MANTENIMIENTO DE INVENTARIOS
OPTIMIZACIÓN POR DIFERENCIACIÓN

Autor: Germán Méndez Giraldo
Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Como consultor administrativo se le esta cuestionando para que recomiende sobre políticas de producción e inventarios. ¿Por que lado debe comenzar? Un problema es el trade-off entre costos de los espacios de almacenamiento y los costos de puesta a punto de la producción en el caso de corridas de las líneas de producción frecuentes y cortas. Al decidir que tanto inventario de productos terminados se debe mantener, una empresa debe considerar aspectos internos tales como los costos de mantenimiento de inventarios, gastos de preparación de una corrida de producción, descuentos por compras globales en los materiales y las pérdidas de las órdenes como resultado de un inventario escaso. Dado que la naturaleza aleatoria de los tiempos y los tamaños de los pedidos, hace que sea natural considerar estos como modelos probabilísticas. Usamos modelos determinísticos dado que los resultados son substancialmente los mismos siempre que la empresa reciba muchos pedidos. Para una más completa discusión de los problemas de inventario, ver R. L. Ackoff y M. W. Sasieni (1968), de los cuales este modelo es adaptado. Ver también el libro de G. Hadley y T. M. Whitin (1963).

Qué se debe optimizar? Se minimiza el costo por unidad de tiempo para la empresa, bajo las restricciones que todos los pedidos deben ser cumplidos. La única variable que el productor puede controlar es el tiempo entre corridas de producción. Para comenzar, se asume que sólo los costos que asume el productor y que se ajustan a los cambios del programa de producción son los costos de preparación de la producción y los costos de almacenamiento para los productos finales.

Se asume que cuando la línea de producción está activa, opera a una tasa k constante por unidad de tiempo. El costo de preparar la línea al inicio de la corrida es c. También hay pérdidas de utilidades por no utilizar a tiempo las líneas de producción, varios costos fijos y algunos de materiales y salarios que se requiere. Cuando la línea de producción no está ocupada en un trabajo particular se asume que esta haciendo algo productivo. Se asume que los costos de almacenamiento de productos finales es s por unidad por unidad de tiempo, independientemente de la cantidad almacenada. (Es razonable si el espacio en el almacén pueda ser usado por otros productos). Finalmente, se aproxima los arribos discretos de pedidos por una tasa constante r por unidad de tiempo.

Sea T la longitud de tiempo entre una corrida de producción y la siguiente. Si t es el tiempo que gasta una corrida de producción, $kt = rT$; esto es, que los productos se producen de igual forma que se venden durante un ciclo. Se desprende que $t = {rT}/{k}$. Si se grafica el inventario versus el tiempo desde 0 a T, se observa como crece de 0 a t con pendiente k-r y cae de t a T con pendiente r. El área bajo la curva (triángulo) es: $A = {(k-r)tT}/{2}$ y está medida en unidades de ítems por tiempo. Se puede demostrar que el costo de almacenamiento será sA.

Entonces se quiere minimizar:

$$\frac{c}{T^2} = \frac{s(k-r)r}{2k}$$

$$C = \frac{c + sA}{T} = \frac{c + s(k-r)tT/2}{T} = \frac{c}{T} + \frac{s(k-r)(rT/k)}{2} \qquad (1)$$

Derivando con respecto a T e igualando a cero, se obtiene que:

$$\frac{c}{T^2} = \frac{s(k-r)r}{2k}$$

De (1) se obtiene que C llegara a infinito si T decrece hasta cero o se incrementa a infinito, de ahí que el valor extremo de C es un mínimo. Entonces el valor optimo de T y t es:

$$T = \sqrt{\frac{2ck}{rs(k-r)}}\ , \qquad t = \sqrt{\frac{2cr}{ks(k-r)}}$$

No es obvio a simple vista que los tiempos óptimos varíen con respecto a la raíz cuadrada de los costos de preparación e inversamente a la raíz cuadrada de los costos de almacenamiento.

Ahora se considerara los costos de almacenamiento para las materias primas, Se asume que solo hay una materia prima y que la cantidad exacta que se necesita, se entrega justo al inicio de la corrida de producción. Se supone que *s*' es el costo de almacenamiento por unidad de tiempo de una cantidad de materia prima suficiente para cubrir la producción de una unidad de producto terminado. El costo por unidad de tiempo es:

$$C = \frac{c + s(k-r)tT/2 + s'(rT)t/2}{T} = \frac{c}{T} + \frac{[s(k-r) + s'r](rT/k)}{2} \qquad (2)$$

Derivando e igualando a cero, se obtiene que:

$$\frac{c}{T^2} = \frac{[s(k-r) + s'r]r}{2k}$$

Entonces se obtiene el valor óptimo de T, t y C así:

$$T = \sqrt{\frac{2ck}{r\left[s(k-r)+s'r\right]}}\ , \qquad t = \sqrt{\frac{2cr}{k\left[s(k-r)\right]s'r}}\ , \quad C = \sqrt{\frac{2cr\left[s(k-r)+s'r\right]}{k}} \qquad (3)$$

El modelo es solo una aproximación y probablemente no se puedan determinar las variables independientes con mucha precisión, es importante tener alguna idea de los costos que se pueden originar por tener estos errores. Si T se reemplaza por αT, es fácil mostrar que el valor de C sería $(\alpha + \alpha^{-1})/2$ veces el valor óptimo.

Por ejemplo, un 50% de subestimación de T (por ejemplo α=0.5) hace que se incremente C en un 25% mientras que un 50% de sobreestimación incrementa C en tan solo 8%. Se observan dos conclusiones de esto. La primera es que un error al elegir T no cambia grandemente los costos a menos que el valor elegido de T este muy alejado del valor óptimo. Segunda, es mejor un error por arriba que por lo bajo.

Dado que los costos de almacenamiento son más difíciles de determinar y dado que T varia inversamente frente a los costos de almacenamiento [esto se deduce de (3) y el hecho que $k > r$], esto sugiere que subestimar los costos de almacenamiento son mucho mejor que sobreestimarlos. Esto que se ha hecho es lo que denomina un análisis de sensibilidad. La caracterización modelos como robustos o frágiles es una forma incipiente del análisis de sensibilidad.

Se pueden usar los resultados de (3) para determinar que tanto espacio de bodega se requiere en una compañía. Si las diferencias en las cantidades de espacio que se dispone en un momento dado, se podría liberar espacio o adquirir más. Esto podría ser cierto en el largo plazo, pero que se debe hacer en el corto plazo, esto es que hacer justo antes de poder cambiar los espacios de bodega en la compañía?

Si los costos de almacenamiento son fijos en el corto plazo, s y s' deben ser cero. Entonces cómo se puede determinar el mejor plan de corrida? Resaltando lo que se dijo anteriormente, si se conoce los costos de almacenamiento, se podrían usar para determinar que tanto espacio se necesita. Esto sugiere que si se tienen costos falseados para determinar que tanto espacio de almacenamiento se requiere, pues daría una respuesta equivocada.

Lo más fácil seria reemplazar s y s' por $s\sigma$ y $s'\sigma$, donde s es un factor que se tiene para balancear los costos aproximados de s y s' por costos de largas corridas.

La situación de los tamaños de las órdenes de materias primas es más complicada. Suponga un tamaño de orden de embarque con suficiente cantidad de materias primas para producir N productos finales. Por simplicidad se asume que T es tal que p = N/rT y que es un valor entero; esa es la cantidad de materia prima ordenada para la producción de p ciclos. (Se puede desear que p no fuera un valor entero). La cantidad de materia prima a mano se muestra en la figura 1, en un horizonte de p ciclos. El área bajo la curva

es $N = \frac{(pT - T + t)}{2}$. Combinando esto con $N = prT$ y $T - t = \frac{(k-r)T}{k}$, se tiene que el costo de almacenamiento por unidad de tiempo es:

$$\frac{s'[N-(T-t)r]}{2} = s'\left(\frac{N}{2} - \frac{(k-r)Tr}{2k}\right)$$

Combinando esto con (1) se obtiene el costo total por unidad de tiempo:

$$C = \frac{c}{T} + \frac{rT(k-r)(s-s')}{2k} + \frac{s'N}{2}$$

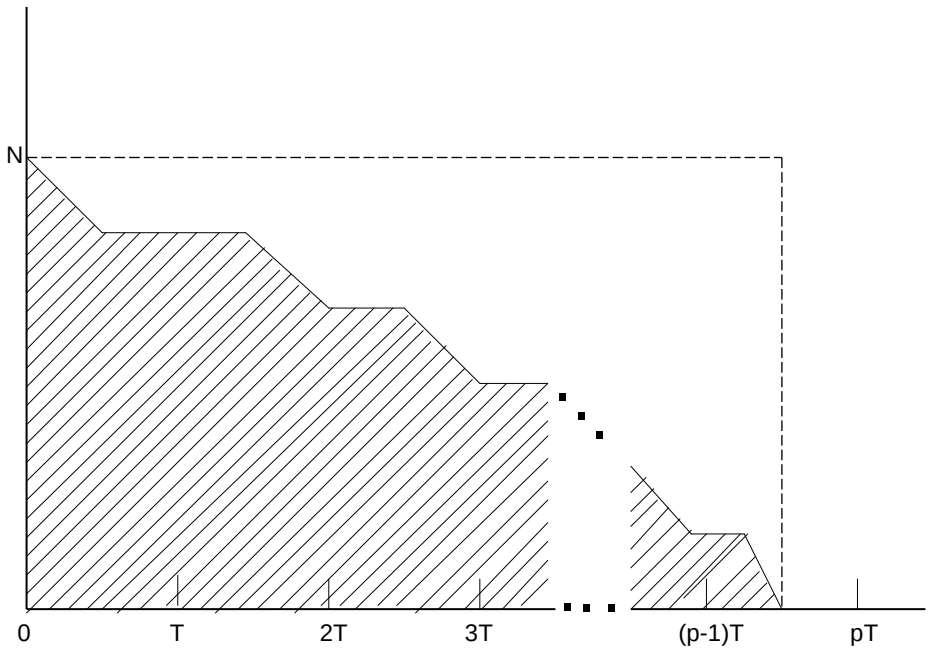

Figura 1. Materia prima a mano durante p ciclos de producción

Si s ≤ s´, la mejor estrategia es tener un T tan grande como se pueda, esto hace que p=1. Cuando s > s´, se obtiene los siguientes valores óptimos

$$T = \sqrt{\frac{2ck}{r(k-r)(s-s')}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2cr}{k(k-r)(s-s')}}$$

$$C = \sqrt{\frac{2cr(k-r)(s-s')}{k}} + \frac{s'N}{2} \qquad (4)$$

Esto se puede comparar con el valor óptimo sin tamaños dados por (3) después de una corrección de términos se sustrae del costo optimo con tamaños debido a los bajos costos de las materias primas. Si el costo de las materias primas es *b* más bajo que el del producto *final* cuando se producen en órdenes dentro de esos tamaños, el término de la corrección podría ser *rb*. Se puede notar que el tamaño de las órdenes permite grandes corridas de producción, la razón de veces que se dan es

$$\sqrt{1 + \frac{s'k}{(k-r)(s-s')}}$$

Hasta ahora no se ha discutido la posibilidad de que se permita la escasez por faltantes de productos terminados. Esto hace que se eliminen algunos costos de inventarios a expensas de perder algunos clientes, o el buen nombre. Varias aproximaciones se han sugerido. A continuación se adapta una dada por B. L. Schwartz (1966). La mayoría de las empresas pueden esperar ganar y perder clientes a una tasa regular en el largo plazo. En estado de equilibrio la tasa de perdidas y la tasa de ganancias debe ser igual. Que sucede con estas tasas si la fracción *f* de ordenes demoradas se incrementa?

Se asume que los nuevos clientes se van ganando a la misma tasa. La probabilidad podría no ser cierta si *f* cambia marcadamente, mientras que la mala reputación se va difundiendo, sin embargo, parece razonable si *f* cambia solo suavemente. El modelo más simple que incorpora estas ideas es el siguiente.

$$a(1-f)N + bfN = \text{costan}te$$

Donde la constante es la tasa a la cual se ganan los nuevos clientes., N es el numero de clientes, a es la probabilidad de perder un cliente cuya orden se cumple a tiempo, y b es la Probabilidad de perder un cliente cuya orden se demora. Dado que r es proporcional a N, se sigue que r(f) es proporcional a $1 \big/ [a(1-f)+bf]$ y entonces

$$r(f) = \frac{r_0}{1 + f(b-a) \big/ a}$$

Para cualquier constante ro. El costo de almacenamiento debe ser reducido para reflejar el hecho de un menor espacio de almacenamiento y menos tiempo se requiere, cuando f≠o.

Es fácil demostrar que $s(k-r)t \big/ 2$ se puede reemplazar por $s(k-r)(1-f)^2 t \big/ 2$. Esto tiene el efectote reemplazar s por $s(1-f)^2$ en las formulas obtenidas arriba para el valor óptimo de T, t y C. También estos valores están en función de f. cuando el precio de

venta es p, el beneficio por unidad de tiempo es $pr(f)-C(f)$. El valor óptimo de f puede determinarse maximizando esta función. Siempre en el caso más simple esto es un poco mentiroso. Cuando la línea de producción es demasiado rápida se puede aproximar $(k-r)/k$ por 1, valores que simplifican un poco. Vale la pena intentarlo.