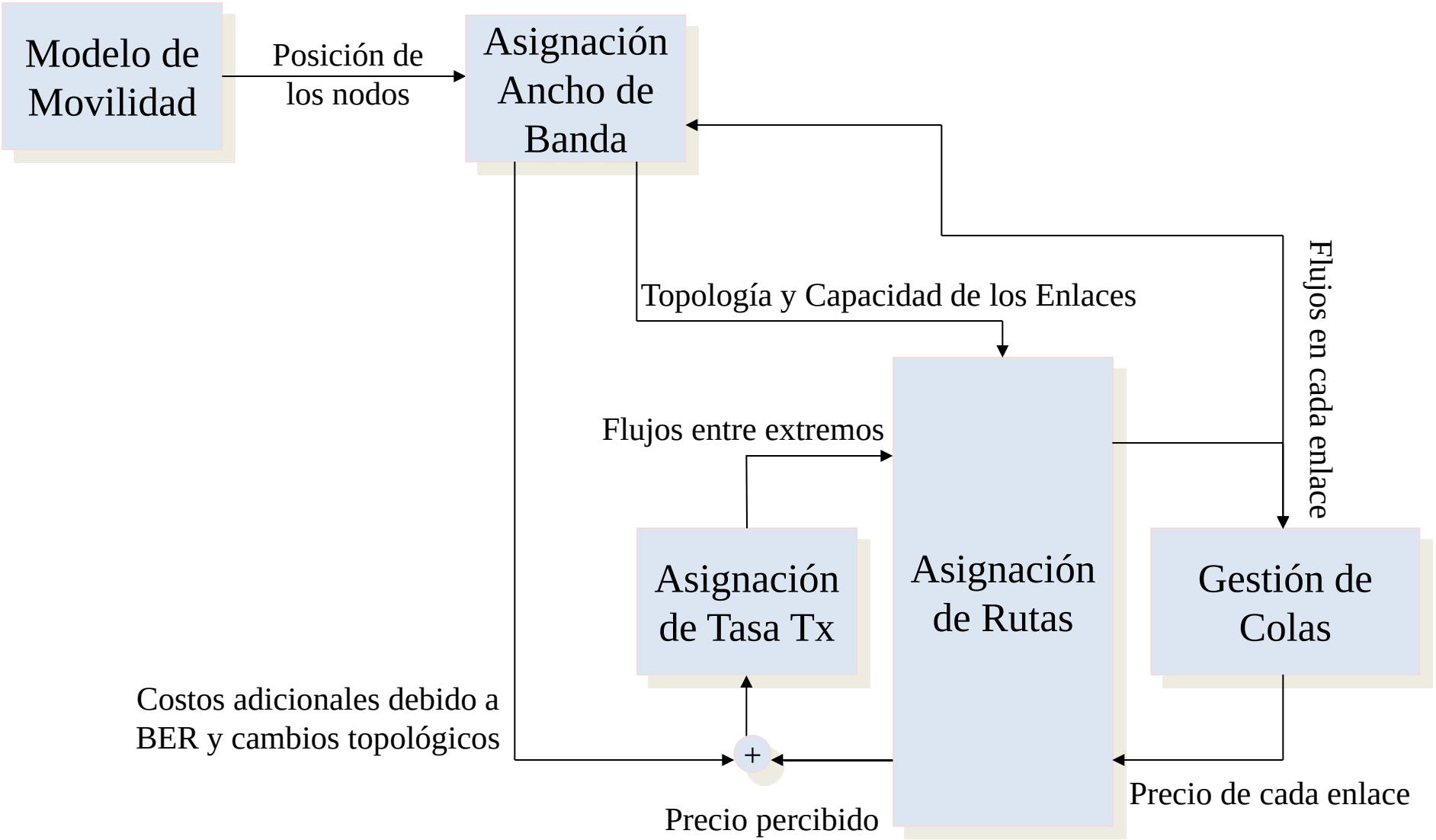
- $U_s(x_s,p_s)$ es la función de utilidad de la fuente s al transmitir a una tasa x_s con una probabilidad de error p_s.
- $V_j(w_j)$ es la utilidad que se obtiene al disponer de w_j recursos en el nodo j
- $\boldsymbol{R}$ es la matriz de enrutamiento, donde $R_{ls} = 1$ indica que la fuente s utiliza el enlace l
- $\boldsymbol{c}$ es la capacidad de los enlaces, que depende de los recursos de nivel físico y de la probabilidad de error de decodificación deseada
- $\boldsymbol{F}$ es la matriz de contienda

Encontrar $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{F}$ tales que

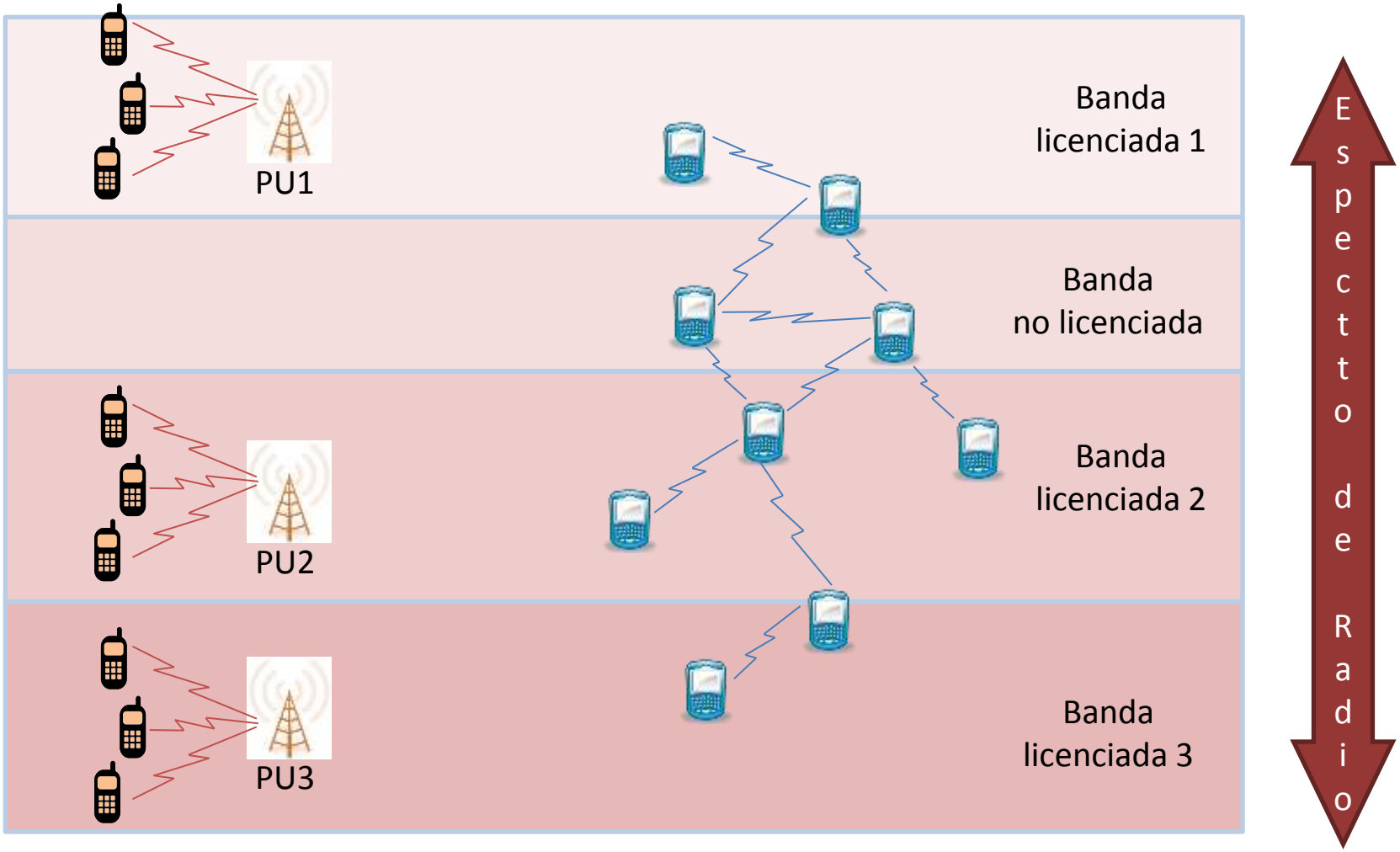
$$\begin{cases} \max \sum_s U_s(x_s, p_s) + \sum_j V_j(w_j) \\ \textit{sujeto a} \\ \boldsymbol{Rx} \le \boldsymbol{c}(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{x} \in C_1(\boldsymbol{p}) \cap C_2(\boldsymbol{F}) \\ \boldsymbol{R} \in \mathcal{R}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{W}, \boldsymbol{F} \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Solución distribuida basada en percepción local, mediante aprendizaje, evolución, adaptación … Optimización Emergente

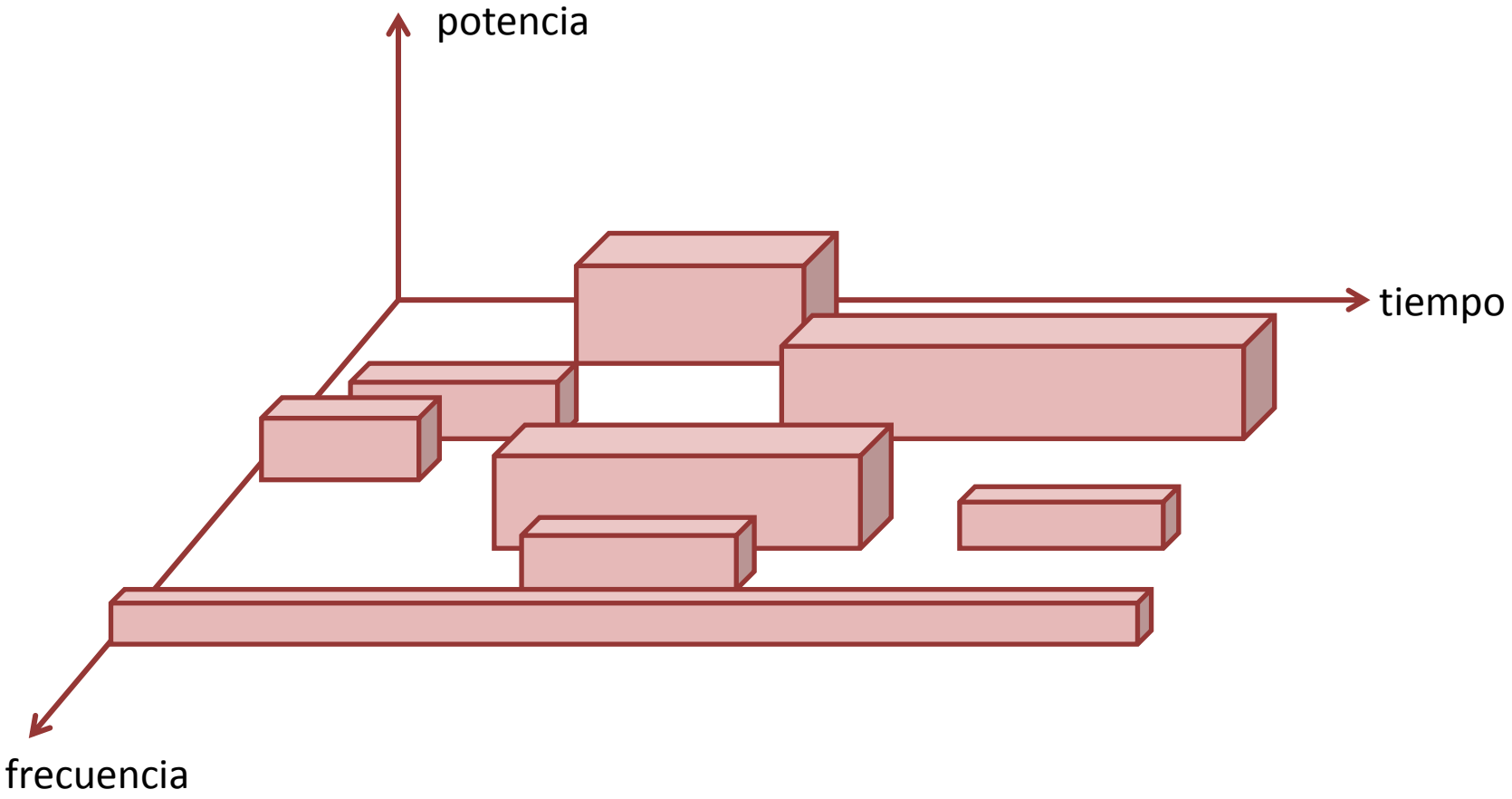
Complejidad en Redes de Comunicaciones



Redes Cognitivas

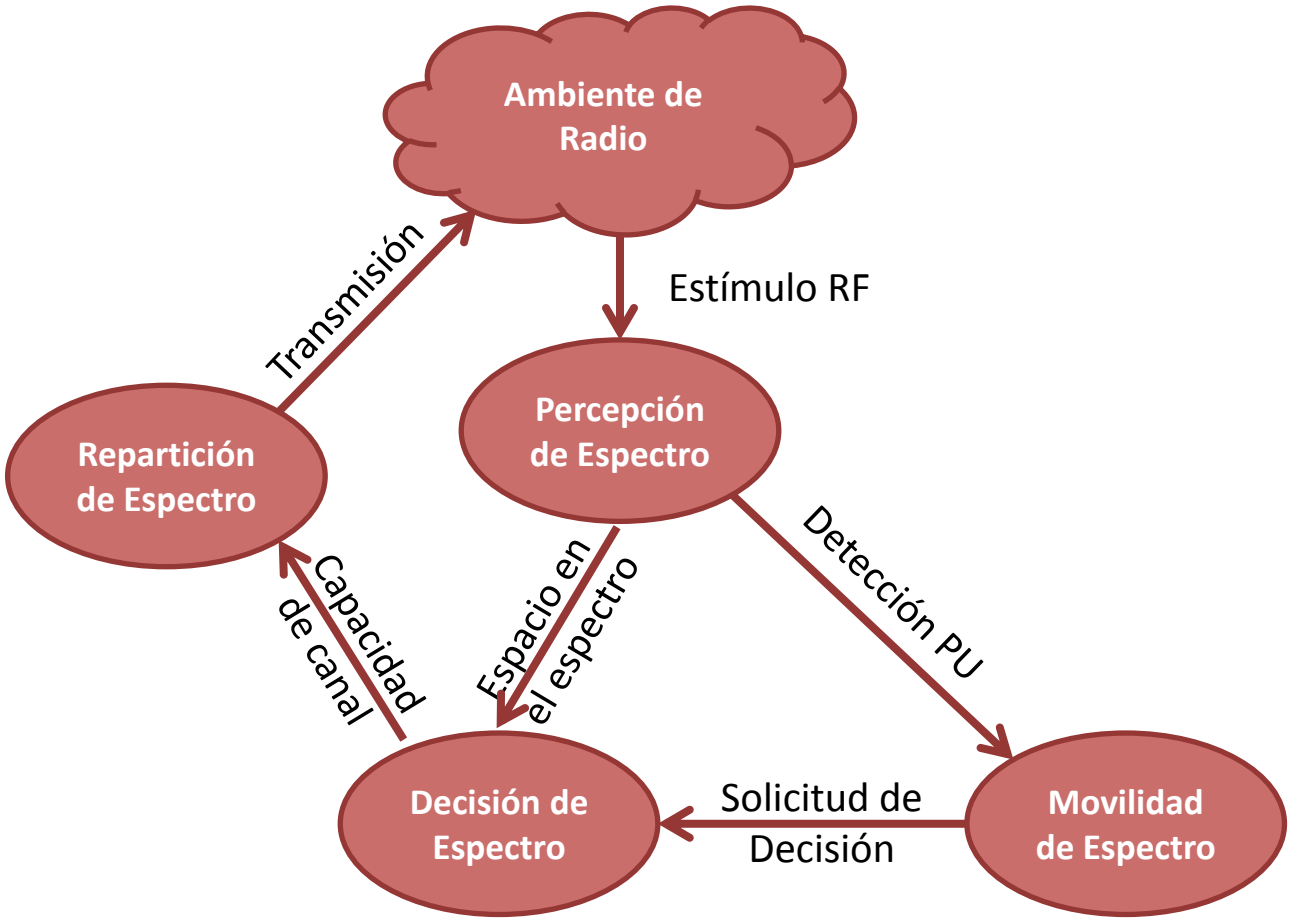


Redes Cognitivas



¿Qué hay de Cognitivo en una Red Cognitiva?

- **Percepción**
- **Aprendizaje**
- **Adaptación**

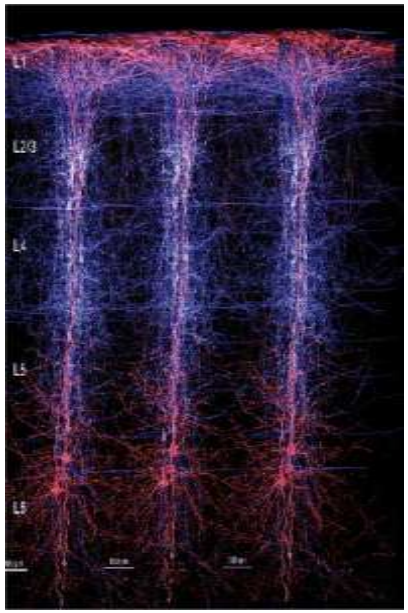


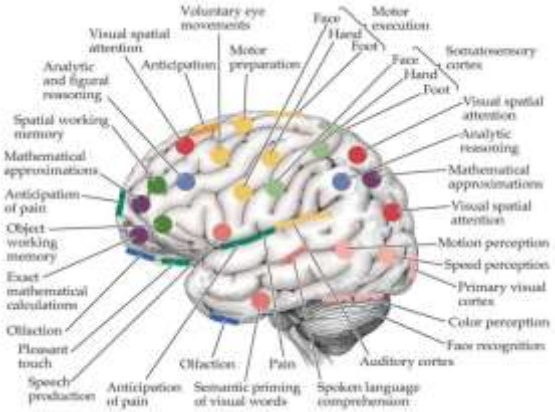
[Akyildiz, Lee, Chowdhury, 2009]

El cerebro humano como paradigma de sistema cognitivo

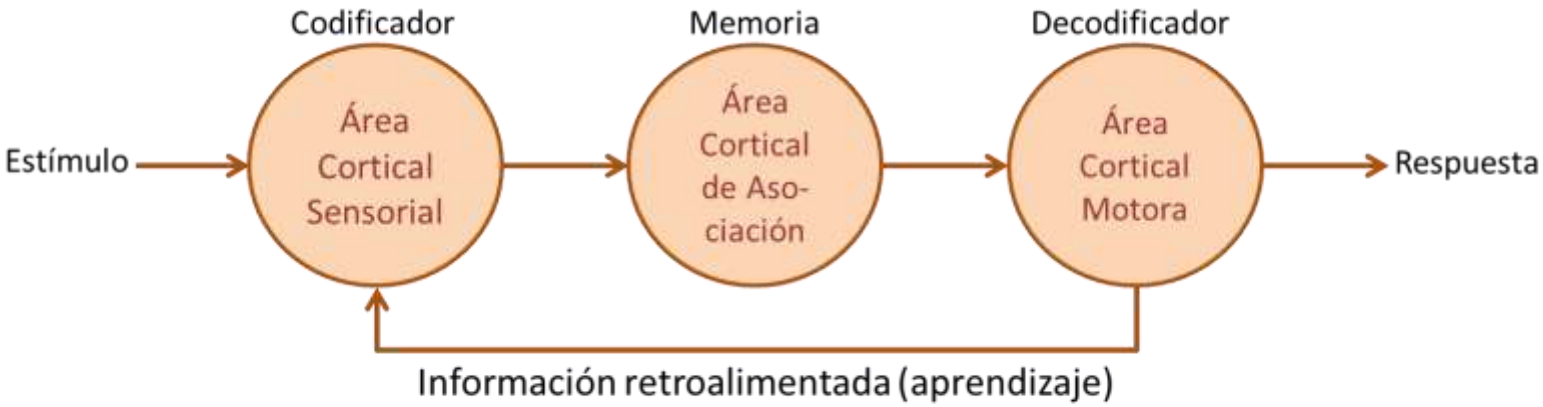
El cerebro humano como paradigma de sistema cognitivo

- Joaquín Fuster
- Un altísimo porcentaje del procesamiento de información en el cerebro se realiza en la corteza cerebral
- La corteza cerebral está organizada en minicolumnas (ordenamientos verticales de entre 80 y 240 neuronas). Existen cerca de 200 millones de minicolumnas.
- Las columnas corticales parecen ser unidades jerárquicas de reconocimiento de patrones. La memoria y el conocimiento se representan en la interacción distribuida, y altamente sobrelapada, de estas minicolumnas corticales.
- Aunque no tienen una estructura uniforme, todas parecen usar un algoritmo básico de procesamiento de información: Diferentes tipos de entradas sensoriales (visual, auditiva, etc.) se codifican de una manera estándar antes de alimentar este algoritmo básico de procesamiento.
- Las cinco funciones cognitivas (atención, percepción, memoria, lenguaje e inteligencia) se basarían en transacciones neuronales al interior de las minicolumnas y entre ellas.
- El paradigma de Fuster se convierte en un marco de referencia para los sistemas dinámicos cognitivos.

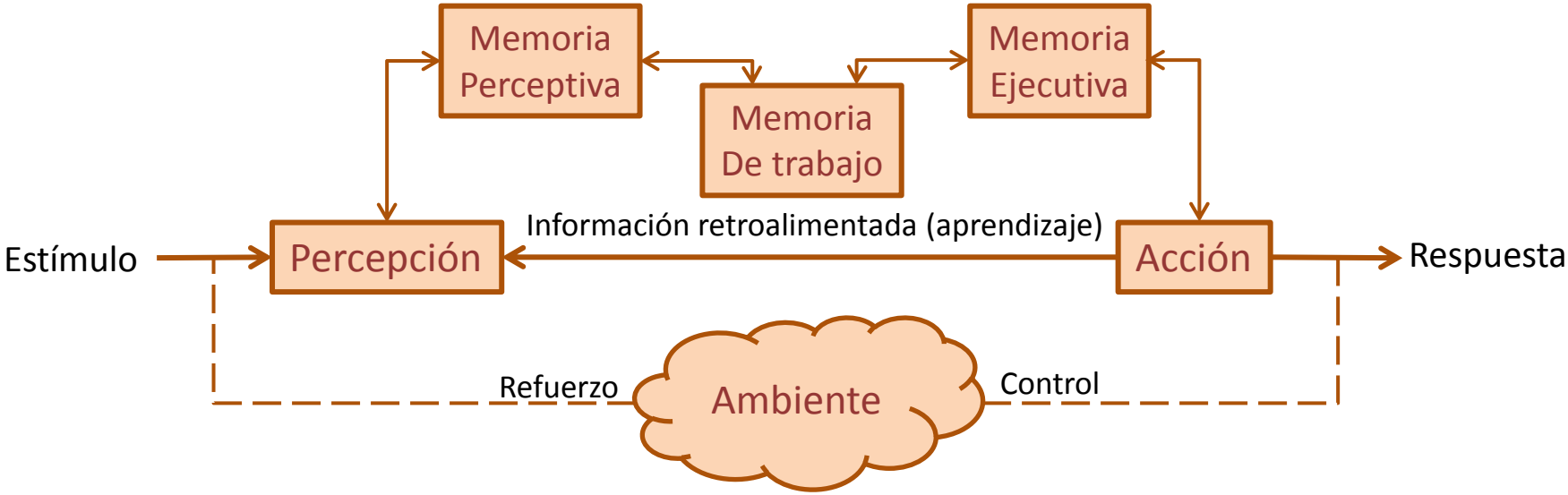




El cerebro humano como paradigma de sistema cognitivo



M.S. Gazzaniga (ed.), "The Cognitive Neurosciences", 4th Edition, MIT Press, 2009



S. Haykin, "Cognitive Dynamic Systems", Cambridge University Press, 2012

Sistema Dinámico Cognitivo

Un Sistema Dinámico Cognitivo es

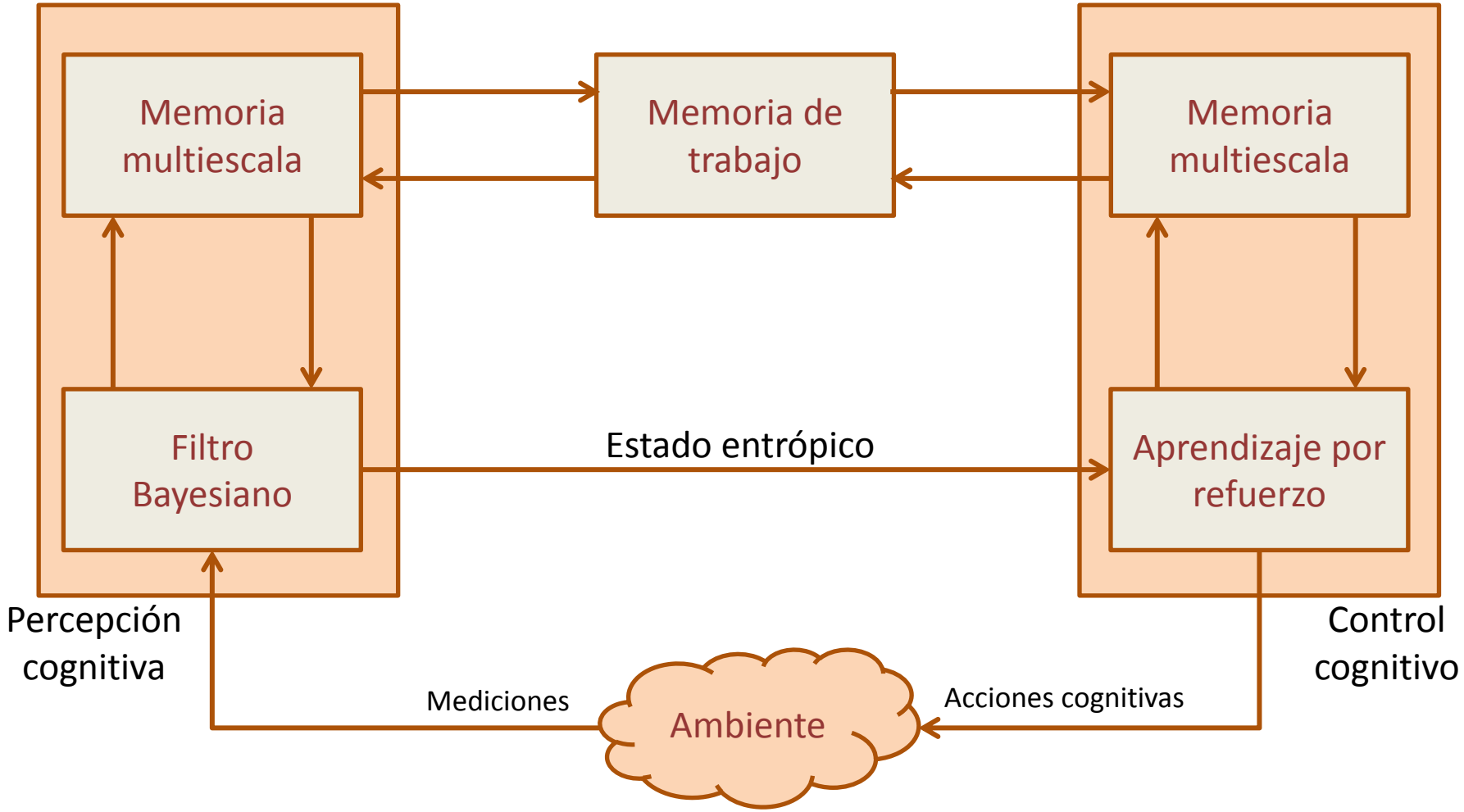
- Un **Sistema Complejo**
- Capaz de desarrollar un **comportamiento emergente**
- Al **procesar información** en el trancurso del tiempo
- Mediante las siguientes funciones
  - **Percepción** del ambiente
  - **Aprendizaje** del ambiente
  - **Adaptación** a sus variaciones estadísticas
  - Construcción de un **modelo predictivo** sobre un conjunto prescrito de aspectos de interés del ambiente
  - Desarrollo de **reglas de comportamiento** que le permitan actuar sobre el ambiente
- Realizadas en **tiempo real**
- Con el propósito de llevar a cabo algunas **tareas prescritas**
- De manera **efectiva, eficiente y confiable**
- A pesar de las **incertidumbres en el ambiente**.

Disciplinas fundamentales para el diseño de Sistemas Dinámicos Cognitivos

- Procesamiento estadístico de señales
- Teoría Bayesiana de detección y estimación
- Teoría de la Información
- Teoría de Control
  - Control no-lineal
  - Control óptimo
  - Control estocástico
  - Control robusto
- Programación dinámica
- Teoría del aprendizaje mecánico (*machine learning*) y la inteligencia computacional
- Teoría de autómatas celulares y vida artificial
- Teoría de la computación
  - Computación bio-inspirada
  - Computación biológica
- …

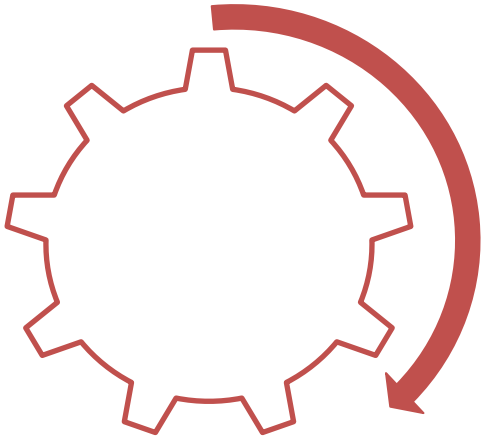
¡Teoría de Sistemas Complejos!

Estructura de un sistemas dinámico cognitivo



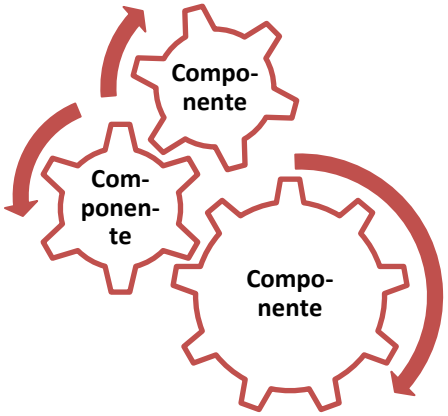
Ingeniería Clásica

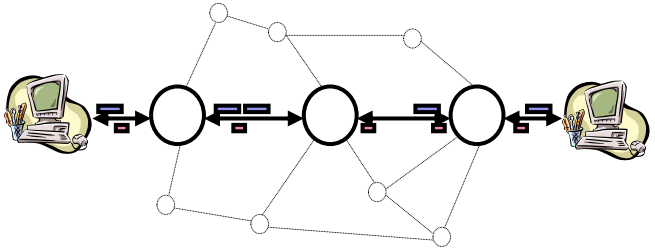
Comportamiento global deseado

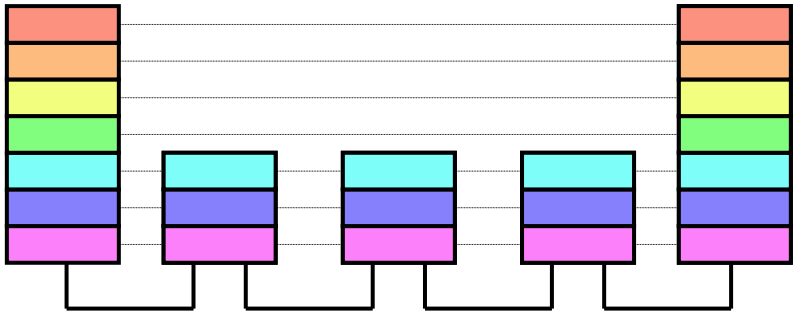


La funcionalidad completa surge de las funciones llevadas a cabo por cada componente

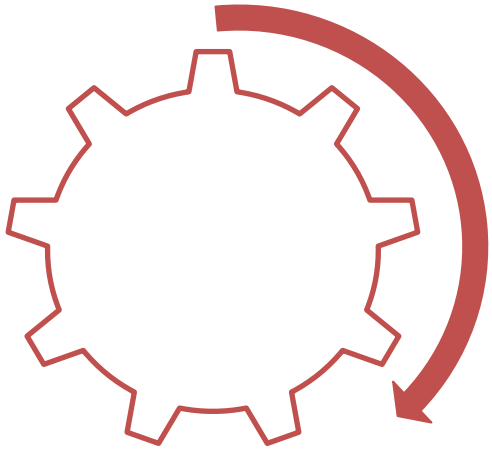
La estructura de sistema refleja su funcionalidad





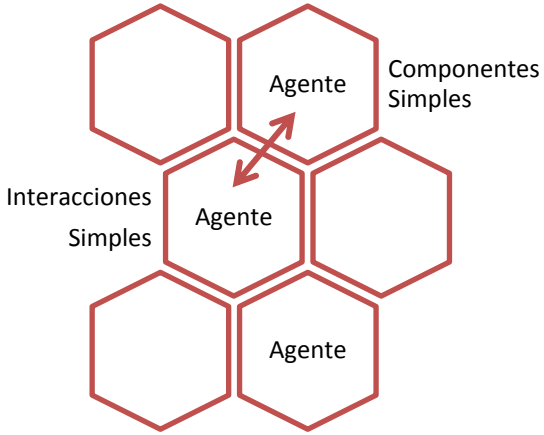


Ingeniería de sistemas complejos –sistemas dinámicos cognitivos –



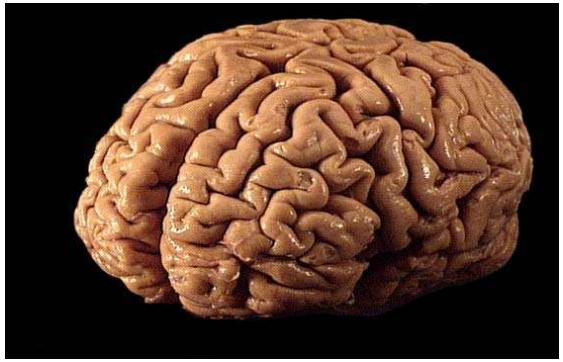
Comportamiento global macroscópico

Auto-organización emergente

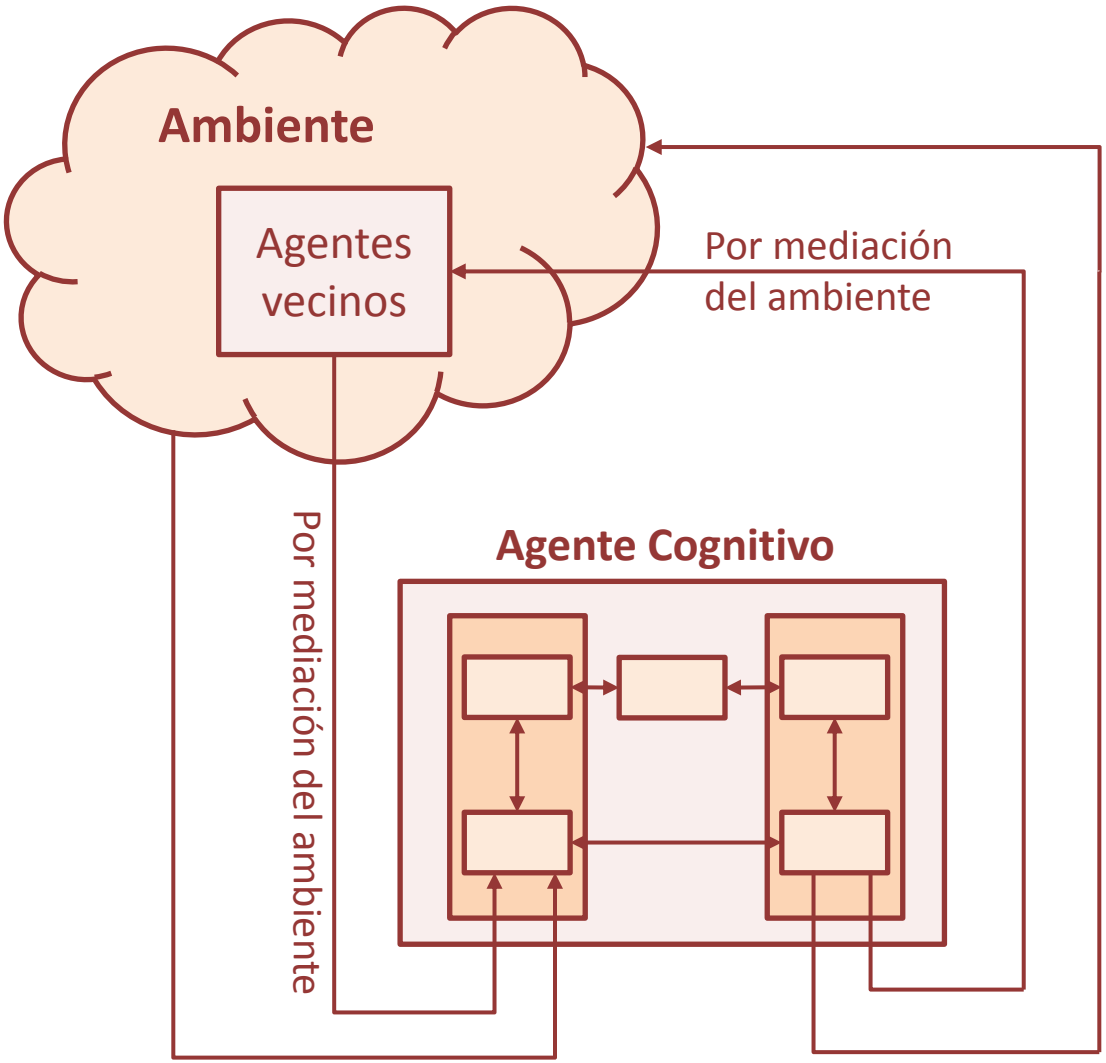


Comportamiento local microscópico

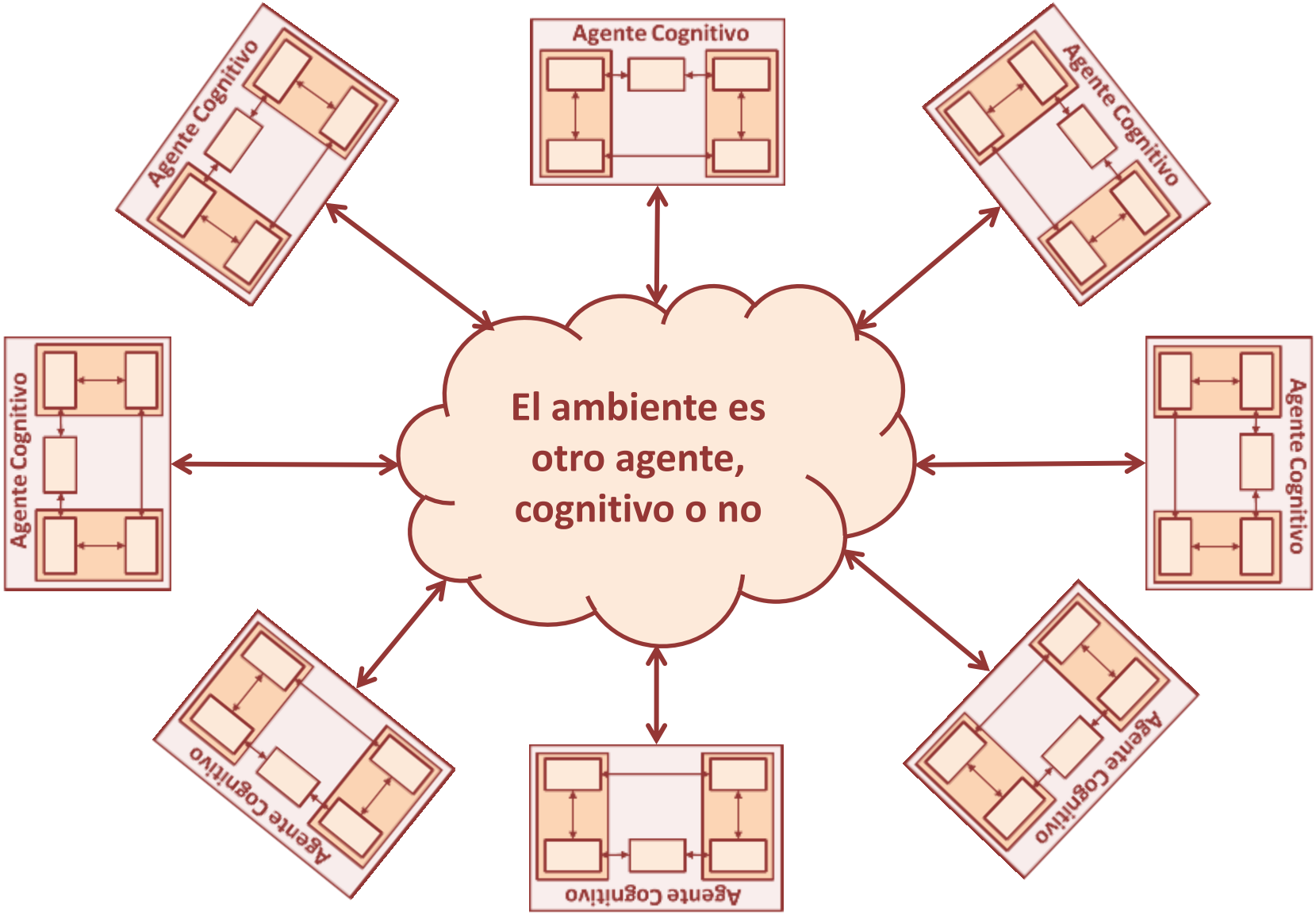
http://www.tech-faq.com/swarm-intelligence.html



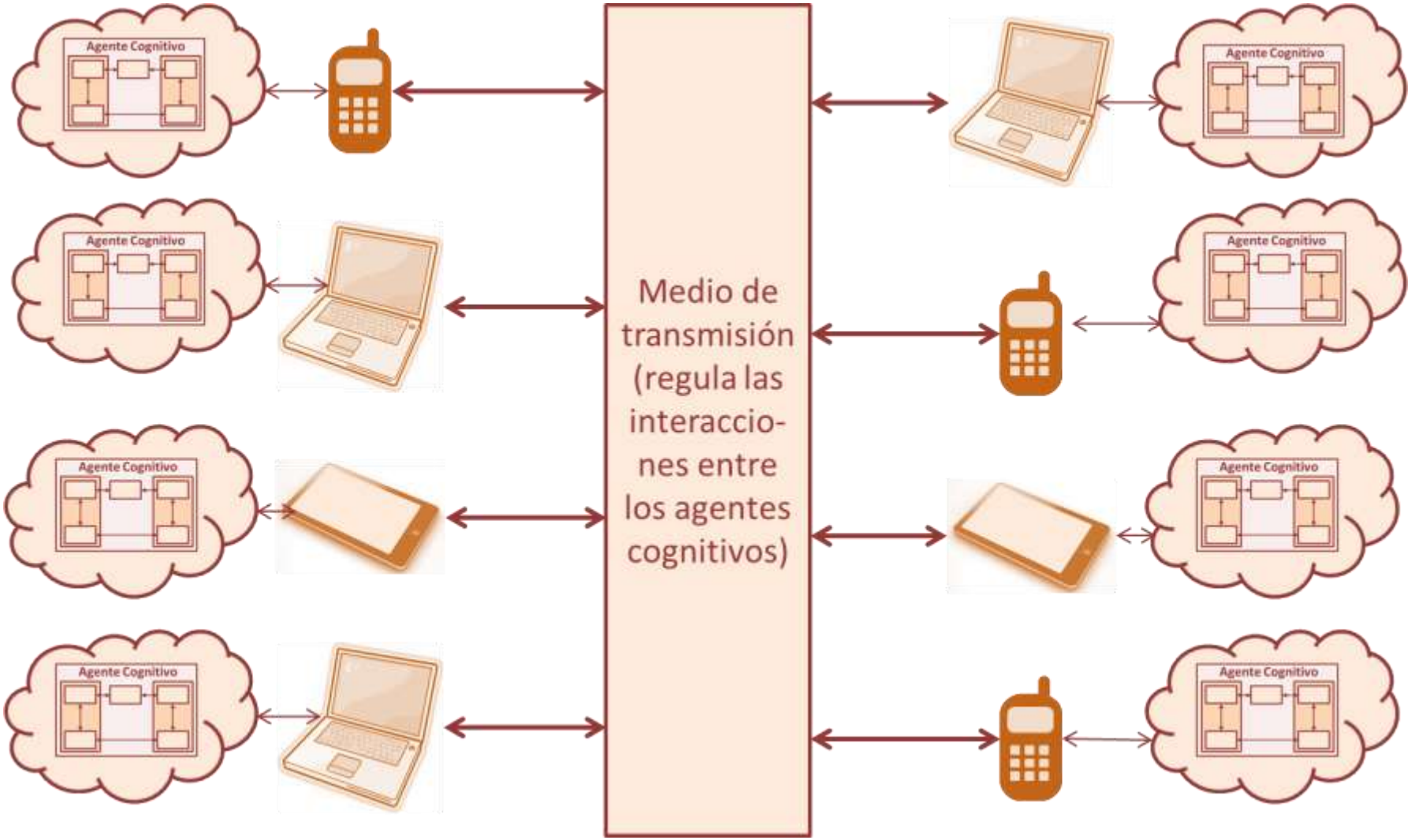
Ingeniería de sistemas complejos –sistemas dinámicos cognitivos –



Ingeniería de sistemas complejos –sistemas dinámicos cognitivos –



Redes inalámbricas ad hoc



Estimación del estado del ambiente

Modelo de Espacio de Estados

$$\vec{x}_k = a(\vec{x}_{k-1}, k) + \vec{\omega}_k$$

$\vec{x}_k$: estado del sistema en el instante k

$\vec{\omega}_k$: Ruido en el instante k del proceso

Modelo de las mediciones

$$\vec{y}_k = b(\vec{x}_{k-1}, k) + \vec{\upsilon}_k$$

$\vec{y}_k$: Observación en el instante k

$\vec{\upsilon}_k$: Ruido en el instante k de la observación

$a(\vec{x}_{k-1}, k)$: Función no lineal que depende de la naturaleza física del sistema bajo estudio

$b(\vec{x}_{k-1}, k)$: Función no lineal que depende de la instrumentación utilizada

El agente cognitivo dispone de una secuencia de observaciones $\vec{Y}_k = \{\vec{y}_i\}_{i=1}^{k}$

$$\hat{\vec{x}}_k = \arg\max_{\vec{x}_k} P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{Y}_k\right]$$

Estimación del estado del ambiente

El agente cognitivo dispone de una secuencia de observaciones $\vec{Y}_k = \{\vec{y}_i\}_{i=1}^{k}$

$$\hat{\vec{x}}_k = \arg\max_{\vec{x}_k} P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{Y}_k\right]$$

Filtro Bayesiasno que minimiza la probabilidad de equivocarse

Típicamente se usa una solución iterativa:

1. Predicción:

$$P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{Y}_{k-1}\right] = \int_{\mathbb{R}^n} P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{x}_{k-1}\right] P\left[\vec{x}_{k-1} \middle| \vec{Y}_{k-1}\right] d\vec{x}_{k-1}$$

Distribución a posteriori anterior

Distribución a priori dado el modelo

Distribución predictiva

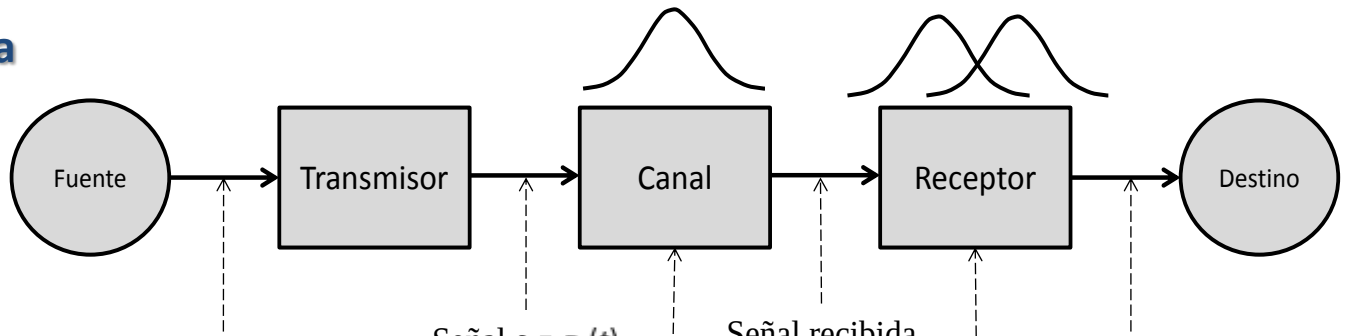
2. Actualización:

$$P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{Y}_k\right] = \frac{P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{Y}_{k-1}\right] P\left[\vec{y}_k \middle| \vec{x}_k\right]}{\int_{\mathbb{R}^n} P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{Y}_{k-1}\right] P\left[\vec{y}_k \middle| \vec{x}_k\right] d\vec{x}_k}$$

Likelihood (¿verosimilitud?)

Estimación del estado del ambiente

Solución típica



Mensaje $m \in \{0,1\}$

Señal $s_0 = g_0(t)$
$s_1 = g_1(t)$

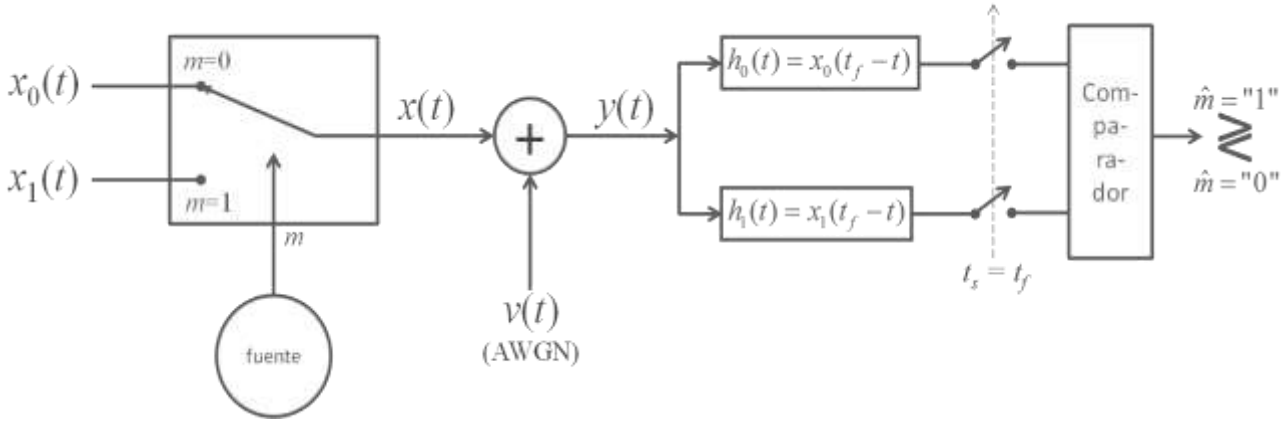
Señal recibida
$r = s_m + n$

Mensaje estimado $\hat{m} \in \{0,1\}$

Ruido aditivo

$$n \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$P\left[m=0|r\right] \underset{\hat{m}=1}{\overset{\hat{m}=0}{\gtrless}} P\left[m=1|r\right]$$



Estimación del estado del ambiente

Solución típica

$$amor_{hoy} = \arg\max_{a_{hoy}} P\left[a_{hoy} \middle| \left\{ actitud_i \right\}_{i=antier}^{hoy} \right]$$

$$P\left[NoMeAma \middle| \left\{ actitud_i \right\}_{i=antier}^{hoy} \right] \underset{\text{“si”}}{\overset{\text{“no”}}{\gtrless}} P\left[SíMeAma \middle| \left\{ actitud_i \right\}_{i=antier}^{hoy} \right]$$

$$\vec{x}_k = a(\vec{x}_{k-1}, k) + \vec{\omega}_k$$
$$\vec{y}_k = b(\vec{x}_{k-1}, k) + \vec{\upsilon}_k$$
$$\hat{\vec{x}}_k = \arg\max_{\vec{x}_k} P\left[\vec{x}_k \middle| \vec{Y}_k \right]$$

En general así nos comportamos los seres humanos, con modelos racionales o no (típicamente, no)

Estimación del estado del ambiente

$$\left.\begin{aligned}\vec{x}_k &= a(\vec{x}_{k-1},k)+\vec{\omega}_k\\ \vec{y}_k &= b(\vec{x}_{k-1},k)+\vec{\upsilon}_k\end{aligned}\right\}\quad \hat{\vec{x}}_k = \arg\max_{\vec{x}_k} P\left[\vec{x}_k \,\middle|\, \vec{Y}_k\right]$$

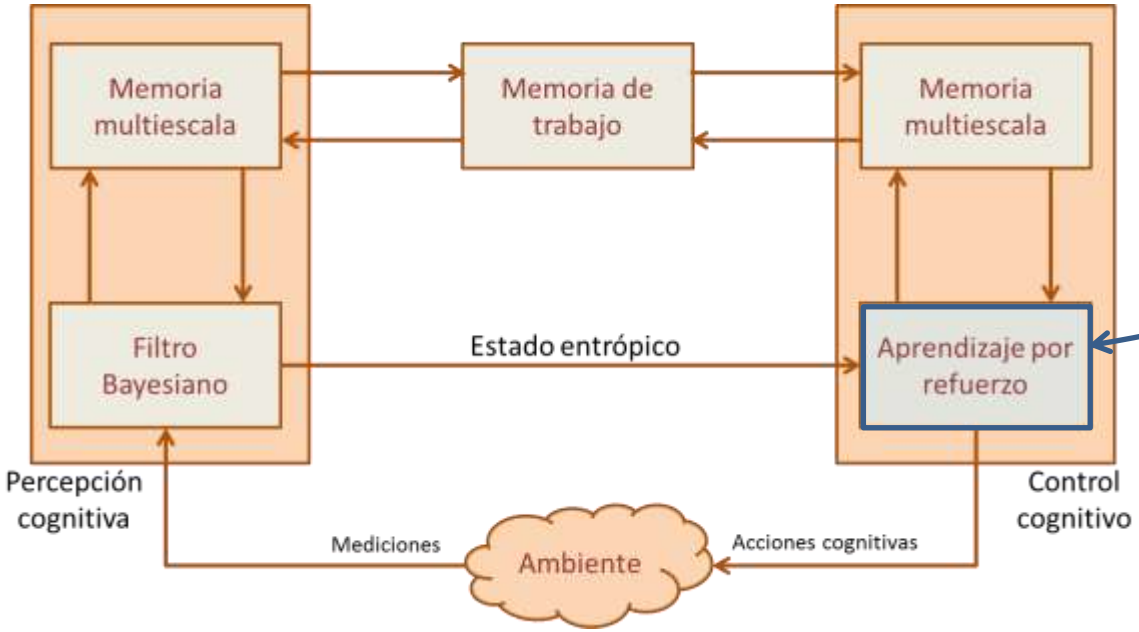
a y b lineales
ω y υ Gaussianos } Filtro Kalman

Otro caso } Filtro Kalman no-lineal
Redes neuronales
Métodos basados en Kernel
Modelos gráficos probabilísticos
Expectation-Maximization
Etc.

Acción sobre el ambiente

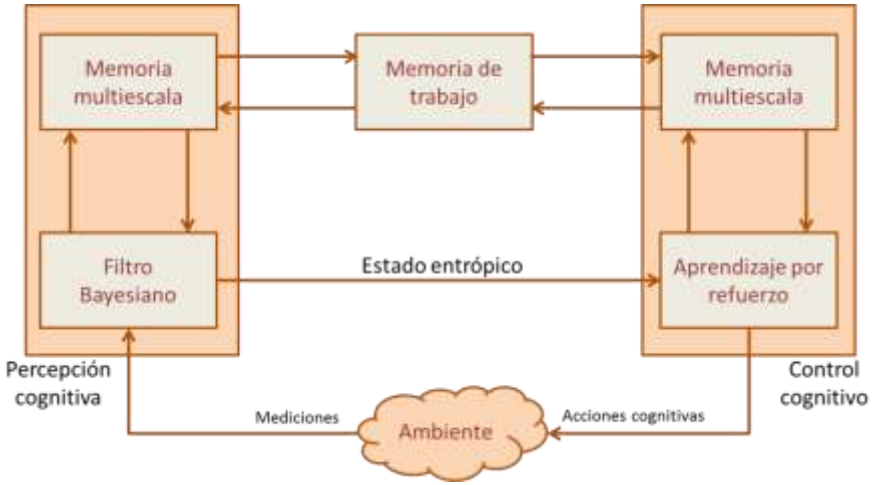
Si el filtro bayesiano es el fundamento teórico para la percepción
La programación dinámica es el fundamento teórico para la acción

Necesidad de aprender a tomar decisiones mejorando el desempeño a largo plazo, aún a costa de sacrificar el desempeño a corto plazo



Acción sobre el ambiente

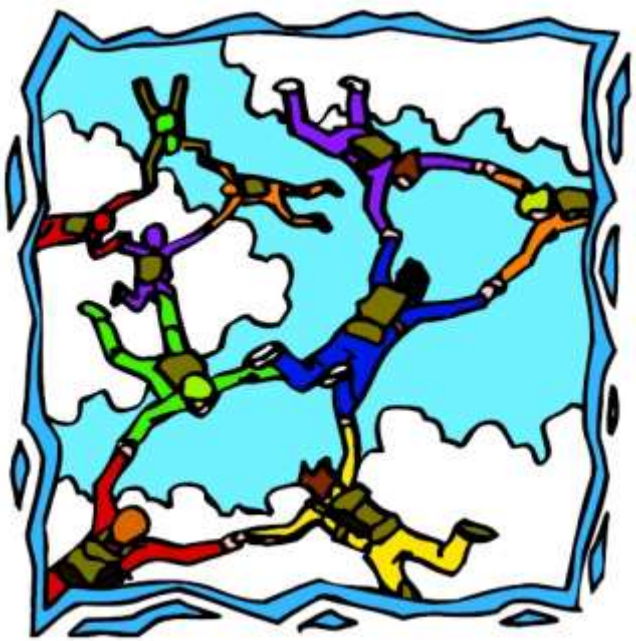
$$\vec{x}_k = a(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_k, k) + \vec{\omega}_k$$
$$\vec{y}_k = b(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_k, k) + \vec{\upsilon}_k$$



Control óptimo

1. Programación dinámica, Ecuaciones de Bellman, Ruta más corta, Procesos de decisión de Markov
2. Ecuaciones Hamilton-Jacobi-Bellman
3. Principio Máximo de Pontryagins, métodos de gradiente descendiente
4. Relaciones con la mecánica clásica (mínima energía)
5. Regulador lineal-cuadrático, Ecuaciones de Riccati
6. Dualidad
7. Teoría de Juegos

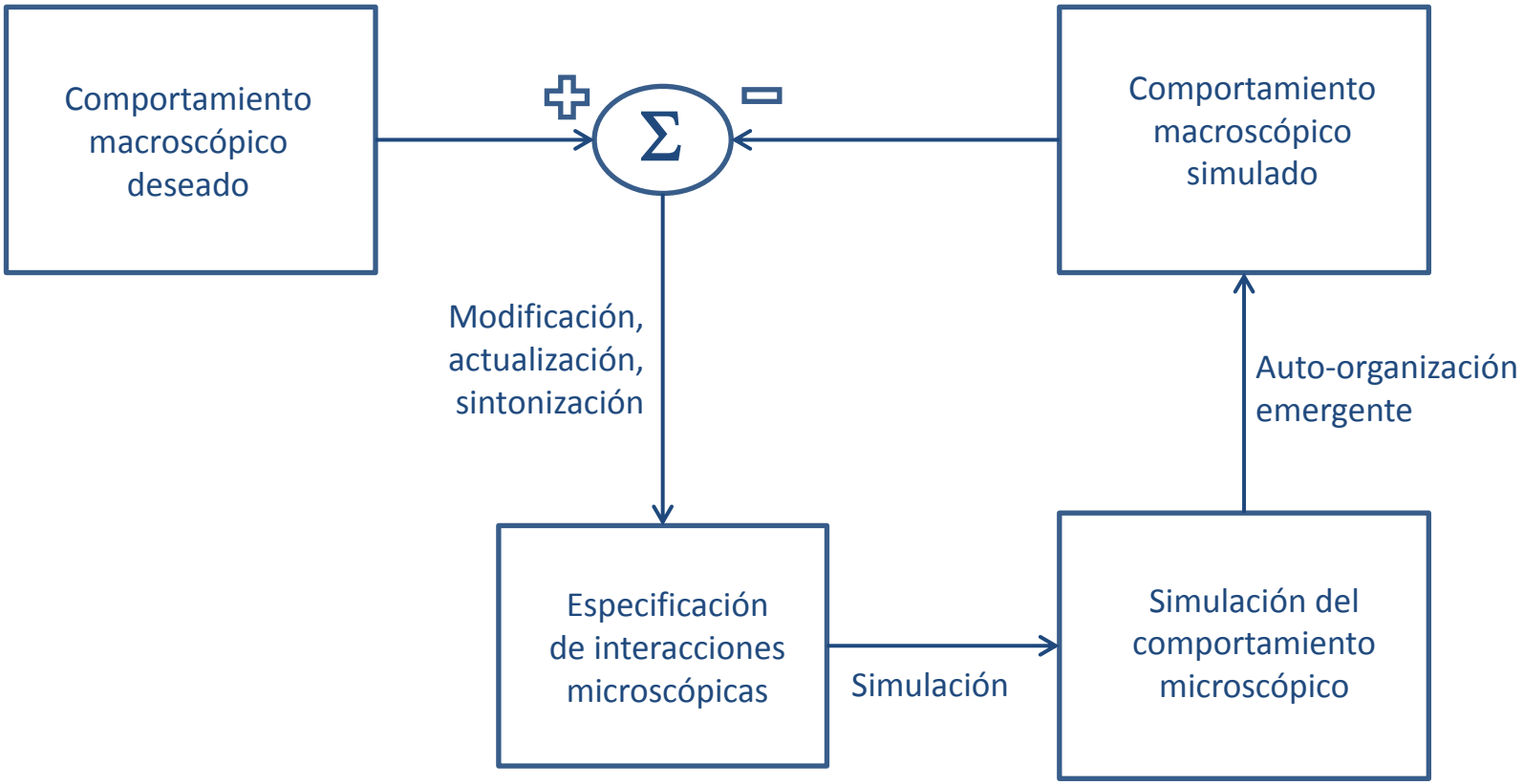
OK. Diseñado el agente cognitivo
¿Y el sistema entero?



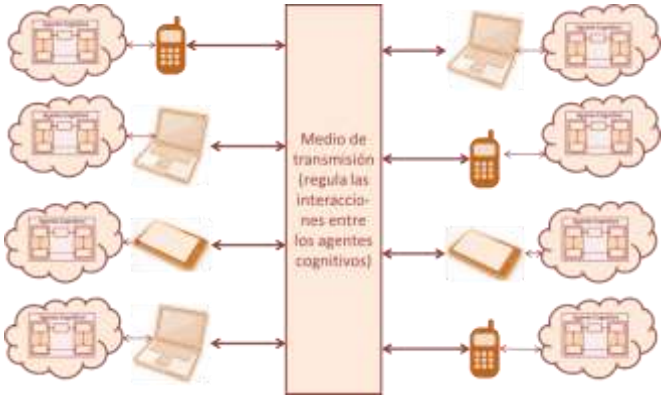
Serie de Complejidad de Springer-Verlag (www.springer.com/complexity)

- "Los sistemas complejos están compuestos por muchos agentes que interactúan entre ellos, con la capacidad de generar comportamientos colectivos macroscópicos que se manifiestan en la formación espontánea de estructuras temporales, espaciales o funcionales. Modelos de tales sistemas se pueden aplicar exitosamente en diversas situaciones de la realidad como el clima, la emisión láser coherente, sistemas de reacción-difusión químicas, redes celulares biológicas, dinámicas del mercado de valores, redes de comunicaciones, movimientos tectónicos, tráfico urbano e interurbano, el cerebro humano, formación de opinión en sistemas sociales, etc. En todas ellas se puede distinguir auto-organización, dinámicas no-lineales, sinergismo, emergencia…"

OK. Diseñado el agente cognitivo
¿Y el sistema entero?

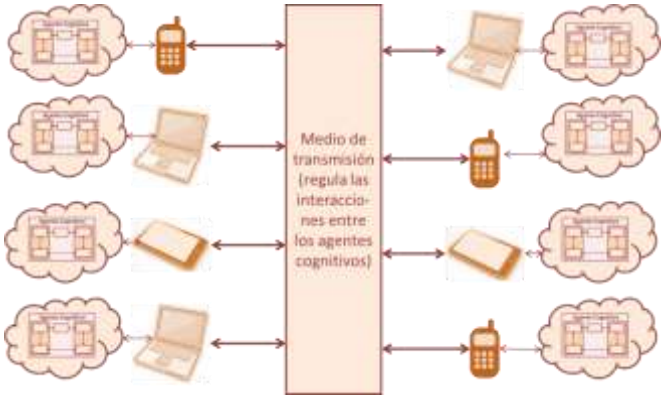


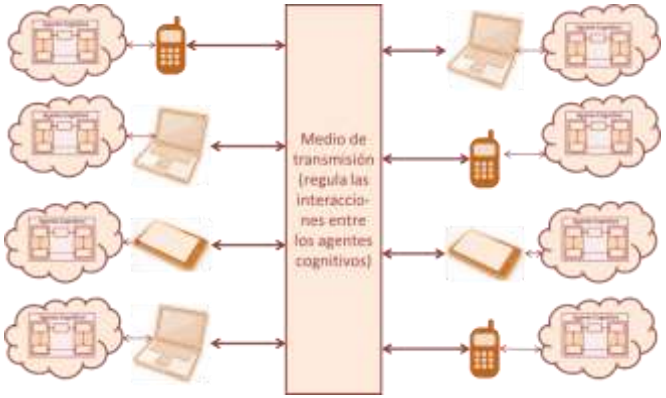
Experiencia personal con redes inalámbricas ad hoc



Mejia, Peña, Alzate, Muñoz, Esparza "Distributed Emergent Cooperation through Adaptive Evolution in Mobile Ad Hoc Networks", Elsevier Journal on Ad Hoc Networks, 2012

Puerta, Aguirre, Alzate "Effects of Topology and Mobility in Bio-Inspired Synchronization of Mobile Ad Hoc Networks", IEEE Latincom, 2010





Alzate, Mejia, Peña, Labrador "Achievable Transmission Rate in an IEEE 802.11 MANET" Revista de Ingeniería Universidad de Antioquia, 2012

9. Conclusiones

Conclusiones

1. Evolución del modelado matemático en ingeniería
2. Proceso de modelado matemático en ingeniería
3. De lo lineal a lo no-lineal
4. De lo Euclidiano a lo fractal
5. De lo Gaussiano a lo no-Gaussiano
6. De lo simple a lo complejo
7. Ingeniería clásica bio-inspirada
8. Ingeniería de sistemas complejos

Gracias!