



Nos fascinan los roscones de \$500 que venden en la panadería de Doña Tránsito, pero estamos preocupados por los huecos de estos roscones, pues notamos una grave falta de homogeneidad en ellos: Por un lado, hay huecos redondos, ovalados y deformes; por otro lado, hay huecos pequeños, medianos y grandes.

1. Escogemos un roscón al azar, observamos su hueco y lo clasificamos por su forma y su tamaño. Queremos construir un modelo probabilístico de este experimento.
 - a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
 - b. ¿Cuál es el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si sólo nos interesan los subconjuntos unitarios del espacio muestral?
 - c. ¿Cuál es el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si sólo nos interesa la forma del hueco?
 - d. ¿Cuál es el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si sólo nos interesa que el hueco sea redondo y que no sea grande, o que el hueco sea pequeño y que no sea deforme?
2. Escogemos tres roscones al azar, observamos sus huecos y los clasificamos por su forma y su tamaño. Si queremos construir un modelo probabilístico de este experimento.
 - a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
 - b. ¿Cuál es el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si sólo nos interesa el número de huecos cada tipo?
 - c. ¿Cuál es el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si sólo nos interesan las formas de los huecos?
 - d. ¿Cuál es el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si sólo nos interesa que los huecos sean redondos y que no sean grandes, o que los huecos sean pequeños y que no sean deformes?
3. Medimos el área y el perímetro del hueco de un roscón escogido al azar.
 - a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
 - b. ¿Podríamos estar interesados en todos los subconjuntos unitarios del experimento?
 - c. ¿Cuántos eventos hay en el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si sólo nos interesan los siguientes tres eventos? (1) que el perímetro del hueco esté en el intervalo $(12, 18]$ cm, (2) que el área del hueco esté en el intervalo $(12, 18]$ cm², (3) que la relación perímetro²/área esté en el intervalo $(12, 18]$. Dibuje en el plano cartesiano (perímetro versus área) esos conjuntos.
 - d. ¿Cuál es el mínimo campo-sigma que deberíamos usar si nos interesaran todas las regiones de la forma $(\text{perímetro} \leq p) \cap (\text{área} \leq a)$ para todos $(p, a) \in \mathbb{R}^2$?



4. Demuestre que si $\{A_i, i \in I\}$ es un conjunto de eventos subindicados por algún conjunto I , entonces

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad \text{y} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \quad (\text{leyes de DeMorgan})$$
5. Demuestre que, para dos secuencias arbitrarias de conjuntos $\{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ y $\{B_j, j \in \mathbb{N}\}$,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \Delta \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \Delta B_k),$$
 donde $C \Delta D$ es la diferencia simétrica entre C y D , esto es, el conjunto de elementos que pertenecen a C ó a D pero no a ambos.
6. Demuestre que el campo-sigma de Borel de los reales, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, que es el mínimo campo-sigma que contiene a los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ para todos los $x \in \mathbb{R}$, es idéntico al mínimo campo sigma que contiene a los intervalos abiertos.
7. Sea $\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ es contable o } A^c \text{ es contable}\}$. ¿Es \mathcal{B} un campo- σ ?